arXiv:2305.02738v1 [math.FA] 4 May 2023

局部紧阿贝尔群上的最大局域化 Gabor 正交基

法比奥·尼古拉

Abstract. 局部紧阿贝尔群 A上的一个 Gabor 正交基，是由某个模板 $f \in L^2(A)$的时频平移构成的 $L^2(A)$的一个正交归一基。众所周知，在 $\mathbb{R}^d$上，这种基的元素不可能具有良好的时频局域化性质。而在包含紧开子群的局部紧阿贝尔群上，情况则截然不同：在满足不确定性原理的前提下，可以很容易地构造出 f 最大局域化的 Gabor 正交基，其含义是， f 的模糊函数（即 f 与其时频平移之间的相关函数）的支集具有最小测度。在本文中，我们找出了具有这一极值性质的所有 Gabor 正交基。为此，我们确定了 $L^2(A)$中所有在上述意义下于时频空间中最大局域化的函数——即使对于有限阿贝尔群，这也是一个尚未解决的问题。作为推论，在每个包含紧开子群的局部紧阿贝尔群上，我们给出了 Lieb 不确定性不等式的完整最优函数族，并且还展示了一般局部紧阿贝尔群上此前未知的最优函数。

1. Introduction

设 A 为一个局部紧阿贝尔群，并用 $\widehat{A}$表示其对偶群。对于相应的对偶配对，我们记作 $\langle x,\xi\rangle$，其中 $x \in A$ 且 $\xi \in A$；因此 $|\langle x,\xi\rangle| = 1$。对于 $x \in A$, $\xi \in A$ ，我们在 $L^2(A)$ 上定义平移算子和调制算子 T_x 与 M_ξ ，并将相应的时频平移 $\pi(x,\xi)$ 定义为

$$T_x f(y) = f(y-x), \quad M_\xi f(y) = \langle y,\xi\rangle f(y), \quad \pi(x,\xi)f(y) = M_\xi T_x f(y), \tag{1.1}$$

其中 $y \in A$。

A 上的加博尔正交基是 $L^2(A)$ 中具有如下形式的正交归一基

$$\mathcal{G}(f,\Gamma) := \{\pi(z)f : \ z \in \Gamma\} \tag{1.2}$$

其中 $f \in L^2(A)$ 和 Γ 是 $A \times \widehat{A}$ 的一个（不一定可数的）子集。函数 f 称为窗函数。换句话说，一个加博尔正交规范系

2010 年数学主题分类：42B10、43A75、49Q10、81S30、94A12。关键词与短语：加博尔正交基、Lieb 不确定性不等式、短时傅里叶变换、局部紧阿贝尔群、极值函数、时频局域化。

基底是与 A 相关的海森堡群的薛定谔表示的一个轨道中的正交归一基。

关于在 $\mathbb{R}$上构造 Gabor 正交基，已有大量研究；参见 [2, 7, 12, 22, 41, 42, 47, 46, 52] ，以及 [27] 中关于幂零李群上广泛推广的研究。研究重点主要是将某个紧子集的示性函数作为窗函数，因此频率局部化较差。事实上，著名的 Balian-Low 定理大致表明，在 $\mathbb{R}^d$上不存在由具有良好时频局部化的窗函数生成的 Gabor 正交基（例如参见综述 [4]）；类似的限制也适用于没有紧开子群的局部紧阿贝尔群 [13, 36]；关于 $\mathbb{R}^d$中 Riesz基的时频局部化问题，另见 [26]。

对于含有紧开子群的局部紧阿贝尔群，情况截然不同。事实上，如果 $H \subset A$ 是这样的一个子群，那么函数$f = |H|^{-1/2}\chi_H$ （其中 $|H|$ 表示 H的测度）在 Γ 是 $H \times H^\perp$ 在 $A \times \widehat{A}$ 中的陪集代表元集合（即 Γ 恰好包含每个陪集中的一个元素）时，会生成如（1.2）中的正交归一基 [23, 28]。从某种意义上说，窗函数 f 在时频空间中实现了最大程度的局部化。为了恰当地解释这一点，我们需要介绍一些术语。

对于 $f, g \in L^2(A)$，以 $g^{\widehat{}}$ 为窗函数的 f 短时傅里叶变换是定义在 $A \times A$ 上的复值函数，其定义为

$$V_g f(x,\xi) = \langle f, \pi(x,\xi) g \rangle_{L^2(A)} \qquad (x,\xi) \in A \times \widehat{A}. \tag{1.3}$$

已知，若 $\|g\|_{L^2(A)} = 1$，则 $V_g : L^2(A) \to L^2(A \times \widehat{A})$ 是等距映射，因此，量 $|V_g f|^2$ 可视为 f 的时频能量密度（见 [23, 24, 44]）。更一般地，函数 $f \in L^2(A)$ 的时频局部化可通过 $V_f f$ 的 L^p-范数来度量，$V_f f$ 即所谓的模糊函数；由此可以表述相应的不确定性原理，例如 Lieb 不确定性不等式（见 [23, 43] 以及下文第7节）。我们特别回顾以下初等结果（见下文 [18, 23, 38]，定理 2.2，以及 [5, 25] 中关于以短时傅里叶变换表述不确定性原理的其他形式），它对应于当 $p \to 0$ 时一个 L^p- 估计的极限情形（参见下文注 7.3 ）：

Let $f \in L^2(A) \setminus \{0\}$. Then

$$|\{z \in A \times \widehat{A} : V_f f(z) \neq 0\}| \geq 1. \tag{1.4}$$

这里我们用记号 $|S|$ 表示集合 $S \subset A \times A$的测度，其中$\widehat{}$在 A 和 A 上的哈尔测度经过选取，使得普朗歇尔公式成立。不等式 (1.4) 可视为下界的时频版本，该下界最初由 Matolcsi 和 Sz˝ucs 在 [48] 中证明（另见 [6,。

11, 56, 57, 59]），通常称为唐纳霍-斯塔克不确定性原理，用于衡量 f 和 f支撑集的测度乘积。

对于包含紧开子群 H 的每个局部紧阿贝尔群，不等式 (1.4) 都是锐的。事实上，对于上文考虑的函数 $f = |H|^{-1/2}\chi_H$，我们有 $V_f f = \chi_{H\times H^\perp}$（参见下文的 [23] 和命题 4.4），因此 f 在时频空间中是最大局域化的，也就是说，不等式 (1.4) 取等号（$|H \times H^\perp| = 1$，根据普朗歇尔公式）。这是一个理想性质，能够保证与相应基 (1.2) 相关联的“分析算子”，即 $L^2(A) \ni h \mapsto V_f h(z)$，其中 $z \in \Gamma$，能够以尽可能高的分辨率分辨 h 在时频空间中的能量团块——至少在测度论意义上如此。

这一讨论引出了一个问题：如何找出所有由函数 f 生成的 Gabor 正交基，使其在上述意义下达到最大局域化，即满足 $V_f f \neq 0$ 所在集合的测度为 1（这意味着基中的每个元素都具有相同的极值性质）。这一问题一方面受到近期关于一般（第二可数）且不含紧开子群的局部紧阿贝尔群上 Balian-Low 定理研究进展的推动 [13]；另一方面，也源于近年来人们对欧几里得空间和黎曼流形上不确定性不等式最优函数的浓厚兴趣 [1, 10, 21, 35, 37, 39, 40, 45, 50, 51, 53]。从某种意义上说，本文的结果可以视为对 [13] 中禁止性结果的补充。

因此，主要问题在于确定所有使 (1.4) 中等号成立的函数$f \in L^2(A)$；即使对于有限阿贝尔群，这仍然是一个悬而未决的问题。鉴于其他极值问题的情况，例如杨氏不等式和豪斯多夫–杨氏不等式，即使在包含紧开子群的局部紧阿贝尔群上，这些问题也以极其困难而著称（参见 [20, 定理 3]和 [30, 小节 43]），这并不令人意外。事实上，对于有限循环群 $\mathbb{Z}_N$，不等式 (1.4) 的所有最优函数直到最近才被确定，见 [49]；另请参见 [18] 中的一个特殊情形。

我们的第一个结果（定理 4.5）为这一问题提供了完整答案，可概括如下：

当且仅当 $f = cT_{x_0}h$ 时，(1.4) 中的等号成立，其中 $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$、$x_0 \in A$ 为某个二次子特征 h，属于 A。在这种情况下，$\|f\|_{L^2(A)}^{-2} V_f f$ 是 $A \times \widehat{A}$ 的二次子特征，且其支集是 $A \times A$的一个极大紧开各向同性子群。

A 的二次子特征是一个连续函数 $h\colon A \to \mathbb{C}$，满足：对于某个紧开子群 $H \subset A$，h 在H 上的限制是 Weil 意义下的 H 二阶特征 [58]（见下文第 2.3 节），且 $h(x) = 0$ 对 $x \in A \setminus H$成立。“各向同性”一词指的是 $A \times A$ 的标准辛结构（见第 3 节）。因此，极大

$\widehat{\ }$ $A \times A$ 的紧开各向同性子群是相空间中的最小不确定性单元——即所谓的“量子斑”——其作用相当于 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ [9, 15]中单位球（或盒子）的辛像。此外，请注意，这与 Hausdorff–Young 不等式（定义在局部紧阿贝尔群上）的极值问题在形式上类似；该问题的最优函数是子特征的平移的常数倍 [30, 定理 43.13]。

对 $\mathbb{Z}_N$ [49] 上 (1.4) 中等号情形的研究，依赖于对 $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ 中阶为 N 的子群的明确描述，以及在该情形下同样明确的“有限啁啾”构造（见 [8, 16]）。在目前这种一般性下，我们必须遵循一种更具概念性的方法。为了让读者对论证有所了解，下面简要概述上述二次子特征是如何产生的。利用短时傅里叶变换的协变性，我们将证明：若集合 $G = \{z \in A \times A\colon\ V_f f(z) \neq 0\}$ 的测度为 1，则 G 是 $A \times A$ 的一个极大$\widehat{\ }$紧开各向同性子群。对第一因子的投影使我们可以将 G 视为由 $H^\perp \subset \widehat{A}$ 扩张紧开子群H 的结果，其中 H 是 A 的子群。这自然地诱导出一个连续的对称$\widehat{\ }$同态 $H \to H$，由此可以构造出所需的 H 的二阶特征 h——这里我们使用了一个关于从 [31] 延拓二阶特征的定理。短时傅里叶变换 $V_g f$ 对应的类似问题见定理 5.2。

现在让我们回到上述关于最大局域化 Gabor 正交基的问题。这里先给出主要结果（推论 6.2），它提供了所需的完整刻画。

设 $f \in L^2(A), \|f\|_{L^2(A)} = 1$ 和 $G := \{z \in A \times \widehat{A}\colon\ V_f f(z) \neq 0\}$. 令 $\Gamma \subset A \times \widehat{A}$。那么，$\mathcal{G}(f, \Gamma)$（参见 (1.2)）是 $L^2(A)$ 的正交归一基，且 $|G| = 1$ 当且仅当 $f = cT_{x_0}h$ 对某个 $c \in \mathbb{C}$、$x_0 \in A$ 以及 A的某个二次子特征 h 成立，并且 Γ 是$\widehat{\ }$中 G 在 $A \times A$里的陪集的代表元集。

$\widehat{\ }$由 $V_f(\pi(z)f) \neq 0$定义的 $A \times A$的子集（其中 $z \in \Gamma$）恰好是极大紧开各向同性子群 G的陪集，因此构成 $A \times A$的铺砌$\widehat{\ }$。事实上，对于这种类型的每一种铺砌，都存在相应的 Gabor 正交基（见注 6.3）。不过，上述结果的主要意义显然在于其必要条件。关于有限阿贝尔群背景下（不一定是最大局域化的）加博尔正交基的其他构造，请参阅 [32, 60] 及其中的参考文献；关于一般局部紧阿贝尔群，请参阅 [13]。

在第7节中，我们将证明，在任意含有紧开子群的局部紧阿贝尔群上，不确定性不等式 (1.4) 的每个极值函数也都是 Lieb 不确定性不等式的极值函数，反之亦然。这也将带来一个附带结果：我们将为每个局部紧阿贝尔群给出此前未知的 Lieb 不等式最优函数，因为这样的群在拓扑上同构于

某个整数 $d \geq 0$ 与某个含有紧开子群的局部紧阿贝尔群 A_0 的 $\mathbb{R}^d \times A_0$。关于在一般局部紧阿贝尔群上确定 Lieb 不确定性不等式所有最优函数的问题，我们留待正在准备的后续工作处理。关于欧几里得空间和黎曼流形上 Lieb 不等式的最新进展，读者也可参阅 [21, 40]及其中的参考文献。

2. Notation and preliminary results

2.1. 记号。我们使用引言开头处引入的记号。因此， A 表示一个局部紧阿贝尔群， A 表示其$\widehat{\ }$对偶群。于是，配对 $A \times A \to \mathbb{T}$ （模为 1 的复数乘法群）由$(x, \xi) \to \langle x, \xi \rangle$ 给出，且定义良好。我们$\widehat{\ }$将 A 和 A 中的群运算写作加法，因此 $\langle x+y, \xi \rangle = \langle x, \xi \rangle \langle y, \xi \rangle$$\widehat{\ }$以及 $\langle x, \xi + \eta \rangle = \langle x, \xi \rangle \langle x, \eta \rangle$。群 A, A配备了彼此相关的哈尔测度，使得普朗歇尔公式成立。 $A \times A$ 上的哈尔测度由乘积测度给出。$L^2(A)$中的内积记作 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(A)}$。我们用 $|S|$ 表示子集$\backsim$ $\backsim S$ （属于 A、 A或 $A \times A$）的测度，并用 χ_S 表示其示性函数。

平移算子 T_x、 $x \in A$、$\widehat{\ }$，调制算子 M_ξ、 $\xi \in A$，以及相空间平移 π （ x 、 ξ ） $= M_\xi T_x$ 的定义见 (1.1)。它们都是 $L^2(A)$ 上的酉算子。对于 f、 $g \in L^2(A)$，短时傅里叶变换 $V_g f$ 已在 (1.3) 中定义；更明确地说

$$V_g f(x, \xi) = \langle f, \pi(x, \xi) g \rangle_{L^2(A)} = \int_A \overline{\langle y, \xi \rangle} f(y) \overline{g(y - x)} \, dy \qquad x \in A, \ \xi \in \widehat{A}. \tag{2.1}$$

2.2. 时频分析的预备知识。我们回顾局部紧阿贝尔群上的时频分析的一些基本结果。有关详细内容，请参阅 [17, 23]（另请参阅 [24] ，其中给出了 $\mathbb{R}^d$ 中的类似结果）。

以下结果推广了 $\mathbb{R}^d$ [24] 中短时傅里叶变换的一个著名性质。

命题 2.1。设 $f, g \in L^2(A)$。则 $V_g f$ 是$\backsim A \times A$上的连续函数，并且在无穷远处消失。

$\widehat{\ }$证明。由于酉表示 $A \ni x \mapsto T_x$ 和 $A \ni \xi \mapsto M_\xi$ 在 $L^2(A)$ 上强连续， $V_g f$ 是 $A \times \widehat{A}$ 上的连续函数。此外，由 (2.1) 中 $V_g f$ 的定义可得 $|V_g f(x, \xi)| \leq |f| * |\tilde{g}|(x)\widehat{\ }$ $\tilde{\ }$，类似地， $|V_g f(x, \xi)| \leq |f| * |\widehat{g}|(\xi)$，其中 $\tilde{g}(y) := g(-y)$。另一方面， $L^2 * L^2$ 中的函数在无穷远处趋于零。□

$\widehat{\ }$因此，我们还可以看到集合 $\{z \in A \times A : \ V_g f(z) \neq 0\}$ 是σ-紧致的。

我们需要一些关于时频平移和短时傅里叶变换的基本公式。

$\widehat{\ }$首先，对于 $x, y \in A, \xi, \eta \in A$，我们有交换关系

$$\pi(x,\xi)\pi(y,\eta) = \langle y,\xi\rangle\overline{\langle x,\eta\rangle}\pi(y,\eta)\pi(x,\xi). \tag{2.2}$$

因此，对于$\backsim x$、 $y \in A$、 ξ、 $\eta \in A$，以下协变性成立：

$$V_g(\pi(x,\xi)f)(y,\eta) = \langle x,\xi\rangle\overline{\langle x,\eta\rangle}V_g f(y-x,\eta-\xi) \tag{2.3}$$

and

$$V_{\pi(x,\xi)g}(\pi(x,\xi)f)(y,\eta) = \langle y,\xi\rangle\overline{\langle x,\eta\rangle}V_g f(y,\eta). \tag{2.4}$$

应用柯西-施瓦茨不等式可立即得到以下逐点估计：

$$|V_g f(x,\xi)| \le \|f\|_{L^2(A)}\|g\|_{L^2(A)} \qquad x \in A,\ \xi \in \widehat{A}. \tag{2.5}$$

最后回顾帕塞瓦尔等式

$$\|V_g f\|_{L^2(A\times\widehat{A})} = \|f\|_{L^2(A)}\|g\|_{L^2(A)}. \tag{2.6}$$

以下不确定性不等式最初由 [38] 在有限阿贝尔群的情形下证明；另见 [18, 23, 49]。

定理 2.2. 设 $f, g \in L^2(A) \setminus \{0\}$ 和 $S = \{z \in A \times \widehat{A} \colon V_g f(z) \neq 0\}$. 我们有 $|S| \ge 1$. 若 $|S| = 1$，则 $|V_g f| = c\chi_S$，其中 $c = \|f\|_{L^2(A)}\|g\|_{L^2(A)}$，因此 S 是紧且开的。

证明. 我们可以假设 $\|f\|_{L^2(A)} = \|g\|_{L^2(A)} = 1$. 由 (2.6) 和 (2.5)，我们有

$$1 = \int_S |V_g f(x,\xi)|^2 dx\, d\xi \le \int_S dx\, d\xi = |S|.$$

若上述不等式中等号成立，则对几乎处处的 $z \in S$， $|V_g f(z)| = 1$，因此对每个 $z \in S$ 均成立，因为 $V_g f$ 是连续的（命题 2.1），且 S 是开集。因此 $|V_g f| = \chi_S$，这意味着 S 也是闭的。此外，由于 $V_g f$ 在无穷远处趋于零， S 包含于某个紧子集中，因此是紧致的。□

我们还需要以下关于歧义函数 $V_f f$ 的唯一性结果。

命题 2.3。设 f、 $g \in L^2$（A）。则 $V_f f = V_g g$ 在 $A \times \widehat{A}$ 上当且仅当对于某些 $c \in \mathbb{C}$、 $|c| = 1$， $f = cg$。

证明。为求完备，我们给出一个与 [24, Section 4.2] 中针对 $A = \mathbb{R}^d$ 的证明类似（但并不完全相同）的证明。

对于每个 $x \in A$，我们可以将 $V_f f(x,\cdot)$ 视为函数 $f\overline{T_x f}$ 的L^1傅里叶变换。因此，如果 $V_f f = V_g g$，根据傅里叶唯一性定理，对于每个 $x \in A$ 我们有

$$f(y)\overline{f(y-x)} = g(y)\overline{g(y-x)}$$

对于几乎所有的 $y \in A$。根据富比尼定理（两边在 $A \times A$ 中某个 σ-紧致集的补集上均为零；参见[19, 第 44]页），上述等号对几乎所有的 $(x, y) \in A \times A$ 都成立。两边乘以 $f(y-x)$ 并对 x 积分，得到$\|f\|^2_{L^2(A)} f = \langle f, g\rangle_{L^2(A)} g$，从而得到所需结论。

反向蕴含是显而易见的。 □

2.3. 二次特征。我们回顾 [58]（另见 [54]）中二次特征的概念。

定义 2.4. 给定一个连续对称同态 $\phi\colon A \to A$（因此 $\langle x, \phi(y)\rangle = \langle y, \phi(x)\rangle$ 对于 $x, y \in A$），与 ϕ 相关联的A的二阶特征，是一个连续函数 $f\colon A \to \mathbb{T}$，满足。

$$f(x+y) = f(x)f(y)\langle x, \phi(y)\rangle \qquad x, y \in A.$$

下面的结果说明，对于如上给定的同态 ϕ，存在与之对应的二阶特征，且除相差一个特征因子外，该二阶特征唯一。

定理 2.5。给定一个连续对称同态 $\phi\colon A \to A$，存在一个与 ϕ 对应的二阶特征。与同一个 ϕ 对应的两个二阶特征相差一个特征因子。

唯一性是定义的直接推论。存在性最初由 [31, 引理 6] 证明（也可参见 [54, 第 37] 页，那里给出了 M. Burger 提出的一个更简单的证明；关于推广，参见 [3, 定理 2.3]）。在一些特殊情况下，可以给出具体构造；例如，如果乘以 2 是 G 上的一个自同构，那么可取 $f(x) = \langle x, \phi(2^{-1}x)\rangle$[58, 第 146]页。关于 G 是局部域上的有限维向量空间时的具体构造，请参见 [54, 第7节。 [16]关于 $\mathbb{Z}_N$，而 [34] 关于有限阿贝尔群。

3. Some symplectic analysis on $A \times A$

本节证明一些关于$A \times A$的子群的辅助结果，这些结果与 $A \times A$ 的标准辛结构有关，该结构即为双特征 $\sigma\colon (A \times A) \times (A \times A) \to \mathbb{T}$（参见（2.2））所给出的

$$\sigma((x,\xi),(y,\eta)) = \langle y, \xi\rangle\overline{\langle x, \eta\rangle} \qquad (x,\xi),\ (y,\eta) \in A \times \widehat{A}. \tag{3.1}$$

以下关于 $A \times A$ 的紧开子群的描述将在下文中起到关键作用。

命题 3.1. 设 $H \subset A$、 $K \subset A$ 为紧开子群，且ϕ: $H \to A/K$ 为连续同态。那么该集合

$$G = \{(x, \xi) \in A \times \widehat{A} : \ x \in H, \ \xi \in \phi(x)\} \tag{3.2}$$

是 $A \times A$的紧开子群，且 $|G| = |H||K|$。

$A \times A$ 的每个紧开子群都唯一地由上述形式的三元组（H， K， ϕ）产生。

证明。容易看出，(3.2) 中的集合 G 确实是$A \times A$的子群。由于 H 和 K 是紧致的，且 ϕ 是连续的，根据拓扑群理论中的一些一般性（非平凡）结果（参见[29, 注 5.24]），可知 G 是紧致的。然而，由于 H 和 K 是开集，我们可以采用一种更直接的论证，该论证还具有提供更多信息的优点，即 G 实际上是 $A \times A$ 中有限个两两不相交的乘积型紧开子集的并。具体而言，由于K 是开集， A/K 是离散的，且 $\phi(H) \subset A/K$ 是紧致的，因此是有限的。另一方面，我们有

$$G = \cup_{B \in \phi(H)} \phi^{-1}(\{B\}) \times B.$$

上述集合 $B \subset A$ 是紧且开的，因为它们是 $\widehat{A}$中K 的陪集。子集 $\phi^{-1}(\{B\}) \subset H$ 既开又闭，因此是紧致的，因为 H 是紧致的。这表明 G 是紧且开的。

对于每个 $x \in H$， $\phi(x)$都是 A中 K 的陪集，因此测度与 K相同。于是

$$|G| = \int_H \int_{\phi(x)} d\xi \, dx = |H||K|.$$

现在，给定任意紧开子群 $G \subset A \times A$，令 $\pi_1 : \ G \to A$为第一因子上的投影，并令 $H = \pi_1(G)$和 $K = G \cap A = \mathrm{Ker}\, \pi_1$ （其中 A 视为 $A \times A$的子群）。显然， K 是 A 的一个紧开子群，而 H 是A的紧开子群，因为投影 $A \times A \to A$ 是开映射。因此，我们得到短正合列

$$0 \to K \to G \to H \to 0.$$

映射 $G \to H$ 是开映射，因此代数同构 $\beta : G/K \to H$ 实际上是一个拓扑同构（[29, 定理 5.27]）。现在令 $\phi = \pi_2' \circ \beta^{-1}$，其中 π_2'： $G/K \to \widehat{A}/K$ 是由商空间上的投影 $\pi_2 : \ G \to A$ 诱导的自然满同态。那么ϕ: $H \to A/K$ 是一个连续同态，并且显然，三元组（H， K，ϕ）满足（3.2）。

最后，由 (3.2) 显然可知，三元组 (H, K, ϕ) 由 G 唯一确定。□

注 3.2. 容易看出，命题 3.1 中的 G 和 $H \times K$ 是同胚的。事实上，沿用上述证明中的记号，从任意 $[\xi] \in \phi(H)$（$\phi(H)$ 是有限集）中选取一个代表元 ξ，可得到一个连续截面 $\alpha\colon \phi(H) \to A$，从而得到 ϕ 的提升 $\phi := \alpha \circ \phi\colon H \to \tilde{A}$。现在令 $\phi(x) = 0$（$x \in A \setminus H$），将 ϕ 延拓为 A。由于 H 既开又闭，$\phi\colon A \to A$ 是连续的，并且映射 $A \times A \to A \times \tilde{A}$，由 $(x, \xi) \mapsto (x, \phi(x) + \xi)$ 给出，是一个将 $H \times K$ 映到 G 上的同胚（尽管不是群同态）。

现在我们特别提出一类子群，并按照命题 3.1 的思路给出一种简便的刻画。

定义 3.3. 若子群 $G \subset A \times A$ 满足 $\sigma(z, w) = 1\hat{}$（参见 (3.1)）对任意 $z, w \in A \times A$ 均成立，则称其为各向同性的。

考虑命题 3.1 中的三元组 (H, K, ϕ)，并额外假设 $K \subset H^\perp$。于是可诱导出一个自然满同态 $\widehat{A}/K \to \widehat{A}/H^\perp \simeq \widehat{H}$ is$\hat{}$。因此，对于 $x \in H$，我们可以将 $\phi(x) \in A/K$ 视为 H 的一个特征，其在 $y \in A$ 处的取值记为 $\langle y, \phi(x)\rangle$。具体来说，

$$\langle y, \phi(x)\rangle := \langle y, \xi\rangle \quad \text{for any} \quad \xi \in \phi(x).$$

定义 3.4. 若 $K \subset H^\perp$，则称连续同态 $\phi\colon H \to \widehat{A}/K$ 为对称的，如果

$$\langle x, \phi(y)\rangle = \langle y, \phi(x)\rangle \qquad x, y \in H.$$

我们回顾一个结论，以备后用：如果 $H \subset A$ 是一个紧开子群，那么 $H^\perp$ 是 $\widehat{A}$的紧开子群（例如参见 [23, 引理 6.2.3 (b)]）。

命题 3.5. 设 $G \subset A \times A$ 是 $A \times A$的一个紧开子群，并设 (H, K, ϕ) 为相应的三元组（参见命题 3.1）。那么G 是各向同性的，当且仅当 $K \subset H^\perp$ 和 $\phi\colon H \to \widehat{A}/K$ 是对称的。此外 $|G| \leq 1$.

证明. 设 G 是各向同性的。令 $x \in H$, $\xi \in \phi(x)$ 和 $\eta \in K$，使得$z = (x, \xi) \in G$ 且 $w = (x, \xi + \eta) \in G$。我们有

$$1 = \sigma(z, w) = \langle x, \xi\rangle\overline{\langle x, \xi + \eta\rangle} = \overline{\langle x, \eta\rangle},$$

因此 $K \subset H^\perp$。现在，若 $x, y \in H$ 且 $\xi \in \phi(x)$，则 $\eta \in \phi(y)$，从而$z = (x, \xi) \in G$且 $w = (y, \eta) \in G$，我们有 $1 = \sigma(z, w) = \langle y, \xi\rangle\overline{\langle x, \eta\rangle}$，这意味着 ϕ是对称的。

反之，从上述计算中可以清楚地看出，如果 $K \subset H^\perp$ 和ϕ 是对称的，那么 G就是各向同性的。

最后，根据命题 3.1，$|G| = |H||K| \leq |H||H^\perp| = 1$，其中最后一个等号由普朗歇尔公式推出（参见 [55, 公式 (4.4.6)]）。□

最后，我们刻画具有最大测度的紧开各向同性子群。

命题 3.6。设 $G \subset A \times A$ 是一个紧开各向同性子群，并设 (H, K, ϕ) 是相应的三元组（参见命题 3.1 和 3.5）。以下陈述等价：

(a) $|G| = 1$。(b) $K = H^{\perp}$。(c) G 是一个极大紧开各向同性子群，即如果 $G' \subset A \times A$ 是一个满足 $G \subset G'$ 的紧开各向同性子群，那么 $G' = G$。

证明。(a) $\Rightarrow$ (b)。由命题 3.5 可知 $K \subset H^{\perp}$。如果这一包含关系是严格的，那么 $|K| < |H^{\perp}|$，因为 $|H^{\perp}| < \infty$ 和 $|H^{\perp} \setminus K| > 0$，且是 $H^{\perp} \setminus K$ 开的。因此，由于 $0 < |H| < \infty$，根据命题 3.1 $|G| = |H||K| < |H||H^{\perp}| = 1$，这就产生了矛盾。

(b) $\Rightarrow$ (c)。设 $G' \subset A \times A$ 为一个紧开各向同性子群，满足 $G \subset G'$。设 (H', K', ϕ') 为相应的三元组，如命题 3.1 和 3.5 中所述。由于 $G \subset G'$，我们有 $H \subset H'$ 和 $K \subset K'$。另一方面，根据命题 3.5 和假设，我们有 $H' \subset K'^{\perp} \subset K^{\perp} = H$。因此 $H = H'$ 和 $K = K'$。由于，对于 $x \in H$，$\phi(x)$ 和 $\phi'(x)$ 是 K 在 A 中的两个陪集，并且 $\phi(x) \subset \phi'(x)$，我们有 $\phi(x) = \phi'(x)$，因此 $G' = G$。

(c) $\Rightarrow$ (a). 反设 $|G| = |H||K| < 1$。那么包含关系 $K \subset H^{\perp}$ 是严格的。考虑与三元组 $(H, H^{\perp}, \phi')$ 相关联的子群 $G' \subset A \times \widehat{A}$，其中 $\phi' = \alpha \circ \phi \colon H \to \widehat{A}/H^{\perp}$，且 $\alpha \colon \widehat{A}/K \to \widehat{A}/H^{\perp}$ 是自然满同态。由于 ϕ 是对称的，因此 ϕ' 也具有相同的性质。于是，根据命题 3.5，G' 是 $A \times \widehat{A}$ 的一个紧开各向同性子群，并且它与 $G \subset G'$ 之间的包含关系是严格的，因为 $G \cap \widehat{A} = K \subset H^{\perp} = G' \cap \widehat{A}$ 严格成立。这就产生了矛盾。□

推论 3.7。每个 $A \times A$ 的紧开各向同性子群都包含于某个极大紧开各向同性子群中。

证明。设 $G \subset A \times A$ 为一个紧致开各向同性子群，且 (H, K, ϕ) 为其关联三元组（命题 3.1 和 3.5），因此 $K \subset H^{\perp}$ 且 ϕ 是对称的。根据命题 3.6，与三元组 $(H, H^{\perp}, \phi')$ 关联的紧致开各向同性子群是极大的，其中 $\phi' : H \to \widehat{H}$ 如命题 3.6 中“(c) $\Rightarrow$ (a)”的证明所示，并且该子群包含 G。□

注 3.8. 请注意，如果去掉“各向同性”这一修饰语，上述推论的结论便不再成立。例如，考虑 p-进域 $\mathbb{Q}_p$。其拓扑对偶 $\mathbb{Q}_p$ 可识别为 $\mathbb{Q}_p$。球 $B_j := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq p^j\}$，$j \in \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 的紧开子群。因此，集合 $B_j \times B_j$ 是 $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$ 的紧开子群。不过，如果 $K \subset \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$ 是一个紧子集，那么对某个 j，有 $K \subset B_j \times B_j$，并且

$K \subset B_{j+1} \times B_{j+1}$严格地说。关于从时频分析视角对 p进数系的简要回顾，请参阅 [14]。

我们以一个将在下文中发挥作用的结果结束本节。

命题 3.9。设 $G \subset A \times A$ 为一个极大紧开各向同性子群，因此 $|G| = 1$ （参见命题 3.6）。设 $(H、\ H^{\perp}、\ \phi)$ 为相应的三元组（参见命题 3.1、3.5 和 3.6）。如果 f 是与 H 相关联的 ϕ 的二阶特征（参见定义 2.4），那么由下式$G \to \mathbb{T}$ 给出的函数

$$(x, \xi) \mapsto \overline{f(x)} \qquad (x, \xi) \in G$$

是与 G 相关联的连续对称同态 ϕ' 的二阶特征： $G \to G$ 由下式给出

$$\langle (x, \xi), \phi'(y, \eta) \rangle = \overline{\langle x, \eta \rangle} \qquad (x, \xi), (y, \eta) \in G. \tag{3.3}$$

证明。对于 $(x、\ \xi)、(y、\ \eta),\ \in G$ 我们有

$$\overline{f(x+y)} = \overline{f(x)}\,\overline{f(y)}\,\overline{\langle x, \phi(y) \rangle} = \overline{f(x)}\,\overline{f(y)}\,\overline{\langle x, \eta \rangle}$$

因为 $\eta \in \phi(y)$（其中 $\phi(y) \in \widehat{H} \simeq \widehat{A}/H^{\perp}$ 现在被视为 $H^{\perp}$在 $\widehat{A}$中的陪集）。□

4. Optimizers for the ambiguity function

对于 $f \in L^2(A)$，由 (2.5) 可知，对于每个 $z \in A \times \widehat{A}$，

$$|V_f f(z)| \leq V_f f(0) = \|f\|^2_{L^2(A)}.$$

下面的结果给出了 $|V_f f|$ 取得其最大值的点集的一些性质。

命题 4.1。设 $f \in L^2(A) \setminus \{0\}$，并且

$$G = \{z \in A \times \widehat{A} :\ |V_f f(z)| = V_f f(0)\}.$$

那么， G是 $A \times A$的一个紧致各向同性子群，并且函数$\|f\|^{-2}_{L^2(A)}$ $V_f f$在 G上的限制是一个二阶特征，它与式（3.3）中给出的连续对称同态 $\phi'：\ G \to G$ 相关联。

事实上，对于 $(x, \xi) \in G,\ (y, \eta) \in A \times A$，我们有

$$V_f f(y + x, \eta + \xi) = \|f\|^{-2}_{L^2(A)} V_f f(x, \xi) V_f f(y, \eta) \overline{\langle x, \eta \rangle}. \tag{4.1}$$

特别地， $|V_f f|$在 $A \times A$中的 G的每个陪集上都是常数。

证明. 不失一般性，我们可以假设$\|f\|_{L^2(A)} = 1$，因此$V_f f(0) = \|f\|^2_{L^2(A)} = 1$。

由于 $V_f f$是一个在无穷远处趋于零的连续函数（命题 2.1）， G是紧致的。

对于 $z \in G$，我们有

$$|\langle f, \pi(z)f\rangle| = 1,$$

因此

$$\pi(z)f = c(z)f$$

对于某些 $c(z) \in \mathbb{C}$, $|c(z)| = 1$。因此，

$$V_f(\pi(z)f)f(w) = c(z)V_f f(w)$$

对于 $w \in A \times A$。令 $z = (x, \xi)$ 和 $w = (y, \eta)$，由 (2.3) 可得

$$\langle x, \xi\rangle\overline{\langle x, \eta\rangle}V_f f(y - x, \eta - \xi) = c(x, \xi)V_f f(y, \eta).$$

令 $y = 0$、$\eta = 0$，我们得到

$$\langle x, \xi\rangle V_f f(-x, -\xi) = c(x, \xi),$$

这给出

$$V_f f(y - x, \eta - \xi) = V_f f(-x, -\xi)V_f f(y, \eta)\langle x, \eta\rangle \tag{4.2}$$

对于 $(x, \xi) \in G$, $(y, \eta) \in A \times A$。

另一方面，从 $V_f f$ 的定义 (2.1) 本身可以清楚地看出，$|V_f f(-w)| = |V_f f(w)|$ 对于 $w \in A \times A$ 成立，因此，如果 $(x, \xi) \in G$，那么 $(-x, -\xi) \in G$ 也成立。

因此，我们得到

$$V_f f(y + x, \eta + \xi) = V_f f(x, \xi)V_f f(y, \eta)\overline{\langle x, \eta\rangle} \tag{4.3}$$

对于 $(x, \xi) \in G$, $(y, \eta) \in A \times A$, 这就证明了 (4.1)。

根据（4.3），若 (x, ξ)、$(y, \eta) \in G$ 则 $(x+y, \xi+\eta) \in G$，因此 G 是 $A \times A$ 的子群（当然还包含 $(0, 0) \in G$）。最后，在（4.3）中交换 (x, ξ) 和 (y, η) 的角色可得，G 是各向同性的。□

注释 4.2. 对于 $A = \mathbb{R}^d$，我们重新得到众所周知的雷达相关估计 [24, 引理 4.2.1]: 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ 且 $z \in \mathbb{R}^{2d}$, $z \neq 0$，则 $|V_f f(z)| < V_f f(0)$。

我们现在引入二次子特征的概念。这一术语——事实上并非标准术语——受到子特征定义的启发 [30, 定义 43。3], 即紧开子群 $H \subset A$ 上的一个特征，并在 $A \setminus H$ 上延拓为零。

定义 4.3. 设 $H \subset A$ 是一个紧开子群，且 $\phi : H \to H$ 是一个连续对称同态。若函数 $h : A \to \mathbb{C}$ 的限制 $h|_H$ 是 H 上与 ϕ 相关的二阶特征，并且对 $x \in A \setminus H$ 有 $h(x) = 0$，则称其为与 (H, ϕ) 相关的二次子特征。

以下结果给出了二次子特征的模糊函数。

命题 4.4. 设 $h : A \to \mathbb{C}$ 是与 (H, ϕ) 相关联的二次子特征（参见定义 4.3）；因此，$H \subset A$ 是一个紧致开子群，并且 $\phi\colon H \to H$ 是一个连续对称同态。那么

$$V_h h(x,\xi) = |H|\overline{h(-x)}\chi_G(x,\xi) \qquad (x,\xi) \in A \times \widehat{A}, \tag{4.4}$$

其中，G 是与三元组（H、$H^\perp$、ϕ）对应的 $A \times A$ 的极大紧开各向同性子群（参见命题 3.1、3.5 和 3.6）。

此外，函数 $|H|^{-1}V_h h$ 是与对 (G, ϕ') 相关联的 $\widehat{\ } A \times A$ 的二次子特征，其中 $\phi' : G \to G$ 是 (3.3) 中的连续对称同态。

证明。由于 $h|_H$ 是与 ϕ 相关联的 H 的二阶特征，对于 x、$y \in H$，我们有

$$h(y-x) = h(y)h(-x)\overline{\langle x, \phi(y)\rangle}. \tag{4.5}$$

现在我们计算 $V_h h$。注意，如果 $x \in A \setminus H, \xi \in A$,

$$V_h h(x,\xi) = \langle h, M_\xi T_x h\rangle_{L^2(A)} = 0,$$

因为在这种情况下 $H \cap (x+H) = \emptyset$。

另一方面，如果 $x \in H$，则由（4.5）可得，

$$\begin{aligned} V_h h(x,\xi) &= \int_H \overline{\langle y,\xi\rangle} h(y)\overline{h(y-x)}\, dx \\ &= \overline{h(-x)} \int_H \overline{\langle y,\xi\rangle}|h(y)|^2\langle y,\phi(x)\rangle\, dy \\ &= \overline{h(-x)} \int_H \langle y, \eta-\xi\rangle\, dy, \end{aligned}$$

其中，η 是陪集 $\phi(x) \subset \widehat{A}$ 中的任意元素（回忆 $\phi : H \to \widehat{H} \simeq \widehat{A}/H^\perp$）。现在，在最后一个积分中，测度 dy 可视为紧开子群 H 上的哈尔测度。因此，当且仅当 ξ 和 η 在 H ([29, 上诱导出相同的特征时，积分才不为零（引理 23.19]），即当 $\eta - \xi \in H^\perp$ 时，也就是 $\xi \in \phi(x)$。这就证明了（4.4）。

由（4.4）可知

$$V_h h(x,\xi) = |H|\,\overline{h(-x)} \qquad (x,\xi) \in G.$$

容易看出，对于 $x \in H$，函数 $h(-x)$ 仍然是 H 的二阶特征，并且对应于同一个同态 ϕ。因此，根据命题 3.9，将函数 $|H|^{-1}V_h h(x,\xi)$ 限制在 G 上~~，即 $h(-x)$~~，是一个与（3.3）中的同态 ϕ' 对应的二阶特征。□

现在可以陈述本节的主要结果。

定理 4.5. 设 $f \in L^2(A)$，且设 $G = \{z \in A \times \widehat{A} : V_f f(z) \neq 0\}$。以下陈述等价：

(a) $|G| = 1$. (b) G 是 $A \times A$ 的极大紧开各向同性子群。(c) 存在 $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$、$x_0 \in A$ 以及 A 的二次子特征 h，使得 $f = cT_{x_0}h$。

如果满足上述条件之一，函数 $\|f\|_{L^2(A)}^{-2} V_f f$ 是与 (G, ϕ') 相关联的 $A \times A$ 的二阶子特征，其中 $\phi' \colon G \to \widehat{G}$ 由 (3.3) 给出。

证明。无需 loss of generality，可假设 $\|f\|_{L^2(A)} = 1$。

(a) $\Rightarrow$ (b) 根据定理 2.2，我们有 $|V_f f| = \chi_G$，且 G 是 $A \times A$ 的一个紧致开子集。根据命题 4.1，G 是 $A \times A$ 的一个各向同性子群。由于 $|G| = 1$，根据命题 3.6，它是极大的。

(b) $\Rightarrow$ (c) 根据命题 3.6，我们有 $|G| = 1$，因此根据定理 2.2，$|V_f f| = \chi_G$。事实上，根据命题 4.1，将 $V_f f$ 限制在 $G^{\widehat{}}$ 上，得到一个与 (3.3) 中的同态 $\phi' \colon G \to \widehat{G}$ 相关联的 $A \times A$ 的二阶特征。

现在令 $(H, H^\perp, \phi)$ 为与 G 相关联的三元组（参见命题 3.1、3.5 和 3.6），并令 h 为与 (H, ϕ) 相关联的 A 的二次子特征（参见定义 4.3）；由定理 2.5 可知它存在。由命题 4.4 可知，函数 $|H|^{-1} V_h h$ 限制在 G 上后，是与上述同态 ϕ' 相关联的二阶特征。因此，由定理 2.5 可知，存在 G 的特征 g，使得

$$V_f f(x, \xi) = g(x, \xi) |H|^{-1} V_h h(x, \xi) \qquad (x, \xi) \in G.$$

$\widehat{}$特征 g 可扩张为 $A \times A$ 的一个特征（[29, 推论 24.12]），因此 $\widehat{}$存在 $y \in A$、$\eta \in A$，使得

$$g(x, \xi) = \langle x, \eta \rangle \overline{\langle y, \xi \rangle}.$$

由此可得

$$V_f f(x, \xi) = |H|^{-1} \langle x, \eta \rangle \overline{\langle y, \xi \rangle} V_h h(x, \xi) \qquad (x, \xi) \in G.$$

$\widehat{}$事实上，对每个 $(x, \xi) \in A \times A$，此公式都成立，因为根据 (4.4) 以及 $|V_f f| = \chi_G$ 这一事实，两边在 $A \times A \setminus G$ 上均为零。通过与 (2.4) 比较，我们可得

$$V_f f = |H|^{-1} V_{\pi(y,\eta)h}(\pi(y, \eta)h).$$

由命题 2.3 可得

$$f = c|H|^{-1/2} \pi(y, \eta) h$$

其中 $c \in \mathbb{C}$、$|c| = 1$。

令 $h' := M_\eta h$，则有 $f = c'|H|^{-1/2} T_y h'$、$|c'| = 1$，且 h' 是与 (H, ϕ) 相关联的二次子特征，由此得到所需结论。

(c) $\Rightarrow$ (a) 由命题 4.4 和 3.6 可知，这一点显然。

命题 4.1 也清楚地表明了该陈述的最后一部分。 □

5. Optimizers for the short-time Fourier transform

在本节中，我们确定满足条件的函数 f、$g \in L^2(A)$，使得

$$|\{z \in A \times \widehat{A} : \ V_g f(z) \neq 0\}| = 1.$$

下面的结果将把问题归结为 $f = g$ 的情形，而我们已在上一节中讨论过这一情形。

命题 5.1. 设 $f, g \in L^2(A)$，其中 $\|f\|_{L^2(A)} = \|g\|_{L^2(A)} = 1$. 设 $S = \{z \in A \times A : \ |V_g f(z)| = 1\}$ 且 $G = \{z \in A \times A : \ |V_g g(z)| = 1\}$. 设 $z_0 \in S$. 则 $f = c\pi(z_0)g$，其中存在某些 $c \in \mathbb{C}$、$|c| = 1$ 和 $S = z_0 + G$。

证明。由于 $|\langle f, \pi(z_0)g\rangle| = |V_g f(z_0)| = 1$，我们有 $f = c\pi(z_0)g$，其中存在某些$c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$。因此，若 $z \in A$,

$$|V_g f(z)| = |\langle \pi(z_0)g, \pi(z)g\rangle| = |V_g g(z - z_0)|,$$

这意味着 $S = z_0 + G$。 □

因此，我们得到如下刻画。

定理 5.2. 设 $f, g \in L^2(A)$，且令 $S = \{z \in A \times \widehat{A} : \ V_g f(z) \neq 0\}$。以下陈述等价：

(a) $|S| = 1$. (b) S是 $A \times A$中某个极大紧开各向同性子群的陪集。

(c) 存在 $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z_1, z_2 \in A \times A$ 以及 A 的一个二次子特征 h，使得 $f = c_1\pi(z_1)h$ 且 $g = c_2\pi(z_2)h$。

证明。由定理 2.2、命题 5.1 和定理 4.5 可轻易得出该结果。□

6. maximally localized Gabor orthonormal bases

我们回顾一下，$L^2(A)$ 的加博尔正交基是形如 $\mathcal{G}(f, \Gamma)$ 的正交归一基（参见 (1.2)），其中 $f \in L^2(A)$，且 Γ 是 $A \times A$ 的一个（不一定可数的）子集。

下面的结果刻画了 f 最大局域化意义下的加博尔正交基，即该子集

$$G_f := \{z \in A \times \widehat{A} : \ V_f f(z) \neq 0\}$$

的测度为 1。注意，由 (2.4) 可知，对每个 $w \in A \times A$，$G_f = G_{\pi(w)f}$，因此基中的所有元素都是极大局部化的。

定理 6.1。设 $f \in L^2(A)$、$\|f\|_{L^2(A)} = 1$，其中 $|G_f| = 1$；因此 G_f 是 $A \times A$ 的极大紧开各向同性子群（由定理 4.5 可知）。令 $\backsim\Gamma \subset A \times A$。

当且仅当 Γ 是 $A \times A$ 中 G_f 的陪集的一组代表元时，$\mathcal{G}(f,\Gamma)$ 是 $L^2(A)$ 的正交归一基。

证明。由定理 4.5 可知 $|V_f f| = \chi_{G_f}$。

设 Γ 是 $A \times A$ 中 G_f 的陪集的一组代表元。由于

$$|\langle \pi(z)f, \pi(w)f\rangle| = |V_f f(w-z)|,$$

我们可知，当 $z, w \in \Gamma$, $z \neq w$ 时，$\pi(z)f$ 与 $\pi(w)f$ 正交，因为 Γ 至多包含 G_f 的每个陪集中的一个元素（事实上恰好包含一个）。

我们来验证集合 $\mathcal{G}(f,\Gamma)$ 也是完备的。我们断言

$$\operatorname{span}\big(\{\pi(z)f : z \in \Gamma\}\big) = \operatorname{span}\big(\{\pi(z)f : z \in A \times \widehat{A}\}\big).$$

为说明这一点，注意到如果 $z \in A \times A$ 存在 $w \in \Gamma$ 使得 $z - w \in G_f$，因此 $|V_f f(z-w)| = 1$，这意味着对于某些$c \in \mathbb{C}$、$|c| = 1$，有 $\pi(z)f = c\pi(w)f$，从而得到所要证明的结论。

现在，集合 $\{\pi(z)f : z \in A \times A\}$ 显然是完备的，因为如果 $g \in L^2(A)$ 和 $\langle g, \pi(z)f\rangle_{L^2(A)} = V_f g(z) = 0$对每个 $z \in A \times \widehat{A}$ 都成立，那么 $g = 0$，这是因为短时傅里叶变换具有单射性（参见 (2.6)）。

反之，假设 $\mathcal{G}(f,\Gamma)$ 是一个正交归一基。如果 $z, w \in \Gamma$,$z \neq w$，由于 $\pi(z)f$ 和 $\pi(w)f$ 正交，因此我们有 $V_f f(z-w) = 0$，即 $z - w \notin G$，也就是说，z 和 w 属于不同的陪集。此外，如果Γ 不包含某个陪集 $z_0 + G$ 中的任何元素，那么函数 $\pi(z_0)f$ 将与所有函数 $\pi(z)f$ 正交，其中 $z \in \Gamma$，这是不可能的，因为根据假设，$\mathcal{G}(f,\Gamma)$ 是一个完备集。□

结合定理 4.5 和 6.1，我们推导出最大局域化 Gabor 正交归一基的所需刻画。

推论 6.2。设 $f \in L^2(A)$、$\|f\|_{L^2(A)} = 1$，以及 $\Gamma \subset A \times \widehat{A}$。

那么，$\mathcal{G}(f,\Gamma)$ 是 $L^2(A)$ 和 $|G_f| = 1$ 的正交归一基，当且仅当对于某些 $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$、$x_0 \in A$ 以及 A 的某个二次子特征 h，有 $f = cT_{x_0}h$，并且 Γ 是 G_f 在 $\backsim A \times A$ 中的陪集代表元集合。

注记 6.3. 注意，在推论 6.2 中，集合 $\{V_f(\pi(z)f) \neq 0\} = \backsim z + G_f$, $z \in \Gamma$ (参见 2.3) 在 $A \times A$ 和 $|z + G_f| = |G_f| = 1$ 上定义了一个铺砌。反过来，若 $G \subset A \times A$ 是一个极大紧开各向同性子群（因此 $|G| = 1$），$(H, H^\perp, \phi)$ 是与 G 相关联的三元组（参见命题 3.6），且 h 是与 (H,ϕ) 相关联的子特征，那么函数 $f = |H|^{-1/2}h$ 生成一个对应于由 G 生成的铺砌的 Gabor 正交归一基。

例 6.4. 设 $N \geq 1$ 为一个整数，且 $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}_N$ 为一个阶为 N 的循环群，并赋予其计数测度。作为对偶群上的哈尔测度，我们一致地选取乘以 N^{-1} 的计数测度。

关于 $\mathbb{Z}_N$，二次子特征具有如下形式：$h = M_\xi h_{b,\ p}$，其中$\xi \in \mathbb{Z}_N$，$b \geq 1$是 N 的一个因子，$p \in \{0, \ldots, b-1\}$，并且，

$$h_{b,p}(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{\pi i p x^2 b(1+b)}{N^2}\right) & x \in a\mathbb{Z}_N \\ 0 & x \in \mathbb{Z}_N \setminus a\mathbb{Z}_N, \end{cases}$$

其中 $a = N/b$ （参见备注 2. [49, 和第 3 节（iii）1] [16,]）。我们还有

$$G_h = \{(ma, nb + mp) :\ m = 0, \ldots, b-1,\ n = 0, \ldots, a-1\},$$

（参见定理 1. [49, 的证明2]），它确实是 $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ 的一个子群，其基数为 N，因此测度为 1（顺便一提，所有基数为 N 的子群都具有这种形式），推论 6.2 适用。

当然，在 $\mathbb{Z}_N$ 上也存在并非最大局域化的 Gabor 正交基 $\mathcal{G}(f,\ \Gamma)$，例如，我们可以取 $f = 2^{-1/2}\chi_{\{0,1\}}$ 和 $\Gamma = 2\mathbb{Z}_N \times (N/2)\ \mathbb{Z}_N$，假设 $N \geq 4$ 为偶数。直接计算可得

$$G_f = (\{0, 1, N-1\} \times \mathbb{Z}_N) \setminus \{(0, N/2)\},$$

使得 $|G_f| = 3 - 1/N > 1$。

我们还得到了关于有限阿贝尔群的以下结果。

推论 6.5. 设 A 是一个有限阿贝尔群，且 $S \subset A \times A$。以下关于算子族 $\{\pi(z) :\ z \in S\}$ 的陈述等价：

(a) 存在一个公共特征函数。(b) 算子 $\pi(z)$、$z \in S$ 相互对易。(c) 存在一个 Gabor 正交归一基，它由公共特征函数组成，并由函数 $f \in L^2(A)$ 生成，其中 $|G_f| = 1$。

证明。(a)⇒(b) 若 $f \in L^2(A)$是公共特征函数，且$\|f\|_{L^2(A)} = 1$，则对 $z \in S$，$|V_f f(z)| = 1$，因为 $\pi(z)$的特征值模为1。因此 $S \subset G' := \{z \in A \times A : |V_f f(z)| = 1\}$，且根据命题 4.1，$G'$是 $A \times A$ 的各向同性子群。因此，由 (2.2)，算子 $\pi(z)$在$z \in S$时两两可交换。

(b)⇒(c) 由于算子 $\pi(z)$、$z \in S$彼此可交换，因此由 S 生成的子群是各向同性的。此外，它包含于某个极大各向同性子群 G 中（其存在性显而易见，因为 A是有限的；另见推论 3.7）。令 $(H, H^\perp, \phi)$ 为与 G 相关联的三元组（参见命题 3.1、3.5 和 3.6），并令 h 为与之相关联的一个二次子特征。

对应于这一对 (H,ϕ)（参见定义 4.3），它由定理 2.5 保证存在（另见 [34]）。根据命题 4.4，对于函数 $f = |H|^{-1/2}h$ we have$\|f\|_{L^2(A)} = 1$和 $|V_f f| = \chi_G$，并且根据定理 6.1 f生成了一个加博尔$\widehat{}$正交归一基 $\mathcal{G}(f,\Gamma)$，其中 $\Gamma \subset A \times A$是一个合适的子集。由于 $S \subset G$,$|\langle f, \pi(z)f\rangle| = |V_f f(z)| = 1$对于 $z \in S$成立，因此 f是算子 $\pi(z)$，$z \in S$的公共特征函数；于是根据 (2.2)，每个满足 $w \in A \times A$的函数 $\pi(w)f$,$\widehat{}$也都是公共特征函数。

(c)⇒(a) 这是显而易见的。 □

我们指出，H. Feichtinger 曾针对时频平移的特征函数进行了大量数值实验（个人通信），这些实验与工作 [33]有关。

7. Lieb's uncertainty inequality

以下结果最初在 [43] 中针对群 $A = \mathbb{R}$得到了证明，随后在 [23], 中沿用基本相同的证明方法，将其推广到了一般的局部紧阿贝尔群。

我们回顾一下，每个局部紧阿贝尔群 A 在拓扑上都同构于 $\mathbb{R}^d \times A_0$，其中某个整数 $d \geq 0$ 以及某个包含紧开子群的局部紧阿贝尔群 A_0，且维数 d 是一个不变量[29,定理 24.30]。

定理 7.1（Lieb 不确定性不等式）。对于 $f, g \in L^2(A)$，我们有

$$\|V_g f\|_{L^p(A\times\widehat{A})} \leq \left(\frac{2}{p}\right)^{d/p} \|f\|_{L^2(A)}\|g\|_{L^2(A)} \qquad 2 \leq p < \infty \tag{7.1}$$

and

$$\|V_g f\|_{L^p(A\times\widehat{A})} \geq \left(\frac{2}{p}\right)^{d/p} \|f\|_{L^2(A)}\|g\|_{L^2(A)} \qquad 1 \leq p \leq 2. \tag{7.2}$$

仅利用 (2.5) 即可轻易得到类似的估计——事实上更弱，若$d > 1$——其中常数 $\left(\frac{2}{p}\right)^{d/p}$由 1 取代（见下文定理 7.2），即

$$\|V_g f\|_{L^p(A\times\widehat{A})} \leq |f\|_{L^2(A)}\|g\|_{L^2(A)} \qquad 2 \leq p < \infty \tag{7.3}$$

and

$$\|V_g f\|_{L^p(A\times\widehat{A})} \geq \|f\|_{L^2(A)}\|g\|_{L^2(A)} \qquad 0 < p \leq 2, \tag{7.4}$$

此时也包含 $0 < p < 1$ 情形。如果 A 包含一个紧开子群（即 $d = 0$），则这些估计是尖锐的。

我们将证明，在 (7.3) 或 (7.4) 中取等号的函数对 f、g，恰好是满足 $V_g f \neq 0$ 所在集合的测度为 1 的那些函数对；这些函数对已在定理 5.2 中刻画。

定理 7.2. 设 A 是任意一个局部紧阿贝尔群。则 (7.3) 和 (7.4) 均成立。

对于某些 $p \in (2,\infty)$ 和 $f, g \in L^2(A)\setminus\{0\}$，当且仅当存在 $c_1, c_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$，$z_1, z_2 \in A\times A$ 以及 A 的一个二次子特征 h，使得 $f = c_1\pi(z_1)h$ 且 $g = c_2\pi(z_2)h$ 时，(7.3) 中的等号成立。在这种情况下，对于每个 $p\in[2,\infty)$，(7.3) 中的等号都成立。

对于 $0<p<2$，不等式 (7.4) 也有类似的唯一性结论。

证明。我们可以假设 $\|f\|_{L^2(A)} = \|g\|_{L^2(A)} = 1$。

令 $2\le p<\infty$，并设 $S = \{z\in A\times A:\ V_g f(z)\neq 0\}$。由 (2.5) 和 (2.6) 可知

$$\begin{aligned}\int_S |V_g f(x,\xi)|^p\,dx\,d\xi &= \int_S |V_g f(x,\xi)|^{p-2}|V_g f(x,\xi)|^2\,dx\,d\xi\\ &\le \int_S |V_g f(x,\xi)|^2\,dx\,d\xi = 1,\end{aligned}$$

这就证明了 (7.3)。若上述不等式取等号，且 $2<p<\infty$，则 $|V_g f| = \chi_S$ 且 $|S|=1$，由此根据定理 5.2，对函数 f 和 g 可得所需结论。

不等式 (7.4) 的结果（从而 $0<p\le 2$）类似，只需使用

$$\begin{aligned}1 = \int_S |V_g f(x,\xi)|^2\,dx\,d\xi &= \int_S |V_g f(x,\xi)|^{2-p}|V_g f(x,\xi)|^p\,dx\,d\xi\\ &\le \int_S |V_g f(x,\xi)|^p\,dx\,d\xi.\end{aligned}$$

□

注 7.3。若 f，$g\in L^2(A)$，则由 (2.5) 可得 $V_g f\in L^\infty(A\times\widehat{A})$。因此，根据单调收敛，

$$\lim_{p\to 0^+}\int_{A\times\widehat{A}} |V_g f(x,\xi)|^p\,dxd\xi = |\{z\in A\times\widehat{A}:\ V_g f(z)\neq 0\}|.$$

因此，将 (7.4) 两边提升至 p 次幂，并令 $p\to 0^+$ 取极限，可得：若 f 和 g 均非零，

$$|\{z\in A\times\widehat{A}:\ V_g f(z)\neq 0\}|\ge 1,$$

这就是定理 2.2 中的不等式。

容易验证，在一般的局部紧阿贝尔群 $A=\mathbb{R}^d\times A_0$ 上，对于 f_1，$g_1\in L^2(\mathbb{R}^d)$ 以及 f_2，$g_2\in L^2(A_0)$，有

$$V_{g_1\otimes g_2}(f_1\otimes f_2) = V_{g_1}f_1\otimes V_{g_2}f_2.$$

因此，对于固定的 $p\in[1,\infty)$，如果 f_1、g_1 是 $\mathbb{R}^d$ 上 Lieb L^p-不等式（定理 7.1）的一对最优函数，并且 f_2、g_2 是 A_0 上的一对最优函数，那么 $f_1\otimes f_2$、$g_1\otimes g_2$ 就是其上的 Lieb L^p-不等式的一对最优函数

A。现在我们给出这样一族最优函数。为此，我们需要一些术语，这些术语的灵感来源于 [43]。

定义 7.4. 若函数 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上满足下式，则称其为高斯函数

$$f(x) = \exp(-\alpha x \cdot x + i\beta x \cdot x + \gamma \cdot x + \delta)$$

其中，α 是实对称正定 $d \times d$ 矩阵，β 是实对称 $d \times d$ 矩阵，$\gamma \in \mathbb{C}^d$ 且 $\delta \in \mathbb{C}$。若两个函数 f、g 都是高斯函数，且它们的 α和 β相同，但 γ 和 δ可能不同，则称它们为匹配高斯对。

类似地，若局部紧阿贝尔群 A 上的一对函数 f、g 满足 $f = c_1\pi(z_1)h$ 且 $g = c_2\pi(z_2)h$，其中$\widehat{}$存在某些 c_1、$c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$、$z_1$、$z_2 \in A \times A$ 以及 A上的某个二次子特征 h，则称它们为二阶子特征匹配对。

容易验证，对于匹配高斯对 f、g，等号成立于 (7.1) 和 (7.2)（$A = \mathbb{R}^d$）。对于 $A = \mathbb{R}$，文献 [43] 已证明，当 $p \neq 2$ 时，这些实际上是仅有的非零最优函数对。

因此，前面的讨论导出了以下结果。

命题 7.5。设 f_1、g_1 是 $\mathbb{R}^d$ 上的一对匹配高斯对，且设 f_2、g_2 是 A_0 上的一对二阶子特征匹配对。那么，对于 $A = \mathbb{R}^d \times A_0$ 上的函数 $f := f_1 \otimes f_2$ 和 $g := g_1 \otimes g_2$，对每个 $p \in [1, \infty)$，等号都成立于 (7.1) 和 (7.2) 中。

其中，f_1 和 g_1 是高斯函数 $\exp(-\pi|x|^2)$ 的时频平移，而 f_2 和 g_2 是某个 A 的紧开子群的示性函数的时频平移，这些最优函数已在 [23] 中得到。

关于一般局部紧阿贝尔群上所有最优函数的刻画问题，我们将留待后续工作解决。正如前面所指出的，$A = \mathbb{R}$的情形已在 [43], 中得到研究，而 $A = A_0$ 的情形则是上述定理 7.2 的内容。

Acknowledgments

我们谨此感谢 Hans Feichtinger 与我们进行富有启发性的讨论。

References

[1] L. D. Abreu 和 M. Speckbacher。调制与多解析 Fock 空间中的 Donoho-Logan 大筛原理。《数学科学通报》，171：论文编号 103032，25 页，2021 年。[2] E. Agora、J. Antezana 和 M. N. Kolountzakis。铺砌函数与加博尔正交基。《应用与计算调和分析》，48(1)：96–122，2020 年。[3] L. Baggett 和 A. Kleppner。阿贝尔群的乘子表示。《泛函分析杂志》，14：299–324，1973 年。

[4] J. J. Benedetto、C. Heil 和 D. F. Walnut。微分与 Balian-Low 定理。《傅里叶分析与应用杂志》，1(4)：355–402，1995 年。[5] A. Bonami、B. Demange 和 P. Jaming。Hermite 函数及傅里叶变换与加窗傅里叶变换的不确定性原理。《伊比利亚美洲数学评论》，19(1)：23–55，2003 年。[6] A. Bonami 和 S. Ghobber。有限阿贝尔群中不确定性原理的等号情形。《塞格德数学科学学报》，79(3-4)：507–528，2013 年。[7] P. G. Casazza、O. Christensen 和 A. J. E. M. Janssen。紧 Weyl-Heisenberg 框架的分类。载于《小波与框架的泛函分析与调和分析》（美国得克萨斯州圣安东尼奥，1999），《当代数学》丛书第 247 卷，第 131–148 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999 年。[8] P. G. Casazza 和 M. Fickus。有限啁啾信号的傅里叶变换。《EURASIP 应用信号处理杂志》，（信号处理、通信与信息论中的框架及过完备表示）：文章编号 70204，7 页，2006 年。[9] M. de Gosson 和 F. Luef。辛容量与不确定性的几何：辛拓扑在经典力学与量子力学中的兴起。《物理报告》，484(5)：131–179，2009 年。[10] N. C. Dias、F. Luef 和 J. a. N. Prata。通过调制空间上的变分法研究不确定性原理。《泛函分析杂志》，283(8)：论文编号 109605，30 页，2022 年。[11] D. L. Donoho 和 P. B. Stark。不确定性原理与信号恢复。《SIAM 应用数学杂志》，49(3)：906–931，1989 年。[12] D. E. Dutkay 和 C.-K. Lai。具有傅里叶框架的测度的一致性。《数学进展》，252：684–707，2014 年。[13] U. Enstad、M. S. Jakobsen、F. Luef 和 T. Omland。阿代尔上的加博尔框架的变形与 Balian-Low 定理。《数学进展》，410（B 部分）：论文编号 108771，46 页，2022 年。[14] U. B. R. Enstad、M. S. Jakobsen 和 F. Luef。有理数域上的阿代尔时频分析。《巴黎科学院数学报告》，357(2)：188–199，2019 年。[15]C. L. Fefferman。不确定性原理。《美国数学会通报》（新系列），9(2)：129–206，1983 年。[16] H. G. Feichtinger、M. Hazewinkel、N. Kaiblinger、E. Matusiak 和 M. Neuhauser。$\mathbb{C}^n$上的元辛算子。《季度数学杂志》，59(1)：15–28，2008 年。[17] H. G. Feichtinger、W. Kozek 和 F. Luef。有限阿贝尔群上的加博尔分析。《应用与计算调和分析》，26(2)：230–248，2009 年。[18] C. Fern´andez、A. Galbis 和 J. Mart´ınez。离散短时傅里叶变换的局部化算子与不确定性原理。《抽象与应用分析》，第 131459 号文章，6 页，2014 年。[19] G. B. Folland。《抽象调和分析教程》。《高等数学研究》丛书。CRC 出版社，佛罗里达州博卡拉顿，1995 年。[20] J. J. F. Fournier。卷积 Young 不等式的锐性。《太平洋数学杂志》，72(2)：383–397，1977 年。[21]R. L. Frank。相干态及其最优函数的锐不等式，arXiv:2210.14798，2022 年。[22] J.-P. Gabardo、C.-K. Lai 和 Y. Wang。由单位立方体生成的加博尔正交基。《泛函分析杂志》，269(5)：1515–1538，2015 年。[23] K. Gr¨ochenig。局部紧阿贝尔群上的加博尔分析若干方面。载于《加博尔分析与算法》，《应用数值调和分析》丛书，第 211–231 页。Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1998 年。[24] K. Gr¨ochenig。《时频分析基础》。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2001 年。[25] K. Gr¨ochenig。时频表示的不确定性原理。载于《加博尔分析进展》，《应用数值调和分析》丛书，第 11–30 页。Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，2003 年。

[26]K. Gr¨ochenig 和 E. Malinnikova。局部紧阿贝尔群上 Riesz基的相空间局部化。Rev. Mat. Iberoam., 29(1):115–134, 2013。[27] K. Gr¨ochenig 和 D. Rottensteiner。幂零李群的平方可积表示轨道中的正交归一基。J. Funct. Anal., 275(12):3338–3379, 2018。[28] K. Gr¨ochenig 和 T. Strohmer。局部紧阿贝尔群上的伪微分算子与 Sj¨ostrand 符号类。J. Reine Angew. Math., 613:121–146, 2007。[29] E. Hewitt 和 K. A. Ross。抽象调和分析。第一卷：拓扑群的结构。积分理论、群表示。《数学基础原理》，第115卷。Academic Press, Inc., Publishers，纽约；Springer-Verlag，柏林、G¨ottingen-海德堡，1963。[30] E. Hewitt 和 K. A. Ross。抽象调和分析。第二卷：紧群的结构与分析。局部紧阿贝尔群上的分析。《数学基础原理》，第152卷。Springer-Verlag，纽约-柏林，1970。[31] J.-i. Igusa。调和分析与θ函数。Acta Math., 120:187–222, 1968。[32] A. Iosevich、M. Kolountzakis、Y. Lyubarskii、A. Mayeli 和 J. Pakianathan。有限素数域上的 Gabor 正交基。Bull. Lond. Math. Soc., 53(2):380–391, 2021。[33] N. Kaiblinger。局部紧阿贝尔群的元辛表示、相空间平移的特征函数与 Gelfand-Shilov空间，1999年，博士学位论文，维也纳大学。[34] N. Kaiblinger 和 M. Neuhauser。有限阿贝尔群的元辛算子与 $\mathbb{R}^d$。Indag. Math. (N.S.), 20(2):233–246, 2009。[35] D. Kalaj。单位球中某些类的对数 $-\mathcal{M}$-次调和函数的压缩性质， $\mathbb{R}^n$，arXiv:2207.02054，2022。[36] E. Kaniuth 和 G. Kutyniok。局部紧阿贝尔群上 Zak变换的零点。Proc. Amer. Math. Soc., 126(12):3561–3569, 1998。[37] H. Knutsen。短时傅里叶变换与 Gabor乘子的分形不确定性原理。Appl. Comput. Harmon. Anal., 62:365–389, 2023。[38] F. Krahmer、G. E. Pfander 和 P. Rashkov。有限阿贝尔群上时频表示中的不确定性及其应用。Appl. Comput. Harmon. Anal., 25(2):209–225, 2008。[39] A. Kulikov。以再生核为极值点的泛函。Geom. Funct. Anal., 32(4):938–949, 2022。[40] A. Kulikov、F. Nicola、J. Ortega-Cerd`a 和 P. Tilli。流形上次调和函数的单调性定理，arXiv:2212.14008, 2022。[41] C.-K. Lai 和 A. Mayeli。非可分晶格、Gabor 正交基与铺砌。J. Fourier Anal. Appl., 25(6):3075–3103, 2019。[42] Y.-Z. Li。关于 Gabor 正交基的注记。Proc. Amer. Math. Soc., 133(8):2419–2428, 2005。[43] E. H. Lieb。雷达模糊函数与 Wigner分布的积分界。J. Math. Phys., 31(3):594–599, 1990。[44] E. H. Lieb 和 M. Loss。分析。美国数学会，普罗维登斯，RI，2001。[45] E. H. Lieb 和 J. P. Solovej。SU(1, 1)及其 $AX + B$ 子群的 Wehrl型相干态熵不等式。载于《偏微分方程、谱理论与数学物理——Ari Laptev 纪念文集》，EMS Ser. Congr. Rep.，第301–314页。EMS Press，柏林，2021。[46] Y. Liu 和 Y. Wang。非均匀Gabor基的一致性。Adv. Comput. Math., 18(2-4):345–355, 2003。[47] Y. M. Liu。具有紧支撑的加窗傅里叶正交归一基的刻画。Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 17(3):501–506, 2001。

[48] T. Matolcsi 和 J. Sz˝ucs。共轭谱测度的交。巴黎科学院报告 S ´ér. A-B, 277:A841–A843, 1973。[49] F. Nicola。有限循环群上短时傅里叶变换的不确定性原理：等号成立的情形。J. Funct. Anal., 284(12):论文编号109924，2023。[50] F. Nicola、J. L. Romero 和 S. I. Trapasso。时频集中问题的最优函数的存在性。Calc. Var. Partial Differential Equations, 62(1):论文编号21，共21页，2023。[51] F. Nicola 和 P. Tilli。短时傅里叶变换的 Faber-Krahn 不等式。Invent. Math., 230(1):1–30, 2022。[52] A. D. Pinos 和 N. Lev。Gabor 正交基、铺砌与周期性。Math. Ann., 384(3-4):1461–1467, 2022。[53] J. Ramos 和 P. Tilli。小波变换的 Faber-Krahn 不等式。Bull. Lond. Math. Soc.，即将出版。[54] H. Reiter。亚辛群与 Segal 代数，《数学讲义》第1382卷。Springer-Verlag，柏林，1989。[55] H. Reiter 和 J. D. Stegeman。经典调和分析与局部紧群，《伦敦数学会专著》新系列第22卷。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，第二版，2000。[56] K. T. Smith。群上的不确定性原理。SIAM J. Appl. Math., 50(3):876–882, 1990。[57] T. Tao。素数阶循环群上的不确定性原理。Math. Res. Lett., 12(1):121–127, 2005。[58] A. Weil。关于某些酉算子群。Acta Math., 111:143–211, 1964。[59] A. Wigderson 和 Y. Wigderson。不确定性原理：同一主题的变体。Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 58(2):225–261, 2021。[60] W. Zhou。有限维空间上离散 Gabor 正交基的构造。Appl. Comput. Harmon. Anal., 55:270–281, 2021。

Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino, Italy

电子邮箱地址：fabio.nicola@polito.it