arXiv:2305.02708v3 [math.NA] 7 Aug 2023

拉东变换的平移不变对角框架分解

Simon Göppel

因斯布鲁克大学数学系，Technikerstrasse 13，
6020 因斯布鲁克，奥地利 电子邮箱：
simon.goeppel@uibk.ac.at

Markus Haltmeier

因斯布鲁克大学数学系，Technikerstrasse 13，
6020 因斯布鲁克，奥地利 电子邮箱：
markus.haltmeier@uibk.ac.at

Jürgen Frikel

德国雷根斯堡应用技术大学计算机科学与数学系，
Galgenbergstraße 32，93053 雷根斯堡，德国 电子邮箱：
juergen.frikel@oth-regensburg.de

2023年8月7日

摘要

本文采用平移不变对角框架分解（TI-DFD），探讨计算机断层扫描中病态重建问题的求解挑战。首先，我们回顾一般线性算子的 TI-DFD 概念及相应的基于滤波器的正则化方法。随后，我们介绍 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上拉东变换的 TI-DFD，并利用 TI 小波变换给出一种示例性构造。所呈现的数值结果清楚地展示了我们的方法相较于非平移不变方法的优势。

关键词： 对角框架分解、平移不变性、拉东变换、逆问题、正则化

1 引言

计算机断层扫描（CT）是医学和工业领域广泛应用的一种成像方式，其底层数学模型是拉东变换。对于函数或信号$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，拉东变换记作 $\mathcal{R}f\colon \mathrm{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。众所周知，根据函数 f 的线积分近似值重建该函数，相当于求解如下形式的病态逆问题： $g^\delta = \mathcal{R}f + \eta$ [16]。其中， $\delta > 0$ 是某个噪声水平， η表示数据畸变，且满足 $\|\eta\|_2 \leq \delta$。具体而言，这意味着拉东变换的求逆过程不稳定，数据中的微小扰动可能导致较大的重建误差。

经典的基于滤波器的正则化是一种广为人知的稳定化概念。假设拉东变换在适当的函数空间框架下存在奇异值分解（SVD） $\mathcal{R}f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n \langle f, u_n\rangle v_n$ [4, 12, 13, 18]，则正则化重建可表示为$f_\alpha^\delta = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi_\alpha(\sigma_n) \langle g^\delta, v_n\rangle u_n$，具体形式取决于所谓的正则化滤波器 Φ_α，见 [6,9]。然而，基于 SVD 的滤波存在若干缺点。一般而言，对于任意线性算子，SVD 可能难以进行数值计算，或者在解析上未知。此外，基底元素 u_n, v_n 仅适配于算子本身，而不适配于所关注的底层信号类别。

为克服这些局限，近年来，人们对所谓的对角框架分解（DFD）进行了深入研究，将其作为 SVD 的一种推广。具体而言，DFD 更为适用，因为它不仅可以根据底层应用和涉及的信号进行调整，通常还能够提供高效的实现。拉东变换的一种典型 DFD 是 [5] 中提出的小波-模糊小波分解（WVD）。例如， [1, 3] 中可以找到涉及曲波和剪切波的相关构造。 [6, 7, 10] 中则对正则化性质和收敛结果进行了更一般的分析。

经典 WVD 重建方法的一个缺点是通常缺乏平移不变性，这可能导致重建中出现众所周知的小波伪影 [14]。另一方面，众所周知，平移不变系统在去噪 [2, 15] 等简单任务中表现更好，近期也有研究将其用于变分方法 [17]。为解决这一问题， [8] 中的作者针对一般线性算子提出了平移不变对角框架分解（TI-DFD）的概念。除了分析基于滤波器的 TI-DFD 的正则化性质外，作者还给出了一个关于稳定微分的 TI-WVD 构造示例。这些发现表明，在底层小波系统中恢复平移不变性后，正则化性质会有所改善。因此，本文旨在为拉东变换构造 TI-WVD。由此，我们得到一种显式的基于滤波器的正则化策略，可高效实现。我们将通过对比来展示其改进的正则化性质。

并在一个数值示例中将结果与经典小波视觉描述子进行比较。

记号。 对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$，傅里叶变换记为 $\widehat{f} = \mathbf{F}f$，其中 $\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^2} f(x)e^{-i\langle \xi,\ x\rangle}$ 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$。对于 $f \in L^2(\mathbb{S} \times \mathbb{R})$，关于第二个变量的一维傅里叶变换记为 $\mathbf{F}_2$。此外，我们记 $u^*(x) := \overline{u}-x$，其中 z 是 $z \in \mathbb{C}$的复共轭。

2 The 平移不变对角框架分解

本节回顾线性算子的平移不变（TI）框架 [14] 和平移不变对角框架分解（TI-DFD） [8]的概念。此外，我们还将回顾使用 TI-DFD 进行滤波正则化的概念。

定义 2.1 (TI框架)。 设 Λ 为至多可数的指标集。若对所有 $\lambda \in \Lambda$，都有 $\hat{}u_\lambda \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$，且存在常数 A、$B > 0$，使得$(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in L^2(\mathbb{R}^d)^\Lambda$ 满足以下条件，则称该族为 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的平移不变框架（*TI*框架）：

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d): \quad A\|f\|_2^2 \le \sum_{\lambda\in\Lambda} \|u_\lambda^* * f\|_2^2 \le B\|f\|_2^2 . \tag{2.1}$$

若(2.1) 中 *TI* 框架的界取为 $A = B = 1$，则称 *TI* 框架$(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 为紧框架。

对每个 TI 框架元素 u_λ，定义 $w_\lambda := \mathbf{F}^{-1}(2\pi\widehat{u}_\lambda/\sum_{\mu\in\Lambda}|\widehat{u}_\mu|^2)$，即可得到所谓的规范对偶 $(w_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ （对应于 $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$）。它满足：

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d): \quad f = \sum_{\lambda\in\Lambda} w_\lambda * (u_\lambda^* * f). \tag{2.2}$$

注意，(2.2) 实际上对任何具有如下性质的对偶框架都成立：$w_{\lambda\lambda\in\Lambda}$ 由性质 $\sum_\lambda(\mathbf{F}w_\lambda)\cdot(\mathbf{F}u_\lambda) = 2\pi$定义。特别地，规范对偶始终存在，但不能由 (2.2) 唯一确定。还需注意，TI框架并非经典意义下的框架。特别是，TI 框架系数 $u_\lambda^* * f(x) = \langle f, u_\lambda(\cdot - x)\rangle$ 使用连续的平移参数 x。

定义 2.2 (TI-DFD)。 设 $\mathbf{K}$: $\mathcal{D}(\mathbf{K}) \subseteq L^2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{Y}$ 为一个闭线性算子，其中 $\mathbb{Y}$是一个希尔伯特空间。我们用 $B(\mathbb{Y}\ L^2(\mathbb{R}^d))$表示从 $\mathbb{Y}$ 到 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的有界算子空间。若满足以下性质，则系统 $(u_\lambda, \mathcal{V}_\lambda^*, \kappa_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 称为$\mathbf{K}$的平移不变框架分解（*TI-DFD*）：

(TI1) $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in L^2(\mathbb{R}^d)^\Lambda$ *is a TI-frame for* $L^2(\mathbb{R}^d)$.

(TI2) $\forall \lambda \in \Lambda$ 我们有 $\mathcal{V}_\lambda^* \in B(\mathbb{Y},\ L^2(\mathbb{R}^d))$ 并且

$$\forall g \in \overline{\operatorname{ran} \mathbf{K}}\colon \sum_{\lambda \in \Lambda} \|\mathcal{V}_\lambda^* g\|_2^2 \asymp \|g\|_{\mathbb{Y}}^2 .$$

(TI3) $\forall \lambda \in \Lambda\colon \quad \kappa_\lambda \in (0,\ \infty)$ 以及

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbf{K})\colon \mathcal{V}_\lambda^*(\mathbf{K} f) = \kappa_\lambda\,(u_\lambda^* * f).$$

此处，我们定义 $F \asymp G :\Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0\colon\ c_1 G \le F \le c_2 G$。

TI-DFD 将一个算子分解为平移不变的分量，将从 $\mathbf{K} f = g$ 中恢复 f 的问题拆分为若干个由 λ 索引的子问题。这里，$(\mathcal{V}_\lambda^* g)_{\lambda \in \Lambda}$ 是数据域中的系数函数，其中 (TI2) 确保该分解在两个方向上都稳定。性质 (TI3) 表明，可以从数据中稳定地恢复原始信号的系数函数，其稳定性由 κ_λ 给出。结合 (2.2)，TI-DFD 的定义可直接得出重构公式。

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} w_\lambda * (\kappa_\lambda^{-1} \cdot \mathcal{V}_\lambda^* g), \tag{2.3}$$

对于所有 $f \in \mathcal{D}(\mathbf{K})$ 和 $g = \mathcal{K} f$。注意，对 $\mathbf{K}$ 进行求逆的不稳定性通过准奇异值 $(\kappa_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 得以体现。更准确地说， [8] 已证明，算子$\mathbf{K}^{-1}$ 的逆算子无界，当且仅当准奇异值 $(\kappa_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 在假设 $\inf_\lambda \|\mathcal{V}_\lambda^*\|_{\mathrm{op}} > 0$ 的条件下趋于零。

定义 2.3（正则化滤波器）。一族（Φ_α）$_{\alpha>0}$ 分段连续函数$\Phi_\alpha\colon$ （0，∞） $\to \mathbb{R}$ 称为正则化滤波器，如果满足以下条件：

(F1) $\forall \alpha > 0\colon \quad \|\Phi_\alpha\|_\infty < \infty$.

（*F2*） $\exists C > 0\colon \sup\{|\kappa \Phi_\alpha(\kappa)|\colon\ \alpha > 0 \wedge \kappa \ge 0\} \le C$。

(F3) $\forall \kappa \in (0, \infty)\colon \lim_{\alpha \to 0} \Phi_\alpha(\kappa) = 1/\kappa$.

以下定理总结了 [8,第 2 节和 3]的主要结果。为此，回顾正则化方法的概念 [9, 定义 3.1]。

定理 2.4。设 $(u_\lambda, \mathcal{V}_\lambda^*, \kappa_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $\mathbf{K}$ 的 *TI-DFD*，设 $(w_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 是一个对偶 *TI*框架，

$(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 和

$$\mathcal{R}_\alpha^\Phi g \coloneqq \sum_{\lambda\in\Lambda} w_\lambda * (\Phi_\alpha(\kappa_\lambda)\cdot(\mathcal{V}_\lambda^* g)) \tag{2.4}$$

其中 $(\Phi_\alpha)_{\alpha>0}$ 是正则化滤波器。因此我们有：

1. $\forall g \in \mathrm{ran}(\mathbf{K}) : \mathbf{K}^{-1} g = \sum_{\lambda\in\Lambda} w_\lambda * (\kappa_\lambda^{-1}\cdot(\mathcal{V}_\lambda^* g))$.

2. 函数族$(\mathcal{R}_\alpha^\Phi)_{\alpha>0}$ 与适当的参数选择一起，为求逆*K</style}*定义了一种正则化方法。

3 TI-DFD 用于拉东变换

回顾一下，对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$，拉东变换 $\mathcal{R}f\colon \mathrm{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{R}f(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}} f(s\theta + t\theta^\perp)\,\mathrm{d}t\,, \tag{3.1}$$

对于几乎处处的 $(\theta, s) \in \mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}$成立。在本节中，我们将拉东变换扩展为 L^2 空间 [19] 之间的闭算子，然后构造相应的 TI-DFD。

3.1 L^2 上的 Radon 变换

在本节中，我们将拉东变换介绍为作用于 L^2-空间之间的算子。所述性质的证明及详细讨论可参见 [19]。下文中，我们将广泛使用傅里叶切片定理 [16] ，该定理指出，对于所有 $f \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ 以及几乎处处的 $(\theta,\ \sigma) \in \mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}$ ，我们有

$$\mathbf{F}_2 \mathcal{R}f(\theta, \sigma) = \mathbf{F} f(\sigma\theta)\,. \tag{3.2}$$

事实上，我们将（3.2）扩展到 $\mathcal{D}(\mathcal{R}) \supsetneq L^1(\mathbb{R}^2)\cap L^2(\mathbb{R}^2)$的自然定义域。为此，我们定义算子 $\mathcal{B}$: $\mathcal{D}(\mathcal{B}) \subseteq L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathrm{S}^1 \times \mathbb{R})$，其定义为

$$\forall(\theta,\sigma) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}\colon \quad \mathcal{B}f(\theta,\sigma) \coloneqq \widehat{f}(\sigma\theta) \tag{3.3}$$

根据（3.2）， $\mathcal{B}$ 是 $L^1(\mathbb{R}^2)\cap L^2(\mathbb{R}^2)$上拉东变换的傅里叶表示。

命题 3.1 （ $\mathcal{B}$的性质）。如上所定义的算子 $\mathcal{B}$ 满足以下性质：

(a) $\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \{f\colon \|\cdot\|_2^{-1/2} f \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$

(*b*) $\mathcal{D}(\mathcal{B}^*) = \{g\colon \ |\cdot|^{-1/2} g(\theta, \ \cdot) \in L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})\}$

(c) $\mathcal{D}(\mathcal{B})$和 $\mathcal{D}(\mathcal{B}^*)$分别在 L^2 中稠密。

(d) $\mathcal{B}$ 是良定义的、线性的、单射的且无界。

(e) $\mathcal{B}^* g(\xi) = \|\xi\|_2^{-1} g\left(\xi/\|\xi\|_2, \|\xi\|_2\right)$.

定义 3.2 (定义在 L^2 上的拉东变换)。 算子 $\mathcal{R}\colon \mathcal{D}(\mathcal{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$定义为复合映射

$$\mathcal{R} f \coloneqq (\mathbf{F}_2^{-1} \circ \mathcal{B} \circ \mathbf{F})(f) \tag{3.4}$$

称为 L^2 上的拉东变换。

命题 3.3 （ $\mathcal{R}$的性质）。拉东变换 $\mathcal{R}$ 满足以下性质：

(a) $\mathcal{R}$ 是良定义的、线性的、单射的且无界的。*(b)* $\mathcal{R}$ 是由算子 *(3.1)* 定义的算子的闭扩张。*(c)* $\mathcal{D}(\mathcal{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mid Ff \in \mathcal{D}(\mathcal{B})\}$。*(d)* $\mathcal{D}(\mathcal{R}^*) = \{g \in L^2(S^1 \times \mathbb{R}) \mid F_2 g \in \mathcal{D}(\mathcal{B}^*)\}$。*(e)* $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ 和 $\mathcal{D}(\mathcal{R}^*)$ 分别在 L^2 中稠密。*(f)* $\mathcal{R}^* = F^{-1} \circ \mathcal{B}^* \circ F_2$。

命题 3.3 特别指出，拉东变换 $\mathcal{R}$ 是一个无界算子。另一方面，将 $\mathcal{R}$ 限制在各种闭子空间上是有界的。最常见的情形是将 $\mathcal{R}$ 限制在 $L^2_D(\mathbb{R}^2)$ 上：$= \left\{f \in L^2(\mathbb{R}^2)\colon \ \mathrm{supp}(f) \subseteq D\right\}$。然而，限制于具有紧支集的函数会引入先验假设，而这些假设并不具有平移不变性。此外，基于上述考虑，我们得到经典的滤波反投影公式（FBP） [16]，它作用于 L^2-空间之间，即

$$\mathcal{R}^{-1} g = \frac{1}{4\pi} (\mathcal{R}^* \circ \mathcal{I}_1)(g), \tag{3.5}$$

其中 $g = \mathcal{R} f$和 $f \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$ [19,20]。这里，算子 $\mathcal{I}_1 f \coloneqq \mathbf{F}^{-1}(|\cdot| \mathbf{F} f)$ 称为黎斯势。

3.2 必要条件

在为 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的拉东变换构造 TI-DFD 之前，我们先推导一些必要条件。

引理 3.4（必要条件）。设 $u_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^2)$、$v_\lambda \in L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$ 和 $\kappa_\lambda > 0$ 满足 $\mathcal{R}^* v_\lambda^* = \kappa_\lambda u_\lambda^*$ 且 $\widehat{\ } v_\lambda$、$|\cdot|^{-1}\widehat{\ } v_\lambda \in L^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$，并定义 $\mathcal{V}_\lambda^* g := \mathcal{R}^*(v_\lambda^* * g)$。

1. $(\mathcal{V}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 满足 *(TI3)*。
2. 若 $(u_\lambda, \mathcal{V}_\lambda^*, \kappa_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathcal{R}$ 的 *TI-DFD*，则

$$\forall \lambda \in \Lambda: \quad \widehat{v}_\lambda(\theta,\sigma) = \kappa_\lambda |\sigma| \widehat{u}_\lambda(\sigma\theta). \tag{3.6}$$

证明。1）令 $f \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$。则

$$\begin{aligned}
\kappa_\lambda (u_\lambda^* * f) &= \mathbf{F}^{-1}(\kappa_\lambda \widehat{u}_\lambda^* \cdot \widehat{f}) \\
&= \mathbf{F}^{-1}(\mathcal{B}^* \widehat{v}_\lambda^* \cdot \|\cdot\|_2 \mathcal{B}^* \mathcal{B} \widehat{f}) \\
&= \mathbf{F}^{-1}\mathcal{B}^*(\widehat{v}_\lambda^* \cdot \widehat{\mathcal{R} f}) \\
&= \mathbf{F}^{-1}\mathcal{B}^*\mathbf{F}_2(v_\lambda^* *_s \mathcal{R} f) \\
&= \mathcal{R}^*(v_\lambda^* *_s \mathcal{R} f) \\
&= \mathcal{V}_\lambda^*(\mathcal{R} f)\,.
\end{aligned}$$

2）根据 1）以及 $\mathcal{V}_\lambda^*$ 的定义，我们有 $\mathcal{R}^*(v_\lambda^* * \mathcal{R} f) = \kappa_\lambda (u_\lambda^* * f)$。对两边应用傅里叶变换，并利用 $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ 稠密，可得 (3.6)。 □

3.3 TI-DFD 的构造

现在，设 $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个二维（张量积）平移不变小波框架，其母小波为 $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$。也就是说，我们假设其多尺度结构

$$\forall (j,l) \in \Lambda := \mathbb{Z} \times \{\mathrm{H}, \mathrm{V}, \mathrm{D}\}: \; u_{j,l}(x) = 2^j u_{0,l}(2^j x)\,, \tag{3.7}$$

其中 $j \in \mathbb{Z}$ 是尺度索引，$l \in \{\mathrm{H}, \mathrm{V}, \mathrm{D}\}$ 分别表示水平、垂直或对角母小波。

定理 3.5 (对 $\mathcal{R}$的 TI-WVD)。 设$(u_{j,l})_{j,l\in\Lambda}$ 由(3.7)定义，假设$\mathrm{supp}(\widehat{u}_{0,l}) = \{\xi \mid a \le \|\xi\|_2 \le b\}$ 对某些 $a, b > 0$成立，并且对于$(j, l) \in \mathbb{Z} \times \{\mathrm{H}、\mathrm{V}、\mathrm{D}\}$ 定义

$$v_{j,l} := 2^{-j/2}\mathcal{I}_1\mathcal{R}u_{j,l} \tag{3.8}$$

$$\mathcal{V}^*_{j,l}(g) := \mathcal{R}^*(v^*_{j,l} * g)\,. \tag{3.9}$$

那么，系统 $(u_{j,l}, \mathcal{V}^*_{j,l}, 2^{-j/2})_{j,l\in\Lambda}$ 为 $\mathcal{R}$ 定义了一个 *TI-DFD*，我们将其称为拉东变换的 *TI-WVD*。

证明。对于证明，还需验证 $(\mathcal{V}^*_{j,\,l})_{j,\,l}$ 满足 (TI2)。令 $g \in \mathrm{ran}(\mathcal{R})$，则由帕塞瓦尔恒等式，并在积分中改用极坐标，得到

$$\begin{aligned}\|\mathcal{V}^*_{j,l}g\|_2^2 &= \|\mathbf{F}(\mathcal{V}^*_{j,l}g)\|_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{S}^1}\int_0^\infty \frac{1}{\sigma}|\widehat{v}^*_{j,l}(\theta,\sigma)|^2 \cdot |\widehat{g}(\theta,\sigma)|^2 \,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\mathbb{S}^1}\int_0^\infty \frac{\sigma}{2^j}|\widehat{u}_{j,l}(\sigma\theta)|^2 \cdot |\widehat{g}(\theta,\sigma)|^2 \,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

由于在被积函数的支撑集上成立，并且 $(u_{j,l})_{j,l}$ 是一个平移不变框架，对两边求和可得 $aA \le \sum_{j,l}||\mathcal{V}^*_{j,l}g||_2^2 \le bB$，其中 $A, B > 0$ 是 $(u_{j,l})_{j,l}$的平移不变框架常数。

□

4 数值实验

在本节中，我们对本文引入的用于拉东变换的经典小波视觉描述子（WVD） [5,6] 与 TI-WVD 进行数值比较。实现滤波平移不变对偶框架分解重建公式（2.4）的关键步骤是计算 $\mathcal{V}^*_{j,\,l}g = \mathcal{R}^*(v^*_{j,\,l} * g)$。为此，我们使用显式表达式（ 3.6 ）并进行计算。

$$\mathcal{R}^*(v^*_{j,l} * g) = \kappa_{j,l}(u^*_{j,l} * \mathcal{R}^*\mathcal{I}_1 g).$$

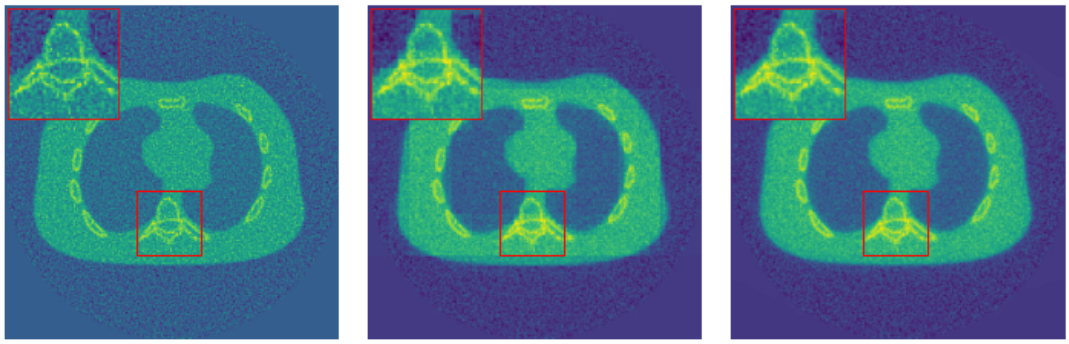
注意， $\mathcal{R}^*\mathcal{I}_1$ 是式 (3.5) 中给出的滤波反投影 (FBP)。结合 Tikhonov 滤波器 $\Phi_\alpha(\kappa) := \kappa/(\kappa^2 + \alpha)$，拉东变换的正则化 TI-DFD (2.4) 可表示为

$$\mathbf{A}^\Phi_\alpha g = \sum_{j,l}\frac{2^{-j}}{2^{-j}+\alpha}u_{j,l} * (u^*_{j,l} * \mathcal{R}^*\mathcal{I}_1 g).$$

由于小波变换和 FBP 均可高效实现，因此正则化重建算法也能高效运行。实现时，我们使用了 Python 3.9.12。拉东变换，尤其是 FBP，是通过 scikit-image 软件包 0.19.2 [21] 版实现的。(TI) 小波变换则通过 PyWavelets 软件包 1.3.0 [11] 版实现。

我们使用离散化的合成模体 $f \in \mathbb{R}^{256\times 256}$，并选择了基于哈尔小波作为底层框架的最高 8 个分解层级。需要注意的是，哈尔小波并非带限，因此定理 3.5 在这种情况下并不适用。然而，我们预期该定理的结论在较弱的假设条件下仍然成立，但目前尚未对此给出证明。我们向数据 $g^\delta = \mathcal{R}f + \delta\eta$ 中添加了白高斯噪声。在此，我们选择了 $\delta = 0.05$ 和 $\eta \sim \|\mathcal{R}f\|_\infty \mathcal{N}(0,1)$。为确保比较的公平性，我们进行了参数搜索，以确定两种方法各自的最优正则化参数 $\alpha > 0$。我们根据相对 ℓ^2 重建误差 $\|f^\alpha_{\text{rec}} - f\|_2/\|f\|_2$ 对该参数进行优化，其中 f 为真实值，f^α_{rec} 为取决于所选参数的重建结果。

数值结果见图 4.1，清楚地表明 TI-DFD 方法优于标准 WVD。尽管两种方法的去噪效果都显而易见，抽取式 DFD 仍会产生众所周知的块状伪影，这是由抽取式小波分解中的欠采样步骤所导致的。从定量结果来看，WVD 的相对 ℓ^2重建误差为 0.054，而 TI-WVD 的相对重建误差为 0.048。



(a) (b) (c)

图 4.1：含噪拉东数据的重建 g^δ，$\delta = 0.05$。(a) 使用 (3.5) 进行滤波反投影重建。(b)、(c) 分别为通过 WVD 和 TI-WVD 得到的重建。两种重建均对 Haar 小波采用最大 8 层分解。在(b) 中，放大部分清晰可见 WVD 产生的块状伪影。

5 结论

本文提出了用于求解线性算子方程的平移不变框架分解（TI-DFD）这一概念。随后，我们构造了适用于拉东变换的 TI 小波—vaguelette 分解（TI-WVS），将其作为 TI-DFD 的一个实例。经典框架分解的一个优点是系统具有平移不变性，这一点也通过数值结果得到了验证。我们发现，与经典框架相比，使用平移不变框架能够获得更好的重建。

致谢

S. G. 的这项研究是一个项目的一部分，该项目获得了欧盟“地平线2020”研究与创新计划玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议（编号：847476）的资助。本文所表达的观点和意见不一定反映欧盟委员会的立场。

参考文献

[1] E. J. Candès 和 D. L. Donoho。病态逆问题中的边缘恢复：曲波框架的最优性。《统计年刊》，30(3):784–842，2002年6月。

[2] R. R. Coifman 和 D. L. Donoho。《平移不变去噪》，第 125–150 页。Springer New York，纽约州纽约，1995 年。[3] F. Colonna、G. Easley、K. Guo 和 D. Labate。利用剪切波表示进行拉东变换反演。《应用与计算调和分析》，29(2):232–250，2010 年。[4] M. E. Davison。n维欧几里得空间中拉东变换的奇异值分解。《数值泛函分析与优化》，3(3):321–340，1981 年。[5] D. L. Donoho。通过小波-模糊lette分解非线性求解线性逆问题。《应用与计算调和分析》，2(2):101–126，1995 年。[6] A. Ebner、J. Frikel、D. Lorenz、J. Schwab 和 M. Haltmeier。通过滤波对角框架分解正则化逆问题，2020 年。[7] J. Frikel 和 M. Haltmeier。通过算子适配框架阈值化实现逆问题的稀疏正则化。载于《波现象数学》，第 163–178 页，查姆，2020 年。Springer国际出版。

[8] S. Göppel、J. Frikel 和 M. Haltmeier。逆问题的平移不变对角框架分解及其正则化。逆问题，39(6):065011，2023 年。[9] A. N. H. Engl、M. Hanke。《逆问题的正则化》。数学及其应用。Springer，第 1 版，1996 年。[10] S. Hubmer、R. Ramlau 和 L. Weissinger。基于框架分解的正则化及其在断层成像中的应用。逆问题，38(5):055003，2022 年。[11] G. R. Lee、R. Gommers、F. Waselewski、K. Wohlfahrt 和 A. O'Leary。PyWavelets：用于小波分析的 Python 软件包。《开源软件期刊》，4(36):1237，2019 年。[12] A. K. Louis。正交函数级数展开与拉东变换的零空间。《*SIAM* 数学分析杂志》，15(3):621–633，1984 年。[13] P. Maass。拉东变换的奇异值分解。载于 G. T. Herman、A. K. Louis 和 F. Natterer 编，《断层成像的数学方法》，第 6–14 页，柏林、海德堡，1991 年。Springer Berlin Heidelberg。[14] S. Mallat。《信号处理小波之旅：稀疏之道（第三版）》。Academic Press, Inc.，美国，第 3 版，2008 年。[15] G. P. Nason 和 B. W. Silverman。《平稳小波变换及其若干统计应用》，第 281–299 页。Springer New York，纽约州纽约，1995 年。[16] F. Natterer。《计算机断层成像的数学》。应用数学经典著作。工业与应用数学学会，2001 年。[17] R. Parhi 和 M. Unser。小波线性逆问题解中循环移位的稀疏性。《*IEEE* 信号处理快报》，30:568–572，2023 年。[18] E. T. Quinto。外部拉东变换与球面变换的奇异值分解和反演方法。《数学分析与应用杂志》，95(2):437–448，1983 年。[19] K. T. Smith、D. C. Solmon 和 S. L. Wagner。从射线照片重建物体问题的实践与数学方面。《美国数学学会通报》，83(6):1227–1270，1977 年。[20] D. C. Solmon。X射线变换。《数学分析与应用杂志》，56(1):61–83，1976 年。

[21]S. van der Walt、J. L. Schönberger、J. Nunez-Iglesias、F. Boulogne、J. D. Warner、N. Yager、E. Gouillart、T. Yu 和 scikit-image 贡献者。scikit-image：Python 中的图像处理。*PeerJ*，2:e453，2014 年 6 月。