arXiv:2305.02717v1 [math.CV] 4 May 2023

`从 Besov 空间到某些解析函数空间的类 Cesaro 算子

FANGMEI SUN、FANGQIN YE 和 LIUCHANG ZHOU

摘要。本文对于 $p>1$ 和 $s>1$，给出了从 Besov 空间 B_p 到介于平均 Lipschitz 空间 $\Lambda^s_{1/s}$ 与 Bloch 空间之间的巴拿赫空间 X 的 Ces`aro 类算子的有界性和紧性的完整刻画。

1. 引言

设 μ 是 $[0,1)$ 上的有限正博雷尔测度。对于非负整数 n，记 μ_n 为 μ的 n 阶矩。更确切地说，

$$\mu_n=\int_{[0,1)} t^n \mathrm{d}\mu(t).$$

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 属于 $H(\mathbb{D})$，即复平面 $\mathbb{C}$的开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内解析函数所构成的空间。类 CES 算子 $\mathcal{C}_\mu$ 定义为

$$\mathcal{C}_\mu(f)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mu_n\sum_{k=0}^{n} a_k\right)z^n,\quad z\in\mathbb{D}.$$

当 $\mathrm{d}\mu(t)=\mathrm{d}t$ 时，$\mathcal{C}_\mu$ 是经典的 Ces`aro 算子 $\mathcal{C}$（参见 [16]）。在 [12, 17], 中，作者开始研究作用于解析函数空间上的算子 $\mathcal{C}_\mu$。最近，算子 $\mathcal{C}_\mu$ 受到了广泛关注（参见 [2, 3,10, 11, 20]）。

对于 $p>1$，令 B_p 为由满足以下条件的函数 f 组成的 Besov 空间：f 属于 $H(\mathbb{D})$, 且

$$\|f\|_{B_p}=|f(0)|+\left(\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^p(1-|z|^2)^{p-2}\mathrm{d}A(z)\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

其中，$\mathrm{d}A$是定义在 $\mathbb{C}$ 上的面积测度，并归一化为 $A(\mathbb{D})=1$。众所周知，B_2 是Dirichlet 空间 $\mathcal{D}$。记 $\mathcal{B}$ 为满足以下条件的函数$f\in H(\mathbb{D})$所构成的Bloch 空间

$$\|f\|_{\mathcal{B}}=|f(0)|+\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)|<\infty.$$

如果 $1<p_1<p_2<\infty$，那么 $B_{p_1}\subsetneq B_{p_2}\subsetneq\mathcal{B}$。关于这些空间的理论，参见 [24, 第 5] 章。

2010年数学学科分类。47B38，30H25，30H30。关键词和短语。Ces`aro 类算子、对数 Carleson 测度、Besov 空间、平均 Lipschitz 空间、Bloch 空间。本研究得到中国国家自然科学基金（编号：12001352 和 12271328）以及广东省基础与应用基础研究基金（编号：2022A1515012117）的资助。

对于 $1 \leq p < \infty$ 和 $0 < \alpha \leq 1$，回顾一下，平均 Lipschitz 空间 Λ_α^p 是函数 f 的类，其中函数属于 $H(\mathbb{D})$，并且在单位圆 $\mathbb{T}$ 的几乎处处点都有非切向极限，满足 $\omega_p(t, f) = O(t^\alpha)$，当 $t \to 0$时，其中 $\omega_p(\cdot, f)$是函数 $f(e^{i\theta})$ 的 p 阶积分连续模。根据 [7, 第5]章， Λ_α^p 总是包含于 Hardy 空间 H^p，并由满足以下条件的函数 f 组成，其中函数属于$H(\mathbb{D})$:

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha^p} = |f(0)| + \sup_{0<r<1} (1-r)^{1-\alpha} M_p(r, f') < \infty,$$

其中

$$M_p(r, f') = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p \mathrm{d}\theta \right)^{1/p}.$$

若 $1 < p_1 < p_2 < \infty$，则 $\Lambda_{1/p_1}^{p_1} \subsetneq \Lambda_{1/p_2}^{p_2}$。对于 $p > 1$，已知（参见 [5, 定理 2.5]），$\Lambda_{1/p}^p$ 是 Bloch 空间 $\mathcal{B}$的真子集。

Carleson 型测度是研究函数空间及相关算子理论的重要工具。设 I 是 $\mathbb{T}$ 上的一段弧，其弧长为 $|I|$，并将其归一化，使得 $|\mathbb{T}| = 1$。用 $S(I)$ 表示 Carleson 方框，即

$$S(I) = \{r\zeta \in \mathbb{D} : 1 - |I| < r < 1,\ \zeta \in I\}.$$

根据 [22],，对于 $0 \leq \alpha < \infty$ 和 $0 < s < \infty$，若有限正博雷尔测度 ν 定义在 $\mathbb{D}$ 上，则称其为 α-对数 s-Carleson 测度，条件为

$$\sup_{I \subseteq \mathbb{T}} \frac{\nu(S(I))(\log \frac{e}{|I|})^\alpha}{|I|^s} < \infty,$$

若有限正博雷尔测度 ν 定义在 $\mathbb{D}$上，且满足以下条件，则称其为消失型 α-对数s-Carleson 测度

$$\lim_{|I| \to 0} \frac{\nu(S(I))(\log \frac{e}{|I|})^\alpha}{|I|^s} = 0.$$

对于 $\alpha = 0$， α-对数型 s-Carleson 测度和趋于零的 α-对数型 s-Carleson 测度分别称为 s-Carleson 测度和趋于零的 s-Carleson 测度（参见 [8]）。

定义在 [0, 1) 上的有限正博雷尔测度 ν，可通过将其与测度 $\tilde{\nu}$ 等同而视为定义在 $\mathbb{D}$ 上的测度，其中 $\tilde{\nu}$ 定义为

$$\tilde{\nu}(E) = \nu(E \cap [0, 1)),$$

对于 $\mathbb{D}$中的每个博雷尔子集 E，均如此。因此， ν 是定义在 $[0, 1)$ 上的 α-对数型 s-Carleson 测度，当且仅当

$$\sup_{t \in [0,1)} \frac{\nu([t, 1))(\log \frac{e}{1-t})^\alpha}{(1-t)^s} < \infty,$$

并且， ν是定义在 $[0, 1)$ 上的趋于零的 α-对数型 s-Carleson 测度，当且仅当

$$\lim_{t \to 1^-} \frac{\nu([t, 1))(\log \frac{e}{1-t})^\alpha}{(1-t)^s} = 0.$$

在 [10], 中，作者给出了一系列关于径向测度诱导的、作用于某些解析函数空间上的算子的有趣结果。由 [10,第 14], 页可知，Ces`aro 算子 $\mathcal{C}$ 不是从 Dirichlet 空间 $\mathcal{D}$ 到 Bloch 空间 $\mathcal{B}$的有界算子。因此，描述使得 $\mathcal{C}_\mu$ 从 $\mathcal{D}$到 $\mathcal{B}$有界的测度 μ是十分自然的。以下结论即为 [10]中的定理 7。

定理 A. 设 X 是 $\mathbb{D}$ 中的解析函数构成的巴拿赫空间，满足 $\Lambda^2_{1/2} \subseteq X \subseteq \mathcal{B}$，并且设 μ 是 $[0,1$上的有限正博雷尔测度。

(i) 如果 μ 是 $_1{}_2$-对数型 1-Carleson 测度，那么 $\mathcal{C}_\mu$ 是从 $\mathcal{D}$ 到 X 的有界算子。(ii) 如果 $\mathcal{C}_\mu$ 是从 $\mathcal{D}$ 到 X 的有界算子，且 $0 < \beta < \frac{1}{2}$，那么 μ 是一个 β-对数型 1-Carleson 测度。

本文受定理 A 启发，对于 $p > 1$和 $s > 1$，我们完整刻画了算子 $\mathcal{C}_\mu$ 从 Besov 空间 B_p 到介于平均 Lipschitz 空间 $\Lambda^s_{1/s}$ 与 Bloch 空间 $\mathcal{B}$之间的巴拿赫空间 Y 的有界性和紧性。因此，在我们的结果中取 $p = s = 2$，便弥补了定理 A 中条件 (i) 与条件 (ii) 之间的空缺。

在本文中，符号 $A \approx B$ 表示 $A \lesssim B \lesssim A$。如果存在正常数 C 使得 $A \leq CB$，我们就称$A \lesssim B$。

2. [0,1) 上的对数 Carleson 测度)

本节将给出对数 Carleson 测度ν在 $[0,1)$ 上的一些刻画，这些刻画将在后续各节中发挥作用。我们将看到，区间 $[0,1)$ 在这些刻画中至关重要；也就是说，当 ν 是 $\mathbb{D}$上的有限正博雷尔测度时，这些刻画可能不成立。

命题 2.1. 设 $0 \leq \alpha < \infty$、 $0 < s < \infty$和 ν 是 $[0,1)$ 上的有限正博雷尔测度。

(i) ν 是一个 α-对数 s-Carleson 测度，当且仅当

$$\nu_n = O\left(\frac{1}{(n+1)^s[\log(n+1)]^\alpha}\right).$$

(ii) ν 是一个消失的 α-对数 s-Carleson 测度，当且仅当

$$\nu_n = o\left(\frac{1}{(n+1)^s[\log(n+1)]^\alpha}\right).$$

证明。(i) 对于 $0 \leq \alpha < \infty$，众所周知（参见 [25, 第 192] 页），

$$\frac{1}{1-x}\left(\log\frac{e}{1-x}\right)^{-\alpha} \approx \sum_{k=0}^{\infty}[\log(k+e)]^{-\alpha}x^k \tag{2.1}$$

对所有 $x \in [0,1)$，并且

$$\sum_{k=0}^{n}[\log(k+e)]^{-\alpha} \approx n[\log(n+e)]^{-\alpha} \tag{2.2}$$

对所有 $n \geq 1$。设 ν 是一个 α-对数型 s-Carleson 测度。根据分布函数的一个有用公式（见 [13,第 20] 页）、（2.1）和（2.2），我们可得

$$\begin{aligned}
\nu_n =& n\int_0^1 \nu([x,1))x^{n-1}\mathrm{d}x\\
\lesssim& n\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^s\Big(\log\frac{e}{1-x}\Big)^{-\alpha}\mathrm{d}x\\
\approx& n\sum_{k=0}^{\infty}[\log(k+e)]^{-\alpha}\int_0^1 x^{n+k-1}(1-x)^{s+1}\mathrm{d}x\\
\approx& n\Big(\sum_{k=0}^{n}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big)[\log(k+e)]^{-\alpha}(n+k)^{-s-2}\\
\lesssim& n^{-s-1}\sum_{k=0}^{n}[\log(k+e)]^{-\alpha}+n[\log(n+1+e)]^{-\alpha}\sum_{k=n+1}^{\infty}(n+k)^{-s-2}\\
\approx& n^{-s}[\log(n+e)]^{-\alpha}+n[\log(n+1+e)]^{-\alpha}\int_{n+1}^{\infty}(n+x)^{-s-2}\mathrm{d}x\\
\approx&\frac{1}{n^s[\log(n+1)]^{\alpha}}
\end{aligned}$$

对所有 $n>1$。反之，设

$$\nu_n = O\left(\frac{1}{(n+1)^s[\log(n+1)]^{\alpha}}\right).$$

对于 $t\in[0,1)$，存在一个正整数 n，使得

$$1-\frac{1}{n}\leq t<1-\frac{1}{n+1}.$$

Then

$$\begin{aligned}
\nu([t,1)) \leq& \nu([1-\frac{1}{n},1))\\
\lesssim& \int_{[1-\frac{1}{n},1)} t^n\mathrm{d}\nu(t)\\
\lesssim& \frac{1}{(n+1)^s[\log(n+1)]^{\alpha}}\\
\lesssim& (1-t)^s\left(\log\frac{e}{1-t}\right)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

(ii) 证明与 (i) 类似，只需稍作修改。此处略去证明。 □

注 1. 命题 2.1 中 $0\leq\alpha<\infty$ 和 $s\geq 1$ 的情形曾在 [10, 14]中用到；详情参见 [14, 第 392] 页和 [14, 引理 2.7] 。这里我们给出所有 $0\leq\alpha<\infty$和 $0<s<\infty$的完整描述。特别地，命题 2.1 还将 [1, 6] 中的相应结果从 $\alpha=0$ 推广到了所有 $0\leq\alpha<\infty$。

注 2. 如果 ν 是定义在 $\mathbb{D}$上的有限正博雷尔测度，并且我们也记作

$$\nu_n=\int_{\mathbb{D}} w^n d\nu(w),\ \ n=0,1,2,\ldots,$$

那么命题 2.1 中的结论可能不成立。例如，当 $\alpha > 0$ 和 $s > 1$时，令 $\mathrm{d}\nu_s(w) = (1-|w|^2)^{s-2}\mathrm{d}A(w)$。那么 $\nu_s(\mathbb{D})$ 是有限的，并且对所有 I 属于 $\mathbb{T}$，都有 $\nu_s(S(I)) \approx |I|^s$ 。因此， ν_s 不是 α-对数型 s-Carleson 测度。但是

$$(\nu_s)_n = \int_{\mathbb{D}} w^n (1-|w|^2)^{s-2}\mathrm{d}A(w) = 0, \quad n \geq 1,$$

这意味着 taamatut

$$(\nu_s)_n = O\left(\frac{1}{(n+1)^s[\log(n+1)]^\alpha}\right).$$

以下对数 Carleson 测度的刻画是众所周知的，例如参见 [4], 中的引理 4.1 和命题 1.2、 [18], 中的定理 2 以及 [19], 中的引理 2.2。

引理 B. 假设 s、 $t > 0$、 $\alpha \geq 0$ 和 ν 是 $\mathbb{D}$ 上的有限正博雷尔测度。

(i) ν 是 α对数 s-Carleson 测度，当且仅当

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \Big(\log\frac{e}{1-|a|^2}\Big)^\alpha \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)^t}{|1-\bar{a}z|^{s+t}}\mathrm{d}\nu(z) < \infty.$$

(ii) ν 是消失的 α-对数 s-Carleson 测度，当且仅当

$$\lim_{|a|\to 1} \Big(\log\frac{e}{1-|a|^2}\Big)^\alpha \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)^t}{|1-\bar{a}z|^{s+t}}\mathrm{d}\nu(z) = 0.$$

我们给出如下关于$[0,1)$上对数 Carleson 测度的一些积分刻画。对于 $\alpha = 0$的情形， 下述命题中的条件 (iv) 也是新的。

命题 2.2. 设 $0 < t < \infty$, $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq r < s < \infty$和ν 是 $[0,1)$上的有限正博雷尔测度。那么以下条件等价:

(i) ν 是一个 α-对数 s-Carleson 测度;

(ii)

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{[0,1)} \frac{(1-|a|)^t(\log\frac{e}{1-|a|})^\alpha}{(1-x)^r(1-|a|x)^{s+t-r}}\mathrm{d}\nu(x) < \infty;$$

(iii)

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{[0,1)} \frac{(1-|a|)^t(\log\frac{e}{1-|a|})^\alpha}{(1-x)^r|1-ax|^{s+t-r}}\mathrm{d}\nu(x) < \infty;$$

(iv)

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \Big|\int_{[0,1)} \frac{(1-|a|)^t(\log\frac{e}{1-|a|})^\alpha}{(1-x)^r(1-ax)^{s+t-r}}\mathrm{d}\nu(x)\Big| < \infty.$$

证明。 $(i) \Rightarrow (ii)$ 。我们紧密沿用 [2], 中命题 2.1 的证明，其中已证明了 $\alpha = 0$ 的情形。设 ν 是一个 α-对数型 s-Carleson 测度。按照 [2, 第 5], 页中的论证，我们得到

$$\sup_{|a|\leq 1/2} \Big(\log\frac{e}{1-|a|}\Big)^\alpha \int_{[0,1)} \frac{(1-|a|)^t}{(1-x)^r(1-|a|x)^{s+t-r}}\mathrm{d}\nu(x) \lesssim 1.$$

现在考虑满足 $|a|>1/2$ 的 $a\in\mathbb{D}$，并令

$$S_n(a)=\{x\in[0,1):1-2^n(1-|a|)\le x<1\}$$

对于每个正整数 n。令 n_a 为满足以下条件的最小整数

$$1-2^{n_a}(1-|a|)\le 0.$$

那么，对于 $n\ge n_a$，$S_n(a)=[0,1)$。如果 $x\in S_1(a)$，那么

$$1-|a|\le 1-|a|x. \tag{2.3}$$

如果 $2\le n\le n_a$ 且 $x\in S_n(a)\backslash S_{n-1}(a)$，那么

$$1-|a|x\ge |a|-x\ge |a|-(1-2^{n-1}(1-|a|))=(2^{n-1}-1)(1-|a|). \tag{2.4}$$

为方便起见，我们记

$$\begin{aligned}
&\Big(\log\frac{e}{1-|a|}\Big)^\alpha\int_{[0,1)}\frac{(1-|a|)^t}{(1-x)^r(1-|a|x)^{s+t-r}}\mathrm{d}\nu(x)\\
=&\Big(\log\frac{e}{1-|a|}\Big)^\alpha\int_{S_1(a)}\frac{(1-|a|)^t}{(1-x)^r(1-|a|x)^{s+t-r}}\mathrm{d}\nu(x)\\
&+\Big(\log\frac{e}{1-|a|}\Big)^\alpha\sum_{n=2}^{n_a}\int_{S_n(a)\backslash S_{n-1}(a)}\frac{(1-|a|)^t}{(1-x)^r(1-|a|x)^{s+t-r}}\mathrm{d}\nu(x)\\
=:&J_1(a)+J_2(a).
\end{aligned}$$

若 $r=0$，显然 $J_1(a)\,.\,1$ 且 $J_2(a)\,.\,1$。接下来假设 $0<t<\infty$ 和 $0<r<s<\infty$。利用 (2.3) 以及分布函数的一个有用公式（见 [13, 第 20] 页），我们推得

$$\begin{aligned}
J_1(a)\lesssim&\frac{(\log\frac{e}{1-|a|})^\alpha}{(1-|a|)^{s-r}}\int_{S_1(a)}\Big(\frac{1}{1-x}\Big)^r\mathrm{d}\nu(x)\\
\approx&\frac{(\log\frac{e}{1-|a|})^\alpha}{(1-|a|)^{s-r}}r\int_0^\infty\lambda^{r-1}\nu(\{x\in[1-2(1-|a|),1):1-\frac{1}{\lambda}<x\})\mathrm{d}\lambda\\
\lesssim&\frac{(\log\frac{e}{1-|a|})^\alpha}{(1-|a|)^{s-r}}\int_0^{\frac{1}{2(1-|a|)}}\lambda^{r-1}\nu([1-2(1-|a|),1))\mathrm{d}\lambda\\
&+\frac{(\log\frac{e}{1-|a|})^\alpha}{(1-|a|)^{s-r}}\int_{\frac{1}{2(1-|a|)}}^\infty\lambda^{r-1}\nu([1-\frac{1}{\lambda},1))\mathrm{d}\lambda\\
\lesssim&(1-|a|)^r\int_0^{\frac{1}{2(1-|a|)}}\lambda^{r-1}\mathrm{d}\lambda+\frac{(\log\frac{e}{1-|a|})^\alpha}{(1-|a|)^{s-r}}\int_{\frac{1}{2(1-|a|)}}^\infty\lambda^{r-1-s}(\log\lambda)^{-\alpha}\mathrm{d}\lambda\\
\lesssim&1.
\end{aligned}$$

请记住，(2.4)、$0<t<\infty$、$0<r<s<\infty$ 和 ν 是一个 α-对数型 s-Carleson 测度。那么 $J_2(a)$ 不大于

$$\begin{aligned}
&\Big(\log\frac{e}{1-|a|}\Big)^{\alpha}\sum_{n=2}^{n_a}\frac{(1-|a|)^{r-s}}{2^{n(s+t-r)}}\int_{S_n(a)\setminus S_{n-1}(a)}\Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{r}\mathrm{d}\nu(x)\\
\lesssim&\Big(\log\frac{e}{1-|a|}\Big)^{\alpha}\sum_{n=2}^{n_a}\frac{(1-|a|)^{r-s}}{2^{n(s+t-r)}}\\
&\times\int_0^{\infty}\lambda^{r-1}\nu\big(\{x\in[1-2^n(1-|a|),1):1-\frac{1}{\lambda}<x\}\big)\mathrm{d}\lambda\\
\approx&\Big(\log\frac{e}{1-|a|}\Big)^{\alpha}\sum_{n=2}^{n_a}\frac{(1-|a|)^{r-s}}{2^{n(s+t-r)}}\Big(\int_0^{\frac{1}{2^n(1-|a|)}}\lambda^{r-1}\nu\big([1-2^n(1-|a|),1)\big)\mathrm{d}\lambda\\
&+\int_{\frac{1}{2^n(1-|a|)}}^{\infty}\lambda^{r-1}\nu\big([1-\frac{1}{\lambda},1)\big)\mathrm{d}\lambda\Big)\\
\lesssim&\Big(\log\frac{e}{1-|a|}\Big)^{\alpha}\sum_{n=2}^{n_a}\frac{(1-|a|)^{r-s}}{2^{n(s+t-r)}}\Big(\frac{2^{ns}(1-|a|)^s}{(\log\frac{e}{2^n(1-|a|)})^{\alpha}}\int_0^{\frac{1}{2^n(1-|a|)}}\lambda^{r-1}\mathrm{d}\lambda\\
&+\int_{\frac{1}{2^n(1-|a|)}}^{\infty}\lambda^{r-1-s}(\log\lambda)^{-\alpha}\mathrm{d}\lambda\Big)\\
\lesssim&\sum_{n=2}^{n_a}\frac{n^{\alpha}}{2^{nt}}<\infty.
\end{aligned}$$

因此，

$$\sup_{a\in\mathbb{D}}\Big(\log\frac{e}{1-|a|}\Big)^{\alpha}\int_{[0,1)}\frac{(1-|a|)^t}{(1-x)^r(1-|a|x)^{s+t-r}}\mathrm{d}\nu(x)<\infty.$$

注意到 $s+t-r>0$ 和 $|1-ax|\geq 1-|a|x$。于是我们得到 $(ii)\Rightarrow(iii)$ 的推论。

$(iii)\Rightarrow(i)$。对于 $r\geq 0$ 和 $a\in\mathbb{D}$，显然

$$\begin{aligned}
&\Big(\log\frac{e}{1-|a|}\Big)^{\alpha}\int_{[0,1)}\frac{(1-|a|)^t}{(1-x)^r|1-ax|^{s+t-r}}\mathrm{d}\nu(x)\\
\geq&\Big(\log\frac{e}{1-|a|}\Big)^{\alpha}\int_{[0,1)}\frac{(1-|a|)^t}{|1-ax|^{s+t}}\mathrm{d}\nu(x).
\end{aligned}$$

结合引理 B，我们得到所需的结果。

$(iii)\Rightarrow(iv)$ 的推论是显然的。

$(iv)\Rightarrow(ii)$。显然，

$$\begin{aligned}
&\sup_{y\in[0,1)}\int_{[0,1)}\frac{(1-y)^t(\log\frac{e}{1-y})^{\alpha}}{(1-x)^r(1-yx)^{s+t-r}}\mathrm{d}\nu(x)\\
\leq&\sup_{a\in\mathbb{D}}\Big|\int_{[0,1)}\frac{(1-|a|)^t(\log\frac{e}{1-|a|})^{\alpha}}{(1-x)^r(1-ax)^{s+t-r}}\mathrm{d}\nu(x)\Big|<\infty,
\end{aligned}$$

这就得到了(ii)。证明完毕。 □

注 3. 命题 2.2 中 ν 支撑于 $[0,1)$ 这一条件同样不可或缺。对于 $p>0$，记 $\mathcal{Q}^{p}{}_{\log}$ 为满足$|f'(w)|^2(1-|w|^2)^p\mathrm{d}A(w)$ 是 2-对数型 p-Carleson 测度（参见 [9, 21]）的 $H(\mathbb{D})$ 中函数 f 的集合。已知，若 $0<p_1<p_2<1$，则 $\mathcal{Q}^{p_1}{}_{\log}\subsetneq\mathcal{Q}^{p_2}{}_{\log}$。设 $0<t<1$和$0<r<s<1$ 满足 $s=r+t$。令 $\mathrm{d}\mu(w)=|f'(w)|^2(1-|w|^2)^s\mathrm{d}A(w)$,

$w \in \mathbb{D}$，其中 $f \in \mathcal{Q}^s_{\log} \backslash \mathcal{Q}^t_{\log}$。那么 $\mathrm{d}\mu$ 是 2-对数型 s-Carleson 测度。由于 f 不属于 $\mathcal{Q}^t_{\log}$，我们可知

$$\begin{aligned}
&\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|)^t (\log \frac{e}{1-|a|})^2}{(1-|w|)^r |1-a\overline{w}|^{s+t-r}} \mathrm{d}\mu(w) \\
=&\sup_{a\in\mathbb{D}} \Big(\log \frac{e}{1-|a|} \Big)^2 \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \frac{(1-|a|)^t (1-|w|)^t}{|1-a\overline{w}|^{2t}} \mathrm{d}A(w) \\
=&+\infty.
\end{aligned}$$

对于 $[0,1)$ 上的消失对数 Carleson 测度，我们也有类似的结果。

命题 2.3. 假设 $0 < t < \infty$、$0 \le \alpha < \infty$、$0 \le r < s < \infty$ 和 ν 是 $[0,1)$ 上的有限正博雷尔测度。则以下条件等价：

(i) ν 是消失 α-对数 s-Carleson 测度；

(ii)

$$\lim_{|a|\to 1} \int_{[0,1)} \frac{(1-|a|)^t (\log \frac{e}{1-|a|})^\alpha}{(1-x)^r (1-|a|x)^{s+t-r}} \mathrm{d}\nu(x) = 0;$$

(iii)

$$\lim_{|a|\to 1} \int_{[0,1)} \frac{(1-|a|)^t (\log \frac{e}{1-|a|})^\alpha}{(1-x)^r |1-ax|^{s+t-r}} \mathrm{d}\nu(x) = 0;$$

(iv)

$$\lim_{|a|\to 1} \Big| \int_{[0,1)} \frac{(1-|a|)^t (\log \frac{e}{1-|a|})^\alpha}{(1-x)^r (1-ax)^{s+t-r}} \mathrm{d}\nu(x) \Big| = 0.$$

证明。基于引理 B 和命题 2.2 的证明，本命题的证明相当标准。证明从略。□

3. 从 B_p 到某些解析函数空间的 $\mathcal{C}_\mu$ 算子

本节中，对于 $p > 1$ 和 $s > 1$，应用第 2 节给出的 $[0,1)$ 上对数 Carleson 测度的描述，我们刻画从 B_p 到介于均值 Lipschitz 空间 $\Lambda^s_{1/s}$ 与 Bloch 空间之间的巴拿赫空间 X 的 $\mathcal{C}_\mu$ 算子的有界性和紧性。

我们回顾下面算子 $\mathcal{C}_\mu$ 的一个表示形式，该表示是 [12] 中的命题 1。

引理 C. 假设 $f \in H(\mathbb{D})$ 且 μ 是 $[0,1$ 上的有限正博雷尔测度。那么

$$\mathcal{C}_\mu(f)(z) = \int_{[0,1)} \frac{f(tz)}{1-tz} d\mu(t), \quad z \in \mathbb{D}.$$

本节的第一个主要结果如下。

定理 3.1. 假设 $1 < p < \infty, 1 < s < \infty, X$ 是 $\mathbb{D}$ 中满足$\Lambda^s_{1/s} \subseteq X \subseteq \mathcal{B}$的解析函数巴拿赫空间，且 μ 是定义在$[0,1$上的有限正博雷尔测度。令 q 为满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$的实数。则以下条件等价：

(i) $\mathcal{C}_\mu$ 是从 B_p 到 X的有界算子；(ii) μ 是一个 $\frac{1}{q}$-对数型 1-Carleson 测度。

证明。设 μ 是一个$\frac{1}{q}$-对数型 1-Carleson 测度。注意到 $s>1$。由命题 2.2 可得

$$\sup_{0<r<1}\int_{[0,1)}\frac{(1-r)^{1-\frac{1}{s}}}{(1-tr)^{2-\frac{1}{s}}}\mathrm{d}\mu(t)<\infty, \tag{3.1}$$

and

$$\sup_{0<r<1}\int_{[0,1)}\frac{(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\big(\log\frac{2}{1-r}\big)^{\frac{1}{q}}}{(1-tr)^{2-\frac{1}{s}}}\mathrm{d}\mu(t)<\infty. \tag{3.2}$$

设 $f\in B_p$。由引理 C 可得

$$\mathcal{C}_\mu(f)'(z)=\int_{[0,1)}\frac{tf'(tz)}{1-tz}\mathrm{d}\mu(t)+\int_{[0,1)}\frac{tf(tz)}{(1-tz)^2}\mathrm{d}\mu(t),\quad z\in\mathbb{D}. \tag{3.3}$$

由 (3.3) 和闵可夫斯基不等式，得到

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<r<1}(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\Big(\int_0^{2\pi}|\mathcal{C}_\mu(f)'(re^{i\theta})|^s\mathrm{d}\theta\Big)^{\frac{1}{s}}\\
\lesssim&\sup_{0<r<1}(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\Big(\int_0^{2\pi}\Big|\int_{[0,1)}\frac{tf'(tre^{i\theta})}{1-tre^{i\theta}}\mathrm{d}\mu(t)\Big|^s\mathrm{d}\theta\Big)^{\frac{1}{s}}\\
&+\sup_{0<r<1}(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\Big(\int_0^{2\pi}\Big|\int_{[0,1)}\frac{tf(tre^{i\theta})}{(1-tre^{i\theta})^2}\mathrm{d}\mu(t)\Big|^s\mathrm{d}\theta\Big)^{\frac{1}{s}}\\
\lesssim&\sup_{0<r<1}(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\int_{[0,1)}\Big(\int_0^{2\pi}\Big|\frac{tf'(tre^{i\theta})}{1-tre^{i\theta}}\Big|^s\mathrm{d}\theta\Big)^{\frac{1}{s}}\mathrm{d}\mu(t)\\
&+\sup_{0<r<1}(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\int_{[0,1)}\Big(\int_0^{2\pi}\Big|\frac{tf(tre^{i\theta})}{(1-tre^{i\theta})^2}\Big|^s\mathrm{d}\theta\Big)^{\frac{1}{s}}\mathrm{d}\mu(t).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

由于 (3.1) 且 B_p 是 Bloch 空间 $\mathcal{B}$ 的子集，我们推得

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<r<1}(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\int_{[0,1)}\Big(\int_0^{2\pi}\Big|\frac{tf'(tre^{i\theta})}{1-tre^{i\theta}}\Big|^s\mathrm{d}\theta\Big)^{\frac{1}{s}}\mathrm{d}\mu(t)\\
\lesssim&\|f\|_{\mathcal{B}}\sup_{0<r<1}(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\int_{[0,1)}\frac{1}{1-tr}\Big(\int_0^{2\pi}\frac{1}{|1-tre^{i\theta}|^s}\mathrm{d}\theta\Big)^{\frac{1}{s}}\mathrm{d}\mu(t)\\
\approx&\|f\|_{\mathcal{B}}\sup_{0<r<1}\int_{[0,1)}\frac{(1-r)^{1-\frac{1}{s}}}{(1-tr)^{2-\frac{1}{s}}}\mathrm{d}\mu(t)\lesssim\|f\|_{B_p}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

众所周知（参见 [23]），

$$|f(z)|\lesssim\|f\|_{B_p}\Big(\log\frac{2}{1-|z|^2}\Big)^{1/q}$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$ 均成立。结合式 (3.2)，我们可推出

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<r<1}(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\int_{[0,1)}\Big(\int_0^{2\pi}\Big|\frac{tf(tre^{i\theta})}{(1-tre^{i\theta})^2}\Big|^s\mathrm{d}\theta\Big)^{\frac{1}{s}}\mathrm{d}\mu(t)\\
\lesssim&\|f\|_{B_p}\sup_{0<r<1}(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\int_{[0,1)}\Big(\log\frac{2}{1-tr}\Big)^{\frac{1}{q}}\mathrm{d}\mu(t)\Big(\int_0^{2\pi}\frac{1}{|1-tre^{i\theta}|^{2s}}\mathrm{d}\theta\Big)^{\frac{1}{s}}\\
\lesssim&\|f\|_{B_p}\sup_{0<r<1}\int_{[0,1)}\frac{(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\big(\log\frac{2}{1-r}\big)^{\frac{1}{q}}}{(1-tr)^{2-\frac{1}{s}}}\mathrm{d}\mu(t)\\
\lesssim&\|f\|_{B_p}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

结合 (3.4)、(3.5) 和 (3.6)，可知对于任意 $f \in B_p$，$\mathcal{C}_\mu(f) \in \Lambda^s_{1/s}$。因此，当 $f \in B_p$ 时，$\mathcal{C}_\mu(f) \in X$。由闭图定理可知，$\mathcal{C}_\mu$ 是从 B_p 到 X 的有界算子。

反过来，假设 (i) 成立。那么，$\mathcal{C}_\mu$ 是从 B_p 到 $\mathcal{B}$ 的有界算子。对于$t \in (1/2,1)$，令

$$f_t(z) = \Big(\log\frac{e}{1-t}\Big)^{-1/p}\log\frac{1}{1-tz}$$

对于 $z \in \mathbb{D}$。显然，

$$f_t(z) = \Big(\log\frac{e}{1-t}\Big)^{-1/p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}t^k z^k, \quad z \in \mathbb{D}.$$

众所周知（参见第 [15, 591] 页），

$$\sup_{t\in(1/2,1)}\|f_t\|_{B_p} \lesssim 1.$$

Then

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in(1/2,1)}\|f_t\|_{B_p} &\geq \|f_{\frac{N}{N+1}}\|_{B_p}\\
&\gtrsim \|\mathcal{C}_\mu(f_{\frac{N}{N+1}})\|_{\mathcal{B}}\\
&\gtrsim \sup_{z\in\mathbb{D}}\big|\mathcal{C}_\mu(f_{\frac{N}{N+1}})'(z)\big|(1-|z|).
\end{aligned}$$

对所有 $N>2$ 均成立。因此,

$$\begin{aligned}
1 &\gtrsim [\log(N+1)]^{-\frac{1}{p}} \sup_{z\in\mathbb{D}} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} n\mu_n \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{N}{N+1})^k}{k} \Big) z^{n-1} \Big| (1-|z|) \\
&\gtrsim [\log(N+1)]^{-\frac{1}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} n\mu_n \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{N}{N+1})^k}{k} \Big) \Big(\frac{N}{N+1} \Big)^{n-1} \frac{1}{N+1} \\
&\gtrsim \frac{1}{(N+1)[\log(N+1)]^{\frac{1}{p}}} \sum_{n=1}^{\infty} n\mu_n \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Big) \Big(\frac{N}{N+1} \Big)^{2n-1} \\
&\gtrsim \frac{1}{(N+1)[\log(N+1)]^{\frac{1}{p}}} \sum_{n=1}^{\infty} n\mu_n \log(n+1) \Big(\frac{N}{N+1} \Big)^{2n-1} \\
&\gtrsim \frac{1}{(N+1)[\log(N+1)]^{\frac{1}{p}}} \sum_{n=1}^{N} n\mu_n \log(n+1) \Big(\frac{N}{N+1} \Big)^{2n-1} \\
&\gtrsim \frac{1}{(N+1)[\log(N+1)]^{\frac{1}{p}}} \mu_N \sum_{n=1}^{N} n \log(n+1) \Big(\frac{N}{N+1} \Big)^{2n-1} \\
&\gtrsim \frac{1}{(N+1)[\log(N+1)]^{\frac{1}{p}}} \mu_N \sum_{n=[\frac{N+1}{2}]}^{N} n \log(n+1) \Big(\frac{N}{N+1} \Big)^{2n-1} \\
&\gtrsim \frac{1}{(N+1)[\log(N+1)]^{\frac{1}{p}}} \mu_N N^2 \log(N+1) \\
&\approx \mu_N N [\log(N+1)]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

对所有 $N>2$。结合命题 2.1，我们得到 μ 是一个$\frac{1}{q}$-对数型 1-Carleson 测度。证明完毕。□

接下来我们考虑从平均 Lipschitz 空间 $\Lambda^s_{1/s}$ 到 Bloch 空间之间进入巴拿赫空间X 的 $\mathcal{C}_\mu$ 算子的紧性。

定理 3.2. 假设 $1<p<\infty$、 $1<s<\infty$、 X 是 $\mathbb{D}$ 中满足 $\Lambda^s_{1/s} \subseteq X \subseteq \mathcal{B}$的解析函数巴拿赫空间，且 μ 是定义在$[0,1$上的有限正博雷尔测度。令 q 为满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$的实数。则下列条件等价:

(i) $\mathcal{C}_\mu$ 是从 B_p 到 X的紧算子；(ii) μ 是消失的$\frac{1}{q}$-对数型 1-Carleson 测度。

证明。 $(ii) \Rightarrow (i)$ 。设 μ 是一个消失的$\frac{1}{q}$-对数型 1-Carleson 测度。令 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是 B_p 中的一个序列，使得 $\sup_m \|f_m\|_{B_p}<\infty$ ，且当 $m\to\infty$时，$\{f_m\}$ 在 $\mathbb{D}$的紧子集上一致趋于 0。只需证明$\|\mathcal{C}_\mu(f_m)\|_{\Lambda^s_{1/s}} \to 0$ad $m\to\infty$。

对于任意 $\epsilon>0$，由命题 2.3 可知，存在常数 δ，使得 $\delta\in$(0,1)，满足

$$\int_{[0,1)} \frac{(1-r)^{1-\frac{1}{s}} \big(\log \frac{1}{1-r} \big)^{\frac{1}{q}}}{(1-tr)^{2-\frac{1}{s}}} \mathrm{d}\mu(t) < \epsilon \tag{3.7}$$

对所有 $r\in(\delta,1)$ 均成立。由定理 3.1 的证明、$\sup_m \|f_m\|_{B_p}<\infty$ 以及 (3.7)，我们得到

$$\begin{aligned}&(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\Big(\int_0^{2\pi}|\mathcal{C}_\mu(f_m)'(re^{i\theta})|^s\mathrm{d}\theta\Big)^{\frac{1}{s}}\\ \lesssim&\|f_m\|_{B_p}\int_{[0,1)}\frac{(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\big(\log\frac{1}{1-r}\big)^{\frac{1}{q}}}{(1-tr)^{2-\frac{1}{s}}}\mathrm{d}\mu(t)\\ \lesssim&\,\epsilon\end{aligned}\tag{3.8}$$

对所有 $r\in(\delta,1)$。

由于 $\{f_m\}$ 和 $\{f_m'\}$ 在 $\mathbb{D}_\delta=\{z\in\mathbb{D}:\,|z|\le\delta\}$ 中都一致趋于 0，因此存在一个正整数 m_0，使得

$$\sup_{z\in\mathbb{D}_\delta}|f_m(z)|<\epsilon,\ \text{and}\ \ \sup_{z\in\mathbb{D}_\delta}|f_m'(z)|<\epsilon$$

当 $m>m_0$ 时。注意到 μ 是有限的，且 μ 也是一个 $\frac{1}{q}$ -对数型 1-Carleson 测度。于是

$$\sup_{r\in[0,1)}\left(\int_{[0,1)}\frac{(1-r)^{1-\frac{1}{s}}}{(1-tr)^{1-\frac{1}{s}}}\mathrm{d}\mu(t)+\int_{[0,1)}\frac{(1-r)^{1-\frac{1}{s}}}{(1-tr)^{2-\frac{1}{s}}}\mathrm{d}\mu(t)\right)<\infty.$$

因此，对于 $m>m_0$，我们得到

$$\begin{aligned}&(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\Big(\int_0^{2\pi}|\mathcal{C}_\mu(f_m)'(re^{i\theta})|^s\mathrm{d}\theta\Big)^{\frac{1}{s}}\\ \lesssim&(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\int_{[0,1)}\Big(\int_0^{2\pi}\Big|\frac{tf_m'(tre^{i\theta})}{1-tre^{i\theta}}\Big|^s\mathrm{d}\theta\Big)^{\frac{1}{s}}\mathrm{d}\mu(t)\\ &+(1-r)^{1-\frac{1}{s}}\int_{[0,1)}\Big(\int_0^{2\pi}\Big|\frac{tf_m(tre^{i\theta})}{(1-tre^{i\theta})^2}\Big|^s\mathrm{d}\theta\Big)^{\frac{1}{s}}\mathrm{d}\mu(t)\\ \lesssim&\epsilon\left(\int_{[0,1)}\frac{(1-r)^{1-\frac{1}{s}}}{(1-tr)^{1-\frac{1}{s}}}\mathrm{d}\mu(t)+\int_{[0,1)}\frac{(1-r)^{1-\frac{1}{s}}}{(1-tr)^{2-\frac{1}{s}}}\mathrm{d}\mu(t)\right)\\ \lesssim&\epsilon\end{aligned}\tag{3.9}$$

对所有 $0\le r\le\delta$。显然，$\lim_{m\to\infty}\mathcal{C}_\mu(f_m)(0)=0$。由此以及 (3.8) 和 (3.9)，存在一个正整数 m_0，使得当 $m>m_0$ 时，$\|\mathcal{C}_\mu(f_m)\|_{\Lambda^s_{1/s}}\lesssim\epsilon$。注意到 X 是 $\mathbb{D}$ 中具有 $\Lambda^s_{1/s}\subseteq X\subseteq\mathcal{B}$ 的解析函数巴拿赫空间。因此，$\mathcal{C}_\mu$ 是从 B_p 到 X 的紧算子。

$(i)\Rightarrow(ii)$。假设条件 (i) 成立。那么，$\mathcal{C}_\mu$ 是从 B_p 到 $\mathcal{B}$ 的紧算子。对于 $1/2<t<1$，令

$$f_t(z)=\Big(\log\frac{e}{1-t}\Big)^{-1/p}\log\frac{1}{1-tz},\quad z\in\mathbb{D}.$$

Then

$$\sup_{1/2<t<1}\|f_t\|_{B_p}\lesssim 1.$$

显然，当 $t\to1^-$ 时，函数 f_t 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致趋于 0。然后

$$\|\mathcal{C}_\mu(f_t)\|_{\mathcal{B}}\to0,\ \text{as}\ t\to1^-.\tag{3.10}$$

取 $t=\frac{N}{N+1}$ 为 $N>2$。由定理 3.1 的证明可得

$$\|\mathcal{C}_\mu(f_{\frac{N}{N+1}})\|_{\mathcal{B}} \gtrsim \mu_N N[\log(N+1)]^{\frac{1}{q}}$$

对所有 $N>2$ 均成立。将其与 (3.10) 结合，我们得到

$$\mu_N = o\Big(\frac{1}{N[\log(N+1)]^{1/q}}\Big).$$

由此根据命题 2.1 可知， μ 是一个消失的 $\frac{1}{q}$-对数型 1-Carleson 测度。证明完毕。□

假设 $s>1$ 和 $p>1$。容易验证，函数 $\log(1-z)$ 属于 $\Lambda^s_{1/s}$，但当 $p>1$ 时，它不属于 B_p。因此 $\Lambda^s_{1/s}\nsubseteq B_p$。目前仍未解决如何刻画从 B_p 到 B_p的 $\mathcal{C}_\mu$ 算子的有界性和紧性（参见 [10,第 4] 节）。

参考文献

[1] G. Bao 和 H. Wulan，作用于 Dirichlet 空间的 Hankel 矩阵，J. Math. Anal. Appl.，409（2014），228-235。[2] G. Bao、F. Sun 和 H. Wulan，作用于 H^∞ 的类 Ces`aro 算子的 Carleson 测度与值域，Anal.Math.Phys.，12（2022），第 142 号论文，14 页。[3] O. Blasco，Hardy 空间上的 Ces`aro 算子，J. Math. Anal. Appl.，（2023），doi: 10.1016/j.jmaa.2023.127017。[4] O. Blasco，带权 Bergman 空间（$0<p\leq 1$）上的算子及其应用，Duke Math.J.，66（1992），443-467。[5] P. Bourdon、J. Shapiro 和 W. Sledd，Fourier 级数、平均 Lipschitz 空间与有界平均振荡，Analysis at Urbana，第 I 卷（Urbana，IL，1986-1987），81-110，London Math. Soc. Lecture Note Ser.，137，Cambridge Univ. Press，Cambridge，1989。[6] C. Chatzifountas、D. Girela 和 J. Pel´aez，作用于 Hardy 空间的广义 Hilbert 矩阵，J.Math.Anal.Appl.，413（2014），154-168。[7] P. Duren， H^p 空间理论，Pure and Applied Mathematics，第 38 卷，Academic Press，New York-London，1970。[8] P. Duren，Carleson 定理的推广，Bull. Amer. Math. Soc.，75（1969），143-146。[9] P. Galanopoulos，关于从 $\mathcal{B}_{\log}$ 到 $\mathcal{Q}^p{}_{\log}$ 拉回，J. Math. Anal. Appl.，337（2008），712-725。[10] P. Galanopoulos、D. Girela、A. Mas 和 N. Merch´an，径向测度诱导的作用于 Dirichlet 空间的算子，ResultsMath.，78（2023），第 106 号论文。[11] P. Galanopoulos、D. Girela 和 N. Merch´an，与单位圆盘上的博雷尔测度相关的 Ces`aro 型算子及其在某些解析函数 Hilbert 空间上的作用，J. Math. Anal.Appl.，526（2023），第 127287 号论文。[12] P. Galanopoulos、D. Girela 和 N. Merch´an，作用于解析函数空间的 Ces`aro 类算子，Anal.Math.Phys.，12（2022），第 51 号论文，29 页。[13] J. Garnett，有界解析函数，修订第一版，Graduate Texts in Mathemat- ics，236，Springer，New York，2007。[14] D. Girela 和 N. Merch´an，作用于共形不变空间的广义 Hilbert 算子，BanachJ.Math.Anal.，12（2018），374-398。[15] D. Girela 和 N. Merch´an，作用于解析函数空间的 Hankel 矩阵，Integr. Equ.Oper.Theory，89（2017），581-594。[16] G. Hardy，关于 Hilbert 定理的一则注记，Math.Z.，6（1920），314-317。[17] J. Jin 和 S. Tang，Dirichlet 型空间上的广义 Ces`aro 算子，ActaMath.Sci. Ser.B(Engl.Ed.)，42（2022），212-220。[18] B. MacCluer 和 R. Zhao，消失对数 Carleson 测度，IllinoisJ.Math.，46（2002），507-518。[19] J. Pau 和 R. Zhao，Carleson 测度、Riemann-Stieltjes 算子与一般函数空间族上的乘法算子，Integr.Equ.Oper.Theory，78（2014），483-514。

[20] P. Tang 和 X. Zhang，作用于 Bloch 型空间之间的 Ces`aro 类算子，（2022），arXiv：2208.11921。[21] J. Xiao， $\mathcal{Q}_p$ 冠定理，PacificJ.Math.，194（2000），491-509。[22] R. Zhao，关于对数 Carleson 测度，Acta Sci. Math. (Szeged)，69（2003），605-618。[23] K. Zhu，解析 Besov 空间，J.Math.Anal.Appl.，157（1991），318-336。[24] K. Zhu，函数空间中的算子理论，第二版，数学调查与专著，138，美国数学会，普罗维登斯，RI，2007。[25] A. Zygmund，三角级数，第 I 卷，第三版，Robert A. Fefferman 作序，剑桥数学丛书，剑桥大学出版社，剑桥，2002。

FANGMEI SUN，复旦大学，中国上海 200433电子邮件地址：fmsun@fudan.edu.cn

FANGQIN YE，汕头大学，中国汕头 515063 电子邮件地址：fqye@stu.edu.cn

LIUCHANG ZHOU，汕头大学，中国汕头 515063，电子邮箱：20lczhou@stu.edu.cn