arXiv:2305.02724v1 [cs.CG] 4 May 2023

迈向分层空间学习：2-复形

Yossi Bokor Bleile

数学科学系，奥尔堡大学，Fredrik Bajers Vej 7K，奥尔堡 Øst，9220，丹麦。

贡献作者：yossib@math.aau.dk；

摘要

本文研究一类简单的分层空间——2-复形。我们提出一种算法，可从在嵌入的二维复形上采样得到的点云中学习其抽象结构。我们借鉴并运用了计算几何、代数拓扑和拓扑数据分析中的工具与思想，并证明在关于嵌入的假设条件下，所识别的抽象结构是正确的。

关键词： 分层空间学习、嵌入空间、应用拓扑、计算几何

数学学科分类： 55N31，68T09，51-08

1 引言

近年来技术的发展导致我们能够收集的数据数量大幅增加，复杂性也显著提升。这些增长要求我们采用新方法，以便高效地发现和建模其底层结构。随着我们能够观测数据的维数增加，能够降低大量数据的维数变得愈发重要。通过扩展我们能够识别的结构类别，可以解决其中一些难题。在Bokor 等人 (2021), 作者移除了维数恒定这一假设，并提出了一种用于学习最简单类别的分层空间——图的算法。分层空间是通过将若干（流形）片段粘合在一起而描述的空间，这些片段称为层。每个层的维数不受限制，而粘合方式可以形成各种有趣且复杂的局部结构。我们将他们的工作扩展到识别 2- 复形底层的抽象结构。

正如 Bokor 等人 (2021) 所指出的，流形学习可用于检测和建模数据集的底层结构。存在多种从（含噪）样本中学习流形结构的方法和算法，参见 Cheng 等人 (2005)、Dey (2007)、Dey 和 Wang (2014)。这些方法通常会对流形和采样过程作出假设，一般表现为对曲率、样本密度以及噪声类型的限制。许多应用中产生的数据集并不满足曲率方面的假设，尤其是由交通网络中的人员和车辆移动产生的地理空间数据集。我们进一步迈出一步，扩大允许的底层结构范围，将二维分层空间纳入其中。Bendich 等人 (2010) 着重介绍了一种算法，用于识别两个点是否采样自分层空间的同一分层，但没有提出检测该部分维数或整体结构的方法。 Stolz 等人 (2020) 提出了一种算法，用于检测相交的两个流形的样本，这是将空间拆分为分层部分的初步近似；该方法提供了实验验证，但没有理论保证。文献 Aanjaneya 等人 (2012) 着重于重建图上的度量，其输入为度量图上的内在距离；相关理论保证针对的是度量中的边长，而非嵌入的几何性质。特别是，他们无需考虑度为二的顶点，因为在其设定中，这些顶点是边上的点。Chazal 等人(2009) 提出了一种对欧几里得空间中的紧集进行采样和重建的方法，同样着重于豪斯多夫噪声有界且密度充足的样本。在满足充分条件时，他们保证同伦等价，但没有提出学习分层结构的方法。 Bendich 等人(2007) 提出了一种利用持续同调评估样本在特定点处的局部同调的算法，该算法使用 Delauney 三角剖分，计算代价很高。

1.1 贡献

本文介绍了一种算法，用于学习嵌入的二维复形所蕴含的抽象结构，并根据样本所来自的几何嵌入给出理论保证。具体而言，该算法可用于学习各维度胞腔的数量，以及它们如何拼接在一起。随后，可将该算法的输出作为起点，学习样本所来自的具体嵌入。以往的研究主要利用持续同调来近似某个点处的局部同调，但这会带来显著的计算开销。我们通过使用固定的近似尺度来近似每个点处的局部同调，从而避免了这一问题；该尺度与嵌入的几何条件相关。该算法易于并行运行，因此能显著缩短大型数据集上的运行时间。尽管该算法仅适用于 2-复形，但许多应用中产生的数据集都是二维的，因此它为进一步发展、以放宽或移除维数假设奠定了基础。我们承认，从某些角度来看，从图到 2-复形只是迈出了一小步，但要保证……的准确性，还涉及许多技术和几何细节。

即使对于 2-复形也能学习到结构，而这正是当前阶段无法去除维数假设的限制因素。

本文从第 2 节开始，其中介绍了全文中使用的主要对象和工具的定义。随后，第 3 节给出了第 4 节所用的几何引理；该节探讨我们用于划分样本 P 的局部几何和拓扑。最后，第 5 节介绍了恢复抽象结构的算法。第 5 节包含一系列引理（引理 5.9 至 5.24），涵盖了定理 5.25 中所用的各种情形；该定理也被称为本文的“大定理”。

2 定义与记号

我们先介绍本文中会用到的一些定义和记号。首先给出复形的如下定义，该定义沿用 Carlsson（2014）中的定义 2.4Carlsson(2014)。

定义 *2.1*（抽象复形，*Carlsson*（*2014*）中的定义 *2.4*）。抽象单纯复形 X 由节点对 $(V(X), \Sigma(X))$ 组成，其中 $V(X)$ 是有限集，而 $\Sigma(X)$ 是 $V(X)$ 的幂集的子集；对于所有 $\sigma \in \Sigma(X)$ 和 $\emptyset \neq \tau \subseteq \sigma$，都有 $\tau \in \Sigma(X)$。我们称 $V(X)$ 为顶点，称 $\Sigma(X)$ 为 X 的单形。

为便于记号并避免本文后续内容产生混淆，我们将对最高维数为 2 的抽象单纯复形采用以下专门定义。

定义 2.2（抽象二维 -复形）。一个抽象二维 -复形 X 由以下部分组成：

1. 一个顶点集合 $V = V(X)$，*2.* 一个 $E = \{\sigma \in \Sigma(X) \mid \sigma$ 包含 *2* 个不同元素$\}$ 的边集合，*3.* 一个 $T = \{\sigma \in \Sigma(X) \mid \sigma$ 包含 *3* 个不同元素$\}$ 的三角形集合，

以及一个关联算子 $\mathcal{I}$，其作用如下：对于任意一对胞腔 $\sigma, \tau \in X$

$$\mathcal{I}(\sigma, \tau) = \begin{cases} 1 & if\ \sigma \subsetneq \tau \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

我们将自身限制为某个 $n \geq 3$ 下的 2-复形 X 在 $\mathbb{R}^n$ 中的线性嵌入。**定义 2.3**（2-复形的线性嵌入）。固定 $n \geq 3$，则 *2*-复形 X 在 $\mathbb{R}^n$ 中的线性嵌入 (X, Θ)由一个抽象的 2-复形 X 和一个映射组成

$$\Theta : X \to \mathbb{R}^n$$

使得

1. 在顶点 $v \in V$, Θ 上是单射；*2.* 在边 $\{u, v\} \in E$, Θ 上，通过对 $\Theta(u)$ 和 $\Theta(v)$ 进行线性插值定义：$\Theta(\{u, v\}) = uv$ 是连接 $\Theta(u)$ 和 $\Theta(v)$ 的线段；*3.* 在三角形 $\{u, v, w\} \in E$, Θ 上，通过对 $\Theta(u)$、$\Theta(v)$ 和 $\Theta(w)$ 进行线性插值定义：$\Theta(\{u, v, w\}) = \triangle uvw$ 是顶点为 $\Theta(u)$、$\Theta(v)$ 和 $\Theta(w)$ 的三角形，且 $\Theta(u)$、$\Theta(v)$、$\Theta(w)$ 不共线；*4.* 对于 X 的任意两个胞腔 σ, τ，有 $\Theta(\sigma) \cap \Theta(\tau) = \Theta(\sigma \cap \tau)$。我们将研究范围限定为满足以下条件的嵌入的 *2*-复形 $|X|_\Theta$ ：*5.* 如果一个顶点 v 恰好位于两条边 $\{v, u_1\}$ 和 $\{v, u_2\}$ 的边界上，那么 $\angle u_1 v u_2 \neq \pi$,

–

6. 如果一条边 $\{v_0, v_1\}$ 恰好位于两个三角形 $\{v_0, v_1, u_1\}$ 和 $\{v_0, v_1, u_2\}$ 的边界上，那么 v_0, v_1, u_1, u_2 不共面。

我们将 Θ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的像记为 $|X|_\Theta$。

我们经常讨论胞腔的边界。

定义 2.4（胞腔边界）。设 X 是一个抽象2-复形，并取一个胞腔 $\sigma \in X$。那么 τ， $\partial\tau$ 的边界 由满足 $\mathcal{I}(\sigma, \tau) = 1$ 的胞腔 $\sigma \in X$ 组成。

胞腔 $\sigma \in X$ 的一个重要性质是它是否局部极大。**定义 2.5**（局部极大单元）。设 σ 是一个2-复形中的胞腔。如果不存在满足 $\sigma \subset \tau$ 的胞腔 $\tau \in X$， $\tau \neq \sigma$，我们就称 σ 是局部极大 的。也就是说，不存在满足 σ 且位于 τ 的边界中的胞腔 τ。

注 1。考虑复形 X 中的两个胞腔 σ、τ。如果 σ 位于 τ 的边界中，我们称 σ 是 τ 的面；如果 τ 位于 σ 的边界中，我们称 σ 是 τ 的余面。

我们可以用加权图 B 表示 X 中胞腔的关联关系。**定义 2.6**（关联图）。 取一个抽象 2-复形 X。其 关联图 B X 是如下加权图：

1. 对于 X 的每个顶点 v，设置一个权重为0 的节点 n_v；*2.* 对于 X 的每条边 $e = \{u, v\}$，设置一个权重为1 的节点 n_e；*3.* 对于 X 的每个三角形 $t = \{u, v, w\}$，设置一个权重为2 的节点 n_t；*4.* 如果 $e \subset t$，则在权重为*2* 的节点 n_t 与权重为1 的节点 n_e 之间连一条边；*5.* 如果 $v \in t$，则在权重为2 的节点 n_t 与权重为0 的节点 n_v 之间连一条边；*6.* 如果 $v \in e$，则在权重为1 的节点 n_e 与权重为0 的节点 n_v 之间连一条边。

略去记号上的区别，我们通常用 $|X|$ 代替 $|X|_\Theta$ 或（X， Θ），用 v 同时表示抽象顶点及其嵌入位置 $\Theta(v)$，用 uv 同时表示抽象边及其嵌入图像 $\Theta(\{u, v\})$，并用 $\triangle uvw$ 同时表示抽象三角形及其嵌入图像 $\Theta(\{u, v, w\})$。根据上下文，应当可以清楚判断我们指的是抽象 2-复形中的元素，还是其在 $\mathbb{R}^n$ 中的图像。

本文采用以下约定。给定两个点 x， $y \in \mathbb{R}^n$, $\|x-y\|$表示 x 与 y之间的标准欧几里得距离；对于一个点 $x \in \mathbb{R}^n$ 和一个集合$Y \subset \mathbb{R}^n$，我们定义

$$d(x, Y) := \inf_{y \in Y} \|x - y\|,$$

对于两个集合 X， $Y \subset \mathbb{R}^n$，我们定义

$$d(X, Y) := \min\left\{\inf_{x \in X} d(x, Y), \inf_{y \in Y} d(y, X)\right\},$$
$$d_H(X, Y) := \max\left\{\sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X)\right\}.$$

我们还考虑子集 X 的加厚：我们令

$$X^\alpha := \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, H) \leq \alpha\}.$$

在本文结尾的证明中，我们使用弱特征尺寸的 X 来帮助我们构造同构。这一概念由Chazal 和 Lieutier (2007) 引入，定义为 X的距离函数的正临界值的下确界。

在算法的不同阶段，我们会考虑一个点集X的直径 。 X, $\mathcal{D}(X)$的直径 是任意一对点$x, y \in X$之间的最大距离：

$$\mathcal{D}(X) := \max_{x,y\in X} \|x - y\|.$$

我们用 $B_r(p)$ 表示以点 $p \in \mathbb{R}^n$ 为中心、半径为 r 的球； $\partial B_R(p)$ 表示该球的边界，并令

$$\mathbb{S}^k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

表示标准的 k-球面。我们也常常考虑球壳中的点。**定义 2.7**。 固定 $a < b$，并设 y 是 $\mathbb{R}^n$中的一个点。以 p为中心，半径为 a和 b 的 $S_a^b(p)$ 球壳定义为集合

$$\{q \in \mathbb{R}^n \mid a \leq \|q - p\| \leq b\}.$$

我们考虑两个半平面之间的二面角。

定义 2.8。 设 H_1, H_2 是具有公共边界直线 L 的两个半平面。那么， H_1 和 H_2 之间的二面角 α 是由两个向量 $v_1 \in H_1$和 $v_2 \in H_2$ 形成的角，这两个向量起点相同，均为 $x \in L$ ，且 v_1 和 v_2 都垂直于 L。

我们使用 ε-个 P 嵌入的二维复形 $|X|$的样本。

定义 2.9 (ε-样本)。 设 $|X| \subset \mathbb{R}^n$ 是一个嵌入的 2-复形。 ε-样本 P 是 $|X|$ 的有限子集，满足 $d_H(|X|, P) \leq \varepsilon$。

在 Bokor等人(2021) 中，作者使用由点集构成的阈值图子图函数（threshold graphon），我们也将采用这种方法。

定义 2.10 (阈值图，定义 3.1 Bokor 等人 (2021))。 设 $P \subset \mathbb{R}^N$为一个有限的点集，并固定 $r > 0$。阈值 r 处的图 r 定义在 P, $\mathfrak{G}_r(P)$是一个以 $p \in P$为顶点集，并且当 (p, q) 满足 $\|p - q\| \leq r$时包含该边的图。

˘本文考虑的对象是二维的，因此我们也使用$Cech$复形。

定义 2.11 (˘Cech 复形)。 设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有限点集。尺度为 δ 的 ˘Cech 复形 $\mathcal{C}_\delta(P)$ 是由 j-胞腔 $\{v_i\}_{i=0}^j$ 构成的复形，满足交集$\bigcap_{i=0}^j B_\delta(v_i)$ 非空。

现在，我们将本文的目标形式化。给定一个 ε样本 P，它来自某个线性嵌入的二维复形 $|X|$，我们希望恢复该二维复形X的抽象结构。为此，我们需要确定顶点数、边数和三角形数，以及它们之间的关联关系。我们通过首先判断每个 $p \in P$ 是否靠近某个非局部极大胞腔，或远离所有非局部极大胞腔，来实现这一目标。这将 P 划分为两个子集，直观而言分别为 P_{NLM} 包含靠近非局部极大胞腔的样本 p，以及 P_{LM} 仅包含靠近局部极大胞腔的样本 p 。关于P_{NLM} 和 P_{LM} 的严格定义见定义 4.6。这一过程的一部分涉及近似

每个 $p \in P$ 处的局部同调使用半径 r。这需要选择一个尺度，以便从 $|X|$ 近似 P。不同于 Bokor 等人 (2021)， P_{NLM} 与 P_{LM} 中的簇与顶点、边和三角形之间的关系并不直接。不过，我们仍然可以推断关联算子。

注释 2。 本文仅在非常严格的情形下使用局部同调 。它是一种非常一般的构造：对于空间 X， X 在点 $x \in X$处的局部同调是相对同调 $H(X, X \setminus \{x\})$。

3 几何引理

我们提供一些几何引理，作为局部结构定义的动机，并说明我们对 2-复形嵌入所作的几何假设。点云 P 在样本p处的局部结构定义包含两个部分：第一部分是一个拓扑条件，涉及球壳中 p附近样本的同调；第二部分涉及这些样本的几何性质。本节中的几何引理使我们能够区分靠近非局部极大胞腔的点与仅靠近局部极大胞腔的点，前提是 P 在 p 处的拓扑结构并不成立，见第 4节。本节引理的证明可见附录 A。

我们先介绍一个有用的引理，它给出了球壳内距一条射线 a 的点与射线上位于球壳中间的点之间的距离上界。**引理 3.1**。 设 $L \subset \mathbb{R}^n$ 是一条起点为点 z 的射线，并固定

$$R \geq 14\varepsilon > 0.$$

设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 具有 $d_H(P, L) \leq \varepsilon$，并取 $p \in \mathbb{R}^n$，使得

$$\|p - z\| \leq \frac{R}{2}.$$

设 x 是 L 中满足 $\|x - p\| = R$ 的点。那么对于所有 $q \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$

$$\|q - x\| \leq \sqrt{2}\varepsilon.$$

接下来是引理 3.2，它启发了定义4.4中的第 3 部分。该引理考察某个点 $S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p)$ $\cap H^{\varepsilon}$ 所对应的 $p \in H^{\varepsilon}$中三点组之间的距离，其中H^{ε} 是将平面 H 加厚 ε所得，且 $\varepsilon > 0$。

引理 3.2。 考虑一个仿射2超平面 $H \subset \mathbb{R}^n$ ，并固定

$$R \geq 14\varepsilon \geq 0.$$

令 $P \subset \mathbb{R}^n$ 满足 $d_H(P, H) \leq \varepsilon$，并取满足 $d(p, H) \leq \varepsilon$ 的 p。那么，对于所有 $q_1 \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$，都存在 $q_2 \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$，使得

$$\|q_2 - q_1\| \geq 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - (1 + \sqrt{2})\varepsilon.$$

现在我们有了一个几何性质，可以用来检验点 p 以及$S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p)$ 中的样本是否来自平面的某个子集。我们希望了解，需要对两个三角形中靠近一条边的点施加哪些条件，才能保证该性质不成立。具体而言，引理 3.3 促成了定义 4.5 的第 4 部分。

为便于阅读，我们记

$$\Psi(\varepsilon, R) = \arccos\left(\frac{(R+2\varepsilon)^2 + \left(\frac{3R}{2} - \varepsilon\right)^2 - \left(2\sqrt{R^2-\varepsilon^2} - \left(2+2\sqrt{2}\right)\varepsilon\right)^2}{2(R+2\varepsilon)\left(\frac{3R}{2}-\varepsilon\right)}\right).$$

以下引理说明了我们对具有公共边界边 uv （度为二）的两个三角形之间的二面角所施加条件的依据。这使我们能够保证，对于样本 p 而言，$S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}$ （p）中的样本的几何与 p 靠近一个三角形但远离其边界时，$S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}$ （p）中的样本几何并不相同。

引理 3.3. 考虑两个仿射2-半平面 $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}^n$ ，其边界相同，记为 L，并固定 $R \geq 14\varepsilon > 0$。令 α 为 H_1 与 H_2之间的二面角。设 P为一个点集，使得 $d_H(P, H_1 \cup H_2) \leq \varepsilon$。此外，取 p，使得$d(p, H_1) \leq \varepsilon$。若

$$d(L,p) \leq \frac{R}{2} - 2\varepsilon$$

and

$$\alpha \in (0, \Psi(\varepsilon, R))$$

则存在 $q_1 \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$，使得对所有 $q_2 \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$

$$\|q_2 - q_1\| < 2\sqrt{R^2-\varepsilon^2} - \left(1+\sqrt{2}\right)\varepsilon.$$

接下来，我们研究射线和平面附近各点的几何性质，以此为不靠近局部极大胞腔的点构建一种检验方法。

有几种局部结构具有相同的拓扑结构：它们由两个不含 1-环的连通分量组成。在 Bokor 等人 (2021) 中，作者使用两个连通分量的质心之间的角，来区分度为二的顶点附近的点与边内部附近的点。遗憾的是，引入三角形后，这项测试就不再充分。如果我们先检查是否存在三角形，就可以再次使用内积测试。为检验是否存在三角形，我们考察两个连通分量的直径。

因此，我们首先界定一组仅位于直线附近的样本的直径。

引理 3.4 (射线附近点的直径)。 设 $L \subset \mathbb{R}^n$ 是一条起始于点 z 的射线，并固定 $R > 14\varepsilon > 0$。设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 具有 $d_H(P, L) \leq \varepsilon$，并取 $p \in \mathbb{R}^n$，使得$d(L, p) \leq \varepsilon$ 且 $\|p - z\| \leq \frac{R-\varepsilon}{2}$。那么 $\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P\right)^{\frac{3\varepsilon}{2}}$ 有一个连通分支 c，且其直径小于 $2\sqrt{2}\varepsilon$。

前一个引理给出了包含具有 ε 的边的连通分支的直径上界；这些点距 $S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p)$ 内的样本 p，且该样本靠近这条边边界上的一个顶点。我们需要保证，如果 p 靠近一条边的内部，就不会未通过直径检验。为此，我们得到以下推论，它是引理 3.4的推论。

推论 1. 令 $L \subset \mathbb{R}^n$ 为一条直线，并固定 $R > 3\varepsilon > 0$。令 $P \subset \mathbb{R}^n$ 具有 $d_H(P、L) \leq \varepsilon$，并取 $p \in \mathbb{R}^n$，使得 $d(L、p) \leq \varepsilon$ 以及

$$\|p - z\| \leq \frac{R-\varepsilon}{2}.$$

那么 $\left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap P\right)^{\frac{3\varepsilon}{2}}_{-}$有2个连通分支 c_1、c_2，且它们的直径小于 $2\sqrt{2\varepsilon}$。

证明。 首先注意到 $S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap L$ 由两个连通分支组成， C_1、C_2，它们之间的距离为 $R-\varepsilon$。因此，我们可以分别对 3.4 应用于 C_1 和 C_2，从而各得到一个连通分支，分别记为 c_1 和 c_2。此外， c_1 和 c_2 的直径都小于 $2\sqrt{2\varepsilon}$。 □

下面的引理保证：如果 $S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p)$ 中存在距一个三角形不超过 ε 的样本，那么直径检验就会失败。

引理3.5。 设 L_1、$L_2 \subset \mathbb{R}^n$ 是两条从同一点 z 出发的射线，它们之间的角 α 位于区间

$$\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right),$$

并固定 $R \geq 14\varepsilon > 0$。令 T 为 L_1 和 L_2 之间的集合。取满足 $d(T,p) \leq \varepsilon$ 且满足 $\|p - x\| \leq \frac{R-\varepsilon}{2}$ 的 $p \in \mathbb{R}^n$，以及满足 $d_H(P,T) \leq \varepsilon$ 的 $P \subset \mathbb{R}^n$。那么，存在 P 中的点 q_1, q_2，使得 $\|q_1 - p\|, \|q_2 - p\| \in [R-\varepsilon, R+\varepsilon]$ 成立，并且 $\|q_1 - q_2\| > 2\sqrt{2\varepsilon}$，且 q_1，q_2 是路径连通的。此外，包含 q_1 和 q_2 的连通分支的直径大于 $2\sqrt{2\varepsilon}$。

4 局部结构

为识别 2-复形的抽象结构，第 5 节中的算法首先将样本 P 划分为集合 P_{LM}，其中包含仅靠近局部极大单元的样本，以及 P_{NLM}，其中包含靠近非局部极大胞腔的样本。判断一个点是否属于 P_{NLM} 或 P_{LM} 的决策树总结于图 1中。此后，我们进一步划分 P_{LM} 和 P_{NLM}，以推断胞腔的数量及其维数，以及关联算子。

取一个嵌入的二维复形 $|X| \subset \mathbb{R}^n$，固定（一个适当的） $0 < \varepsilon \leq R$，并取$p \in \mathbb{R}^n$，使其具有 d（$|X|$，p） $\leq \varepsilon$。考虑 $|X|$在 p附近的拓扑和几何结构，首先从 B_R（p） $\cap |X|$ 开始。若 B_R（p） $\cap |X|$ 不连通，则将范围限制在包含 $\mathrm{proj}_{|X|}$（p）的连通分支 C_p 上。接着，考虑∂B_R（p） $\cap C_p$。令 $\mathrm{proj}_{|X|}$（p）为 p 到 $|X|$的投影，并令 σ_p 为包含 $\mathrm{proj}_{|X|}$（p）的胞腔。若 σ_p 是局部极大的，且 d（$|\partial\sigma_p|$，p） $> R$，则 ∂B_R（p） $\cap C_p$具有以下结构之一：

1. $\partial B_R(p) \cap C_p$ 为空，此时 σ_p 是局部极大的顶点；2. $\partial B_R(p) \cap C_p$ 是一对对跖点，此时 σ_p 是一个局部极大的1-胞腔；3. $\partial B_R(p) \cap C_p$ 同伦于位于一个平面中的 $\mathcal{S}^1$，此时 σ_p 是一个2-胞腔。

上述结构由两部分组成：我们考察$\partial B_R(p) \cap C_p$的拓扑结构，然后研究其几何。如果 p 位于某个非局部极大的胞腔 τ_p（可能是$\tau_p = \sigma_p$）的 R 内，那么其拓扑结构或几何结构都不属于上述情况。因此，我们采用两步过程来判断给定的样本 p 是否位于某个非局部极大的胞腔 τ_p的 R 内：首先，我们通过考察其同调来研究 $\partial B_R(p) \cap C_p$ 的拓扑结构，然后在必要时考虑其几何结构。我们令

$$\mathcal{H}_\bullet(p) := H_\bullet\left(\partial B_R(p) \cap C_p\right).$$

由于我们将讨论范围限定在 2-复形，因此重点关注 $\mathcal{H}_0(p)$ 和 $\mathcal{H}_1(p)$。

定义 4.1（局部同调特征）。设 $|X| \subset \mathbb{R}^n$ 是一个嵌入的2-复形，并固定 $R > \varepsilon > 0$。取满足 $d(p, |X|) \leq \varepsilon$的点 $p \in \mathbb{R}^n$。$|X|$ 在 p 处的局部同调特征 为

$$\mathrm{Sig}(p) := \left(|\mathcal{H}_0(p)|, |\mathcal{H}_1(p)|\right).$$

在上述情形中，$|X|$ 在 p 处的局部同调特征如下。

1. $\mathrm{Sig}(p) = (0, 0)$,
2. $\mathrm{Sig}(p) = (2, 0)$,
3. $\mathrm{Sig}(p) = (1, 1)$。

因此，如果 $\mathrm{Sig}(p)$ 不等于 (0, 0)、(2, 0) 或 (1, 1)，那么 p 位于一个并非局部极大的胞腔 τ_p的 R 内。如果 $\mathrm{Sig}(p)$ 为 (0, 0)，那么 p 位于零度顶点 ε 的 ε 内。遗憾的是，如果 $\mathrm{Sig}(p)$ 为 (2, 0) 或 (1, 1)，我们就需要考察 $\partial B_R(p) \cap C_p$的几何结构。当 $\mathrm{Sig}(p) = (2, 0)$ 时，可以如下区分 σ_p 是局部极大的 1-胞腔还是度为二的顶点 σ_p：设 $\partial B_R(p) \cap C_p$ 中的两个点分别为 c_1 和 c_2。如果 σ_p 是 1-胞腔，那么 $\angle c_1 p c_2 = \pi$；否则 $\angle c_1 p c_2 \neq \pi$。当 $\mathrm{Sig}(p) = (1, 1)$ 时，我们需要区分 σ_q 是 2-胞腔还是 σ_p位于 2-胞腔的边界上。可以通过检查 $\partial B_R(p) \cap C_p$是否包含于一个平面来判断：若是，则 σ_p 是 2-胞腔；若否，则 σ_p 是边或非局部极大的顶点。

回想一下，我们使用的是嵌入的二维复形的一个 ε-样本 P，而不是 $|X|$。我们希望利用 P 来近似 $\mathrm{Sig}(p)$。由于 P 是一个 ε-样本，我们可以通过先考察 $B_{R+\varepsilon}(p) \cap P$ 的结构，再考察 $S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap P$ 的结构，来近似 $\partial B_R(p) \cap C_p$。在定义 P 在 p 处的 (ε, R)- 局部结构（定义 4.3 ）之前，我们需要引入以下记号。

定义 4.2. 设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有限点集。那么，秩$^{\delta}_{k}{}^{\gamma}(P)$ 是由包含映射 $P^\delta \hookrightarrow P^\gamma$诱导的 k^{th} 同调群上的映射的秩。

现在我们可以正式定义 P 在 p 处的 (ε, R)-局部结构。

定义 4.3 ((ε, R)-局部同调特征。令 $P \subset \mathbb{R}^n$ 为一个 ε-样本集，其构成了嵌入的 2-复形 $|X|$，并固定 $R \geq 14\varepsilon$。令 C_{p^2} 为阈值图 $\mathfrak{G}^{-}_{3\varepsilon}\left(B_{R+\varepsilon}(p) \cap P\right)$ 中与 p 位于同一连通分支的样本。P 在样本 p 处的 (ε, R)-局部同调特征 $\mathrm{Sig}_{\varepsilon,R}(p)$ 为

$$\mathrm{Sig}_{\varepsilon,R}(p) := \left(\mathrm{rk}_0^{\frac{3\varepsilon}{2}, \frac{7\varepsilon}{2}}\left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap C_p^{\frac{3\varepsilon}{2}}\right), \mathrm{rk}_1^{\frac{3\varepsilon}{2}, \frac{7\varepsilon}{2}}\left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap C_p^{\frac{3\varepsilon}{2}}\right)\right).$$

现在我们定义局部结构的类型，首先从极大局部结构开始。

定义 4.4 （极大（ε, R）-局部结构）。设 P 是一个线性$_{3\varepsilon}$嵌入的2-复形 $|X|$ 的 ε 样本，并固定 $R \geq 14\varepsilon$。设 $C_p{}^2$ 为与 p 位于（$\overline{B}_{R+\varepsilon}(p) \cap P$）$^{\frac{3\varepsilon}{2}}$ 的同一连通分支中的样本集合。若以下任一条件成立，我们称 P在 p 处的（ε, R）-局部结构为极大：

1. $\mathrm{Sig}_{\varepsilon,\ R}(p) = (0,\ 0)$，在这种情况下，我们称($\varepsilon$，$R$)-局部结构在 p处的 P具有最大零维，

2. $\mathrm{Sig}_{\varepsilon,\ R}(p) = (2,\ 0)$，且 $\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap C_p^{3\varepsilon}{}^2\right)^{\frac{3\varepsilon}{2}}$ 的两个连通分支 c_1、c_2 的直径小于5ε，其中点分别为 q_1 和 q_2，满足

$$\langle q_1 - p, q_2 - p\rangle \leq -R^2 + 2R\varepsilon + 7\varepsilon^2,$$

在这种情况下，我们称(ε，R)-局部结构在 p 处的 P 具有最大一维，

3. $\mathrm{Sig}_{\varepsilon,\ R}(p) = (1,\ 1)$，且对于所有满足以下条件的$q_1 \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$，$\exists q_2 \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$

$$\|q_2 - q_1\| < 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - \left(1 + \sqrt{2}\right)\varepsilon.$$

在这种情况下，我们称(ε，R)-局部结构在 p 处的 P 具有最大二维，

接下来，我们定义非极大 (ε, R)-局部结构。

定义 4.5 (非极大（ε, R）-局部结构)。设 P 是一个 ε 线性嵌入2-复形 $|X|$ 的样本，并固定 $R \geq 14\varepsilon$。设$C_p{}^2$为与 p处于$\breve{}$ $\mathcal{C}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(S_{R+\varepsilon}(p) \cap P)$同一连通分支中的样本集合。如果满足以下任一条件，我们就称在 $p \in P$处的（ε, R）-局部结构非极大：

1. $\mathrm{Sig}_{\varepsilon,R}(p) = (n, 0)$ 对某些 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \neq 0$,2成立；2. $\mathrm{Sig}_{\varepsilon,R}(p) = (1, n)$ 对某些 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \neq 1$成立；3. $\mathrm{Sig}_{\varepsilon,R}(p) = (2,0)$，并令.....
的两个连通分支

$$\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap C_p^{\frac{3\varepsilon}{2}}\right)^{\frac{3\varepsilon}{2}}$$

令 c_1, c_2为最大值 $\{\mathcal{D}(c_1)\ \mathcal{D}(c_2)\} \leq 2\sqrt{2}\varepsilon$，¯并令 c_1, c_2 的中点为q_1, q_2

$$\langle q_1 - p, q_2 - p\rangle > -R^2 + 2R\varepsilon + 7\varepsilon^2,$$

4. $\mathrm{Sig}_{\varepsilon,\ R}(p) = (1,\ 1)$ 且存在 $q_1 \in P \cap S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}$，使得对所有 $q_2 \in P \cap S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}$

$$\|q_2 - q_1\| < 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - \left(1 + \sqrt{2}\right)\varepsilon.$$

定义了(ε，R)-局部结构的两类后，我们就可以定义初始划分。

定义 4.6 (P_{LM} 和 P_{NLM})。 设 P 是嵌入的2-复形$|X|$的一个 ε-样本。我们将 P 划分为两个集合 P_{LM} 和 P_{NLM}，其定义如下：

$$P_{LM} := \{p \in P \mid \textit{ the } (\varepsilon, R)\textit{-local structure at of } P \textit{ at } p \textit{ is maximal.}\}$$
$$P_{NLM} := \{p \in P \mid \textit{ the } (\varepsilon, R)\textit{-local structure of } P \textit{ at } p \textit{ is not maximal.}\}$$

注 3. 对于所有 $p \in P$， P要么具有最大的 $(\varepsilon,\ R)$-局部结构于 $p \in P$，要么不具有。因此，定义4.6中将 P 划分为 P_{LM} 和 P_{NLM} 的划分是互不相交的。

请注意，我们所处理的样本可能包含噪声，并且在定义 $\mathcal{C}_{\frac{3\varepsilon}{2}}\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap C_p^{\frac{3\varepsilon}{2}}\right)$-局部结构时，我们使用了 $\check{}$ 的同调（ε, R）。因此，我们对 $|X|$ 作出假设，以确保在样本靠近并非局部极大的胞腔时，我们能够正确检测到这一情况。我们对任意两个顶点 u 和 v之间的距离、边 uw 与顶点 $v \neq u$之间的距离、w以及具有公共边界顶点的任意一对边之间的角作出假设。此外，我们还对具有公共边界分量的任意两个 2-胞腔之间的二面角作出假设。为了推断关联算子，我们要求 R 与 ε之间的关系存在一个上界，因此我们也根据 R 限制了 ε的选择。决策流程图（图 1）中使用以下记号：

$$\beta = -R^2 + 2R\varepsilon + 7\varepsilon^2,$$
$$\gamma = 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - \left(1 + \sqrt{2}\right)\varepsilon.$$

为提高本文的可读性，我们定义以下函数。**定义 4.7.** 固定 $R > 14\varepsilon > 0$。我们定义以下函数：*1.*

$$\begin{aligned}\Psi_1(\varepsilon, R) &= \arccos\left(\frac{\left(\frac{R}{2} - \varepsilon\right)^2 - 18\varepsilon^2}{\left(\frac{R}{2} - \varepsilon\right)^2}\right) \\ &\geq \arccos\left(\frac{(R-\varepsilon)^2 - 18\varepsilon^2}{(R-\varepsilon)^2}\right) + 2\arcsin\left(\frac{2\varepsilon}{(R-\varepsilon)}\right)\end{aligned}$$

2.

$$\Psi_2(\varepsilon, R) = \pi - \arctan\left(\frac{R + 3\varepsilon}{6\varepsilon}\right) + \arcsin\left(\frac{R^2 - 4R\varepsilon - 9\varepsilon^2}{(R+\varepsilon)\sqrt{R^2 + 6R\varepsilon + 34\varepsilon^2}}\right)$$

3.

$$\Psi_3(\varepsilon, R) = \arccos\left(\frac{(R+2\varepsilon)^2 + \left(\frac{3R}{2} - \varepsilon\right)^2 - \left(2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - \left(2 + 2\sqrt{2}\right)\varepsilon\right)^2}{2(R+2\varepsilon)\left(\frac{3R}{2} - \varepsilon\right)}\right)$$

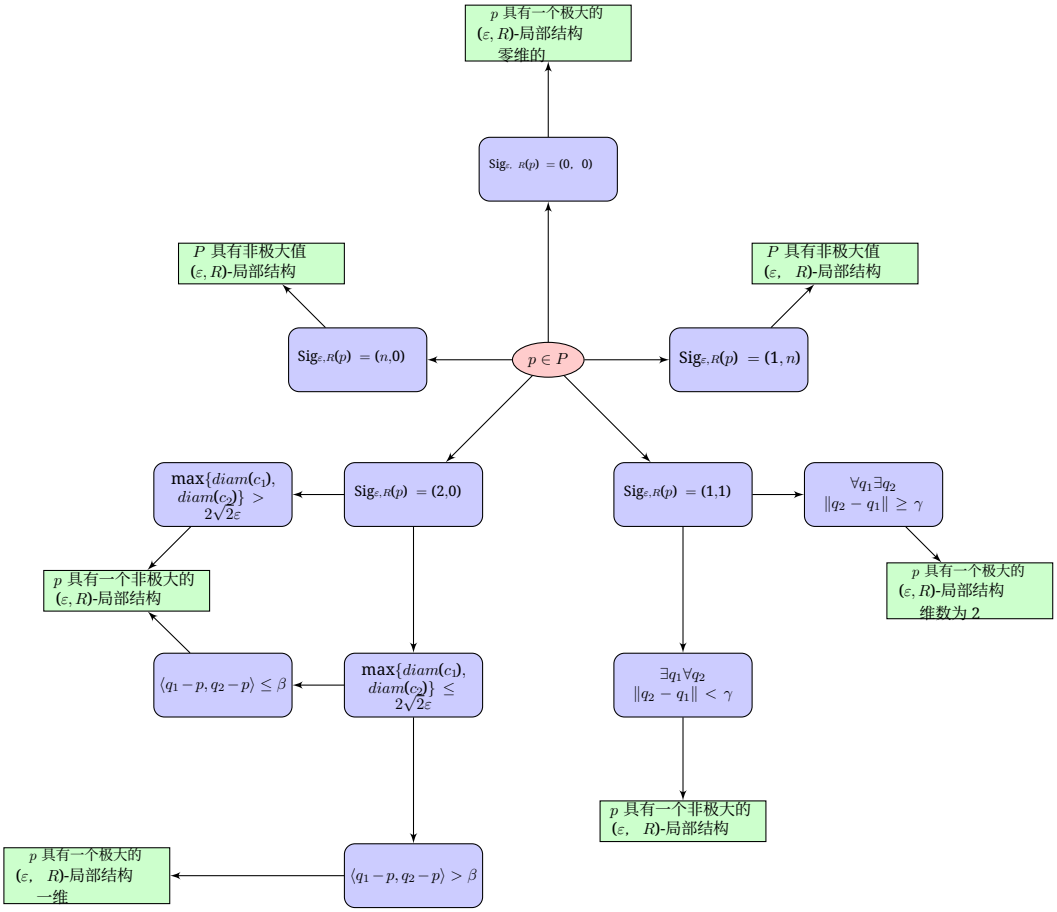


图 1：用于判断 P 在 p 处的(ε, R)-局部结构是否为极大的流程图。如果是极大的，其维数是多少。

<escape>为了加深对这些函数的直观理解，图 2 至 4 给出了它们的图像。请注意，由于它们在 $\frac{R}{\varepsilon}$ 和 R 同时ε 按相同比例缩放时保持不变，因此实际上它们是 </escape>

现在，我们陈述对 $|X|$所作的假设。

假设 1。 固定 $R \geq 14\varepsilon > 0$。我们将范围限制在满足以下条件的嵌入的 2-复形 $|X| = (X, \pi)$上。

1. 对所有顶点 u, v,
$$\|u - v\| > 6(R + \varepsilon).$$
2. 对于一个顶点 v 和一条边 $u\overline{w}$，其中 $v \neq u$、 w,
$$d(\overline{uw}, v) > 6(R + \varepsilon).$$

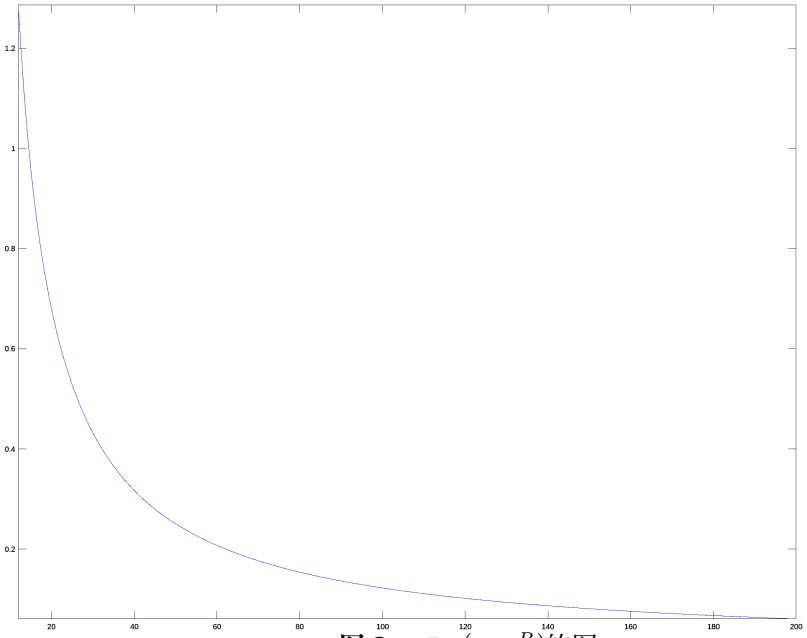


图 2: $\Psi_1\left(1, \quad \frac{R}{\varepsilon}\right)$的图。–

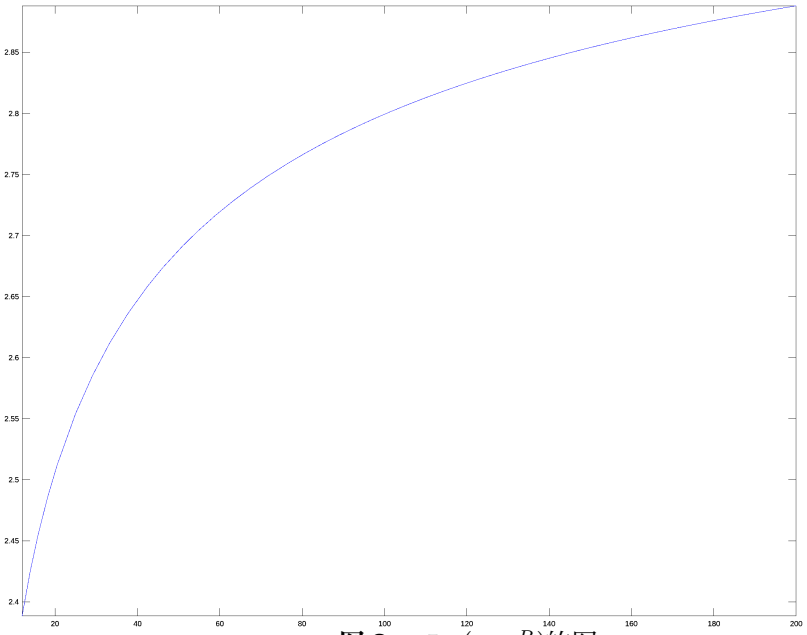


图 3: $\Psi_2\left(1, \quad \frac{R}{\varepsilon}\right)$的图。–

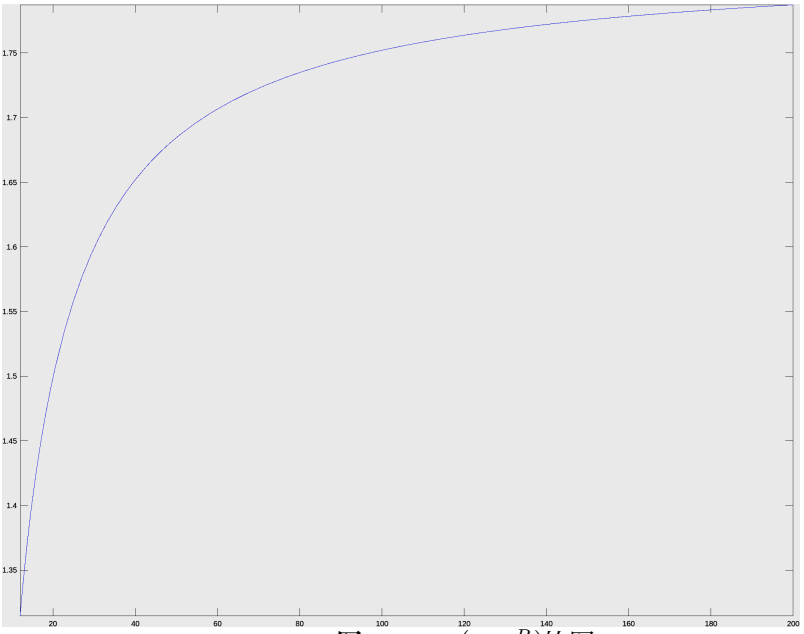


图 4: $\Psi_3\left(1,\ \frac{R}{\varepsilon}\right)$的图。–

3. 对于顶点 v 和包含 $v \neq u$、 w、 x 的三角形 $\triangle uwx$，

$$d(\triangle uwx, v) > 6(R+\varepsilon).$$

4. 对于边 uv 和包含 v、 $u \neq w$、 x、 y 的三角形 $\triangle wxy$，

$$d(\triangle wxy, \overline{uv}) > 6(R+\varepsilon).$$

5. 对于任意三角形 $\triangle uvw$,

$$\angle uvw, \angle vwu, \angle wuv \geq \frac{\pi}{6}.$$

6. 对于任意一对没有公共顶点的边 uv、 xy，

$$d(\overline{uv}, \overline{xy}) > 6(R+\varepsilon).$$

7. 对于任意三角形 $\triangle uwv$、 $\triangle xyz$,

$$d(\triangle uwv, \triangle xyz) > 6(R+\varepsilon).$$

8. 对于任意节点对的边 $u\overline{v}, w\overline{v},$

$$\angle uvw \geq \Psi_1(\varepsilon, R).$$

9. 对于所有度为 *2* 的顶点 v，其关联边为 $\overline{uv}$、$\overline{wv}$，且不存在三角形 $\triangle uvw$，

$$\angle uvw \leq \Psi_2(\varepsilon, R).$$

10. 对于任意一对三角形 $\triangle uvw_1, \triangle uvw_2$，它们之间的二面角下界为 $\Psi_1(\varepsilon, R)$。
11. 对于任意一对三角形 $\triangle uvw_1, \triangle uvw_2$，若 uv 的度为二，它们之间的二面角上界为 $\Psi_2(\varepsilon, R)$。*12.* 对于任意三角形 $\triangle wvvw_2$ 和边 uv，uv 与$\triangle w_1vw_2$ 中 v 处的射线 L 之间的角下界为 $\Psi_1(\varepsilon, R)$，且 $\triangle uvw$ 内切的最大圆的半径至少为 $2R + 3\varepsilon$。
13. 对于任意满足以下条件的顶点 v

$$|H_0\left(B_R(v) \cap |X|\right)| = 1, \ and \ |H_1\left(B_R(v) \cap |X|\right)| = 1,$$

在 v 处任意两条射线 $L_1, L_2 \in |X|$ 之间的角上界为 $\Psi_3(\varepsilon, R)$。

备注 4. 假设中的某些条件背后的原因*1* 相对清楚，而其他条件则不那么明显。特别是，条件 *11* 和 *12* 的作用并不显而易见。条件 *12* 使我们能够在算法中检测顶点 v。具体而言，在命题 *4.11* 中，它用于证明我们得到 $\mathrm{Sig}_{\varepsilon,R} = (n, \bullet) \quad n \geq 2$。条件 *13* 使我们能够检测在拓扑上类似于度为二的边或三角形的结构，因此我们对锥的形成施加限制，其中可能带有 鳍，以便检测该顶点（命题 *4.11*）。该条件等价于限制包含以顶点 v 为顶点的三角形的凸包在 v处的角。

以下命题为我们提供了局部极大 i-胞腔σ （对于 $i = 0,1, 2$）附近的“区域”，在这些区域中的任意样本处，我们都可以保证 P 在 p 处的 (ε, R)-局部结构具有维数 i的极大维数。

我们从局部极大的顶点周围的区域开始。

命题 4.8. 设 v 是 $|X| \subset \mathbb{R}^n$的一个顶点，且该顶点是局部极大的；设 P是 $|X|$的一个 ε-样本。那么，对于所有满足 $\|p - v\| \leq 4\varepsilon$的 $p \in P$，P 在 p 处的 (ε, R)-局部结构都是维数为 0的极大结构。

证明。 由于 v 是局部极大的顶点，因此它不属于任何其他胞腔的边界；并且根据假设 1，对于所有顶点 $u \neq v$，$\|u - v\| > 6(R + \varepsilon)$，对于所有满足 $v \neq u$的边 $\overline{uw}$，w，

$$d(\overline{uv}, v) > 6(R + \varepsilon),$$

以及对于所有满足 $v \neq u$的三角形 $\triangle uwx$，w，x，

$$d(\triangle uwx, v) > 6(R + \varepsilon).$$

因此，v的任意样本 $p \in P$都在 4ε的范围内，也在 v的范围内。因此，$(B_{R+\overline{\varepsilon}}(p) \cap P)^{\frac{3\varepsilon}{2}}$ 由单个连通分支组成，并且 $S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P = \emptyset$。

因此，$S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$，$\mathrm{Sig}_{\varepsilon,\ R}(p) = (0,\ 0)$，且 P在 p处的$(\varepsilon,\ R)$-局部结构是零维极大的。

□

接下来，我们界定局部极大边附近的区域。

命题 4.9. 设 uv 是 $|X|\subset\mathbb{R}^n$的一条局部极大的边，且 P 是 $|X|$的一个 ε-样本。那么，对于所有满足 $d(uv,p)\le\varepsilon$ 的 $p\in P$，以及 $\|p-u\|,\|p-v\|\ge\frac{3R}{2}+\varepsilon$，$P$ 在 p 处的 (ε,R)-局部结构是维数为 1 的极大结构。

证明。 根据假设 1，对于任意顶点 $w\neq u,\ v$

$$d(\overline{uv},w)>6(R+\varepsilon),$$

对于任意边 wx，满足 $w,\ x\neq u,\ v$，

$$d(\overline{uv},\overline{wx})>6(R+\varepsilon),$$

对于任意三角形 $\triangle wxy$，满足 $w,\ x,\ y\neq u,\ v$，

$$d(\triangle wxy,\overline{uv})>6(R+\varepsilon),$$

因此，$(B_{R+\varepsilon}(p)\cap P)^{\frac{3\varepsilon}{2}}$ 的连通分支 $C_p^{\frac{3\varepsilon}{2}}$若包含 p，则只包含满足 $d(q,\ uv)\le\varepsilon$ 的点 $q\in P$。

因此，$\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p)\cap\overline{C_p^{\frac{3\varepsilon}{2}}}\right)$ 由两个连通分量组成，c_1 和 c_2。根据引理3.4，c_1 和 c_2 的直径小于 5ε。设 x_1 和 x_2 分别是 c_1 和 c_2的质心。然后，应用Bokor 等人 (2021) 中的引理 2.1，

$$\langle x_1-p,x_2-p\rangle\le-R^2+2R\varepsilon+7\varepsilon^2,$$

因此，P 在 p 处的（ε,R）-局部结构是最大的一维结构。 □

最后，我们对（局部极大）三角形附近的区域进行界定。

命题 4.10。 设 $\triangle uvw$ 是 $|X|\subset\mathbb{R}^n$的一个三角形，且 P 是 $|X|$的一个 ε-样本。那么，对于所有满足 $d(\triangle uvw,p)\le\varepsilon$以及 $d(\partial\triangle uvw,p)\ge\frac{3R}{2}+\varepsilon$的 $p\in P$，P 在 p 处的(ε,R)-局部结构是最大的2维结构。

证明。根据假设1，对于所有满足 $\triangle xyz$的三角形 $x,\ y,\ z\neq u,\ v,\ w$，

$$d(\triangle uwv,\triangle xyz)>6(R+\varepsilon),$$

因此，$C_p^{\frac{3\varepsilon}{2}}$ 的连通分支 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(B_{R+\varepsilon}(p)\cap P)$包含 p，且只由满足 $q\in P$的样本 $d(q,\ \triangle uvw)\le\varepsilon$组成，因为三角形之间的角有下界（假设1）。

<escape>首先，我们需要证明 $\mathrm{Sig}_{\varepsilon,\ R}(p)=(1,\ 1)$，随后引理 3.2 表明，对于所有 $q_1\in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p)\cap P$，存在 $q_2\in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p)\cap P$使得</escape>

$$\|q_2-q_1\|\ge2\sqrt{R^2-\varepsilon^2}-(1+\sqrt{2})\varepsilon.$$

作为 $d(\partial\triangle uvw, p) \succ \frac{3R}{2} + \varepsilon$，我们有以下包含关系。

$$\begin{aligned} S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap \triangle uvw &\hookrightarrow \left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P\right)^{\frac{3\varepsilon}{2}} \\ &\hookrightarrow \left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap \triangle uvw\right)^{\frac{5\varepsilon}{2}} \\ &\hookrightarrow \left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P\right)^{\frac{7\varepsilon}{2}} \\ &\hookrightarrow \left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap \triangle uvw\right)^{\frac{9\varepsilon}{2}}. \end{aligned}$$

根据假设 1 中关于三角形与不在其边界上的胞腔之间距离的界，$S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap \triangle uvw$ 的弱特征尺寸大于 5ε，因此包含映射诱导出同构

$$H_\bullet\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap \triangle uvw\right) \cong H_\bullet\left(\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap \triangle uvw\right)^{\frac{5\varepsilon}{2}}\right) \cong H_\bullet\left(\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap \triangle uvw\right)^{\frac{9\varepsilon}{2}}\right).$$

上述同调通过 $\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P\right)^{\frac{3\varepsilon}{2}}$ 和 $\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P\right)^{\frac{7\varepsilon}{2}}$ 因子分解，因此我们有

$$\mathrm{rk}_\bullet^{\frac{3\varepsilon}{2},\frac{5\varepsilon}{2}}\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P\right) = \left|H_\bullet\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap \triangle uvw\right)\right|,$$

以及作为

$$|H_0\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap \triangle uvw\right)| = 1, |H_1\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap \triangle uvw\right)| = 1,$$

由此可得 $\mathrm{Sig}_{\varepsilon,\ R}(p) = (1,\ 1)$。现在我们应用引理 3.2 并得出，$\varepsilon$，$R$)-局部结构 P 在 p 处是二维的极大结构。 □

现在，我们得到了非局部极大 i-胞腔 σ $(i = 0, 1)$ 周围的区域，并且可以保证该区域内样本 p 处的 P 的 (ε, R)-局部结构不是局部极大的。同样，我们从非局部极大顶点开始。

注释 5。 由于我们将讨论范围限制在2-复形中，每个三角形σ 在局部上都是极大的；因此，我们只需考虑在局部上不是极大的顶点和边。

命题 4.11。 设 v 是 $|X| \subset \mathbb{R}^n$ 的一个顶点，它不是局部极大的，并设 P 是 $|X|$ 的一个 ε-样本。那么，对于所有满足 $p \in P$ 的情形，

$$\|p - v\| \leq \frac{R}{2} - 2\varepsilon,$$

p 处的 P 的(ε, R)-局部结构不是极大的。

证明。 我们需要考虑几种情况，可以根据 $\partial B_R(v) \cap |X|$ 的同调对其进行分类：

1. $|H_0(\partial B_R(v) \cap |X|)| = n, \quad |H_1(\partial B_R(v) \cap |X|)| = 0, \quad n \neq 2,$
2. $|H_0(\partial B_R(v) \cap |X|)| = 2, \quad |H_1(\partial B_R(v) \cap |X|)| = 0,$

3. $|H_0(\partial B_R(v) \cap |X|)| = 1, \quad |H_1(\partial B_R(v) \cap |X|)| = 1$, 4. $|H_0($
$\partial B_R(v) \cap |X|)| = 1, \quad |H_1(\partial B_R(v) \cap |X|)| = n, \quad n \geq 2$.

在上述每种情况下，以下论证均成立。设 C_p 为 $B_{R+\varepsilon}(p) \cap |X|$ 中包含 p 在 $|X|$上的投影的连通分支，设 C_p²为 $\left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap P\right)^{\frac{3\varepsilon}{2}}$ 的连通分支。由于 P是 $|X|$的一个 ε-样本，因此我们有以下包含关系。

$$\begin{aligned} S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap \triangle uvw &\hookrightarrow \left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap P\right)^{\frac{3\varepsilon}{2}} \\ &\hookrightarrow \left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap \triangle uvw\right)^{\frac{5\varepsilon}{2}} \\ &\hookrightarrow \left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap P\right)^{\frac{7\varepsilon}{2}} \\ &\hookrightarrow \left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap \triangle uvw\right)^{\frac{9\varepsilon}{2}} . \end{aligned}$$

根据假设1 的界
- 公共顶点处边之间的角，
- 顶点之间的距离，
- 具有公共顶点或边的三角形之间的角度，
- 顶点与不相交胞腔之间的距离，

$S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p)$ 的弱特征尺寸 $\cap C_p^{\frac{3\varepsilon}{2}}$ 大于 5ε，并且我们有由上述包含映射诱导的如下同调同构。

$$H_\bullet\left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap |X|\right) \cong H_\bullet\left(\left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap |X|\right)^{\frac{5\varepsilon}{2}}\right) \cong H_\bullet\left(\left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap |X|\right)^{\frac{9\varepsilon}{2}}\right).$$

上述同调通过 $\left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap P\right)^{\frac{3\varepsilon}{2}}$ 和 $\left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap P\right)^{\frac{7\varepsilon}{2}}$ 因子分解，因此我们有

$$\mathrm{rk}_\bullet^{\frac{3\varepsilon}{2},\frac{7\varepsilon}{2}}\left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap P\right) = \left|H_\bullet\left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap |X|\right)\right|.$$

作为 $\|p - v\| \leq \frac{R}{2} - 2\varepsilon$，我们有

$$\left|H_\bullet\left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap |X|\right)\right| = \left|H_\bullet\left(\partial B_R(v) \cap |X|\right)\right|,$$

给予

$$\mathrm{rk}_\bullet^{\frac{3\varepsilon}{2},\frac{7\varepsilon}{2}}\left(S^{R+\varepsilon}_{R-\varepsilon}(p) \cap P\right) = \left|H_\bullet\left(\partial B_R(v) \cap |X|\right)\right|.$$

情形 1： $|H_0(\partial B_R(v) \cap |X|)| = n, \quad |H_1(\partial B_R(v) \cap |X|)| = 0, \quad n \neq 2$

由以上可知，$\mathrm{Sig}(p) = (n, 0)$ $n \neq 2$，因此 P 在 p 处的（ε, R）-局部结构不是极大的。

情况 2： $|H_0(\partial B_R(v) \cap |X|)| = 2, |H_1(\partial B_R(v) \cap |X|)| = 0$

由上可知，$\mathrm{Sig}(p) = (2,0)$。令 $C_p^{2\varepsilon}$为 $\breve{C}_{\frac{3\varepsilon}{2}}\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P\right)$中包含 p的连通分支。

假设 v 是某个三角形 $\triangle uvw$的面。那么，根据对边之间的角度、没有公共面的边之间的距离、不属于面的边与顶点，以及它们不属于其面的顶点与三角形之间所设定的界限（见假设1），以及引理3.5 ，在$\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap C_p^{\frac{3\varepsilon}{2}}\right)^{\frac{3\varepsilon}{2}}$ 中至少有一个连通分支的直径大于 $2\sqrt{2}\varepsilon$。因此，ε, R-局部结构 P 在 p 处并非极大。

如果 v 仅是边的面，那么根据对边之间的角度、没有公共面的边之间的距离、不属于面的边与顶点，以及它们不属于其面的顶点与三角形之间所设定的界限（见假设1），这两个连通分支都来自两条边 uv 和 wv；Bokor 等人，Bokor 等人(2021) 中的引理 2.1 以及引理3.4 表明，ε, R-局部结构 P 在 p 处并非极大。

Case 3: $|H_0\left(\partial B_R(v) \cap |X|\right)| = 1$ $|H_1\left(\partial B_R(v) \cap |X|\right)| = 1$

再次，我们有 $\mathrm{Sig}(p) = (1,1)$，因此至少有三个三角形以 v 为公共顶点。设 p_X 为 $|X|$ 中距离 p 最近的点，并设 $x_1 \in \partial B_R(p) \cap |X|$ 与 v 和 p_X 共线，则存在 $q_1 \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} \cap P$，使得 $\|q_1 - x_1\| \leq \varepsilon$。

现在取任意一个 $q_2 \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} \cap P$，并令 x_2 为 $|X| \cap \partial B_R(p$ 中距离 q_2最近的点。然后根据引理 3.1

$$\|q_2 - x_2\| \leq \sqrt{2}\varepsilon.$$

分别考虑从 v经过 x_1， x_2的射线 L_1， L_2，并假设 $d(p,\ L_1) \leq \varepsilon$。

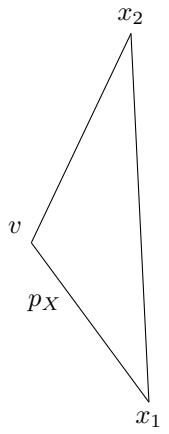


图5: $d(q_2, H_2) \leq \varepsilon$

我们有了

$$\|x_1 - v\| = \|x_1 - p_X\| + \|p_X - v\| \leq \frac{3R}{2} - 2\varepsilon,$$

$$\|x_2 - v\| \leq R + \varepsilon,$$

因此

$$\begin{aligned}\|x_2 - x_1\| &= \|x_2 - v\|^2 + \|x_1 - v\|^2 - 2\|x_2 - v\|\|x_1 - v\|^2 \cos \angle x_1 v x_2 \\ &\leq \left(\frac{3R}{2} - 2\varepsilon\right)^2 + (R+\varepsilon)^2 - \left(\frac{3R}{2} - 2\varepsilon\right)(R+\varepsilon)\cos x_1 v x_2.\end{aligned}$$

根据假设1 中的条件13，它们之间的角不超过$\Psi_3(\varepsilon, R)$，因此

$$\|x_2 - x_1\| \leq 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - (1+\sqrt{2})\varepsilon,$$

因此

$$\|q_2 - q_1\| \leq 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - (2+2\sqrt{2})\varepsilon.$$

因此， P 在 p 处的(ε, R)-局部结构并非极大。

Case 4: $|H_0(\partial B_R(v) \cap |X|)| = 1$, $|H_1(\partial B_R(v) \cap |X|)| = n$, $n \geq 2$

根据本证明开头的论证，$\mathrm{Sig}(p) = (1, n)$ $n \geq 2$，因此 P 在 p 处的(ε, R)-局部结构并非极大。 □

接下来，我们界定不局部极大的边附近的区域。

命题4.12。 设 uv 是 $|X| \subset \mathbb{R}^n$的一条边，且不局部极大；设 P是 $|X|$的一个 ε-样本。那么，对于所有满足 $d(uv, p) \leq \frac{R}{2} - 2\varepsilon$的 $p \in P$， P 在 p 处的(ε, R)-局部结构并非极大。

证明。 如果一条边 $\overline{uv}$不是局部极大的，那么至少存在一个三角形 $\triangle uvw$。我们考虑 3 种情况：

1. 存在唯一的三角形 $\triangle uvw$，且 uv 位于其边界上；2. 恰好存在两个三角形 $\triangle uvw_1$ 和 $\triangle uvw_2$，且 uv 位于它们的边界上；3. 存在三个或更多三角形 $\triangle uvw_1$、$\triangle uvw_2$ 和 $\triangle uvw_3$，且 uv 位于它们的边界上。

回顾一下，我们将注意力限制在连通分支 C_p、C_{p^2} 的 $S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap |X|$和 $\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P\right)^{\frac{3\varepsilon}{2}}$，其中包含 p。

根据假设 1 关于

- 公共顶点处边之间的角，
- 不具有公共面的边之间的距离，
- 具有公共边的三角形之间的角度，
- 不相交的边与胞腔之间的距离，

.....的弱特征尺寸 C_p 大于 5ε。因此，按照命题 4.11 证明开头的相同论证，

$$\mathrm{Sig}_{\varepsilon,R}(p) = \left(|H_0(\partial B_R(m) \cap |X|)|, |H_1(\partial B_R(m) \cap |X|)|\right).$$

因此，在情况 1 和 3 中，我们分别得到 $\mathrm{Sig}(p) = (1,0)$ 和 $\mathrm{Sig}(p) = (1,n)$。

在情形 2 中，我们得到 $\mathrm{Sig}(p) = (1,1)$，因此需要检查几何条件。由引理 3.3可知，存在一个 $q_1 \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$，使得对于所有 $q_2 \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$

$$\|q_2 - q_1\| < 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - (1+\sqrt{2})\varepsilon,$$

因此，P 在 p 处的(ε, R)-局部结构不是极大的。

因此，在这 3 种情形下，P 在 p 处的(ε, R)局部结构都不是极大的。 □

5 二维复形算法及其正确性

本节将介绍一组算法，这些算法共同从一个嵌入（X）的 ε-样本 P中恢复$X, \Theta) \subset \mathbb{R}^n$的结构。定理 5.25 指出，给定一个满足假设 ε-样本 P，其中嵌入二维复形 $|X| = (X, \Theta_X) \subset \mathbb{R}^n$ 的假设为 1，我们可以使用该算法恢复 X 的结构。一系列引理（引理 5.9 至 5.24）最终导出“大定理”（定理 5.25）。这些引理的证明见附录 B。

该算法将 P 划分为 P_{LM} 和 P_{NLM}，使得对于每个 $p \in P_{LM}$，P在 p处的（ε，R）-局部结构都是极大的；而对于每个 $p \in P_{NLM}$，P 在 p 处的（ε，R）-局部结构都不是极大的。然后，我们检测顶点数、边数、三角形数以及关联算子。为获得 P_{LM}和 P_{NLM}，我们使用

$$\Delta_{\varepsilon,R} : P \to \{0,1\},$$

参见算法 1。

令 $\mathcal{C}_p$ 为阈值图中包含 p 的连通分支内的样本 $q \in P$

$$\mathcal{G}_p = \mathfrak{G}_{3\varepsilon}\left(B_{R+\varepsilon}(p) \cap P\right)$$

与 $\|q-p\| \in [R-\varepsilon, R+\varepsilon]$。在（$\varepsilon$，$R$）-局部结构的定义（定义 4.4和 4.5）中，我们使用了

$$\mathrm{rk}_\bullet^{\frac{3\varepsilon}{2}, \frac{7\varepsilon}{2}}\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P\right),$$

根据神经丛引理（推论 4G.3，Hatcher Hatcher（2000）），其等于秩，$\mathcal{RK}_\bullet$，映射

$$H_\bullet\left(\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap \mathcal{C}_p\right)\right) \to H_\bullet\left(\check{\mathcal{C}}_{\frac{7\varepsilon}{2}}\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap \mathcal{C}_p\right)\right)$$

由包含诱导

$$\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P\right) \hookrightarrow \check{\mathcal{C}}_{\frac{7\varepsilon}{2}}\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P\right).$$

因此，如果 P 在 P 处的（ε, R）-局部结构不是极大的，$\Delta_{\varepsilon,R}(p)$ 返回 0；如果它是极大的，则返回 1。接下来，

$$P_{NLM} = \Delta_{\varepsilon,R}^{-1}(0)$$

and

$$P_{NLM} = \Delta_{\varepsilon,R}^{-1}(1).$$

备注 6. 我们可以运用神经丛引理，因为构造 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p)\cap\mathcal{C}_p\right)$ 和 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{7\varepsilon}{2}}\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p)\cap\mathcal{C}_p\right)$ 时所用的球分别给出了 $\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p)\pitchfork P\right)^{\frac{}{2}}$ 和 $\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p)\cap P\right)^{\frac{}{2}}$ 的良覆盖。要验证这些覆盖满足良覆盖所要求的"每个非空交集都是可缩的"这一条件，请注意，我们使用的是切赫复形，而不是 *Vietoris-Rips* 复形。结合嵌入的线性性质以及对 ε 和 R 的假设，我们得到满足神经丛引理条件的覆盖。

算法 1: $\Delta_{\varepsilon,\ R}(p)$

数据: 嵌入的二维复形 $|X|$ 的一个 ε-稠密样本 P，一个点 $p\in P$。

结果: 0 如果 P 在 p 处的 (ε,R)-局部结构不是极大的，
1 如果 P 在 p 处的 (ε,R)-局部结构是极大的。

开始

- $\mathcal{G}_p \longleftarrow \{q\in P \mid \|p-q\|\leq R+\varepsilon\}$;
- 如果 $\|q-q'\|\leq 3\varepsilon$，连接 q，$q'\in\mathcal{G}_p$；
- $\mathcal{C}_p \longleftarrow \{q\in\mathcal{G}_p \mid q$ 在 $\mathcal{G}_p\}$ 中与 p 路径连通;
- 如果 $\|p-q\|\geq R-\varepsilon$，则移除 $q\in\mathcal{C}_p$；
- **如果** $\mathcal{RK}_0=0$ 并且 $\mathcal{RK}_1=0$，**则**
  - **返回** *1*
- **否则，如果** $\mathcal{RK}_0=1$ 并且 $\mathcal{RK}_1\neq 1$，**则**
  - **返回** *0*
- **否则，如果** $\mathcal{RK}_0=1$ 且 $\mathcal{RK}_1=1$ **则**
  - **如果** $\forall q_1,q_2\in C_p$，$\exists q_0$ 使得 $\|q_1-q_0\|$，$\|q_2-q_0\|$，$\|q_2-q_1\|\in[\sqrt{3\ (R^2-\varepsilon^2)}\ \ \bar{}\sqrt{3}R]$ **则**
    - **返回** *1*
  - **else**
    - **返回** *0*
- **否则如果** $\mathcal{RK}_0=2$ 且 $\mathcal{RK}_1=0$ **则**
  - **如果** 最大值 $\{\mathcal{D}(c_1)\ \mathcal{D}(c_2)\}\leq 5\varepsilon$ **则**
    - **如果** $\langle q_1-p,q_2-p\rangle > -R^2+2R\varepsilon-7\varepsilon^2$ **则**
      - **返回** *1*
    - **else**
      - **返回** *0*
  - **else**
    - **返回** *0*
- **否则如果** $\mathcal{RK}_0=n$，$n\neq 0$，1，2 并且 $\mathcal{RK}_1=0$ **则**
  - **返回** *0*

在得到 P_{LM} 后，我们使用函数

$$\mathfrak{D}_{\varepsilon,R}(p): P_{LM}\to\{0,\,1,\,2\},$$

请参见算法 2 以确定（ε， R）局部结构的维数，每个样本在P_{LM} 中具有什么维数。

算法 2： $\mathfrak{D}_{\varepsilon,\ R}(p)$

数据： 一个嵌入的二维复形 $|X|$的 ε-稠密样本 P，一个点 $p \in P$ 使得 P 在 p 处的 (ε, R)-局部结构达到最大值。

结果： 如果 P 在 p 处的 (ε, R)-局部结构的维数为零且是极大值，则为 0，
1 如果 P 在 p 处的（ε， R）-局部结构是一维最大结构，
2 如果 P 在 p 处的 (ε, R)-局部结构是二维维数的极大结构。

开始

$\mathcal{G}_p \longleftarrow \{q \in P \mid \|p-q\| \leq R+\varepsilon\}$;
连接 q， $q' \in \mathcal{G}_p$ 如果 $\|q-q'\| \leq 3\varepsilon$;
$\mathcal{C}_p \longleftarrow \{q \in \mathcal{G}_p \mid q$ 在 $\mathcal{G}_p\}$中与 p 路径连通;
如果 $\|p-q\| \leq R-\varepsilon$，则移除 $q \in C_p$;
如果 $\mathcal{RK}_0 = 0$ 且 $\mathcal{RK}_1 = 0$ **则**
└ **返回** *0*
否则，如果 $\mathcal{RK}_0 = 2$, $n \neq 0,1,2$ 和 $\mathcal{RK}_1 = 0$ **则**
└ **返回** *1*
否则，如果 $\mathcal{RK}_0 = 1$, $n \neq 0,1,2$ 和 $\mathcal{RK}_1 = 1$ **则**
└ **返回** *2*

请回想一下，我们的最终目标是学习 X 的组合结构。我们首先学习三角形、局部极大边和局部极大顶点的数量。考虑 P_{LM} 的以下三个子集：

$$
\begin{aligned}
P_{LM,2} &= \{p \in P_{LM} \mid \mathfrak{D}_{\varepsilon,R}(p) = 2\}, \\
P_{LM,1} &= \{p \in P_{LM} \mid \mathfrak{D}_{\varepsilon,R}(p) = 1\}, \\
P_{LM,0} &= \{p \in P_{LM} \mid \mathfrak{D}_{\varepsilon,R}(p) = 0\}.
\end{aligned}
$$

将 P划分为 P_{LM}和 P_{NLM}时，会出现一个灰色区域，样本 p可能属于这两个集合中的任意一个。这给我们从划分 P_{LM}和 P_{NLM}中学习 X 的组合结构带来了问题。我们可以通过清理P_{LM}来克服这一问题。具体而言，我们清理 $P_{LM,\ 2}$ 和 $P_{LM,\ 1}$。

我们首先引入边的连通分支的概念，即 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,\ 1})$ 跨越一条边；然后引入三角形的连通分支的概念，即 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,\ 2})$ 跨越一个三角形。

定义 5.1 (跨越一条边)。 我们称 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,\ 1})$ 跨越局部极大边 uv 的一个连通分支，是指它包含一个样本 p，该样本位于距 uv的中点 ε 以内。

定义 5.2 （张成三角形）。 我们称 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2})$ spans 一个三角形 $\triangle uvw$，如果它包含一个样本 p，该样本与 $\triangle uvw$ 的中点之间的距离小于 ε。

我们需要对连通分支何时张成一条边或一个三角形设定一些几何条件。对于一条边，我们将使用连通分支的直径作为条件。

命题 5.3. $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,1})$ 的一个连通分支 C 当且仅当 $\mathcal{D}(C) \geq \frac{3R}{2} - 2\varepsilon$ 时跨越一条局部极大边 uv 。

遗憾的是，这样的检验是否适合检测跨越三角形的连通分量，并不能立即看清。例如，考虑一个由单个三角形、其三条边以及三个必需顶点组成的复形。尽管从启发式角度看，这种情况不太可能发生，但采样可能导致 2 个连通分支 C_1, $C_2 \in \check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,\,2})$：其中一个远离三角形的边界，另一个被 P_{NLM} 中的点包围，且二者的直径都很大。事实上，我们希望称其为跨越分支的那个，记作 C_1，其直径会小于另一个 C_2。然而请注意，由于 C_2 不包含 p 在 $\triangle uvw$的中点附近的样本，如果$\mathcal{D}(C_1) \leq \mathcal{D}(C_2)$，则 C_2 包含一个不可缩环。然而，三角形 $\triangle uvw$ 的中点 $m_{\triangle uvw}$ 附近的样本 $p \in P$并不靠近任何样本$q \notin P_{LM,\,2}$，因此我们可以利用这一事实来获得一个几何检验。

命题 5.4. C 的一个连通分支张成一个三角形 $\triangle uvw$，当且仅当存在一点 $p \in C$ 使得

$$B_{\frac{R}{2}+\varepsilon}(p) \cap P \subset P_{LM,2}.$$

现在我们有了几何条件，可以分别判断 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,\,2})$/ $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,\,1})$ 的一个连通分支是否生成一个三角形/边。接下来，证明 X 的局部极大顶点与 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,\,0})$ 的连通分量构成双射， X 的局部极大边与 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,\,1})$ 的生成连通分量构成双射，并且 X 的三角形与 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,\,2})$ 的生成连通分量构成双射。

我们从局部极大顶点开始。

命题 5.5。 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,0})$ 的连通分量与 X 的局部极大顶点集合 V_{LM} 之间存在双射。

接下来，我们证明边生成分支与局部极大边之间存在双射。

命题 5.6。 生成分量 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,1})$ 与 E_{LM} 的局部极大边集合之间存在双射。

最后，我们证明 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2})$ 的生成分量与 X的三角形之间存在双射。

命题 5.7。 生成分量 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2})$ 与 T 中三角形的集合之间存在双射。

识别出 X_{LM} 的 X局部极大胞腔后，我们可以通过识别 X 的结构，来学习 X_{NLM}的组合结构；这需要结合我们从 P_{NLM}中了解到的 X_{LM}，该信息来自 P_{LM}。可以采用Bokor 等人(2021)提出的过程，但这要求存在某个 $\tilde{\varepsilon}$，使得 P_{NLM} 是 $\tilde{\varepsilon}$的一个 X_{NLM} -样本，并满足Bokor 等人(2021)中的假设 1。这比假设1提出了更严格的要求，但只要确保满足这些新假设，该方法便可直接使用。

为了避免对 $|X|$施加更严格的假设，我们采用见证点的思路来发现组合结构。对于每个样本 $p \in P_{NLM}$，我们可以考察$\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,1})$和$\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2})$的生成连通分量 C_{LM}，使得$C_{LM} \cap B_{R+3\varepsilon}(p) \neq \emptyset$。特别地，对于某个 $q \in C_{LM}$，我们可以使用$\mathfrak{D}_{\varepsilon,R}(q)$来确定局部结构在哪个维数上达到极大。如果$C_{LM} \cap S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p)$中存在一个 q，使得$\mathfrak{D}_{\varepsilon,R}(q) = 1$，那么 p 就在某个顶点附近。

如果不存在维数为 1 且（ε，R）-局部极大的连通分支 C_{LM}，那么 p 仅见证满足以下条件的样本：$q \in P_{LM}$ 在 q 处的（ε，R）-局部结构是维数为 2 的极大结构。因此，我们需要理解 $|X| \setminus (E_{LM} \cup V_{LM})$ 的组合结构，其中 E_{LM} 是局部极大边的集合，V_{LM} 是局部极大顶点的集合。

在假设 1中，我们假设对于任意三角形 $\triangle uvw$,

$$\angle uvw, \angle vwu, \angle wuv \geq \frac{\pi}{6}.$$

这意味着，对于任意满足 $d(\partial\triangle uvw,\ p) < R+\varepsilon$ 的样本 $p \in P_{NLM}$，存在某个样本 $q \in P_{LM,2}$，满足 $d(\triangle uvw,\ q) \leq \varepsilon$ 且 $d(\partial\triangle uvw,\ p) \geq R+\varepsilon$，其中 $\triangle uvw$，使得 $\|q-p\| \leq \frac{2\sqrt{2}}{(R+2\varepsilon)\sqrt{3}-1}$。此外，$q$ 属于一个三角形生成分量 $\mathcal{T}$。

类似地，对于任意满足 $d(\partial uv,\ p) < \frac{3R}{2}+\varepsilon$ 的样本 $p \in P_{NLM}$，其中某条边为 uv，存在一个样本 $q \in P_{LM,1}$，满足 $d(\partial uv,\ p) \geq \frac{3R}{2}+\varepsilon$，使得 $\|q-p\| \leq \frac{2\sqrt{2}}{(R+2\varepsilon)\sqrt{3}-1}$。此外，$q$ 属于一个边生成分支 $\mathcal{E}$。

因此，我们称样本 $p \in P_{NLM}$ 见证一个生成连通分量$\mathcal{C}$，如果

$$B_{\frac{2\sqrt{2}(R+2\varepsilon)}{\sqrt{3}-1}}(p) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset.$$

为便于阅读，我们设 $\kappa = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$。

定义 5.8 (见证生成分支)。设 P 是一个 ε-样本 P，它属于一个嵌入的 2-复形 $|X|$，满足假设 *1*。那么，样本 $p \in P_{NLM}$ 见证一个边/三角形生成分支，当且仅当

$$B_{\kappa(R+\varepsilon)}(p) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset.$$

为了确定 X 的最终组合结构，我们考察每个 $p \in P_{NLM}$ 的局部邻域，并同时考察两者

$$B_{(R+2\varepsilon)\kappa}(p) \cap \check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,1})$$
$$B_{(R+2\varepsilon)\kappa}(p) \cap \check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2}).$$

If

$$B_{(R+2\varepsilon)\kappa}(p) \cap \check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,1}) \neq \emptyset$$

那么我们知道， p 是靠近一个顶点的，而 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,1})$ 中由 p 见证的生成分量 $\mathcal{E}$ 共享一个边界顶点。进一步，如果

$$B_{(R+2\varepsilon)\kappa}(p) \cap \check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2}) \neq \emptyset$$

此外，则存在由 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2})$ 所见证的生成分量，这些分量与这些边有一个公共顶点。

如果仅

$$B_{(R+2\varepsilon)\kappa}(p) \cap \check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2}) \neq \emptyset$$

我们考察有多少生成分量 $\mathcal{T}$ 可被 p 看到，以及样本 $p \in P_{NLM}$ 是否也见证 $\mathcal{T}$ 所见证的其他生成分量 $\mathcal{T}'$。我们利用这些信息将 P_{NLM} 划分为 $\{P_i\}$，并在算法5中对这些划分进行最后清理，以处理一些特殊情况。由于 $R \leq 16\varepsilon$，对于所有 $p \in P_{NLM}$，都存在某个生成连通分量 $\mathcal{C}$ 使得 $B_{R+\varepsilon}$

$$\overline{\kappa}(p) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset。$$

然后，我们按如下方式为每个分量 P_i 标记，参见算法7 和8:

- -1 如果 P_i 对应两个顶点,
- 0 如果 P_i 对应一个顶点,
- 1 如果 P_i 对应一个顶点和一条边,
- 2 如果 P_i 对应两个顶点和一条边,
- 3 如果 P_i 仅对应一条边,
- 4 如果 P_i 对应两条边和一个顶点,
- 5 如果 P_i 对应三条边和两个顶点,
- 6 如果 P_i 对应三条边和一个顶点,
- 7 如果 P_i 对应三个边和三个顶点,
- 8 如果 P_i 对应三条边,
- 9 如果 P_i 对应两条边,

算法3: 三角形生成分量

数据: 参数 ε， R 和 $P_{LM,1}$。**结果:** 三角形生成分量集合。

开始初始化空集 T；令 C 为 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2})$ 的连通分量集合；

对于 $\mathcal{T} \in C$，**如果** $\exists p \in \mathcal{C}$ 存在，使得 $B_{R/2+\varepsilon}(p) \cap P \subset P_{LM,2}$ **则**将 $\mathcal{T}$ 添加到 T；**返回** T

算法 4： 跨边分量

数据： 参数 ε， R 和 P_{LM} ,1.

结果： 三角形生成分支的集合。

开始

初始化空集 E;

令 C 为.....的连通分量集合 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,\ 2})$;

对 $\mathcal{E} \in C$ **执行**

如果 $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \geqq \frac{3R}{2} - 2\varepsilon$ **，则**

将 $\mathcal{E}$ 添加到 E;

返回 E

算法 5： 划分 P_{NLM}

数据： 嵌入的二维复形 $|X|$的一个 ε-稠密样本 P，划分为 P_{NLM}, $P_{LM,0}$, $P_{LM,1}$, $P_{LM,2}$.

结果： P_{NLM} 的划分 $\{P_i\}$，以及对于每个 P_i，两个集合 $S_E(P_i)$ $S_T(P_i)$。

开始

对于每个 $p \in P_{NLM}$，找出所有满足条件的边生成分支 $\mathcal{E}$，使得 $\mathcal{E} \cap B_{(R+2\varepsilon)\kappa}(p) \neq \emptyset$，并将它们放置在 $S_E(p)$;

找出所有满足以下条件的三角形生成分量 $\mathcal{T}$ $\mathcal{T} \cap B_{(R+2\varepsilon)\kappa}(p) \neq \emptyset$，并将它们放入 $S_T(p)$;

将 P_{NLM}划分为 $\{P_i\}$，使得对于每个 p， $q \in P_i$, $S_E(p) = S_E(q)$ 并且 $S_T(p) = S_T(q)$;

将 $S_E(P_i)$ 和 $S_T(P_i)$ 分配给每个 P_i;

对于 P_i 和 P_j，其中 $S_E(P_j) \subseteq S_E(P_i)$ 和 $S_T(P_j) \subseteq S_T(P_i)$ **执行**

如果 $S_E(P_j)$ $S_T(P_j) \neq \emptyset$ **则**

将 P_j 与带有标签 $S_E(P_i)$ $S_T(P_i)$ 的 P_i 合并;

否则如果 $|S_T(P_j)| \geq 2$ 且 $\forall p \in P_j$ 使得 $\mathrm{Sig}_{\varepsilon\ ,R}(p) = (n,\ 0)$ $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ **then**

将 P_j 与 P_i 合并，并使用标签 $S_E(P_i)$ $S_T(P_i)$;

返回 $\{P_i\}$，并且对于每个 P_i， $S_E(P_i)$ $S_T(P_i)$

算法 6： 顺序 $\{P_i\}$

数据： 一个嵌入的二维复形 $|X|$的 ε-稠密样本 P，划分 $\{P_i\}$ P_{NLM}，每个 P_i 有两个集合 $S_E(P_i)$ $S_T(P_i)$，以及划分 $P_{LM,0}$, $P_{LM,1}$, $P_{LM,2}$.

结果： 两个集合 P^1，$P^2 \subset \{P_i\}$。

开始

初始化空的 P^1 和 P^2;

对 $P_i \in \{P_i\}$ **执行 do**

如果 $S_E(P_i) \neq \emptyset$ **则**

将 P_i 添加到 P^1

否则如果 $\exists p \in P_i$ 使得 $\mathrm{Sig}(p) \neq (1, n)$ **则**

将 P_i 添加到 P^1

否则，如果 $|S_T(P_i)| \neq 1$，**则**

将 P_i 添加到 P^1

else

将 P_i 添加到 P^2

返回 P^1 , P^2

算法 9： 三角形、边和顶点的数量。

数据： 嵌入的二维复形 $|X|$的 ε-稠密样本 P，划分为 P_{NLM}，$P_{LM,0}$，$P_{LM,1}$，$P_{LM,2}$ 以及带标签列表 C 来自算法 8。

结果： X中的三角形、边和顶点。

开始

初始化一个空的加权图 B;

$\forall P_{LM}$的生成分量 $\mathcal{T}_{,2}$，向 B 添加权重为 2 的节点，并标记为 $\mathcal{T}$;

$\forall P_{LM}$的生成分量 $\mathcal{E}_{,1}$，向 B 添加权重为 1 的节点，并标记为 $\mathcal{E}$;

$\forall P_{LM}$的分量 $\mathcal{V}_{,0}$，向 B 添加权重为 0 的节点，并标记为 $\mathcal{V}$;

对 $P_i \in C$ **执行 do**

如果 P_i 有标签 -1**则**

向 B 添加 2 个权重为 0 的节点，并标记为 P_i;

否则，如果 P_i 具有标签 0，**则**

将权重为 0 的节点添加到 B，标记为 P_i;

否则如果 P_i 有标签 1**则**

向 B 添加 2 个权重为 0 的节点，并标记为 P_i;

向 B 添加权重为 1 的节点，标记为 P_i;

否则，如果 P_i 带有标签 2**则**

将权重为 0 的节点添加到 B，标记为 P_i;

向 B 添加权重为 1 的节点，标记为 P_i;

否则如果 P_i 具有标签 3，**则**

向 B 添加两个权重为 0 的节点，并标记为 P_i;

向 B 添加权重为 1 的节点，并标记为 P_i;

否则如果 P_i 有标签4**则**

向 B 添加一个权重为 1 的节点，并标记为 P_i;

否则，如果 P_i 有标签 5，**则**

将权重为 0 的节点添加到 B，标记为 P_i;

向 B 添加两个权重为 1 的节点，并标记为 P_i;

否则，如果 P_i 的标签为6，**则**

向 B 添加两个权重为 0 的节点，并标记为 P_i;

向 B 添加三个权重为 1 的节点，并标记为 P_i;

否则，如果 P_i 的标签为7，**则**

向 B 添加三个权重为 0 的节点，并标记为 P_i;

向 B 添加三个权重为 1 的节点，并标记为 P_i;

算法 7： P^1的分类

数据： 嵌入的二维复形 $|X|$, P^1 的一个 ε-稠密样本 P，以及 P_{NLM}的划分， $P_{LM^{,0}}$, $P_{LM^{,1}}$, $P_{LM^{,2}}$.

结果： 带标签列表 C，其中 P_i 的标签为 -1，如果 P_i 对应于 2 顶点；如果 P_i 对应一个顶点，则为 0；如果 P_i 对应一个顶点和一条边，则为 1；如果 P_i 对应两个顶点和一条边，则为 2；如果 P_i 仅对应一条边，则为 3。

开始

初始化空列表 C;

对于 $P_i \in P^1$，**执行**

如果 $|S_E(P_i)|= 1$ 且 $S_T(P_i) = \emptyset$ **则**

如果 $\mathcal{E} \notin S_E(P_j) \forall P_j \neq P_i$ **则**

将 P_i 添加到 C，标签为 -1;

否则，如果 $\exists P_j \neq P_i$ 满足 $\mathcal{E} \in S_E(P_j)$ **则**

将 P_i 添加到 C，标签为 0;

否则，如果 $S_E(P_i) \neq \emptyset$ **则**

将 P_i 添加到 C，标签设为 0;

else

对于 $\mathcal{T} \in S_T(P_i)$ **执行**

令 $LN(\mathcal{T}) = \{P_k \mid \mathcal{T} \in S_T(P_k)\}$

令 $N(P_i) = \bigcap_{\mathcal{T} \in S_T(P_i)} LN(\mathcal{T})$;

如果 $N(P_i) = \{P_i, P_k\}$ **则**

将 P_i 添加到 C，标签为 1;

将 P_k 添加到带有标签 0 的 C 中，除非 P_k 已经在 C 中;

否则如果 $N(P_i) = \{P_i, P_k, P_l\}$ **则**

将 P_i 添加到 C，标签为 3;

添加带标签 0 的 P_k 到 C，除非 P_k 已经在 C 中;

将 P_l 添加到 C 并标记为 0，除非 P_l 已在 C中;

如果 $\exists P_i \in P^1 \setminus C$，**则**

将 P_i 添加到 C 并标记为 2;

返回 C

以下引理共同表明，算法 5、7 和8 能够正确地划分P_{NLM} 并恰当地为这些划分 P_i 标记。

引理 5.9. 设 uv 是X的一条局部极大边，且 u、v 是 uv的仅有面。那么，存在唯一的划分 P_1，它 P_{NLM} 见证了 $\mathcal{E}$，其中 $\mathcal{E}$ 是与 uv对应的边生成分支。此外， P_1 被算法 -1 赋予标签 7 和 8。

引理 5.10. 设 uv 是 X的一个局部极大边，且 u 和/或 v 是某个局部极大单元 $\sigma \in X, \sigma \neq uv$ 的面。那么，存在划分 P_1, P_2

算法 8： P^2的分类

数据： 一个嵌入的二维复形 $|X|$, P^2 的 ε-稠密样本 P，以及 P_{NLM}的 P_{LM}划分 $_{,}{}^{0}$, $P_{LM}{}_{,}{}^{1}$, $P_{LM}{}_{,2}$, 一个带标签列表 C 获得了来自算法 7.

结果： 带标签列表 C。

开始

- **对** $P_i \in P^2$ **执行 do**
  - **如果** $P_i \notin C$ **则**
    - 设 $LN = \{P_k \mid \mathcal{T} \in S_T(P_k)\}$;
    - **如果** $LN \cap P^2 = \{P_i, P_k, P_l\}$ **则**
      - 添加 P_i，P_k，P_l 到 C，并使用标签 3;
    - **否则如果** $LN \cap P^2 = \{P_i, P_k\}$ **则**
      - 将 P_i 添加到 C，标签为 3;
      - 将 P_l 添加到 C，并使用标签 4;
    - **否则如果** $LN \cap P^2 = \{P_i\}$ **则**
      - **如果** $LN = \{P_i\}$ **则**
        - 将带有标签 7 的 P_i 添加到 C；
      - **否则如果** $LN = \{P_i, P_k\}$ 和 P_k 的标签为 0 **则**
        - 将 P_i 添加到 C，并标记为标签 5;
      - **否则如果** $LN = \{P_i, P_k\}$ 和 P_k 的标签为2 **则**
        - 将 P_i 添加到 C，并标记为标签 4;
      - **否则如果** $LN = \{P_i, P_k, P_l\}$ 且 P_k 的标签为0，P_l 标签1 **则**
        - 将 P_i 添加到 C，并标记为标签 4;
      - **否则如果** $LN = \{P_i, P_k, P_l\}$ 且 P_k 的标签为1，P_l 标签2 **则**
        - 将 P_i 添加到 C，并标记为标签 3;
      - **否则如果** $LN = \{P_i, P_k, P_l\}$ 且 P_k 的标签为0，P_l 标签0 **则**
        - 将 P_i 添加到 C，并标记为标签 6;
      - **否则，如果** $LN = \{P_i, P_k, P_l, P_j\}$ 和 P_k、P_l、P_j 的标签为 0 **则**
        - 将 P_i 添加到 C，标签为 8;
      - **否则，如果** $LN = \{P_i, P_k, P_l, P_j, P_m\}$ 和 P_k、P_l、P_j 的标签为 0 以及 P_m 的标签为 3**则**
        - 将 P_i 添加到 C，标签为 9;
- **返回** C

的 P_{NLM}，它们见证了 $\mathcal{E}$，其中 $\mathcal{E}$ 是与uv对应的边生成分支。此外，P_1 和 P_2 被算法赋予标签 0 7 和 8 。**引理5.11**。设 $\triangle uvw$ 是 X的一个三角形，使得对于所有满足 $\sigma \in X$ 的局部极大胞腔 $\sigma \neq \triangle uvw$，都有

$$u, v, w \notin \sigma.$$

然后，存在唯一的划分 P_1 ，其对应于 P_{NLM} 见证 $\mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}$ 是对应于 $\triangle uvw$的边生成分支。进一步地， P_1 被赋予标签 7 ，依据算法 7 和 8。

引理 5.12。设 $\triangle uvw$ 是 X 的一个三角形，且存在某个局部极大单元 $\sigma \in X$ ，满足 $\sigma \neq \triangle uvw$，不失一般性，且对于所有局部极大 $\tau \in X$、 $\tau \neq \sigma$、 $\triangle uvw$，要么 $\triangle uvw \cap \tau = v$ ，要么 $\triangle uvw \cap \tau = \emptyset$。

那么，恰好存在两个划分 P_1， P_2 属于 P_{NLM}，它们证明了 $\mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}$是对应于 $\triangle uvw$的边生成分支。此外， P_1 被赋予标签0，而 P_2 被赋予标签5 ，由算法7 和8。

引理 5.13. 设 $\triangle uvw$ 是 X 的一个三角形，使得存在某个局部极大单元 $\sigma \in X$ ，满足 $\sigma \neq \triangle uvw$，不失一般性，且对于所有局部极大单元 $\tau \in X$、 $\tau \neq \sigma$、 $\triangle uvw$，要么 $\triangle uvw \cap \tau = \overline{uv}$，要么 $\triangle uvw \cap \tau = \emptyset$。

那么，恰好存在两个划分 P_1， P_2 属于 P_{NLM}，它们证明了 $\mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}$是对应于 $\triangle uvw$的边生成分支。此外， P_1 被赋予标签0，而 P_2 被赋予标签5 ，由算法7 和8。

引理5.14。令 $\triangle uvw$ 为 X的一个三角形，使得存在一些局部极大胞腔 $\sigma_1 \neq \sigma_2 \in X$ ，满足 σ_1、 $\sigma_2 \neq \triangle uvw$，使得

$$\sigma_1 \cap \triangle uvw = v$$
$$\sigma_2 \cap \triangle uvw = u$$

而对于所有其他局部极大胞腔 $\tau \in X$，要么

1. $\tau \cap \triangle uvw = v$,
2. $\tau \cap \triangle uvw = u$,
3. $\tau \cap \triangle uvw = \emptyset$。

那么，恰有三个划分 P_1， P_2， P_2 将 P_{NLM} 作为 $\mathcal{T}$的见证，其中$\mathcal{T}$是与 $\triangle uvw$对应的边生成分支。此外， P_1， P_2 分别被赋予标签 0 和 P_3 标签 6 ，由算法 7 和8给出。

引理5.15。设 $\triangle uvw$ 是 X 的一个三角形，使得存在一些局部极大胞腔 $\sigma_1 \neq \sigma_2 \in X$ ，满足 σ_1、 $\sigma_2 \neq \triangle uvw$，使得

$$\sigma_1 \cap \triangle uvw = \overline{uv}$$
$$\sigma_2 \cap \triangle uvw = v$$

而对于所有其他局部极大胞腔 $\tau \in X$，要么

1. $\tau \cap \triangle uvw = \overline{uv}$,
2. $\tau \cap \triangle uvw = v$,
3. $\tau \cap \triangle uvw = \emptyset$。

于是，恰有三个划分 P_1， P_2， P_2，它们属于 P_{NLM}，并见证 $\mathcal{T}$，其中$\mathcal{T}$是对应于 $\triangle uvw$ 的边生成分支。此外， P_1 的标签为 0，P_2 的标签为 1 ，而 P_3 的标签为 4 ，根据算法 7 和8。

引理 5.16。 设 $\triangle uvw$ 是 X 的一个三角形，使得存在一些局部极大胞腔 $\sigma_1 \neq \sigma_2 \in X$，满足 $\sigma_i \neq \triangle uvw$ 和 $\sigma_i \neq \sigma_j$ 对于 $i \neq j$，并且

$$\sigma_1 \cap \triangle uvw = \overline{uv}$$
$$\sigma_2 \cap \triangle uvw = w$$

对于所有其他局部极大胞腔 $\tau \in X$，要么

1. $\tau \cap \triangle uvw = \overline{uv}$,
2. $\tau \cap \triangle uvw = w$,
3. $\tau \cap \triangle uvw = \emptyset$。

那么，恰好存在三个划分 P_1、P_2、P_2，它们见证了 P_{NLM}，其中 $\mathcal{T}$，且$\mathcal{T}$ 是对应于 $\triangle uvw$ 的边生成分支。此外， P_1 的标签为 0，P_2 的标签为 2，以及 P_3 的标签为 9，由算法 7 和8给出。

引理 5.17。 令 $\triangle uvw$ 为 X的一个三角形，使得存在某些局部极大胞腔 σ_1、σ_2、$\sigma_3 \in X$，满足 $\sigma_i \neq \triangle uvw$ 和 $\sigma_i \neq \sigma_j$ 对于 $i \neq j$，使得

$$\sigma_1 \cap \triangle uvw = u$$
$$\sigma_2 \cap \triangle uvw = v$$
$$\sigma_3 \cap \triangle uvw = w$$

对于所有其他局部极大胞腔 $\tau \in X$，要么

1. $\tau \cap \triangle uvw = u$,
2. $\tau \cap \triangle uvw = v$,
3. $\tau \cap \triangle uvw = w$,
4. $\tau \cap \triangle uvw = \emptyset$。

那么，恰好有四个划分 P_1，P_2，P_3，P_4，其 P_{NLM} 见证为 $\mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}$ 是对应于 $\triangle uvw$ 的边生成分支。此外， P_1，P_2 和 P_3 被算法 7 和 P_4 分别标记为 0 和 8 。

引理 5.18。 设 $\triangle uvw$ 是 X的一个三角形，使得存在一些局部极大胞腔 σ_1、σ_2、$\sigma_3 \in X$，满足 $\sigma_i \neq \triangle uvw$，并且对于 $i \neq j$ 有 $\sigma_i \neq \sigma_j$，使得

$$\sigma_1 \cap \triangle uvw = \overline{uv}$$
$$\sigma_2 \cap \triangle uvw = v$$
$$\sigma_3 \cap \triangle uvw = w$$

并且对于所有其他局部极大胞腔 $\tau \in X$，以下条件之一成立

1. $\tau \cap \triangle uvw = \overline{uv}$,
2. $\tau \cap \triangle uvw = v$,

3. $\tau \cap \triangle uvw = w$,
4. $\tau \cap \triangle uvw = \emptyset$。

那么，恰有四种划分 P_1，P_2，P_3，P_4 属于 P_{NLM}，它们见证了 $\mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}$ 是与 $\triangle uvw$对应的边生成分支。此外，P_1 被标记为1，P_2，P_3 标记为0，而 P_4 标记为9，依据算法7 和8。

引理 5.19。设 $\triangle uvw$ 是 X的一个三角形，且存在一些局部极大胞腔 σ_1、σ_2、$\sigma_3 \in X$，满足 $\sigma_i \neq \triangle uvw$ 和 $\sigma_i \neq \sigma_j$，对于 $i \neq j$，使得

$$\sigma_1 \cap \triangle uvw = \overline{uv}$$
$$\sigma_2 \cap \triangle uvw = u$$
$$\sigma_3 \cap \triangle uvw = v$$

并且对于所有其他局部极大胞腔 $\tau \in X$，要么

1. $\tau \cap \triangle uvw = uv$,
2. $\tau \cap \triangle uvw = u$，3. $\tau \cap \triangle uvw = v$，4. $\tau \cap \triangle uvw = \emptyset$。

恰好存在四个划分 P_1、P_2、P_3、P_4，其中 P_{NLM} 见证了 $\mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}$ 是对应于 $\triangle uvw$ 的边生成分支。此外，P_1 标记为3，P_2标记为 P_3，其0 和 P_4 标记为4，依据算法7 和8。

引理 5.20。设 $\triangle uvw$ 是 X的一个三角形，使得存在一些局部极大胞腔 σ_1、σ_2、$\sigma_3 \in X$，满足 $\sigma_i \neq \triangle uvw$ 和 $\sigma_i \neq \sigma_j$ 对于 $i \neq j$，使得

$$\sigma_1 \cap \triangle uvw = \overline{uv}$$
$$\sigma_2 \cap \triangle uvw = \overline{vw}$$
$$\sigma_3 \cap \triangle uvw = v$$

并且对于所有其他局部极大胞腔 $\tau \in X$，以下两者之一成立：

1. $\tau \cap \triangle uvw = uv$;
2. $\tau \cap \triangle uvw = vw$;
3. $\tau \cap \triangle uvw = v$；4. $\tau \cap \triangle uvw = \emptyset$。

接下来，恰有四个划分 P_1、P_2、P_3、P_4 属于 P_{NLM}，它们见证了 $\mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}$ 是与 $\triangle uvw$相对应的边生成分支。此外，P_1 被标记为 0、P_2被标记为 P_3，标记为 1，而 P_3 被标记为 3，依据算法 7 和 8。

引理 5.21。设 $\triangle uvw$ 是 X 的一个三角形，使得存在一些局部极大胞腔 σ_1、σ_2、σ_3、$\sigma_4 \in X$，其中 $\sigma_i \neq \triangle uvw$ 且对于 $i \neq j$ 有 $\sigma_i \neq \sigma_j$，使得

$$\sigma_1 \cap \triangle uvw = u$$

$$\sigma_2 \cap \triangle uvw = v$$
$$\sigma_3 \cap \triangle uvw = w$$
$$\sigma_4 \cap \triangle uvw = \overline{uv}$$

以及对于所有其他局部极大胞腔 $\tau \in X$，要么

1. $\tau \cap \triangle uvw = u$,
2. $\tau \cap \triangle uvw = v$,
3. $\tau \cap \triangle uvw = w$,
4. $\tau \cap \triangle uvw = uv$5. $\overline{\quad}$

$\tau \cap \triangle uvw = \emptyset$。

那么，恰有五种划分 P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 属于 P_{NLM} 其见证为 $\mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}$ 是与 $\triangle uvw$对应的边生成分支。此外，P_1，P_2，P_3标记为 0，而 P_4 标记为 8，由算法 7 和8标记。

引理 5.22。设 $\triangle uvw$ 是 X的一个三角形，使得存在一些局部极大胞腔 σ_1、σ_2、σ_3、$\sigma_4 \in X$，满足 $\sigma_i \neq \triangle uvw$ 和 $\sigma_i \neq \sigma_j$ 对于 $i \neq j$，使得

$$\sigma_1 \cap \triangle uvw = u$$
$$\sigma_2 \cap \triangle uvw = v$$
$$\sigma_3 \cap \triangle uvw = \overline{vw}$$
$$\sigma_4 \cap \triangle uvw = \overline{uv}$$

而对于所有其他局部极大胞腔 $\tau \in X$，要么

1. $\tau \cap \triangle uvw = u$，2.
$\tau \cap \triangle uvw = v$，3.
$\tau \cap \triangle uvw = w$，4.
$\tau \cap \triangle uvw = uv$5. $\overline{\quad}$
$\tau \cap \triangle uvw = vw$6. $\overline{\quad}$
$\tau \cap \triangle uvw = \emptyset$。

那么，恰有五个划分 P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 的 P_{NLM} 能够见证 $\mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}$ 是与 $\triangle uvw$对应的边生成分支。此外，P_1，P_2 被标记为 0，P_3 被标记为 1，而 P_4，P_5 被标记为 3，依据算法 7 和 8。

引理 5.23. 设 $\triangle uvw$ 是 X 的一个三角形，使得存在一些局部极大胞腔 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, $\sigma_5 \in X$，满足 $\sigma_i \neq \triangle uvw$ 和 $\sigma_i \neq \sigma_j$（对于 $i \neq j$），使得

$$\sigma_1 \cap \triangle uvw = u$$
$$\sigma_2 \cap \triangle uvw = v$$
$$\sigma_3 \cap \triangle uvw = w$$
$$\sigma_4 \cap \triangle uvw = \overline{uv}$$
$$\sigma_5 \cap \triangle uvw = \overline{vw}$$

并且对于所有其他局部极大胞腔 $\tau \in X$，要么

1. $\tau \cap \triangle uvw = u$, 2. $\tau \cap \triangle uvw = v$, 3. $\tau \cap \triangle uvw = w$, 4. $\tau \cap \triangle uvw = \overline{uv}$ 5. $\tau \cap \triangle uvw = \overline{vw}$ 6. $\tau \cap \triangle uvw = \emptyset$.

那么， P_{NLM} 恰有五种划分 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ ，它们见证了 $\mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}$ 是对应于 $\triangle uvw$的边生成分支。此外，根据算法 7 和 8，P_1, P_2, P_3 标记为 0， P_4, P_5, P_6 标记为 3。

引理 5.24。 设 $\triangle uvw$ 是 X的一个三角形，使得存在一些局部极大胞腔 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \in X$ ，对于 $i \neq j$，它们满足 $\sigma_i \neq \triangle uvw$ 和 $\sigma_i \neq \sigma_j$ ，使得

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \cap \triangle uvw &= u \\
\sigma_2 \cap \triangle uvw &= v \\
\sigma_3 \cap \triangle uvw &= w \\
\sigma_4 \cap \triangle uvw &= \overline{uv} \\
\sigma_5 \cap \triangle uvw &= \overline{vw} \\
\sigma_6 \cap \triangle uvw &= \overline{uw}
\end{aligned}$$

而对于所有其他局部极大胞腔 $\tau \in X$，要么

1. $\tau \cap \triangle uvw = u$, 2. $\tau \cap \triangle uvw = v$, 3. $\tau \cap \triangle uvw = w$, 4. $\tau \cap \triangle uvw = uv$, 5. $\tau \cap \triangle uvw = vw$, 6. $\tau \cap \triangle uvw = uw$, 7. $\tau \cap \triangle uvw = \emptyset$。

那么，恰好有六个 P_{NLM} 的划分 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 能够见证 $\mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}$ 是与 $\triangle uvw$ 对应的边生成分支。此外，算法 7 和 8 将 P_1, P_2, P_3 标记为 0，将 P_4, P_5, P_6 标记为 3。

定理5.25。 设 P 是一个 ε嵌入式 2-复形 $|X| \subset \mathbb{R}^n$ 的样本，且满足假设 1，并设 B 为由算法 9 得到的图。

然后，我们可以补全 B 使其成为 X 的关联图，从而恢复抽象结构。

证明。 根据命题5.5 到5.7，我们正确识别出 X的局部极大分量。接下来需要证明，我们能够正确学习非局部极大胞腔的数量及其关联关系。

对于一条局部极大边，我们需要确定两个顶点作为其面。为此，我们必须确定 P_{NLM} 的哪些划分与这些顶点相对应。

取一个生成边分量 $\mathcal{E}$。那么存在某个与 $\mathcal{E}$ 对应的局部极大边 uv。需要考虑两种情况：

A: $\overline{uv}$ 与 X的其他所有部分均不连通，

B：$\overline{uv}$ 并非与 X的其他所有部分均不连通。

情况 A：根据命题 4.8 至 4.12 和假设 1，存在一个划分$P_i \subset P_{NLM}$，其中包含满足 $\mathcal{E} \cap B_{(R+\varepsilon)/\kappa+3\varepsilon}(p) \neq \emptyset$ 的点 p。因此，P_i包含满足以下条件的样本 p：$\|v-p\| \leq \frac{3R}{2}+\varepsilon$ 或 $\|u-p\| \leq \frac{3R}{2}+\varepsilon$，且 P_i对应于 u 和 v。在这种情况下，在算法 7 中，P_i 被标记为 -1。只有当 uv 与其余的 $|X|$ 不连通时，才会出现这种情况；因此，我们推断出这两个边界顶点。

情况 B：由于 uv 不连通，存在某个局部极大单元 $\sigma \in X, \sigma \neq uv$，使得 u 或 v 是 σ的一个顶点。不失一般性，设 $v \in \sigma$。对于顶点 u 和 v，令它们所见的局部极大面集合分别为 $S(u)$和 $S(v)$。由于 X 是一个 2-复形，且 uv 是一个局部极大边，因此 $\sigma \notin S(u)$。于是存在两个划分 P_u, P_v，分别对应顶点 u 和 v。在这种情况下，算法 7 中 P_u 和 P_v 被标记为 0。

现在我们需要探讨如何识别三角形的面。

对于三角形生成分量 $\mathcal{T}$，令 $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ 为 P_{NLM}的划分 P_i 所组成的集合，其中 $d(\mathcal{T}, P_i) \leq 3\varepsilon$。为确保正确恢复 X的结构，我们需要考虑以下几种情况：

1. $|\mathcal{P}_{\mathcal{T}}|=1$,
2. $|\mathcal{P}_{\mathcal{T}}|=2$,
3. $|\mathcal{P}_{\mathcal{T}}|=3$,
4. $|\mathcal{P}_{\mathcal{T}}|=4$,
5. $|\mathcal{P}_{\mathcal{T}}|=5$,
6. $|\mathcal{P}_{\mathcal{T}}|=6$.

令标记为 $\mathcal{E}$ 的权重为 2 的节点为 t。

情况 1 $|\mathcal{P}_{\mathcal{T}}|=1$：令 P_1 为 $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ 中唯一的划分。

这只有在三角形 $\triangle uvw$ 对应的 $\mathcal{T}$不与其他胞腔共享任何面时才会发生。此时，P_1 对应于三条边和三个顶点，并且已被算法正确标记为 7 7 和 8。设 B对应的权重为 1 的节点为 e_1, e_2, e_3，权重为 0 的节点为 v_1, v_2, v_3。我们在 t与$e_1, e_2, e_3, v_1, v_2, v_3$之间添加一条边，并在以下节点对之间添加边：

$$(e_1, v_1), (e_1, v_2), (e_2, v_2), (e_2, v_3), (e_3, v_3), (e_3, v_1).$$

情况 2 $|\mathcal{P}_{\mathcal{T}}|=2$：令 $\mathcal{P}_{\mathcal{T}} = \{P_1, P_2\}$。

这只有在三角形 $\triangle uvw$ 对应于 $\mathcal{T}$与其他三角形或局部极大边共享一个顶点，或共享一条边和两个顶点时，才会发生。因此，要么 P_1 被标记为 0，且 P_2 被标记为 5；要么 P_1 被标记为 2，且 P_2 被标记为 4，这由算法7 和 8确定。

如果 P_1 的标签为 0，且 P_2 的标签为 5，我们会找到标签为 P_1 的权重为 0 的节点 v_1，以及三个权重为 1 的节点 e_1、e_2、e_3和两个标签为 P_2的权重为 0 的节点 v_2、v_3。然后，我们在 t 与以下各节点之间添加一条边：e_1、e_2、e_3、v_1、v_2、v_3，并在以下节点对之间添加边：

$$(e_1, v_1), (e_1, v_2), (e_2, v_2), (e_2, v_3), (e_3, v_3), (e_3, v_1).$$

如果 P_1 具有标签 2，且 P_2 具有标签 4，我们会发现权重为 1 的节点 e_1 和两个权重为 0 的节点 v_1，v_2，其标签为 P_1，以及两个权重为 1 的节点 e_2，e_3 和一个权重为 0 的节点 v_3

带有标签 P_2。我们在 t 与以下各点之间添加一条边：e_1，e_2，e_3，v_1，v_2，v_3，并在以下节点对之间添加边：

$$(e_1, v_1), (e_1, v_2), (e_2, v_2), (e_2, v_3), (e_3, v_3), (e_3, v_1).$$

Case 3 $|\mathcal{P}_\mathcal{T}| = 3$: Let $\mathcal{P}_\mathcal{T} = \{P_1, P_2, P_3\}$.

只有当三角形 uvw 与其他三角形或局部极大边共享两个顶点，或共享两个顶点和一条边时，才可能出现。因此，要么 P_1 和 P_2 标记为 0，P_2 标记为 6；要么 P_1 标记为 0，P_2 标记为 1，P_3 标记为 4；要么 P_1 标记为 0，P_2 标记为 2，P_3 标记为 9。

如果 P_1，P_2 的标签为 0，且 P_3 的标签为 6，我们会找到权重为 0 的节点 v_1，其标签为 P_1；权重为 0 的节点 v_2，其标签为 P_2；三个权重为 1 的节点 e_1，e_2，e_3；以及权重为 0 的节点 v_3，其标签为 P_3。然后，在 t 与 e_1，e_2，e_3，v_1，v_2，v_3 各自之间添加一条边，并在以下节点对之间添加边：

$$(e_1, v_1), (e_1, v_2), (e_2, v_2), (e_2, v_3), (e_3, v_3), (e_3, v_1).$$

如果 P_1 的标签为 0，P_2 的标签为 1，且 P_3 的标签为 4，我们会找到权重为 0 的节点 v_1，其标签为 P_1；权重为 0 的节点 v_2，其标签为 P_2；标签为 P_2 的权重为 1 的节点 e_1；权重为 0 的节点 v_3，其标签为 P_3；以及两个标签为 P_3 的权重为 1 的节点 e_2，e_3。然后，在 t 与 e_1，e_2，e_3，v_1，v_2，v_3 各自之间添加一条边，并在以下节点对之间添加边：

$$(e_1, v_1), (e_1, v_2), (e_2, v_2), (e_2, v_3), (e_3, v_3), (e_3, v_1).$$

如果 P_1 的标签为 0、P_2 的标签为 2，且 P_3 的标签为 9，我们找到标签为P_1的权重为 0 的节点 v_1、权重为 0 的节点 v_2 和标签为 P_2的权重为 1 的节点 e_1，以及权重为 1 的节点e_2、e_3 和标签为 P_3的权重为 0 的节点 v_3。然后在 t 与e_1、e_2、e_3、v_1、v_2、v_3 之间分别添加一条边，并在以下节点对之间添加边：

$$(e_1, v_1), (e_1, v_2), (e_2, v_2), (e_2, v_3), (e_3, v_3), (e_3, v_1).$$

情形 4 $|\mathcal{P}_\mathcal{T}| = 4$：令 $\mathcal{P}_\mathcal{T} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$。

只有当与 $\mathcal{T}$ 对应的三角形 $\triangle uvw$ 与其他三角形或局部极大边共享三个顶点，或共享三个顶点和一条边，或共享三个顶点和两条边时，才会出现这种情况。因此，要么 P_1、P_2 和 P_3 的标签为 0，且 P_4 的标签为 8；要么 P_1 的标签为 1，P_2、P_3 的标签为 0，且 P_3 的标签为 9；要么 P_1 的标签为 3，P_2、P_3 的标签为 0，且P_4 的标签为 4；要么根据算法 7 和 8，P_1 的标签为 0，P_2、P_3 的标签为 1，且 P_3 的标签为 3。

如果 P_1, P_2, P_3 的标签为 0，且 P_4 的标签为 8，则找到标签为P_1的权重为 0 的节点 v_1、标签为 P_2的权重为 0 的节点 v_2、标签为 P_3的权重为 0 的节点 v_3，以及标签为 P_4的三个权重为 1 的节点 e_1, e_2, e_3。然后在 t 与$e_1, e_2, e_3, v_1, v_2, v_3$ 中的每个节点之间添加一条边，并在以下节点对之间添加边：

$$(e_1, v_1), (e_1, v_2), (e_2, v_2), (e_2, v_3), (e_3, v_3), (e_3, v_1).$$

若 P_1 的标签为 1，P_2，P_3 的标签为 0，且 P_4 的标签为 9，找出权重为 0 的节点v_1 和标签为 P_1 的权重为 1 的节点 e_1、标签为 P_2 的权重为 0 的节点 v_2、标签为 P_3 的权重为 0 的节点v_3，以及标签为 P_4 的两个权重为 1 的节点 e_2，e_3。然后在 t 与 e_1，e_2，e_3，v_1，v_2，v_3 中的每个节点之间添加一条边，并在以下节点对之间添加边：

$$(e_1, v_1), (e_1, v_2), (e_2, v_2), (e_2, v_3), (e_3, v_3), (e_3, v_1).$$

若 P_1 的标签为 3， P_2， P_3 的标签为 0，且 P_4 的标签为 4；找出标签为 P_1 的权重为 1 的节点 e_1 、标签为 P_2 的权重为 0 的节点 v_1 、标签为 P_3 的权重为 0 的节点 v_2 ，以及两个权重为 1 的节点 e_2 和标签为 P_4 的权重为 0 的节点 e_3 。然后在 t 与 e_1， e_2， e_3， v_1， v_2， v_3 中的每个节点之间添加一条边，并在以下节点对之间添加边：

$$(e_1, v_1), (e_1, v_2), (e_2, v_2), (e_2, v_3), (e_3, v_3), (e_3, v_1).$$

若 P_1 的标签为 0， P_2、 P_3 的标签为 1，且 P_4 的标签为 3，则找出标签为 P_1的权重为 0 的节点 v_1、权重为 0 的节点 v_2 和标签为 P_2的权重为 1 的节点 e_1 、权重为 0 的节点 v_3和标签为 P_3的权重为 1 的节点 e_3 ，以及标签为 P_4的两个权重为 1 的节点 e_2 。然后在 t 与 e_1、 e_2、 e_3、 v_1、 v_2、 v_3 之间分别添加一条边，并在以下节点对之间添加边：

$$(e_1, v_1), (e_1, v_2), (e_2, v_2), (e_2, v_3), (e_3, v_3), (e_3, v_1).$$

情况 5 $|\mathcal{P}_\mathcal{T}| = 5$：令 $\mathcal{P}_\mathcal{T} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$。

当三角形 $\triangle uvw$ 对应于 $\mathcal{T}$的三角形与其他三角形或局部极大边共享三个顶点和两条边，或共享三个顶点和一条边时，就可能出现这种情况。因此， P_1、 P_2的标签为 0， P_3的标签为 1，且 P_4、 P_5的标签为 3；或者 P_1、 P_2、 P_3的标签为 0， P_4 的标签为 3，且 P_5 的标签为 9，使用算法 7 和 8。

如果将 P_1、 P_2 标记为 0，将 P_3 标记为 1，并将 P_4、 P_5 标记为 3，我们会找到标签为 P_1的权重为 0 的节点 v_1 ，找到标签为 P_2的权重为 0 的节点 v_2 ，找到权重为 1 的节点 e_1和标签为 P_3的权重为 0 的节点 v_3 ，找到标签为 P_4 的两个权重为 1 的节点 e_2、 e_3 ，以及标签为 P_5 的两个权重为 1 的节点 e_2、 e_3 。然后在 t 与 e_1、 e_2、 e_3、 v_1、 v_2、 v_3 中的每一个之间添加一条边；如果 $d(P_i, P_j)$，则在带有标签 P_i 的 e_i 与带有标签 P_j 的 v_j 之间添加一条边。

如果将 P_1、 P_2、 P_3 标记为 0，将 P_4 标记为 3，并将 P_5 标记为 9，我们会找到标签为 P_1的权重为 0 的节点 v_1 ，找到标签为 P_2的权重为 0 的节点 v_2 ，找到标签为 P_3的权重为 0 的节点 v_3，找到标签为 P_4的权重为 1 的节点 e_1 ，以及标签为 P_5的两个权重为 1 的节点e_2、 e_3。然后在 t 与 e_1、 e_2、 e_3、 v_1、 v_2、 v_3 中的每一个之间添加一条边；如果 $d(P_i, P_j)$，则在带有标签 P_i 的 e_i 与带有标签 P_j 的 v_j 之间添加一条边。

情况 6 $|\mathcal{P}_\mathcal{T}| = 6$：令 $\mathcal{P}_\mathcal{T} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$。

这只有在三角形 $\triangle uvw$ 对应于 $\mathcal{T}$与其他三角形或局部极大边共享三个顶点和两条边，或共享三个顶点和三条边时才会发生。在这两种情况下， P_1， P_2， P_3均标记为 0， P_4， P_5， P_6则由算法 7和8标记为 3。

因此，我们找到权重为 0 的节点 v_1 ，其标签为 P_1；找到权重为 0 的节点 v_2 ，其标签为 P_2；找到权重为 0 的节点 v_3 ，其标签为 P_3；找到权重为 1 的节点 e_1 ，其标签为 P_4；找到权重为 1 的节点 e_2 ，其标签为 P_5；以及权重为 1 的节点 e_3 ，其标签为 P_6。然后在 t 与 e_1， e_2， e_3， v_1， v_2， v_3 的每个节点之间添加一条边；如果 $d(P_i, P_j)$，则在标签为 P_i 的 e_i 与标签为 P_j 的 v_j之间添加一条边。

在这 6 种情况下，我们将与胞腔 τ 对应的权重为 2 的节点 t 连接到与 τ 的边 σ_e 对应的每个权重为 1 的节点 e ，以及与 τ 的顶点 σ_v 对应的每个权重为 0 的节点 v 。此外，在此过程中，如果 σ_v 是 σ_e 的顶点，我们还会连接权重为 1 的节点 e 和权重为 0 的节点 v 。

我们已经证明， B 中的权重为 2 的节点与 X中的三角形一一对应， B 中的权重为 1 的节点与 X中的边一一对应，而 B 中的权重为 0 的节点与 X中的顶点一一对应。我们还证明，对于

任意一对节点 n_1，n_2及其对应的胞腔 σ_1，σ_2，当且仅当 $\sigma_1 \subset \sigma_2$ 或 $\sigma_2 \subset \sigma_1$时，它们之间存在一条边。

因此， B 是 X的关联图。 □

本文提出了一种方法，用于从一个 X嵌入的二维单纯复形 $|X|=(X,\Theta)$（满足假设1）中学习其背后的抽象结构，该复形由 ε个样本 P构成。对于抽象 2-复形，嵌入的建模是未来的工作。具体而言，若要对非线性嵌入进行建模，或考虑维数为 2 但并非三角形的胞腔（参照 CW复形），我们需要进一步完善学习局部极大胞腔之面的过程。

6 未来方向

本文的工作有几条自然的拓展路径。具体而言，下一步可以直接取消“复形中胞腔的最大维数为 2”这一假设。此外，也可以考虑如何修改算法以允许非线性嵌入，特别是使用半代数集；还可以研究不再假设噪声满足豪斯多夫条件时会发生什么。这些方向构成了未来研究的一种“正交”基，因为它们可以被视为彼此独立的问题；但将它们结合起来，则会在学习分层空间方面取得相当重大的进展。

致谢。 本研究是在作者攻读博士学位期间完成的，获得了澳大利亚联邦政府2019-2022年“分层空间学习”项目资助。作者谨向Kate Turner、Chris Williams、Jonathan Spreer、Stephan Tillmann、Vanessa Robins、Vigleik Angeltveit、Martin Helmer和James Morgan致以诚挚谢意，感谢他们在讨论中提供的宝贵帮助。

声明

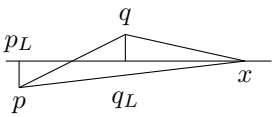
利益冲突

本文的工作是在我于澳大利亚国立大学和悉尼大学攻读博士学位期间完成的，并获得了澳大利亚联邦政府拨款（2019-2022，分层空间学习）的支持。

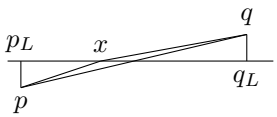
附录 A 几何引理的证明

证明 1 (引理 3.1 的证明)。 考虑 $S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap L$ 记作 C。考虑一个点$q \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p)$，满足 $d(L,q) \leq \varepsilon$。令 q_L 为 q 到 L的投影， p_L 为p 到 L的投影。

我们需要考虑两种情形，*1.* $\|x-q_L\| \geq \|q_L-p_L\|$，*2.* $\|x-q_L\| < \|q_L-p_L\|$。我们从情形 *1* 开始。



(A) 当 p 和 q 位于同一侧相对于 x



(B) 当 p 和 q 位于不同侧相对于 x

图 A1

我们希望对 $\|x-q\|$ 进行界定。注意，

$$\begin{aligned}
\|q-x\|^2 &= \|q-q_L\|^2 + \|q_L-x\|^2, \\
\|q_L-x\| &= \|p_L-x\| - \|p_L-q_L\|, \\
\|p_L-q_L\|^2 &= \|q-p\|^2 - \left(\|p-p_L\| + \|q-q_L\|\right)^2, \\
\|p_L-x\|^2 &= \|x-p\|^2 - \|p_L-p\|^2.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\|q-x\|^2 \\
&= \|q-q_L\|^2 + \left(\|p_L-x\| - \|p_L-q_L\|\right)^2 \\
&= \|q-q_L\|^2 + \left(\sqrt{\|q-p\|^2 - \|p_L-p\|^2} - \sqrt{\|q-p\|^2 - \left(\|p-p_L\| + \|q-q_L\|\right)^2}\right)^2 \\
&= \|q-q_L\|^2 + \\
&\left(\sqrt{\|q-p\|^2 - \|p_L-p\|^2} - \sqrt{\|q-p\|^2 - \|p-p_L\|^2 - \left(\|q-q_L\|^2 + \|p-p_L\|\|q-q_L\|\right)}\right).
\end{aligned}$$

Let

$$\begin{aligned}
A &= \|q-p\|^2 - \|p-p_L\|^2, \\
B &= \|q-q_L\|^2 + \|p-p_L\|\|q-q_L\|.
\end{aligned}$$

As

$$\begin{aligned}
\|q-p\| &\le R, \\
\|p-p_L\| &\le \frac{R}{2}, \\
\|q-q_L\| &\le \varepsilon,
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
A &> (R-\varepsilon)^2 - \varepsilon^2 \\
B &< 3\varepsilon^2
\end{aligned}$$

因此 $A > \frac{4B}{3}$。然后

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{3} &> \frac{4B^2}{9} \\
A^2 - AB &> A^2 - \frac{4AB}{3} + \frac{4B^2}{9} \\
\sqrt{A(A-B)} &> A - \frac{2B}{3} \\
-2\sqrt{A(A-B)} &< -2A + \frac{4B}{3} \\
2A - B - 2\sqrt{A(A-B)} &< \frac{B}{3} \\
\left(\sqrt{A} - \sqrt{A-B}\right)^2 &< \frac{B}{3}
\end{aligned}$$

回忆 $A > \frac{4B}{3}$，因此

$$\begin{aligned}
\|q - x\|^2 &= \|q - q_L\| + \left(\sqrt{A} - \sqrt{A-B}\right)^2 \\
&\leq \varepsilon^2 + \frac{B}{3} \\
&\leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

情形 *2* 中的类似计算给出了一个更小的界，因此

$$\|q - x\| \leq \sqrt{2}\varepsilon.$$

证明 *2*（引理 *3.2* 的证明）。首先，令 p_H 为 p 到 H的投影，并注意到 $\|p_H - p\| \leq \varepsilon$。取 $q_1 \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$。令 x_1 为 $\partial B_R(p) \cap H$ 中距离 q_1最近的点，并令 q_H 为 q_1 到 H 的投影。注意，p_H、q_H、x_1共线，位于从 p_H出发的射线 L上，并且 $\|q_1 - q_H\| \leq \varepsilon$。根据引理 *3.1*，$\|q_1 - x_1\| \leq \sqrt{2}\varepsilon$.

由于 $H \cap \partial B_R(p)$ 是半径为 $\sqrt{R^2 - \|p_H - p\|^2}$的圆，因此存在一点 $x_2 \in H \cap \partial B_R(p)$ 使得 $\|x_2 - x_1\| = 2\sqrt{R^2 - \|p_H - p\|^2}$。由于 $d_H(p, H) \leq \varepsilon$，我们有

$$\|x_2 - x_1\| \geq 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2},$$

并且作为 $d_H(P, H) \leq \varepsilon$，存在 $q_1 \in P$，使得 $\|q_1 - x_1\| \leq \varepsilon$。因此

$$\|q_2 - q_1\| \geq 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - (1 + \sqrt{2})\varepsilon.$$

证明 *3*（引理 *3.3* 的证明）。首先，设 H_1' 为包含 H_1 的半平面，其边界直线为 L'，且 $D(L, L') = \varepsilon$；设 p_H 为 p 在 H_1' 上的投影，p_L 为 p 到 L 的投影。然后取 $x_1 \in H_1$，使得 $\|p - x_1\| = R$ 和 p_H、p_L 和 x_1 共线。取满足 $\|q_1 - x_1\| \leq \varepsilon$ 的 $q_1 \in P$，于是 $q_1 \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$。

设 q_2 是 $S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$ 中的一个点。需要考虑两种情况：$d(q_2, H_1') \le \varepsilon$ 和 $d(q_2, H_2) \le \varepsilon$。

如果 $d(q_2, H_1') \le \varepsilon$，取 $x_2 \in \partial B_R(p) \cap H_1'$ 使得 x_2，p_H 并且 q_2 到 H_1' 的投影共线。根据引理 3.1 $\|q_2 - x_2\| \le \sqrt{2}\varepsilon$。

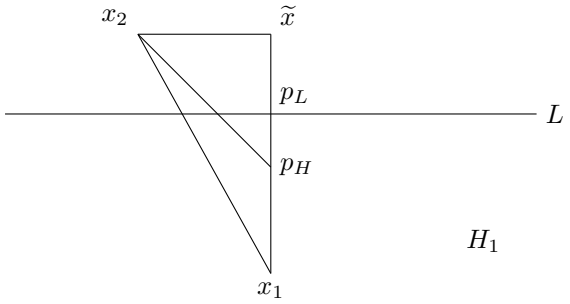


图 A2：理解两个半平面的公共边界附近的点的行为

考虑由 x_1、p_h、x_2 构成的三角形。根据假设，

$$\begin{aligned} \|\widetilde{x} - p_H\| &< \frac{R}{2} < R - 7\varepsilon, \\ \|x_2 - p_H\| = \|x_1 - p_H\| &\le R. \end{aligned}$$

设 $\widehat{R} = \sqrt{R^2 - \|p_H - p\|^2}$。则

$$\begin{aligned} \|\widetilde{x} - p_H\| &< \widehat{R} \\ \|\widetilde{x} - p_H\| &< \widehat{R} - 6\varepsilon \\ 2\widehat{R}\|\widetilde{x} - p_H\| &< 2\widehat{R}^2 - 12\widehat{R}\varepsilon \\ 2\widehat{R}^2 + 2\widehat{R}\|\widetilde{x} - p_H\| &< 4\widehat{R}^2 - 4(1+\sqrt{2})\widehat{R}\varepsilon + (1+\sqrt{2})\varepsilon \\ 2\widehat{R}^2 + 2\widehat{R}\left(\frac{\|\widetilde{x} - p_H\|}{\widehat{R}}\right) &< \left(2\widehat{R} - (1+\sqrt{2})\varepsilon\right)^2. \end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned} 2\widehat{R}^2 + 2\widehat{R}\left(\frac{\|\widetilde{x} - p_H\|}{\widehat{R}}\right) &= \|x_1 - p_H\|^2 + \|x_2 - p_H\|^2 + 2\|x_1 - p_H\|\|x_2 - p_h\|\cos\angle x_2 p_h \widetilde{x} \\ &= \|x_1 - p_H\|^2 + \|x_2 - p_H\|^2 - 2\|x_1 - p_H\|\|x_2 - p_h\|\cos\angle x_2 p_h x_1 \\ &= \|x_2 - x_1\|^2, \end{aligned}$$

so

$$\|x_2 - x_1\| < \sqrt{R^2 - \|p_H - p\|^2} - (1+\sqrt{2})\varepsilon.$$

这意味着

$$\|q_2 - q_1\| < 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - (2+2\sqrt{2})\varepsilon.$$

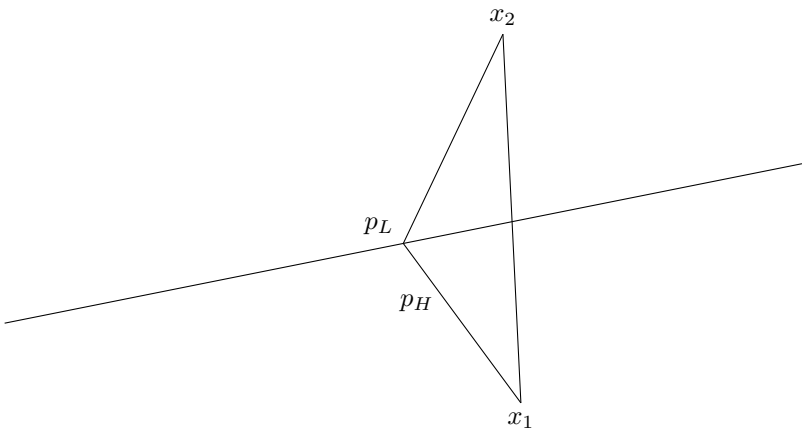


图 A3: $d(q_2,\ H_2)\ \leq \varepsilon$

现在假设 $d(q_2, H_2)\ \leq \varepsilon$。令 H_2' 为包含 H_2 且边界为 L' 的半平面，其中 $d(L, L')$ $= \varepsilon$。由于 $d(q_2, H_2) \leq \varepsilon$，因此存在 $x_2 \in \partial B_R(p) \cap H_2'$ 使得$\|q_2 - x_2\| \leq \sqrt{2}\varepsilon$。因此，

$$\|x_1 - x_2\| \geq 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - (2+2\sqrt{2})\varepsilon.$$

若 $x_2 \in H_2' \setminus H_2$，则通过与上述类似的论证，

$$\|x_1 - x_2\| \geq 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - (2+2\sqrt{2})\varepsilon.$$

若 $x_2 \in H_2 \subsetneq H_2'$，由余弦定理可得

$$\|x_2 - x_1\|^2 = \|x_2 - p_L\|^2 + \|x_1 - p_L\|^2 - 2\|x_2 - p_L\|\|x_1 - p_L\| \cos \angle x_1 p_L x_2.$$

注意到 $\|x_1 - p_L\| = \|x_1 - p_H\| + \|p_H - p_L\|$，且 $\|x_2 - x_1\|$ 的上界由以下情况给出：当

$$\begin{aligned} \angle x_1 p_L x_2 &= \alpha, \\ \|x_2 - p_L\| &= R + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

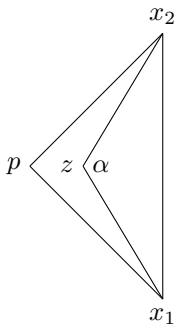


图 A4：点集直径的界定

$$\|x_1 - p_L\| = \|x_1 - p_H\| + \|p_H - p_L\| = \frac{3R}{2} + \varepsilon.$$

因此，我们有了

$$\|x_2 - x_1\| < (R + 2\varepsilon)^2 + \left(\frac{3R}{2} + \varepsilon\right)^2 - (R + 2\varepsilon)\left(\frac{3R}{2} + \varepsilon\right)\cos\alpha.$$

根据假设， $\alpha \in (0, \Psi(\varepsilon, R))$，因此

$$\|x_2 - x_1\| < 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - \left(2 + 2\sqrt{2}\right)\varepsilon,$$

这意味着

$$\|q_2 - q_1\| < 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - \left(1 + \sqrt{2}\right)\varepsilon.$$

因此，存在一个 $q_1 \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$，使得对于所有 $q_2 \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$

$$\|q_2 - q_1\| < 2\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - \left(1 + \sqrt{2}\right)\varepsilon.$$

证明 4 (引理 3.4的证明。 根据引理 *3.1*，每个 $q \in S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P$都位于 $\sqrt{2}\varepsilon$内，且距点 $\bar{x}$ 在 L 中不超过 $\|x - p\| = R$。因此， $\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap P\right)^{\frac{3\varepsilon}{2}}$ 由一个连通分支构成，且其直径小于 $2\sqrt{2}\varepsilon$。

证明 5 (引理 3.5 的证明)。 由于 $\|p - z\| \leq \frac{R-\varepsilon}{2}$，交集 $S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap T$ 非空、连通，且 $\mathcal{H}_1\left(S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap T\right) = 0$。此外，交集 $S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap L_1$和 $S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap L_2$ 也都是连通的。

现在，设 x_1 是 L_1 上满足 $\|q_1 - p\| = R$ 的点，设 x_2 是 L_2 上满足$\|x_2 - p\| = R$ 的点。由于 $S_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}(p) \cap T$ 是路径连通的， x_1 和 x_2 在 T 中是路径连通的。

考虑三角形 $\triangle x_1 p x_2$，我们有

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\|^2 &= \|x_1 - z\|^2 + \|x_2 - z\|^2 - 2\|x_1 - z\|\|q_2 - z\|\cos\alpha \\ &\geq \left(R - \frac{R-\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{R-\varepsilon}{2}\right)^2 - 2\left(R - \frac{R-\varepsilon}{2}\right)^2 \cos\alpha \\ &= 2\left(\frac{R+\varepsilon}{2}\right)^2 (1-\cos\alpha).\end{aligned}$$

现在，作为 $d_H(P,T) \leq \varepsilon$，存在点 $q_1, q_2 \in P$，它们具有

$$\|q_1 - x_1\|, \|q_2 - x_2\| \leq \varepsilon.$$

由三角形不等式可得

$$\begin{aligned}\|q_1 - q_2\|^2 &= 2\left(\frac{R+\varepsilon}{2}\right)^2 (1-\cos\alpha) - 2\varepsilon \\ &> 2\sqrt{2}\varepsilon, \quad as\ \alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right)\end{aligned}$$

附录B 正确性引理的证明

证明 6 (命题 5.3的证明)。 设 C 是 $\breve{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,1})$ 的一个连通分支，它跨越一条局部极大边 uv，其中点为 m_{uv}。那么，存在一个样本 $p_m \in C$，使得 $\|p_m - m_{uv}\| \leq \varepsilon$。

为证明 $\mathcal{D}(C) \geq \frac{9R}{2}$，我们证明存在两个点 x_u、$x_y \in uv$，使得

1. $\|u - x_u\| > \frac{3R}{2} + 2\varepsilon$,
2. $\|v - x_v\| > \frac{3R}{2} + 2\varepsilon$,
3. $\|x_u - x_v\| \geq \frac{3R}{2}$。

不失一般性，我们证明 x_u 存在，并且

$$\|x_u - m_{uv}\| \geq \frac{3R}{4} + \varepsilon.$$

根据假设 1，$\|u-v\| \geq 6(R+\varepsilon)$。由于 uv 是一条线段，对于所有 $\eta \in [0, \frac{9R}{4}+3\varepsilon]$，都存在一点 $x_\eta \in uv$，使得 $\|x_\eta - u\| = \eta$。令 $\eta = \frac{3R}{2} + 2\varepsilon$，则存在一点，即 x_u，使得 $\|x_u - u\| = \frac{3R}{2} + 2\varepsilon$。由于 P 是一个 ε-样本，因此存在一个样本 p_u，使得 $\|x_u - p_u\| \leq \varepsilon$，从而 $\|p_u - u\| > \frac{3R}{2} + \varepsilon$。因此， P 在 p_u 处的 (ε, R)-局部结构是一维极大的。

我们可以对所有 $\eta \in [\frac{3R}{2} + 2\varepsilon, \frac{9R}{4} + 3\varepsilon]$ 重复这一论证，从而得到一条由点 $x_\eta \in uv$ 和样本 $p_\eta \in P$ 构成的路径，将 p_u 与 p_m 连接起来。

将 u 替换为 v 时，这一结论同样成立，因此我们有 p_u 和 p_v。最后，我们有

$$\|p_u - p_v\| \geq \|x_u - x_v\| - \|p_u - x_u\| - \|p_v - x_v\|$$

$$\geq \frac{3R}{2} - 2\varepsilon,$$

因此 $\mathcal{D}(C) \geq \frac{3R}{2} - 2\varepsilon$.

现在，我们证明如果 C 形成某局部极大边。如果 $\mathcal{D}(C) \geq \frac{3R}{2} - 2\varepsilon$，那么存在点 p、$q \in C$，使得

$$\|p - q\| \geq \frac{3R}{2} - 2\varepsilon.$$

由于 P 是 $|X|$的一个 ε-样本，因此存在点 x_p、$x_q \in |X|$，使得

$$\|x_p - p\|, \|x_q - q\| \leq \varepsilon.$$

令 m_{pq} 为 x_p 和 x_q的中点。由于 p 和 q 属于 $\breve{C}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM},1)$ 的同一个连通分支，我们知道存在一个点序列 $\{q_i\}_{i=0}^m$，满足 $q_0 = p$、$q_m = q$，并且对所有 $0 < i \leq m$，$\|q_i - q_{i-1}\| \leq 3\varepsilon$。同样，$P$是 $|X|$的一个 ε-样本，并且由于 $q_i \in P_{LM}$、1、$\forall 0 \leq i \leq m$，对于每个 q_i，存在某个 $x_i \in |X|$ 位于一条局部极大边上，且 $\|q_i - x_i\| \leq \varepsilon$。根据假设 1和命题 4.9，存在一条局部极大边，记为 uv，使得 $x_i \in uv$、$\forall 0 \leq i \leq m$。令 uv 的中点为 x_{uv}。

现在我们分两种情况讨论：

存在某个 i，使得 $x_i = x_{uv}$，

II 对于所有 i，我们都有 $x_i \neq x_{uv}$。

情况 I: 连通分支 C 是一个生成连通分量，因为它包含一个样本，该样本与局部极大边 uv 的中点 x_{uv} 相距 ε 以内。

情形 II: 由于 q_i 均不在 m_{uv} 的 ε 范围内，我们知道 $q_i \forall 0 \leq i \leq m$ 位于 uv 的同一侧。也就是说，对于所有 q_i，不失一般性，

$$\|q_i - x_{uv}\| \leq \|q_i - u\| \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}R + 3\varepsilon$$
$$\|q_m - v\| \geq \frac{3R}{2} + \varepsilon.$$

此外，假设的是

$$\|q_0 - m_{uv}\| \leq \|q_m - x_{uv}\|.$$

还存在另一个点序列 $\{x'_j\}_{j=0}^m$，位于 uv 中，满足 $x'_0 = x_m$ 和 $x'_{m'} = x_{uv}$，且对于 $0 < j \leq m'$

$$\|x'_j - x'_{j-1}\| \leq \varepsilon.$$

那么，存在 $q'_j \in P$ 与。

$$\|q'_j - x'_j\| \leq \varepsilon$$

$$\|q'j - q'_{j-1}\| \le \varepsilon \forall 0 < j \le m'$$
$$\|q'_j - v\| \ge \frac{3R}{2} + \varepsilon.$$

根据假设 *1* 和命题 *4.9*，$q'_j \in P_{LM,1}$ 对所有 $0 \le j \le m'$ 均成立。因此，每个q'_j 都与 q_m位于同一个连通分支 C 中。

因此，C 包含一个样本 $q'_{m'}$，其与局部极大边 uv的中点之间的距离小于 ε。所以，C 是一个生成连通分量。

因此，$\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM},1)$ 的一个连通分支 C 跨越局部极大边 uv，当且仅当 $\mathcal{D}(C) \ge \frac{3R}{2} - 2\varepsilon$。

证明 *7*（命题 *5.4* 的证明）。首先，设 C 是 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}$ 的一个连通分支，它跨越一个中点为 m 的三角形 $\triangle uvw$。由于 P 是 X 的一个 ε-样本，因此存在一个样本 $p_m \in P$，满足 $\|p_m - m\| \le \varepsilon$。由于 $\triangle uvw$ 的内切圆半径至少为 $2R+3\varepsilon$，m 与 $\partial\triangle uvw$ 之间的距离至少为 $2R+3\varepsilon$。因此，$d(p_m, \partial\triangle uvw) \ge 2R+2\varepsilon$。

因此，对于所有 $q \in B_{\frac{R}{2}+2\varepsilon}(p) \cap P$, $d(q, \partial\triangle uvw) \ge \frac{3R}{2} + \varepsilon$，从而 $q \in P_{LM,2}$。

现在，取 $p \in P_{LM,2}$，使得 $B_{\frac{R}{2}+\varepsilon}(p) \cap P \subset P_{LM,2}$。于是，存在某个三角形$\triangle uvw$，其满足 $d(\triangle uvw, p) \le \varepsilon$。由于 $p \in P_{LM,2}$，我们知道 $d(\partial\triangle uvw, p) > \frac{R}{2} - \varepsilon$。根据假设，对于所有 $q \in B_{\frac{R}{2}+\varepsilon}(p) \cap P$，都有 $d(\partial\triangle uvw, q) > \frac{R}{2} - \varepsilon$。回想一下，$P$是 $|X|$的一个 ε-样本，因此存在一点 $x \in X$ 使得 $\|p - x\| \le \varepsilon$。由于 $\triangle uvw$ 是凸的，且每个 $B_{\frac{R}{2}+\varepsilon}(p) \cap P \subset P_{LM,2}$，我们有

$$d(\partial\triangle uvw, x) \ge \frac{R}{2} + 2\varepsilon + \frac{R}{2} - 2\varepsilon = R.$$

因此，$y \in B_{\frac{R}{2}+2\varepsilon}(p) \cap \triangle uvw$ 是一个点，有。

$$d(\partial\triangle uvw, y) \ge \frac{R}{2} + 2\varepsilon.$$

和一个样本 $q \in B_{\frac{R}{2}+2\varepsilon}(p) \cap P_{LM,2}$，其中有 $\|q - y\| \le \varepsilon$。

现在，我们可以构造一个点序列 $\{y_i\}_{i=0}^{m} \subset \triangle uvw$，使得 $\|y_i - y_{i-1}\| \le \varepsilon$ 对于 $1 \le i \le m$ 成立，且 $y_0 = x, y_m = y$。此外，对于每个 y_i，都存在一个 $q_i \in P$，满足$\|q_i - y_i\| \le \varepsilon$，以及 $q_i \in P_{LM,2}$。注意，这意味着 p 和 q_m 位于 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2})$ 的同一个连通分支中。

最后，我们构造类似的点序列 $\{\widetilde{y}_j\}_{j=0}^{\widetilde{m}}$，使其从 y 到 $m_{\triangle uvw}$，并满足 $\widetilde{y}_0 = y$、$\widetilde{y}_{\widetilde{m}} = m_{\triangle uvw}$。同样，对于每个 $\widetilde{y}_j$，存在一个 $\widetilde{q}_j \in P$，满足 $\|\widetilde{y}_j - \widetilde{q}_j\| \le \varepsilon$ 和 $\widetilde{q}_j \in P_{LM,2}$。因此，$\widetilde{q}_j$ 位于 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2})$ 的同一个连通分支中，并且这个连通分支是 C。

证明 8 (命题 5.5的证明)。令 V_{LM} 为X的局部极大顶点集。令 v 为一个局部极大的顶点，则由命题 *4.8*，$\forall p \in P$满足 $\|p - v\| \le 4\varepsilon$，$p \in P_{LM,0}$。事实上，由假设 *1*，任何满足 $\|p - v\| \le 4\varepsilon$ 的 $p \in P$实际上都位于 v的ε 内。因此，位于 v 的 ε 内的每个 $p \in P_{LM,0}$ 都属于$\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,0})$的同一个连通分支。

现在，取一个连通分支 C，它属于 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,0})$。每个 $p \in C$ 都位于某个局部极大的顶点 v_p 的 X内。由假设 *1*，每个局部极大的顶点 v 与 X的任何其他胞腔至少相距 5ε，因此 $\forall p \in C$，v_p 也相同。

因此，$\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,0})$ 的连通分量与 X 的局部极大顶点一一对应。

证明 9 (命题 5.6的证明。 设 $E_{LM} \subset E$ 为 X中的局部极大边集合。根据命题 *5.3*，$\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,1})$ 的一个连通分支 C 张成一条边 uv，当且仅当它包含一个样本 p，该样本位于 uv的中点 m 的 ε 范围内。

如果一个连通分支 C 是生成分量，那么存在某条局部极大边 uv，其中点为 m，且存在一个样本 $p \in C$满足 $\|m-p\| \leq \varepsilon$。

对于任意具有中点 m 的局部极大 $uv \in E_{LM}$，存在某个样本 $p \in P$，使得 $\|m-p\| \leq \varepsilon$。然后，根据假设 *1* 和命题 *4.9*，$p \in P_{LM,1}$，因此在 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,1})$ 中存在某个生成连通分量 C_{uv}。

现在，考虑一条局部极大边 uv', $v' \neq v$，并取样本 p,$q \in P_{LM,2}$使得 $d(uv,p)$ $d(uv',q)$ $\leq \varepsilon$。根据假设 *1*，$\|p-q\| > 6\varepsilon$，因此 p 和 q 位于 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,1})$ 的不同连通分支中。

最后，考虑一条局部极大边 $u'v'$，使得 uv 和 $u'v'$ 没有公共顶点。取样本 p、$q \in P_{LM,2}$，使得

$$d(\overline{uv},p),\ d(\overline{u'v'},q) \leq \varepsilon.$$

再次，根据假设 *1*, $\|p-q\| > 6\varepsilon$，因此 p 和 q 位于 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,1})$ 的不同连通分量中。

因此，每个连通分支 C 仅由满足 $d(uv,p) \leq \varepsilon$ 的样本 p 组成，其中对应于同一条局部极大边 uv。

因此，$\mathcal{C}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2})$ 的生成连通分量与 $|X|$ 的局部极大边构成双射。

证明 10 (命题5.7的证明)。 根据命题 *5.4*，$\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2})$ 的一个连通分支C 跨越一个三角形 $\triangle uvw$，当且仅当它包含一个样本 p，且该样本位于 $\triangle uvw$ 的中点 m 的 ε 范围内。

由于 P 是 $|X|$ 的 ε-样本，对于每个中点为 m 的 $\triangle uvw$，都存在一个样本 $p \in P$，使得 $\|p-m\| \leq \varepsilon$。因此，$\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2})$ 中存在一个生成连通分量 C。

现在，考虑 $\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2})$ 的 C 生成分量。由于 P 是一个 ε-样本，因此存在某个中点为 m 的 $\triangle uvw$，使得存在一个 $p \in C$ 样本满足 $\|p-m\| \leq \varepsilon$。

考虑两个三角形 $\triangle uvw$, $\triangle u'v'w'$，并取两个样本 p,$p' \in P_{LM,2}$ 其中

$$d(\triangle uvw,p),\ d(\triangle u'v'w',p') \leq \varepsilon.$$

由于 p,$p' \in P_{LM,2}$，我们知道

$$d(\partial\triangle uvw,p),\ d(\partial\triangle u'v'w',p') > R+\varepsilon,$$

因此，根据假设 *1*，$\|p-p\| > 6\varepsilon$。

因此，$\check{\mathcal{C}}_{\frac{3\varepsilon}{2}}(P_{LM,2})$ 的生成分量与 X 的三角形一一对应。

证明 11 (引理的证明5.9)。 由于 uv 是局部极大边，因此存在一个对应的边生成分量 $\mathcal{E}$。由于 u, v 不是任何其他胞腔 $\sigma \in X$ 的面，根据假设 *1* 和命题 *4.9* 及 *4.11*，点 $p \in P_{NLM}$ 作为 $\mathcal{E}$ 的见证，不会见证任何其他边生成分量 $\mathcal{E}'$ 或任何三角形生成分量 $\mathcal{T}$。

因此，只有一个划分 P_1 属于 P_{NLM}，其中包含所有能够证明 p 的 $\mathcal{E}$样本。根据假设 *1*，不存在其他划分 P_2 属于 P_{NLM} 且能够证明$\mathcal{E}$的情况。因此， P_1 被赋予标签 -1。

证明 12 （引理5.10的证明）。 由于 uv 是局部极大边，因此存在与之对应的边生成分支 $\mathcal{E}$。不失一般性，假设 v 是某个局部极大单元 $\sigma \neq uv$的面。

根据假设*1* 和命题*4.9* 至*4.11*，存在样本 p_u、 $pv_v \in P_{NLM}$使得

$$\|p_u - u\|, \|p_v - v\| \leq \varepsilon.$$

此外，存在一个生成连通分量 $\mathcal{C}$ ，它 p_v 也能够证明，但p_u 不能证明。因此，存在两个划分 P_v、 P_u 能够证明 $\mathcal{E}$。根据假设*1* 和算法*5*，不存在其他能够证明 $\mathcal{E}$的划分。

因此， P_v 和 P_u 均被算法7 和*8* 赋予标签*0*。

证明 13 (引理5.11的证明)。 设 $\mathcal{T}$ 为与 $\triangle uvw$对应的三角形生成分量。根据假设*1* 以及命题*4.8*、*4.10* 和 *4.12*，样本 $p \in P_{NLM}$ 作为 $\mathcal{T}$ 的见证时，并不见证任何生成连通分量$\mathcal{C} \neq \mathcal{T}$。根据假设 *1* 和算法 *5* ，存在唯一的连通分支 P_1见证 $\mathcal{T}$。

由于 P 是 $|X|$的一个 ε-样本，并且根据 *Crefprop:nlmedge,prop:lmvertex*，存在样本 $p_u, p_v, p_w, p_{uv}, p_{vw}, p_{uw} \in P_1$ 使得

$$\|p_u - u\|, \|p_v - v\|, \|p_w - w\| \leq \varepsilon,$$
$$d(\overline{uv}, p_{uv}), d(\overline{vw}, p_{vw}), d(\overline{uw}, p_{uw}) \leq \varepsilon.$$

因此， P_1 被算法赋予标签 7 算法 *7* 和 *8*。

证明 14 (引理 5.12的证明)。 设 $\mathcal{T}$ 为与 $\triangle uvw$对应的三角形生成分量。根据假设 *1* 和命题 *4.8* 至 *4.10* 以及 *4.12*，任何由见证 $\mathcal{C}$ 的样本 $p \in P_{NLM}$ 所见证的生成连通分量 $\mathcal{T}$都对应于一个局部极大单元 τ，满足 $\triangle uvw \cap \tau \neq \emptyset$。

我们需要分成两种情况：*1.* 存在唯一一个局部极大单元 $\tau \in X$，其满足 $\triangle uvw \cap \tau = v$；*2.* 至少存在两个局部极大胞腔 τ、$\sigma \in X$，它们满足 $\tau \neq \sigma$，且 $\triangle uvw \cap \tau = \triangle uvw \cap \sigma = v$。

情形 *1*：我们假设存在唯一一个局部极大的 τ，且满足 $\triangle uvw \cap \tau = v$；因此，根据命题 *5.6*和 *5.7* ，存在某个生成分量 $\mathcal{C}_\tau$ ，它对应于 τ。根据假设 *1* 以及命题 *4.8* 至 *4.10* 和 *4.12*，在算法 *5* 中，存在唯一一个划分 P_1 ，它属于 P_{NLM} ，并能证明 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{C}_\tau$，且

存在唯一一个划分 P_2，它仅能证明 $\mathcal{T}$。此外，P_1 被赋予标签 0，而 P_2 被赋予标签 5，依据算法 7 和8。

情形 2：根据我们的假设，存在两个局部极大胞腔 $\tau, \sigma \in X, \tau \neq \sigma$，使得

$$\tau \cap \triangle uvw = v = \sigma \cap \triangle uvw.$$

根据命题 5.6 和 5.7存在某个生成分量 $\mathcal{C}_\tau$，它对应于 τ，以及某个生成分量 $\mathcal{C}_\sigma$，它对应于 σ。

根据假设 1 和算法 5，存在唯一一个划分 P_1，它是 P_{NLM} 的划分，并见证 $\mathcal{T}, \mathcal{C}_\tau, \mathcal{C}_\sigma$；不存在能见证这些生成分量的任何子集的划分。通过归纳，对于任意满足 $\tau' \cap \triangle uvw = v$ 的局部极大胞腔 $\tau' \in X, \tau' \neq \tau, \sigma$，此结论均成立。同理，存在唯一一个划分 P_2，它是 P_{NLM} 的划分，且仅见证 $\mathcal{T}$。此外，算法 7 和 8 将 P_1 赋予标签 0，将 P_2 赋予标签 5。

证明 15 (引理的证明5.13)。设 $\mathcal{T}$ 为对应于 $\triangle uvw$ 的三角形生成分量。根据假设 1 以及命题4.8 至 4.10 和 4.12，任何由样本 $\mathcal{C}$ 见证的生成连通分量 $p \in P_{NLM}$（这些样本见证 $\mathcal{T}$）都对应于一个局部极大单元 τ，且满足 $\triangle uvw \cap \tau \neq \emptyset$。

我们需要分两种情形讨论：
1. 存在唯一一个局部极大胞腔 $\tau \in X$，满足 $\triangle uvw \cap \tau = uv$2. 至少存在两个局部极大胞腔 $\tau, \sigma \in X, \tau \neq \sigma$，满足 $\triangle uvw \cap \tau = \triangle uvw \cap \sigma = uv$。

情形 1：我们假设存在唯一一个局部极大单元 τ，满足 $\triangle uvw \cap \tau = uv$，因此根据命题 5.6 和 5.7，存在某个生成分量 $\mathcal{C}_\tau$，它对应于 τ。根据假设 1、命题 4.8 至 4.10 和 4.12，在算法 5 中，存在唯一一个划分 P_1，它见证 P_{NLM} 和 $\mathcal{T}$，并且存在唯一一个划分 P_2，它仅见证 $\mathcal{T}$。此外，算法 7 和 8 将 P_1 赋予标签 1，将 P_2 赋予标签 4。

情况 2：根据我们的假设，存在两个局部极大胞腔 $\tau, \sigma \in X, \tau \neq \sigma$使得

$$\tau \cap \triangle uvw = \overline{uv} = \sigma \cap \triangle uvw.$$

根据命题 5.6 和 5.7，存在某个生成分量 $\mathcal{C}_\tau$，它对应于 τ，以及某个生成分量 $\mathcal{C}_\sigma$，它对应于 σ。

根据假设 1 和算法 5，存在唯一一个划分 P_1 of P_{NLM}见证 $\mathcal{T}, \mathcal{C}_\tau, \mathcal{C}_\sigma$，且不存在见证这些生成分量的子集的划分。通过归纳法，对于任意满足 $\tau' \cap \triangle uvw = v$的局部极大单元 $\tau' \in X, \tau' \neq \tau, \sigma$，这一点均成立。类似地，存在唯一一个划分 $P_2$of P_{NLM}，它仅见证 $\mathcal{T}$。此外，根据算法 7 和 8，P_1 被赋予标签 1，P_2 被赋予标签 4。

证明 16（引理5.14的证明）。设 $\mathcal{T}$ 为与 $\triangle uvw$ 对应的三角形生成分量。接下来，证明过程是对引理 5.12 证明的改编。通过结合两个共享顶点处的论证，算法 5 得到三个划分 P_1、P_2、P_3，它们可以见证 $\mathcal{T}$；并且存在生成连通分量 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$，使得 P_1 可以见证 $\mathcal{C}_1$，但不能见证 $\mathcal{C}_2$，而 P_2 可以见证 $\mathcal{C}_2$，但不能见证 $\mathcal{C}_1$。此外，P_3 只能见证 $\mathcal{T}$。因此，P_1、P_2 被标记为 0，而 P_3 被标记为 6。

证明 *17*（引理*5.15* 的证明）。令 $\mathcal{T}$ 为对应于 $\triangle uvw$ 的三角形生成分量。接下来，证明是对引理 *5.12* 和 *5.13* 的证明的改编。结合其中的论证，算法 *5* 给出的三个划分 P_1、P_2、P_3 可见证 $\mathcal{T}$；并且存在生成连通分量 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$，使得 P_1 见证 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$，而 P_2 见证 $\mathcal{C}_2$ 但不见证 $\mathcal{C}_1$。此外，P_3 只见证 $\mathcal{T}$。因此，P_1 被标记为 *0*，P_2 被标记为 *1*，P_3 被标记为 *3*。

证明 *18*（引理 *5.16* 的证明）。设 $\mathcal{T}$ 是与 $\triangle uvw$ 对应的三角形生成分量。证明是对引理 *5.12* 和 *5.13* 的证明的改编。结合其中的论证，算法 *5* 给出的三个划分 P_1、P_2、P_3 见证了 $\mathcal{T}$；此外，存在生成连通分量 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$，使得 P_1 见证 $\mathcal{C}_1$，但不见证 $\mathcal{C}_2$，而 P_2 见证 $\mathcal{C}_2$，但不见证 $\mathcal{C}_1$。此外，P_3 仅见证 $\mathcal{T}$。因此，P_1 被标记为 *0*，P_2 被标记为 *2*，P_3 被标记为 *9*。

证明 *19*（引理 *5.17* 的证明）。设 $\mathcal{T}$ 是与 $\triangle uvw$ 对应的三角形生成分量。证明是对引理 *5.12* 和 *5.13* 的证明的改编。结合其中的论证，算法 *5* 给出的四个划分 P_1、P_2、P_3、P_4 见证了 $\mathcal{T}$；此外，存在生成连通分量 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$、$\mathcal{C}_\ni$，使得 P_1 见证 $\mathcal{C}_1$，但不见证 $\mathcal{C}_2$；$\mathcal{C}_3$、P_2 见证 $\mathcal{C}_2$，但不见证 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_3$；而 P_2 见证 $\mathcal{C}_3$，但不见证 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$。此外，P_4 仅见证 $\mathcal{T}$。因此，P_1、P_2 和 P_3 被标记为 *0*，P_4 被标记为 *8*。

证明 20 (引理 5.18的证明。 设 $\mathcal{T}$为与 $\triangle uvw$相对应的三角形生成分量。那么，该证明是对引理 *5.12*和 *5.13*证明的改编。通过结合其中的论证，可以得到三个划分

$$P_1, P_2, P_3, P_4$$

根据算法 *5*，其中 $\mathcal{T}$ 是见证，并且存在生成连通分量 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$、$\mathcal{C}_\ni$，使得 P_1 是 $\mathcal{C}_1$ 的见证，但不是 $\mathcal{C}_2$、$\mathcal{C}_3$、P_2 的见证；$\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$ 是 $\mathcal{C}_3$ 的见证，但不是 P_2 的见证；$\mathcal{C}_3$ 是 $\mathcal{C}_1$ 的见证，但不是 $\mathcal{C}_2$、P_4 的见证。此外，$\mathcal{T}$ 仅是 P_1 的见证。因此，P_2、P_3 和 P_4 被标记为 *0*，而 被标记为 *8*。

证明 *21*（引理 *5.19* 的证明）。设 $\mathcal{T}$ 为与 $\triangle uvw$ 对应的三角形生成分量。那么，该证明是对引理 *5.12* 和 *5.13* 的证明的改编。通过结合其中的论证，算法 *5* 得到三个划分 P_1、P_2、P_3、P_4，它们可以证明 $\mathcal{T}$，并且存在生成连通分量 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$、$\mathcal{C}_\ni$，使得 P_1 可以证明 $\mathcal{C}_1$，但不能证明 $\mathcal{C}_2$；$\mathcal{C}_3$、P_2 可以证明 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$，但不能证明 $\mathcal{C}_3$；而 P_2 可以证明 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_3$，但不能证明 $\mathcal{C}_2$。此外，P_4 仅能证明 $\mathcal{T}$。因此，P_1 被标记为 *3*，P_2、P_3 被标记为 *0*，而 P_4 被标记为 *4*。

证明 *22*（引理 *5.20* 的证明）。令 $\mathcal{T}$ 为与 $\triangle uvw$ 对应的三角形生成分量。然后，证明是对引理 *5.12* 和 *5.13* 的证明的改编。结合其中的论证，算法 *5* 中有四个划分 P_1、P_2、P_3、P_4 见证 $\mathcal{T}$，并且存在生成连通分量 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$、$\mathcal{C}_\ni$，使得 P_1 见证 $\mathcal{C}_1$，$\mathcal{C}_2$ 见证 $\mathcal{C}_3$、P_2，但不见证 $\mathcal{C}_1$，而 $\mathcal{C}_2$ 见证 $\mathcal{C}_3$、P_3，但不见证 $\mathcal{C}_1$。此外，$\mathcal{C}_3$ 只见证 $\mathcal{C}_2$。因此，P_4 被标记为 *0*，$\mathcal{T}$、P_1 被标记为 *1*，而 P_2 被标记为 *3*。

证明 23 (引理 5.21的证明)。令 $\mathcal{T}$ 为对应于 $\triangle uvw$的三角形生成分量。那么，该证明是对引理 *5.12* 和 *5.13*证明的改编。结合其中的论证，可得四个划分 P_1、P_2、P_3和 P_4

来自算法 5，它见证 $\mathcal{T}$；并且存在生成连通分量$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_\ni, \mathcal{C}_\ni$，使得 P_1 见证 $\mathcal{C}_1$ 而不见证 $\mathcal{C}_2$，$\mathcal{C}_3$, P_2 见证 $\mathcal{C}_1$ 而不见证 $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$，且 P_3 见证 $\mathcal{C}_3$ 但不见证 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$。此外，只有 P_4 见证 $\mathcal{T}$。因此， P_1, P_2, P_3标记为 0，而 P_4 标记为 8。

证明 24 （引理 5.22的证明）。 设 $\mathcal{T}$ 是与 $\triangle uvw$对应的三角形生成分量。那么，该证明是对引理 *5.12*和 *5.13*证明的改编。结合这些论证，可得到五个划分

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$$

来自算法 5，它们见证了 $\mathcal{T}$，并且存在生成连通分量$\mathcal{C}_1$、 $\mathcal{C}_2$、 $\mathcal{C}_\ni$、 $\mathcal{C}_\ni$、 $\mathcal{C}_\triangle$，使得 P_1 见证了 $\mathcal{C}_1$、 $\mathcal{C}_2$、 $\mathcal{C}_\triangle$ 而不见证 $\mathcal{C}_3$， P_2 见证了 $\mathcal{C}_2$ 而不见证$\mathcal{C}_1$， $\mathcal{C}_3$、 $\mathcal{C}_4$、 P_3 见证了 $\mathcal{C}_2$、$\mathcal{C}_3$ 但不见证 $\mathcal{C}_1$、 $\mathcal{C}_4$，而 P_4 见证了 $\mathcal{C}_4$ 但不见证 $\mathcal{C}_1$、 $\mathcal{C}_2$、 $\mathcal{C}_3$。此外， P_5 仅见证 $\mathcal{T}$，因此 P_4 仅见证 $\mathcal{T}$。于是， P_1、 P_2 被标记为 0， P_3 被标记为 1，而 P_4、 P_5 被标记为 3。

证明 25 (引理 5.23的证明。 设 $\mathcal{T}$ 是与 $\triangle uvw$对应的三角形生成分量。那么，该证明改编自引理 *5.12*和 *5.13*的证明。结合其中的论证，可得到六个划分

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$$

来自算法 5，它们见证了 $\mathcal{T}$，并且存在生成连通分量$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$，使得 P_1 见证 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_4$ 而不见证 $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5$, P_2 见证 $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$而不见证 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3$， P_3 见证 $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5$ 但不见证 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_4$， P_4 见证 $\mathcal{C}_4$ 但不见证$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5$，并且 P_5 见证 $\mathcal{C}_5$ 但不见证 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$。此外，只有 P_6 见证 $\mathcal{T}$，因此 P_1, P_2, P_3 标记为 0， P_4, P_5, P_6 标记为 3。

证明 26 (引理的证明 5.24)。 设 $\mathcal{T}$ 是与 $\triangle uvw$对应的三角形生成分量。那么，该证明是对引理 *5.12*和 *5.13*中证明的改编。综合其中的论证，可得六个划分

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$$

来自算法 5，它们见证了 $\mathcal{T}$；并且存在生成连通分量$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$，使得 P_1 见证 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_6$，但不见证 $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5$, P_2 见证$\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$，但不见证 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_6$, P_3 见证 $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$，但不见证 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\mathcal{C}_4$, P_4 见证 $\mathcal{C}_4$，但不见证 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$，而 P_5 见证 $\mathcal{C}_5$，但不见证 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_6$，并且 P_6 见证$\mathcal{C}_6$，但不见证 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$。因此， P_1, P_2, P_3 被标记为 0， P_4, P_5, P_6 被标记为 3。

参考文献

Bokor, Y., Turner, K., Williams, C.: 重建线性嵌入图：迈向分层空间学习的第一步。数据科学基础（2021）

Cheng, S.、Dey, T.K.、Ramos, E.: 《从点样本重构流形》。第十六届ACM-SIAM离散算法年会论文集（2005）

Dey, T.K.：《曲线与曲面重构》。剑桥大学出版社，剑桥（2007） Dey, T.K.、Wang, Y.：利用局部同调进行维数检测。第26届加拿大计算几何会议论文集（2014） Bendich, P. 、 Wang, B. 、 Mukherjee, S.：通过同调推断开展分层学习。AAAI 流形学习及其应用秋季研讨会（2010） Stolz, B.、Tanner, J.、Harrington, H.、Nanda, V.：数据中的几何异常检测。美国国家科学院院刊（2020） Aanjaneya, M.、F.、C.、D.、C.、M.、G.、Guibas, L.、Morozov, D.：从含噪数据重构度量图。《国际计算几何与应用杂志》**22**，205–325（2012） https://doi.org/10.1142/S0218195912600072Chazal, F.、Cohen-Steiner, D.、Lieutier, A.：欧几里得空间中紧集的采样理论。《离散与计算几何》**41**（3），461–479（2009）https://doi.org/10.1007/s00454-009-9144-8Bendich, P.、Cohen-Steiner, D.、Edelsbrunner, H.、Harer, J.、Morozov, D.：从采样分层空间推断局部同调。第48届IEEE计算机科学基础研讨会（FOCS'07），536–546（2007） Bokor, Y.：几何与拓扑形状分析：研究并总结数据的形状。博士论文，数学科学研究所，澳大利亚国立大学理学院，澳大利亚国立大学（2023） Carlsson, G.：点云数据的拓扑模式识别。《数值分析年刊》（2014） https://doi.org/10.1017/S0962492914000051Chazal, F.、Lieutier, A.：实体拓扑不变量的稳定性与计算，位于 $\mathbb{R}^n$。《离散与计算几何》**37**（4），601–617（2007） https://doi.org/10.1007/s00454-007-1309-8Hatcher, A.：《代数拓扑》。剑桥大学出版社，剑桥（2000）