arXiv:2305.02737v1 [math.OC] 4 May 2023

利用随流输运的被动粒子追踪点涡及环量：一种估计方法

Gil Marques[1,2], Marco Martins Afonso[1], S´尔维奥·伽马[1]

摘要——我们提出了一种新方法，利用存在高斯噪声时被动粒子的轨迹数据，估计点涡的环量和位置。该方法包含两种算法：第一种计算涡旋环量，第二种重构涡旋轨迹。重构通过一系列优化问题实现，其中涉及在多个时间子区间上对微分方程组进行积分；这些子区间的振幅相同，由随流输运的被动粒子轨迹的自相关函数确定。研究结果表明，即使被动粒子轨迹受到噪声影响，仍能够准确追踪涡旋的位置并确定其环量。

索引词：– 流体流动系统、优化算法、数值算法

I. 引言

本研究旨在展示一种方法：利用被动粒子的轨迹数据，求出点涡系统的强度（或环量）及其轨迹。这属于 Protas [1], 提出的问题范畴，更具体而言，是他提出的问题 4；该问题考虑的是如何利用不完整或含噪声的数据，重构涡旋动力学系统的某种状态。

关于这一问题的逆问题，即追踪由已知环量的点涡携带运动的被动粒子，文献中已有详尽记载。例如，文献 [2]利用庞加莱截面和正则变换，研究由两个点涡产生的流场中被动示踪粒子的哈密顿动力学。在文献 [3], 中，作者利用相干拉格朗日结构的数据，确定二维面板周围的流场中涡旋形成的时间和位置；而在文献 [4] 中，作者则利用涡旋近似不可压缩流的动力学。

研究点涡和被动粒子有助于理解大气和海洋涡旋的整体演变 [5]–[7]。

第二节介绍点涡动力学的形式体系。第三节详细说明我们要解决的问题，并在第四节提出解决方法。第五节展示了在模拟的受损数据上测试该方法所得的结果，最后在第六节总结了一些结论，并提出未来工作的设想。

[1]Gil Marques、Marco Martins Afonso和S´ílvio Gama任职于波尔图大学数学中心´，波尔图大学理学院数学系´，地址：葡萄牙波尔图 Rua do Campo Alegre s/n，4169-007[2]
gil.bj.marques@gmail.com

II. 点涡

在涡量形式下，二维（2D）不可压缩纳维–斯托克斯方程可写为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\omega = \nu \nabla^2 \omega, \tag{1}$$

其中 ω 表示涡量，$\mathbf{u}$ 表示速度场，ν 表示运动黏度。在无黏流中（$\nu = 0$），方程 (1)（也称为欧拉方程）具有以下奇异解

$$\omega(x, y, t) = \sum_v \Gamma_v\, \delta\left((x, y) - \left(x_v(t), y_v(t)\right)\right). \tag{2}$$

标量 Γ_v 表示位于（x_v（t） y_v（t））处的点涡的环量，可将其视为点涡周围流场旋转强度的度量。

这些二维不可压缩纳维–斯托克斯方程的奇异解 [8]–[11]最早由亥姆霍兹[12], 进行研究，随后由开尔文 [13] 和基尔霍夫 [14]进一步探讨。它们对应这样一种情形：流场的涡量集中在空间中若干明确的点上，从而能够更简单地描述该系统的动力学。只要知道系统中每个涡旋的位置和强度，就足以获得该时刻的完整速度场；因此，只要知道涡旋自身在某个时间区间内的动力学，就足以刻画同一时间区间内的速度场。

单个点涡若独处，将永远停留在位置（x_0, y_0），其环量 Γ 将在平面中诱导出与时间无关的速度场；而在包含多个点涡的系统中，动力学则会变得更加复杂。

考虑复平面中的二维无黏流，该流场由位于位置 $z_v = x_v + iy_v$（$v = 1, \ldots, N_v$；$i^2 = -1$）的 N_v 个点涡描述。每个涡旋产生的速度场都会影响其余的$N_v - 1$ 个点涡，使它们在二维平面中移动，进而导致速度场随时间发生变化。假设流场中没有其他物体或力的干扰，点涡的运动遵循以下微分方程

$$\dot{z}_v^* = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq v}}^{N_v} \frac{\Gamma_s}{z_v - z_s}, \quad v = 1, \ldots, N_v, \tag{3}$$

其中，Γ_v 是涡旋 v 的环量，* 表示复共轭。

然而，在观察真实现象时，很难准确说明涡旋位于何处以及

它们的环量是多少。测试粒子，也称被动粒子，是不会影响流场、因而不会作用于涡旋的粒子。因此，可以将它们视为环量为零的点涡。我们假设被动粒子的数量为 N_p，它们可能更容易追踪，其中任意一个粒子的轨迹 $z_p(\cdot)$ 都遵循运动方程。

$$\dot{z}_p^* = \frac{1}{2\pi i}\sum_{v=1}^{N_v}\frac{\Gamma_v}{z_p - z_v}, \quad p = 1,\ldots,N_p\,. \tag{4}$$

III. 问题

假设我们能够追踪流场中的单个被动粒子（例如，使用无人机、气象传感器、粒子图像测速／粒子跟踪测速技术），考虑这样一个问题：在只知道系统中涡旋的数量以及由该涡旋系统携带的 N_p被动粒子的轨迹的情况下，求出由 N_v 个点涡组成的系统的环量和位置。

事实上，由于被动粒子的轨迹是采样获得的，我们能够获取的是粒子轨迹的离散测量。为简单起见，假设这些测量是在时间区间 $[t_0, t_f]$ 内的 N_t 个等间隔时刻 $t_k = t_0 + hk$ 进行的，其中 h 为时间增量。

因此，重构涡旋轨迹的一种方法，是利用粒子轨迹的信息追溯产生这些轨迹的涡旋，并根据粒子和涡旋的运动方程，尝试重构测得的粒子轨迹。这个问题可概括如下：$\widetilde{z}_p\ (t)$ 是通过求解（4）得到的粒子 p 在时刻 t 的位置：

$$\begin{cases} \text{Minimize} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{N_t-1}\sum_{p=1}^{N_p} ||\widetilde{z}_p(t_k) - z_p(t_k)||^2 \\ \text{subject to} \\ \qquad \dot{\widetilde{z}}_p^* = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\sum_{v=1}^{N_v}\frac{\Gamma_v}{\widetilde{z}_p - z_v}, \quad p = 1,\ldots,N_p \\ \qquad \dot{z}_v^* = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\sum_{\substack{s=1\\ s\neq v}}^{N_v}\frac{\Gamma_s}{z_v - z_s}, \quad v = 1,\ldots,N_v \\ \qquad \widetilde{z}_p(t_0) = z_p(t_0) \\ \qquad z_v(t_0) \quad \text{free} \\ \qquad \Gamma_v \quad \text{free} \end{cases}, \tag{5}$$

其中，$||\cdot||$ 为通常的欧几里得范数。

作为解决这一问题的结果，我们将获得有关涡旋环量和轨迹的信息。

IV. 方法

首先需要注意的是，由于粒子轨迹数据容易受到未知测量误差的影响，我们实际上测量的并非真实的 $z_p(t_k)$，而是一个量 $z_p(t_k)+\Delta z_p\,(t_k)$，其中 $\Delta z_p(t)$ 是与该测量相关的误差。通过使用平滑算法来减小数据中测量误差的影响，我们便可以估算粒子的轨迹。从此处开始，为避免符号过于繁杂，我们将用 z_p 表示经过滤波的数据。

根据经过滤波的轨迹，可以使用有限差分法估算被动粒子 $\dot{z}_p(t)$ 的速度。然而，如果已有速度数据，则可以直接对这些数据进行平滑处理，而不必从经过滤波的轨迹数据中估算速度，因为后者会在速度估算中引入额外误差。

我们可以利用 Γ_v 不随时间变化这一事实，将问题分解为两个子问题。首先，我们将求出涡旋的环量，然后利用这些环量来获得更精确的涡旋轨迹估计。

A. 估计环量

对于任何有数据可用的给定时刻 t，式 (4) 中的未知量为 Γ_v 和 $z_v(t)$。实际上，这些量总共包含 $3N_v$ 个未知数，因此我们需要知道至少 $3N_v/2$ 个粒子的轨迹（每个粒子提供两条信息），才能建立一个非欠定的方程组。建立这样的方程组后，可以使用非线性求解方法求解。这需要为环量和涡旋位置提供初始猜测，而这些猜测应根据数据分析得出：粒子在流场中的运动，或环境的实际视觉图像，都应能提示这些量的预期取值范围。

在时刻 t_k 进行上述操作，将得到环量 Γ_v 和 $z_v(t_k)$ 的估计值——即涡旋在时刻 t_k 的位置$\widetilde{}$。我们将这些估计值分别记为 Γ_{v_k} 和 $\widetilde{z}_{v_k}$。环量上的索引 k 仅用于标识该数值是根据时刻 t_k 的数据估计得出的，因为环量实际上与时间无关。

然后可以将 $\widetilde{z}_{v_k}$ 用作 (3) 的初始条件，以求得 $z_v(t_{k+1})$ 的初始猜测，并像之前一样针对时间 t_{k+1} 构建相同的非线性方程组，求解后得到 $z_v\,(t_{k+1})$ 的估计值，以及 Γ_v 的一个新估计值$\widetilde{}$：$\Gamma_{v_{k+1}}$。为了进一步探索参数空间，可以将环量$\widetilde{}$的初始猜测更新为 $\Gamma_{v_k}(1+\delta_v)$，其中 δ_v 是一个取值范围从 $-\epsilon$ 到 ϵ 的均匀随机变量（ϵ 是某个较小的正数）。

重复执行这一过程，从 t_0 到 t_f，将得到一组数值 $\left\{\widetilde{\Gamma}_{v_k}:\ \ k = 1,\ldots,N_t\right\}$，它们都是涡旋环量的估计值。通过进行异常值分析，可以剔除异常值，并利用$\widetilde{}$剩余数值的平均值或中位数来估计涡旋环量，从而得到 Γ_v更稳健的估计值。甚至可以将这些更稳健的估计值作为初始猜测，重复整个过程，以进一步改进结果。算法1概括了这一过程。

B. 估计涡旋轨迹

得到环量后，问题（5）便简化了，因为~现在固定为 Γ_v。

众所周知，对于 $N_v \geq 4$ [8], [15]，涡旋系统通常会表现出混沌动力学。这一事实带来的实际后果是，在求解诸如式 (5) 或式 (4) 这样的方程时，即使初始条件存在很小的误差，随着时间推移也可能被大幅放大，导致计算得到的轨迹与真实轨迹截然不同。我们处理这一问题的方法是将轨迹划分为若干段，并依次单独重构每一段。不过，首先需要找到一种构建此类划分的准则，并且该准则应考虑到我们对系统混沌性的了解。

衡量此类系统混沌程度的一种方法是计算李雅普诺夫指数 [16], [17]。具体而言，最大李雅普诺夫指数衡量两条相近轨迹彼此分离的（指数）速率，因此其倒数给出了两条相近轨迹相距达到 e 倍所需的时间。这也说明系统具有一定程度的记忆；但经过一段时间后，其演化与此前某一时刻的状态大多不再相关。涡旋系统的李雅普诺夫指数与具有混沌运动的被动粒子的李雅普诺夫指数并不相同。尽管如此，在混沌系统中，它们似乎处于同一数量级 [18]。因此，由于我们对涡旋本身没有任何信息，需要借助被动粒子来估算这些量。不过，李雅普诺夫指数的计算既耗时又复杂；在需要实时追踪涡旋的情形下，这一量并不适用。相比之下，自相关函数计算速度快，可用于确定系统状态在经过多久之后便几乎不再保留其初始状态的记忆。

通过计算被动

算法1 求解环量

1: 为 ϵ 设置一个值
2: 估算被动粒子的速度
3: 为环量和位置提供一个初始猜测
涡旋在 $t = t_0$ 时的位置
4: $k \leftarrow 1$
5: 当 $k \leq N_t$ 成立时
6: ~使用非线性求解器求解 Γ_{v_k} 以及 $\tilde{z}_{v_k}$，估计值对于 Γ_v 和 $z_v(t_k)$，使用适当的初始条件
7: 使用 $\tilde{z}_{v_k}$ 并通过 (3) 求得 $z_v(t_{k+1})$ 的估计值
8: 在区间内均匀生成随机数 δ_v
val $[-\epsilon, \epsilon]$
9: Use 将 $\Gamma_{v_k}(1+\delta_v)$ 作为新的初始猜测，用于环量
10: $k \leftarrow k+1$
11: 结束 while 循环
12: 对这些值进行异常值分析 $\widetilde{\Gamma}_{v_k}$
13: 使用以下方法获得更稳健的环量估计：
剩余值的平均值或中位数 $\widetilde{\Gamma}_{v_k}$ 值

粒子轨迹的自相关函数，我们可以找到系统从初始状态失去大部分记忆所需的时间 τ。我们通过设定任意的截断值 $0 < \alpha < 1$ 并计算 τ：$\forall p \in \{1, \ldots, N_p\}$, $|\rho_p($ $t > \tau)$ $| \leq \alpha$ 来实现这一点，其中ρ_p 表示粒子 p轨迹的自相关函数。

因此，为了重构完整的涡旋轨迹，我们必须重构 n $\overline{P}_j\left\lceil\frac{t_f - t_0}{=\tau}\right\rceil$ 形如 $[t_0 + j\tau, t_0 +$ $j+1$ $\tau]$ $j = 0$ 1 … $n-2$ $P_{n-1} =($ $),$,

, , , 和 $[t_0 + (n-1)$ $\tau, t_f]$ 的分区。每个分区都构成一个类似于 (5) 的优化问题，可写为

$$
\begin{cases}
\text{Minimize} \quad \displaystyle\sum_{k=j\tau/h}^{(j+1)\tau/h} \sum_{p=1}^{N_p} ||\widetilde{z}_p(t_k) - z_p(t_k)||^2 \\
\text{subject to} \\
\dot{\widetilde{z}}_p^* = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\sum_{v=1}^{N_v} \frac{\widetilde{\Gamma}_v}{\widetilde{z}_p - z_v}, \quad p = 1, \ldots, N_p \\
\dot{z}_v^* = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq v}}^{N_v} \frac{\widetilde{\Gamma}_s}{z_v - z_s}, \quad v = 1, \ldots, N_v \\
\widetilde{z}_p(t_0 + j\tau) = z_p(t_0 + j\tau) \\
z_v(t_0 + j\tau) \quad \text{free} \\
t \in P_j
\end{cases}
\tag{6}
$$

对于 $j = 0$, 1, …, $n-2$，以及

$$
\begin{cases}
\text{Minimize} \quad \displaystyle\sum_{k=(n-1)\tau/h}^{N_t - 1} \sum_{p=1}^{N_p} ||\widetilde{z}_p(t_k) - z_p(t_k)||^2 \\
\text{subject to} \\
\dot{\widetilde{z}}_p^* = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\sum_{v=1}^{N_v} \frac{\widetilde{\Gamma}_v}{\widetilde{z}_p - z_v}, \quad p = 1, \ldots, N_p \\
\dot{z}_v^* = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq v}}^{N_v} \frac{\widetilde{\Gamma}_s}{z_v - z_s}, \quad v = 1, \ldots, N_v \\
\widetilde{z}_p(t_0 + (n-1)\tau) = z_p(t_0 + (n-1)\tau) \\
z_v(t_0 + (n-1)\tau) \quad \text{free} \\
t \in P_{n-1}
\end{cases}
\tag{7}
$$

因此，这些 n 问题可以通过非线性求解器依次求解，并将区间 P_j 对应问题中得到的 $z_v(t_0 + (j+1)$ $\tau)$ 用作区间 P_{j+1}对应问题的初始猜测。算法 2 总结了这一完整过程。

V. 结果

我们模拟了一个由 $N_v = 4$ 个涡旋组成的系统，其环量分别为 $\Gamma_v = v$、 $v = 1$、2、3、4，以及 $N_p = 20$ 个被动粒子。涡旋最初被放置在位置$z_1(t = 0)$ $= 2$、 $z_2(t = 0)$ $= -1 - i$、 $z_3(t = 0)$ $= \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$、$z_4(t = 0)$ $= -2 + 3i$，而被动粒子则被随机放置在涡旋之间的背景区域中，

随后，我们使用步长为 10^{-2} 的时间步，让系统演化了 10^5 个时间单位。所有涡旋环量均选择为相同符号，以便将粒子和涡旋的运动限制在特定区域内，从而简化模拟和分析。如果系统中存在具有相反符号的涡旋，则可能形成涡旋对，并远离其余涡旋移动很长距离。模拟运行了很长时间，以便我们能够对涡旋系统的最大李雅普诺夫指数进行良好估计，我们得到的结果为 ~ 0.028。然而，由于恢复涡旋轨迹这一问题的计算开销很大，我们将该问题所使用的时间区间限制为 10^3 个时间单位。

随后，我们在粒子的轨迹数据中加入了高斯白噪声 $W \sim \mathcal{N}\left(\mu = 0, \sigma^2 = 0.01^2\right)$，以模拟实际真实数据可能呈现的样子。处理后，数据受到的干扰过于严重，无法直接使用，因此我们先用高斯滤波器对数据进行平滑处理。随后，我们使用平滑后的轨迹，通过四阶有限差分格式计算粒子速度，并使用 $\epsilon = 0.1$ 运行算法1。积分采用 Runge–Kutta–Fehlberg 方法，步长为 10^{-2}；非线性方程则通过 MATLAB^{TM} 程序 lsqcurvefit 求解。

我们成功恢复了涡旋的环量，相对误差为 $\sim 0.1\%$（如果使用未受干扰的数据，相对误差会降至 $\sim 10^{-7}$）。所得数值汇总于表I，同时还列出了各个环量的相对误差。

图 1 展示了以下数值的箱线图：$\widetilde{\Gamma}_{v_k}$ 由该算法得出。为便于观察，y 轴上的数值下移了 $v-1$。

使用所得的 $\widetilde{\Gamma}_v$，我们使用算法 2 恢复涡旋轨迹。我们设定 $\alpha = 0.2$，得到 $\tau = 39.89$. 这与我们在初始模拟中得到的李雅普诺夫指数值（~ 0.028）一致，因为 $\tau^{-1} \approx 0.025$，其

算法 2 查找涡旋轨迹

```
设置 α
p ← 1
当 p ≤ N_p 时 do
    计算 ρ_p(t)，即 z_p(t) 的自相关函数
    求 τ_p : |ρ_p(t > τ_p)| ≤ α
    p ← p + 1
结束当
τ ← 最小值_{1≤p≤N_p} {τ_p}
n ← | (t_f − t_0)/τ |
j ← 1
当 j ≤ n 时执行
    使用非线性求解器求解问题 (6)，时间区间为时间区间 P_j
    j ← j + 1
结束循环
使用非线性求解器求解问题 (7)
```

数量级与李雅普诺夫指数相同。我们再次使用步长为 10^{-2} 的 Runge—Kutta—Fehlberg 方法进行积分，并使用 MATLAB^{TM} 中的 fmincon 程序及 SQP 算法求解非线性问题。我们成功恢复了涡旋系统的轨迹，总相对误差为$\sim 0.44\%$。（如果使用未受污染的数据，相对误差会降至 $\sim 8 \times 10^{-4}$）。

图 2 展示了恢复得到的 4 个涡旋的部分轨迹（以不同颜色的标记表示），以及一条用实黑线表示的被动粒子（平滑后）轨迹。实心彩色圆点标出了各条轨迹的初始点。

图 3 说明了对问题进行分段如何有助于控制恢复轨迹的误差。由于系统具有混沌性，误差可能会变得很大。一般而言，将轨迹按时长与涡旋系统李雅普诺夫指数倒数相近的区段进行积分，有助于防止误差呈指数增长。

VI. 结论

我们介绍了如何根据被平流的被动粒子轨迹数据尝试恢复涡旋动力学的基本思路。据我们所知，此前尚未有人研究过这个问题。由于追踪被平流的粒子比追踪涡旋本身并测量其强度更容易，因此该问题具有实际意义。

所提出的方法是初步研究，我们认为仍有很大的改进空间。例如，针对该问题及其方程专门设计优化技术和算法，而不是使用通用的 MATLAB^{TM}程序，很可能会提高精度并加快计算速度。

尽管如此，从本研究的结果中我们可以看出，即使存在噪声数据，仍然能够以较高的精度有效地恢复完整的涡旋动力学。这为研究更复杂的问题开辟了可能性，例如，预测未来时刻涡旋和/或粒子的位置，从而能够进一步研究如何寻找控制策略，使被动粒子在给定时间内移动到期望的位置。

致谢

本研究获得了以下项目的资助：(i) CMUP（LASI 成员单位），该机构通过 FCT（科学与技术基金会）利用国家资金提供资助，项目编号为 UIDB/00144/2020；以及 (ii) 项目 SNAP NORTE-01-0145-FEDER-000085，该项目通过葡萄牙北部区域运营计划（NORTE2020），在葡萄牙2020伙伴关系协议框架下获得欧洲区域发展基金（ERDF）的共同资助。GM 感谢 FCT 提供的资助，资助编号为 P D/BD/150537/2019。

参考文献

[1] B. Protas，《流动控制问题中的涡旋动力学模型》，Non-linearity，第21卷，第9期，第R203–R250页，2008年。[2] G. Boffetta、A. Celani 和 P. Franzese，《点涡系统中被动示踪粒子的捕获》，《物理学杂志 A：数学与一般》，第29卷，第14期，第3749页，1996年。

表I 环量的真实值及算法1恢复的值。环量恢复的相对误差为 $\sim 0.1\%$。

涡旋 v	1	2	3	4
$z_v(0)$	2	$-1-i$	$\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$	$-2+3i$
Γ_v	1	2	3	4
$\widetilde{\Gamma}_v$	0.99625	2.00132	2.99746	4.00258
$\frac{\lvert\widetilde{\Gamma}_v-\Gamma_v\rvert}{\lvert\Gamma_v\rvert}$	3.7×10^{-3}	6.6×10^{-4}	8.5×10^{-4}	6.5×10^{-4}

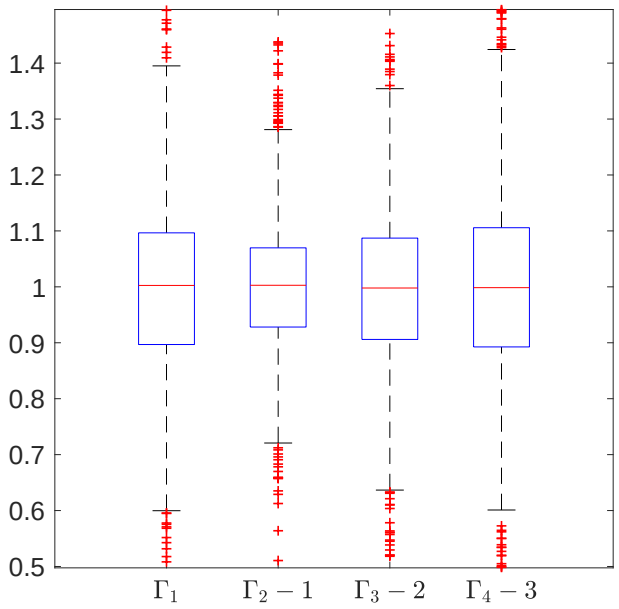

图1. $\widetilde{\Gamma}_v - (v-1)$的箱线图。为便于观察，数值向下平移了 $v-1$。可以看出，所得数值的分布以各环量的真实值为中心。

[3] Y. Huang 和 M. A. Green，《利用拉格朗日相干结构检测和追踪涡旋现象》，Experiments in Fluids，第56卷，第7期，第147页，2015年。[4] Z. Qian、Y. Qiu 和 Y. Zhang，《利用布朗流体粒子追踪涡旋运动》，Physics of Fluids，第33卷，105113，2021年10期，第页。[5] V. V. Meleshko、M. Y. Konstantinov、A. A. Gurzhi 和 T. P. Konovaljuk，《点涡速度场中涡旋对的平流》，Physics of Fluids A: Fluid Dynamics，第4卷，第12期，第2779–2797页，1992年。[6] H. Aref 和 M. A. Stremler，《点涡旋模型及大气与海洋中强涡旋的动力学》，载于《流体力学与环境：动力学方法：为纪念Sidney Leibovich 60岁生日而编纂的研究论文集》，第1–17页，Springer，2001年。[7] I. I. Mokhov、S. G. Chefranov 和 A. G. Chefranov，《旋转球面上的点涡动力学及全球大气涡旋相互作用建模》，Physics of Fluids，第32卷，106605，2020年10期，第页。[8] P. Newton，《N涡旋问题：解析技术》。Appl. Math. Sci.，Springer New York，2001年。[9] A. Chorin，《涡量与湍流》。Appl. Math. Sci.，Springer，1994年。[10] G. K. Batchelor，《流体动力学导论》。Cambridge Mathematical Library，Cambridge University Press，2000年。[11] P. G. Saffman，《涡旋动力学》。Cambridge University Press，1995年。[12] H. Helmholtz，《¨关于与涡旋运动相对应的流体动力学方程积分。》，第1858卷，第55期，第25–55页，1858年。

[13] W. Thomson（开尔文勋爵），“关于涡旋运动。”《爱丁堡皇家学会汇刊》，第25卷，第217–260页，1869年。[14] G. R. Kirchhoff，《数学物理学讲义》。《力学》，1876年。[15] A. Babiano、G. Boffetta、A. Provenzale和A. Vulpiani，“点涡旋模型中的混沌平流与二维湍流”，《流体物理学》，第6卷，第7期，第2465–2474页，1994年。[16] D. Ruelle和S. Isola，《混沌演化与奇异吸引子》，第1卷。Cambridge University Press，1989年。[17] K. T. Alligood、T. D. Sauer和J. A. Yorke，《混沌：动力系统导论》。Springer-Verlag，纽约，1997年。[18] G. Marques、M. J. Rodrigues和S. Gama，“黏性涡旋流场中的被动粒子动力学”，载于《CONTROLO 2020》（J. A. Gonc.alves、M. Braz-C´esar和J. P. Coelho编），（Cham），第352–362页，Springer International Publishing，2021年。

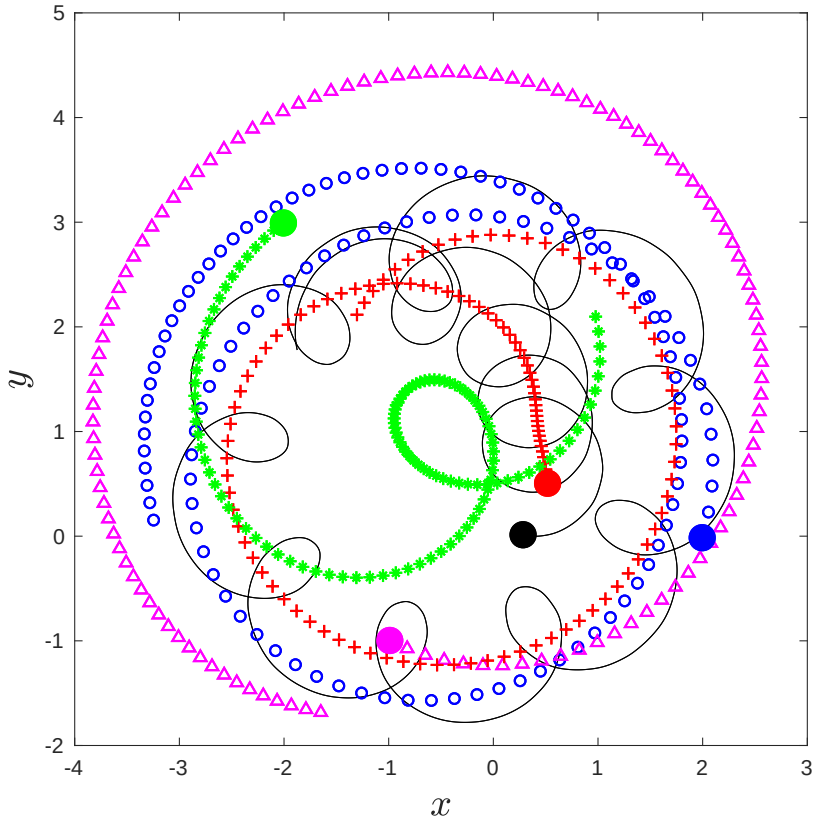

图 2. 恢复得到的 4 个涡旋轨迹的一部分（蓝色圆点、粉色三角形、红色叉号和绿色星号分别表示涡旋 1、2、3 和 4），以及一条以黑色实线表示的被动粒子平滑轨迹示例。实心彩色圆点标记每条轨迹的初始点。

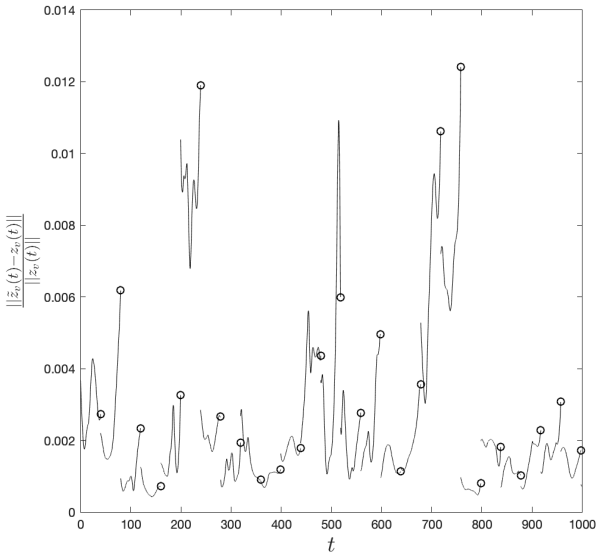

图 3. 涡旋系统位置在每个时间步的相对误差。圆圈标出了将问题划分为多个子问题所产生的不连续点。总体而言，每次从一个划分转到下一个划分时，相对误差都会减小。