arXiv:2305.02753v1 [math-ph] 4 May 2023

椭圆随机矩阵实特征值的大偏差与涨落

SUNG-SOO BYUN、LESLIE MOLAG 和 NICK SIMM

ABSTRACT. 我们研究由非厄米性参数 $0 \le \tau < 1$ 标记的 $N \times N$ 实椭圆 Ginibre 矩阵的实特征值，涵盖强非厄米性区域和弱非厄米性区域。这里假设 N 为偶数。在这两个区域中，我们均证明了实特征值数量的中心极限定理。我们还求得了恰好有 k 个特征值为实数的概率 $p_N^{(\tau)},_k$ 的渐近行为。在强非厄米性区域中，即 τ 固定时，我们发现

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \log p_{N,k_N}^{(\tau)} = -\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{\zeta(3/2)}{\sqrt{2\pi}}$$

对于任意满足 $k_N = o(\sqrt{N}_{\text{对数 }N})$（当 $N \to \infty$ 时）的偶数序列 $(k_N)_N$，其中 ζ 为黎曼ζ函数。在弱非厄米性区域，即 $\tau = 1 - \frac{\alpha^2}{N}$ 时，我们得到

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log p_{N,k_N}^{(\tau)} \le \frac{2}{\pi} \int_0^1 \log\left(1 - e^{-\alpha^2 s^2}\right) \sqrt{1-s^2}\, ds$$

对于任意偶数序列 $(k_N)_N$，满足 $k_N = o(N_{\log N})$（当 $n \to \infty$ 时）。我们预计此不等式实际上是等式。

1. INTRODUCTION AND MAIN RESULTS

1965 年，Ginibre 提出了三种随机矩阵模型，它们本质上是高斯正交系综、高斯酉系综和高斯辛系综不受约束的版本，即所有矩阵元素都是独立同分布的高斯随机变量，不要求具有厄米性 [34]。由于缺乏厄米性，特征值不局限于实轴，而是分布在整个复平面上。这些系综由 $N \times N$ 矩阵 M 组成，其元素为实数（$\beta = 1$）、复数（$\beta = 2$）或（实）四元数（$\beta = 4$），并服从如下概率测度

$$\frac{1}{Z_N^\beta} e^{-\frac{1}{2}\beta \operatorname{Tr}(M^\dagger M)} dM_N^\beta,$$

其中 Z_N^β 是归一化常数，dM_N^β 是相应矩阵空间上的标准勒贝格测度，这些矩阵空间的实维数为 βN^2。如今，这些模型称为实、复和四元数 Ginibre 系综（分别记为 GinOE、GinUE 和 GinSE），在过去半个世纪中已得到深入研究。关于 Ginibre 系综的近期综述，可参阅论文 [8, 9]。

本文着重研究 $\beta = 1$。事实上，我们考虑 GinOE 的单参数变形，称为实椭圆 Ginibre 系综（eGinOE）。eGinOE 很可能受到 Girko [35], 的启发，由 Sommers、Crisanti、Sompolinsky 和 Stein 于 1988 年引入 [48]。参数为 $-1 < \tau < 1$ 的 eGinOE 由 $N \times N$ 实矩阵 M 组成，其高斯条目均值为零，并满足

Date: 2023年5月5日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 60B20；次要分类 33C45。
Key words and phrases. 实椭圆 Ginibre 矩阵、实特征值、强／弱非厄米性、中心极限定理、大偏差。

相关结构

$$\mathbb{E}M_{ij}^2 = \frac{1}{N}, \qquad \mathbb{E}M_{ij}M_{ji} = \frac{\tau}{N}, \qquad \mathbb{E}M_{ii}^2 = \frac{1+\tau}{N}, \qquad i,j = 1,\dots,N \text{ and } i \neq j.$$

这些正是按照概率测度分布的实随机矩阵 M

$$\frac{1}{Z_N^{(\tau)}} e^{-\frac{1}{2(1-\tau^2)}\operatorname{Tr}(M^\dagger M - \tau M^2)} dM_N, \qquad dM_N = \prod_{i,j=1}^{N} dM_{ij},$$

其中 $Z_N^{(\tau)}$ 是一个归一化常数。对于 $\tau = 0$，我们得到 GinOE。另一方面，在极限 $\tau \uparrow 1$下，众所周知，eGinOE 趋近于 GOE。在极限 $\tau \downarrow -1$下，矩阵M 是实反对称的。这等价于（乘以 i之后）所谓的反对称高斯酉系综，关于该系综的更多细节，请参见 [13, 28] 及其中的参考文献。eGinOE 也可以等价地定义为由 $N \times N$ 矩阵组成的系综。

$$M := \sqrt{\frac{1+\tau}{2}}\, S + \sqrt{\frac{1-\tau}{2}}\, A, \tag{1.1}$$

其中 S 和 A 是从 GOE 及其反对称版本中选取的矩阵。如今，大多数作者在 eGinOE 的定义中要求参数 τ 属于 (0，1) 或 $[0,1)$。

GinOE 矩阵在实际应用中的首次出现，是在 May [41] 于 1972年 发表的一篇论文中，他研究了复杂生态系统。更准确地说，May 考察了这些系统解的稳定性。

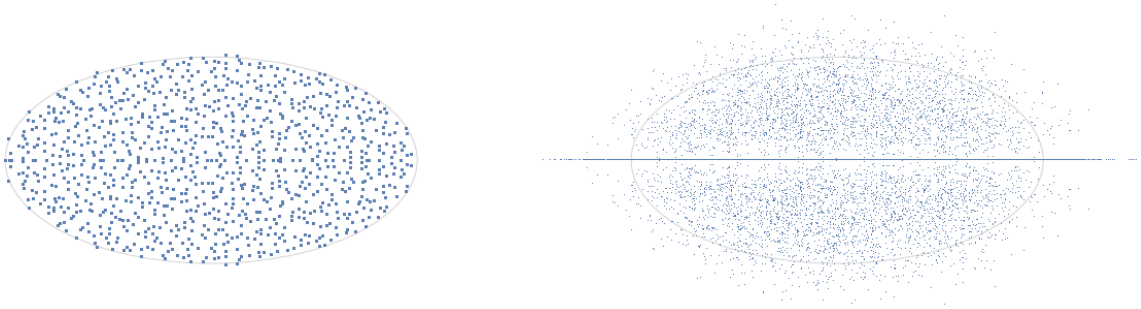
$$\vec{x}' = (-\mathbb{I} + \alpha G_N)\,\vec{x},$$

其中， G_N 是一个 GinOE 矩阵。这使得我们能够研究一般的微分方程组$\vec{x}' = f(\vec{x})$，其中 f 是未知的。与 eGinOE 相关的更一般的微分方程组随后由 Fyodorov 和 Khoruzhenko [29]进一步研究。多年来，人们提出了许多其他应用，涉及从动力学到随机网络、皮层电活动以及量子色动力学等多个领域，相关参考文献见 [36]。

对于一般固定的 $\tau \in [0,1)$ 和 $N \to \infty$，众所周知，特征值在椭圆上均匀分布。

$$\mathscr{E}^{(\tau)} := \left\{ z \in \mathbb{C} : \left(\frac{\operatorname{Re} z}{1+\tau}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} z}{1-\tau}\right)^2 \leq 1 \right\}, \tag{1.2}$$

见 e. g. [35, 43, 48]。关于椭圆随机矩阵的局部定律，我们还可参考 [5] .



(A) $N = 1000$ (B) $N = 10$ 进行 1000 次重复实验

FIGURE 1. eGinOE 的特征值。

在最初的论文中，Ginibre 仅推导出了所有 N 特征值均为实数时的联合概率密度函数（JPDF）。又过了约四分之一个世纪，才确定了一般情形下的 JPDF [39]。当 $N = 2n$，且实特征值的数量为 $2k$ 时，相应的 JPDF 为

$$C_n^{(\tau)} \binom{n}{k} 2^{n-k} \prod_{j=1}^{k} \sqrt{\omega^{(\tau)}(\lambda_j)} \prod_{\ell=1}^{n-k} \omega^{(\tau)}(z_\ell) |\Delta\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, z_1, \overline{z}_1, \ldots, z_{n-k}, \overline{z}_{n-k}\right)|,$$

其中 $C_n^{(\tau)}$是一个显式常数，

$$\omega^{(\tau)}(z) = e^{-\frac{\mathrm{Re}(z^2)}{1+\tau}} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{2}{1-\tau^2}} \operatorname{Im} z\right),$$

并且 Δ 是一个范德蒙德因子。我们提到，相应的关联函数具有 Pfaffian 结构 [3]。

确定 GinOE 和 eGinOE 的联合概率密度函数（JPDF）之所以困难，是因为它们具有一种独特性质：与复数和四元数对应体不同，它们以非零概率出现纯实特征值，见图 1。特别地，概率

$$p_{N,k}^{(\tau)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N \tag{1.3}$$

当 k 与 N具有相同奇偶性时，eGinOE（以及 GinOE）的某个特定特征值构型恰有 k 个实特征值的概率非零。

在本文中，我们将重点讨论 N 为偶数的情形，因为奇数 N 的情形需要单独处理，参见例如 [24, 47]。我们将写作

$$N = 2n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

今后。

1.1. 实特征值数量涨落的主要结果。 令 $\mathscr{N}_{(\tau)\,N}$ 表示 M 的实特征值数量。对于固定的 $\tau \in [0, 1)$, Forrester 和 Nagao [27] 证明，实特征值的期望数量为

$$\mathbb{E}\mathscr{N}_N^{(\tau)} = \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \sqrt{\frac{2N}{\pi}} (1 + o(1)), \qquad (N \to \infty). \tag{1.5}$$

公式 (1.5) 最初由 Edelman、Kostlan 和 Shub 针对 GinOE 情形（$\tau = 0$）证明 [15]。除了均值之外，实特征值数量的方差渐近行为满足

$$\operatorname{Var} \mathscr{N}_N^{(\tau)} = (2 - \sqrt{2}) \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \sqrt{\frac{2N}{\pi}} (1 + o(1)), \qquad (N \to \infty). \tag{1.6}$$

这一点在 [27],中已隐含证明，参见 [10,注 5.1]。

由 (1.1) 显然可知，对于 $\tau = 1$,

$$\mathbb{E}\mathscr{N}_N^{(1)} = N, \qquad \operatorname{Var} \mathscr{N}_N^{(1)} = 0. \tag{1.7}$$

由 (1.5)、(1.6) 和 (1.7) 可预期，当 $\tau \uparrow 1$ 时会出现非平凡的转变。这发生在所谓的弱非厄米性区域，该区域由 Fyodorov、Khoruzhenko 和 Sommers 在开创性工作 [30–32] 中引入。对于 eGinOE，这对应于区域

$$\tau = 1 - \frac{\alpha^2}{N}, \qquad \alpha \in (0, \infty) \text{ fixed}. \tag{1.8}$$

在实随机矩阵的情形下，这一区域有时被称为弱非对称区域。在此区域中会出现若干有趣的标度极限，它们在高斯正交系综

与 GinOE 之间进行插值，参见例如 [4, 27, 33] 及其中的参考文献。在这一临界区间中，近期的一项研究 [10] 证明了

$$\mathbb{E}\mathscr{N}_N^{(\tau)} = c(\alpha)\, N + O(1), \qquad (N \to \infty), \tag{1.9}$$

其中

$$c(\alpha) := e^{-\alpha^2/2}\Big[I_0\Big(\frac{\alpha^2}{2}\Big) + I_1\Big(\frac{\alpha^2}{2}\Big)\Big]. \tag{1.10}$$

Here

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} \tag{1.11}$$

是第一类修正贝塞尔函数 [44, 第 10]章。关于函数 $c(\alpha)$的其他表示形式，参见（5.2）。文献 [10] 还证明了

.....

$$\operatorname{Var} \mathscr{N}_N^{(\tau)} = 2\Big(c(\alpha) - c(\sqrt{2}\alpha)\Big)N + o(N), \qquad (N \to \infty). \tag{1.12}$$

（参见 [1]，其中给出了实 Ginibre 正交系综矩阵乘积的类似结果。）

对于 GinOE ($\tau = 0$)，关于实特征值数量（或一般情况下其实特征值的线性统计量）的中心极限定理已在 [19, 45] 中得到证明。在所有其他情况下，中心极限定理尚未得到证明，而我们的第一个结果正是针对这一问题展开的。

定理 1.1 (**实特征值数量的中心极限定理** **ues**)。令 N 为偶数。当 $N \to \infty$ 时，我们有如下依分布收敛

$$\frac{\mathscr{N}_N^{(\tau)} - \mathbb{E}\mathscr{N}_N^{(\tau)}}{\sqrt{\mathbb{E}\mathscr{N}_N^{(\tau)}}} \to N(0, \sigma^2), \tag{1.13}$$

其中 $N(0, \sigma^2)$ 表示均值为0、方差为

$$\sigma^2 = \begin{cases} 2 - \sqrt{2} & \text{if } \tau \in [0, 1) \text{ is fixed,} \\ 2 - 2\dfrac{c(\sqrt{2}\alpha)}{c(\alpha)} & \text{if } \tau = 1 - \frac{\alpha^2}{N} \text{ with fixed } \alpha \in (0, \infty). \end{cases} \tag{1.14}$$

式 (1.14) 中弱非厄米性区域的方差在高斯正交系综 ($\alpha \downarrow 0$) 与 GinOE ($\alpha \to \infty$) 之间插值。对于固定的 τ，可以证明这些结果实际上对 $-1 < \tau < 1$ 也成立，见推论 1.7。另请指出，GinUE 及其推广的全计数统计已在 [7, 11, 16] 中得到非常精确的结果。

1.2. 实特征值数量的大偏差主要结果。 现在我们将讨论 GinOE 和 eGinOE 的实特征值数量的大偏差。由 [14, 27] 可知

$$p_{N,N}^{(\tau)} = \Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{\frac{N(N-1)}{4}}. \tag{1.15}$$

情况 o f 在 [3] 中恰好研究了 $\tau = 0$ 个复特征值对，其表达式为

$$\log p_{N,N-2}^{(0)} = -\frac{\log 2}{4}N^2 + \frac{\log(3\sqrt{2})}{2}N + o(N), \qquad (N \to \infty).$$

我们还要提到， $k \sim aN$这一情形（其中 $0 < a < 1$ 固定）曾在 [12] 中使用库仑气体方法进行研究。然而，本文将关注实特征值数量较少的情形。证明，在 Ginibre 情形下，当 $\tau = 0$时，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \log p^{(0)}_{N,k_N} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big), \tag{1.16}$$

每当 $(k_N)_N$ 是一列偶数，满足 $k_N = o(\sqrt{N}_{\text{对数 } N})$，当 $n \to \infty$ 时。

我们证明了 eGinOE 的类似结论。

定理 1.2 （强非厄米性下实特征值的大偏差 **厄米性）。**

令 $\tau \in [0, 1)$ 为固定值，并令 N 和 k 为偶数。那么对于任意固定的 k

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \log p^{(\tau)}_{N,k} = -\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big). \tag{1.17}$$

该极限在将 k 替换为任意偶数序列 $(k_N)_N$时仍成立，只要 $k_N = o(\sqrt{N}_{\log N})\, as N \to \infty$。

事实上，定理 1.2 对于 $-1 < \tau < 1$ 也成立，参见推论 1.7。

我们还给出弱非厄米性区域中定理 1.2 的对应结论。由于缺少引理 2.7 中那样的一致估计，我们在此只能给出一个上界。我们确实认为这个上界实际上是尖锐的，即（1.18）中的不等式是等式。无论如何，这个上界已经可以得出一些有趣的结论，例如，只有少数实特征值的概率，其量级远小于固定 τ 情形下的概率。

定理 1.3 (**弱非厄米性下实特征值的大偏差**)。

令 N 和 k 为偶数，并令 $\tau = 1 - \frac{\alpha^2}{N}$，其中 $\alpha \in$ （0， ∞） 固定。则

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log p^{(\tau)}_{N,k} \le -d(\alpha), \tag{1.18}$$

其中

$$d(\alpha) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(\sqrt{m}\,\alpha)}{2m} = -\frac{2}{\pi}\int_0^1 \log\Big(1 - e^{-\alpha^2 s^2}\Big)\sqrt{1-s^2}\, ds. \tag{1.19}$$

这里， $c(\alpha)$ 由 (1.10)给出。此外，该不等式中的 k 也可以替换为任意满足 $k_N = o(N_{\log N})$ （当 $N \to \infty$ 时）的偶数序列 $(k_N)_N$。

(1.19) 中的第二个恒等式将在下面的引理 A.1 中证明。

注 1.4 (插值性质)。 假设(1.18) 中的不等式取等号，这正是我们所预期的。于是，我们可以将定理 *1.2* 和 *1.3* 合并写为

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log p^{(\tau)}_{N,k}}{\mathbb{E}\mathscr{N}^{(\tau)}_N} = -\begin{cases} \dfrac{1}{2}\zeta\Big(\dfrac{3}{2}\Big) & \text{if } \tau \in [0,1) \text{ is fixed,} \\ \dfrac{d(\alpha)}{c(\alpha)} & \text{if } \tau = 1 - \frac{\alpha^2}{N} \text{ with fixed } \alpha \in (0,\infty), \end{cases} \tag{1.20}$$

直接由(1.5) 和(1.9)得出。事实上，利用(1.19)，我们有

$$\frac{d(\alpha)}{c(\alpha)} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{c(\sqrt{m}\alpha)}{c(\alpha)} \to \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m} = \infty, & \alpha \to 0, \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\sqrt{m}} = \frac{1}{2}\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big), & \alpha \to \infty, \end{cases}$$

这可以直接从(5.2) 关于 $c(\alpha)$的表示式推导出来。因此，我们观察到 *GinOE* 与高斯正交系综之间的插值（$p_N^{(1)}{}_{,k} = 0$ 若 $k < N$）。

在形式 (1.20) 中，固定的 τ 极限不再依赖于 τ。这可能表明存在一个普适性结果。我们可以考虑实矩阵 M，其分布为

$$\frac{1}{Z_N^{(V)}} e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Tr} V(M)} dM_N,$$

对于某个外场 V。一个有趣的问题是，具有 k 个实特征值的概率 $p_{N\,k}^{(V)}$，是否满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log p_{N,k}^{(V)}}{\mathbb{E}\mathscr{N}_N^{(V)}} = -\frac{1}{2}\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big)$$

对于一类一般的外场 V（当 N 和 k 具有相同的奇偶性，且 k 相对于 N 增长得足够慢时）。

1.3. 更多结果。 现在我们给出一些进一步的结果。令 $\mathrm{Li}_s(z)$ 表示阶数为 s 的多对数函数，其定义为狄利克雷级数

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}, \tag{1.21}$$

它是开单位圆盘 $|z| < 1$ 上关于 z 的解析函数。它可以解析延拓至 $\mathbb{C} \setminus [1, \infty]$，且该解析延拓可以连续延拓至 $\mathbb{C} \setminus (1, \infty)$，其中 $\mathrm{Re}\ s > 1$。当 $z = 1$ 且 $\mathrm{Re}\, s > 1$ 时，它与黎曼ζ函数一致：$\mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s)$。

定理 1.5。 令 $N = 2n$ 为偶数，并令 $\tau \in [0, 1)$ 固定。则对于所有 $x \in [0, 2]$，我们有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \log\left(\sum_{k=0}^{n} p_{N,2k}^{(\tau)} x^k\right) = -\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{\mathrm{Li}_{3/2}(1-x)}{\sqrt{2\pi}}. \tag{1.22}$$

该收敛在 (0,2) 的任意紧子集上一致成立。

一致收敛无法扩展到 $x = 0$，因为这将意味着极限函数在 $x = 0$ 处是光滑的。

注1.6。 围绕 $x = 1$ 展开，定理 *1.5* 给出：

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \log\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} p_{N,2j}^{(\tau)} (x-1)^k\right) = -\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{\mathrm{Li}_{3/2}(1-x)}{\sqrt{2\pi}}$$

对于 x 属于（0，2）的紧子集时均一致。这意味着，当 $N \to \infty$ 时，左侧的所有系数都收敛到某个极限。我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{N}} \log\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} p_{N,2j}^{(\tau)} (x-1)^k\right) \\
&= \frac{x-1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{n} j p_{N,2j}^{(\tau)} - \frac{(x-1)^2}{\sqrt{N}} \left(\sum_{j=2}^{n} \frac{j(j-1)}{2} p_{N,2j}^{(\tau)} - \frac{1}{2} \sum_{j,\ell=1}^{n} j\ell\, p_{N,2j}^{(\tau)} p_{N,2\ell}^{(\tau)}\right) + \mathscr{O}((x-1)^3).
\end{aligned}$$

通过在 $x=1$ 处求导，我们可以将其用作各种概率表达式的生成函数。例如，实特征值的期望数量渐近地为

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbb{E}\mathcal{N}_N^{(\tau)}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{n}2jp_{N,2j}^{(\tau)}=2\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{\mathrm{Li}_{3/2}'(0)}{\sqrt{2\pi}}=2\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

推论 1.7。 定理 *1.1* 和定理 *1.2* 的结论对于固定的 $-1<\tau<1$ 成立 .

证明。(3.5) 中的斜正交多项式对于 $-1<\tau<0$ 也适用。特别地，这意味着命题 2.1 中的生成恒等式对于 $-1<\tau<0$ 也适用。我们可以写成

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\log\left(\sum_{k=0}^{n}p_{N,2k}^{(\tau)}x^k\right)=\sum_{j=0}^{N}C_{N,j}(x)\tau^j,$$

对于某些系数 $C_{N,j}(x)$，对所有 $-1<\tau<1$ 均成立。定理 1.5 对我们所具有的系数意味着 e

$$\lim_{N\to\infty}C_{N,j}(x)=-\frac{\mathrm{Li}_{3/2}(1-x)}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\tau^j}\bigg|_{\tau=0}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}},$$

并且（1.22）特别地对 $-1<\tau<0$ 也成立（至少当 x 固定时）。因此，定理 1.2 可直接得出（取 $x=0$），沿着注1.6中的思路，我们也可以得到定理 1.1。□

推论 1.8。令 N 和 $(k_N)_N$ 为偶数。我们有，当 $N\to\infty$ 时，

$$\frac{\log p_{N,k_N}^{(\tau)}}{\sqrt{N}}\le-\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{\zeta(3/2)}{\sqrt{2\pi}}-\frac{k_N}{\sqrt{N}}\log 2+o(1).$$

若 $k=k_N^{(\tau)}$ 满足 $p_{N,k}^{(\tau)}$ 在 $p_{N0}^{(\tau)}$、$p_{N2}^{(\tau)}$、……、$p_{N,N}^{(\tau)}$ 中取最大值，则有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{k_N^{(\tau)}}{\sqrt{N}}\le\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{\zeta(3/2)}{\sqrt{\pi}\log 4}.$$

证明。在定理 1.5 中取 $x=2$，我们得到

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\log\left(p_{N,k_N}^{(\tau)}2^{k_N}\right)}{\sqrt{N}}\le\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\log\sum_{k=0}^{n}p_{N,2k}^{(\tau)}2^k=-\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{\mathrm{Li}_{3/2}(-1)}{\sqrt{2\pi}}=\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{\zeta(3/2)}{\sqrt{2\pi}},$$

由此可得第一个断言。结合定理 1.2，可得 $k_N^{(\tau)}$ 的估计为 $N\to\infty$。□

本文其余部分安排如下。

- 在第 2 节中，我们介绍了分析工作的关键要素，并完成主要结果的证明。在第 2.1 小节中，我们给出命题 2.1、2.3、2.4、2.5 以及引理 2.7、2.8、2.9，其中部分内容将在后续章节中证明。综合所有这些结果，第 2.2 小节最终给出了定理 1.1、1.2 和 1.3 的证明。
- 第 3 节致力于分析实特征值数量的生成函数。在第 3.1 和 3.2 小节中，我们证明有限-N 结果（命题 2.1），并给出一些关于生成矩阵求值的有用引理。在第 3.3 和 3.4 小节中，我们给出生成矩阵的一些初步估计，并证明引理 2.7 和 2.8。
- 第 4 和第 5 节分别致力于对强非厄米性和弱非厄米性下生成矩阵进行关键的渐近分析。特别地，我们证明了命题 2.4 和 2.5，从而完成了主要结果的证明。

- 本文包含两个附录。在附录 A 中，我们汇集了一些辅助引理。在附录 B 中，我们介绍 Forrester 和 Nagao 提出的生成函数的一个等价行列式公式，并将其与命题 2.1 进行比较。

致谢。SB 获三星科学技术基金会（SSTF-BA1401-51）、通过韩国高等研究院数学挑战中心提供的 KIAS 个人资助（SP083201）、韩国国家研究基金会（NRF-2019R1A5A1028324）以及浦项TJ朴泰俊基金会（浦项科学奖学金）的部分资助。LDM 由德国研究联合会（DFG）资助，项目为 SFB 1283/2 2021–317210226“驾驭分析、随机过程及其应用中的不确定性，并从随机性与低正则性中获益”；此外还获英国皇家学会资助 RF\ERE\210237。NS 感谢英国皇家学会资助 URF\R1\180707。

2. Proofs of main results

在本节及后续各节中，我们假设 $N = 2n$，其中 n 是一个正整数。在下文中，我们主要将以 n 而非 N的形式表述我们的结果和证明。

为方便读者，我们简要说明证明的整体思路。

(i) 我们首先推导实特征值数量的生成函数的行列式公式（命题 2.1），该公式适用于任意 τ 和 n。命题 2.1 中出现的生成矩阵可用于表示不存在实特征值的概率，以及实特征值数量的累积量（命题 2.3）。(ii) 随后，我们推导生成矩阵的迹的幂在强（命题 2.4）和弱（命题 2.5）非厄米性情形下的渐近行为。结合命题 2.3 (ii)，这些结果导出了定理 1.1。

(iii) 为完成定理 1.2 和 1.3 的证明，我们进行所需的误差估计（引理 2.7 和 2.8）。

2.1. **关键要素**。 证明的第一步是 $p_{2n,2k}$ 的行列式公式。为此，回顾一下第 k 个厄米特多项式 H_k 给出如下。

$$H_k(z) := (-1)^k e^{z^2} \frac{d^k}{dz^k} e^{-z^2} = k! \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^m}{m!(k-2m)!} (2z)^{k-2m}. \tag{2.1}$$

且（正则化的）超几何函数由高斯级数定义。

$${}_2F_1(a,b;c;z) := \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)s!} z^s, \quad (|z|<1) \tag{2.2}$$

并通过解析延拓延拓至其他区域。

命题 2.1 (**生成函数的行列式公式**)。我们有

$$\sum_{k=0}^{n} z^k p_{2n,2k}^{(\tau)} = \det\left[\delta_{j,k} + (z-1) M_n^{(\tau)}(j,k)\right]_{j,k=1}^{n}, \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned} M_n^{(\tau)}(j,k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\tau/2)^{j+k-2}}{\sqrt{\Gamma(2j-1)\Gamma(2k-1)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{1+\tau}} H_{2j-2}\Big(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\Big) H_{2k-2}\Big(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\Big)\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\frac{1+\tau}{1-\tau}\Big)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(j+k-\frac{3}{2}) {}_2F_1(k-j+\frac{1}{2}, j-k+\frac{1}{2}; -j-k+\frac{5}{2}; -\frac{\tau}{1-\tau})}{\sqrt{\Gamma(2j-1)\Gamma(2k-1)}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

特别地，我们有

$$p_{2n,0}^{(\tau)} = \det\left[I - M_n^{(\tau)}\right], \qquad M_n^{(\tau)} = \left[M_n^{(\tau)}(j,k)\right]_{j,k=1}^{n}. \tag{2.5}$$

对于 $\tau = 0$，类似公式最初由 Kanzieper 和 Akemann 推导得出 [36]。我们强调，行列式公式 (2.3) 等价于 Forrester 和 Nagao 提出的命题 B.1。一般而言，实特征值数目的生成函数的行列式公式可由广义配分函数的斜正交多项式形式推出 [21, 26]。还要提及的是，在诱导 Ginibre、球面 Ginibre 和截断正交矩阵的背景下也可以找到类似公式，参见例如 [17, 18, 20, 23, 25, 38, 40, 46] 以及 [9, 第 4] 节，其中有全面的综述。

注 2.2 (极端情形 $\tau = 0,1$)。对于 $\tau = 0$，利用 ${}_2F_1(a,b;c;0) = 1$ 以及 $H_k(x)$ 的首项系数为 2^k，我们得到

$$\left(\frac{\tau}{2}\right)^{k/2} H_k\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\right) \to x^k, \qquad \tau \to 0, \tag{2.6}$$

因此

$$M_n^{(0)}(j,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(j+k-\frac{3}{2})}{\sqrt{\Gamma(2j-1)\Gamma(2k-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{5/2}} \frac{x^j}{\sqrt{\Gamma(2j-1)}} \frac{x^k}{\sqrt{\Gamma(2k-1)}}\, dx. \tag{2.7}$$

因此可以观察到，对于 $\tau = 0$，命题 *2.1* 对应于 *[37, 引理 2.1]*，另见 *[22,命题 1]*。第二个表达式也与 *[37, 式 (A.19)]* 中的积分表示一致。我们提到，对于 $\tau = 0$，这一结果可由 *[3, 26, 36]*，中的精确公式推出。关于 *Pfaff* 积分定理的更多内容，请参见 *[6]* 。

另一方面，如果 $\tau = 1$，则由厄米多项式的正交性可知

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!\, \delta_{nm} \tag{2.8}$$

因此可以观察到 $M_n^{(1)}(j,k) = \delta_{jk}$.

$$\sum_{k=0}^{n} z^k p_{2n,2k}(1) = \det[zI] = z^n, \qquad \text{i.e.} \quad p_{2n,2k} = \begin{cases} 0 & \text{if } k = 0,1,\dots,n-1, \\ 1 & \text{if } k = n \end{cases} \tag{2.9}$$

正如预期。

命题 2.3 (**根据生成矩阵表示的零概率和累积量**).对于任意 τ 和 n，我们有如下结论。

(i) 对于任意自然数 $K_n \geq 1$，我们有

$$\log p_{2n,0}^{(\tau)} = \operatorname{Tr}\log(I - M_n^{(\tau)}) = -\sum_{m=1}^{K_n} \frac{1}{m} \operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m - R_n(K_n), \tag{2.10}$$

其中

$$R_n(K) = \int_0^1 \operatorname{Tr}\left(\frac{(M_n^{(\tau)})^{K+1}}{(1 - xM_n^{(\tau)})^{K+1}}\right)(1-x)^K\, dx. \tag{2.11}$$

(ii) $\mathcal{N}_{2n}^{(\tau)}$ 的第 l 阶累积量 κ_l 由下式给出。

$$\kappa_l = 2^l \sum_{m=1}^{l} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_m = l \\ \nu_j \geq 1}} \frac{l!}{\nu_1! \dots \nu_m!} \operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m. \tag{2.12}$$

证明。 第一个断言直接由命题 2.1 得出，而第二个断言已在 [45,引理 2.4] 中证明。 □

我们需要证明以下结论。

命题 2.4 (**强非厄米性下迹幂的渐近行为**)。对于固定的 $\tau \in [0,1)$，以及任意固定整数 $m > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} \operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m = \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{1}{2\pi m}}. \tag{2.13}$$

对于 $\tau = 0$，该命题与 [37, 引理 2.3] 一致。

命题 2.5 (**弱非厄米性下迹幂的渐近行为**)。对于 $\tau = 1-\alpha^2/(2n)$，其中 $\alpha \in (0,\infty)$为固定值，并且对于任意固定整数 $m > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m = \frac{c(\sqrt{m}\,\alpha)}{2} = \frac{e^{-m\alpha^2/2}}{2}\Big[I_0\Big(\frac{m\alpha^2}{2}\Big) + I_1\Big(\frac{m\alpha^2}{2}\Big)\Big]. \tag{2.14}$$

例 2.6 （前三个累积量）。 根据命题 *2.3 (ii)*，对于 $l = 1, 2, 3$，我们有

$$\mathbb{E}\mathscr{N}_{2n}^{(\tau)} = 2 \operatorname{Tr} M_n^{(\tau)}, \tag{2.15}$$

$$\operatorname{Var}\mathscr{N}_{2n}^{(\tau)} = 4\Big(\operatorname{Tr} M_n^{(\tau)} - \operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^2\Big), \tag{2.16}$$

$$\mathbb{E}[(\mathscr{N}_{2n}^{(\tau)} - \mathbb{E}\mathscr{N}_{2n}^{(\tau)})^3] = 8\Big(\operatorname{Tr} M_n^{(\tau)} - 3\operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^2 + 2\operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^3\Big). \tag{2.17}$$

我们强调，对于 $m = 1,2$，命题 *2.4* 和 *2.5* 得到了 *[10, 27]* 中的重要结果。更确切地说，对于 $m = 1$，期望数量 (1.5) 和 (1.9) 的渐近行为可由 (2.15)推出；而对于 $m = 2$，方差渐近行为 (1.6) 和 (1.12) 可由 (2.16)推出。

为了证明定理 1.2，我们需要一个关于命题 2.4 的版本，该版本对 m 一致，而不是针对固定的 m。我们将需要以下更精细的界。

引理 2.7. 对于任意 $\tau \in [0,1)$ 以及整数 $n \geq 1$ 和 $m \geq \frac{1+\tau}{1-\tau}$，我们有如下不等式

$$\operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \leq \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\sqrt{\frac{n}{\pi m}}(1+2/n) + \frac{1}{8}\frac{1-\tau}{1+\tau}\sqrt{\frac{m}{\pi n}}(1+1/n). \tag{2.18}$$

注意，对于 $\tau = 0$，该引理给出 [37, 引理 2.3]。

引理 2.8 (**特征值的界** $M_n^{(\tau)}$)。 设 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ 是 $M_n^{(\tau)}$ 的特征值。那么我们有以下结论。

(i) 矩阵 $M_n^{(\tau)}$ 是正定的，即 $\lambda_n > 0$。(ii) 存在 $\mu > 0$，使得对于充分大的 n,

$$\lambda_1 \leq 1 - \frac{\mu}{n^a}, \qquad a = \begin{cases} 1 & \text{if } \tau \text{ is fixed,} \\ 2 & \text{if } \tau = 1 - \frac{\alpha^2}{2n}. \end{cases} \tag{2.19}$$

引理 2.9。 设 a 如 (2.19) 中所示。则有

$$\frac{1}{(2n)^{a/2}}|R_n(K)| \leq \frac{1}{\sqrt{2^a\mu}}\frac{1}{\sqrt{K+1}} \operatorname{Tr}\left((M_n^{(\tau)})^{K+1}\right). \tag{2.20}$$

证明。 根据 (2.11) 和引理 2.8，只需证明对于 $0<\lambda<1$,

$$\lambda^{K+1}\int_0^1 \frac{(1-x)^K}{(1-\lambda x)^{K+1}}dx = -\log(1-\lambda)-\sum_{j=1}^K \frac{\lambda^j}{j} \le \frac{\lambda^{K+1}}{\sqrt{2K+1}}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}. \tag{2.21}$$

为此，注意到

$$\begin{aligned}\lambda^{K+1}\int_0^1 \frac{(1-x)^K}{(1-\lambda x)^{K+1}}dx &= \int_0^\lambda \frac{(\lambda-x)^K}{(1-x)^{K+1}}dx = \int_{1-\lambda}^1 \frac{(\lambda-1+x)^K}{x^{K+1}}dx\\ &= \int_{1-\lambda}^1 \sum_{j=0}^K \binom{K}{j}(\lambda-1)^j x^{-j-1}dx\\ &= -\log(1-\lambda)-\sum_{j=1}^K \frac{1}{j}\binom{K}{j}\left((\lambda-1)^j-(-1)^j\right) = -\log(1-\lambda)-\sum_{j=1}^K\frac{\lambda^j}{j}.\end{aligned}$$

这里的恒等式

$$\sum_{j=1}^K \frac{1}{j}\binom{K}{j}\left((\lambda-1)^j-(-1)^j\right) = \sum_{j=1}^K\frac{\lambda^j}{j}$$

由此可得

$$\sum_{j=1}^K \binom{K}{j}(\lambda-1)^{j-1} = \frac{(1+\lambda-1)^K-1}{\lambda-1} = \sum_{j=1}^K \lambda^{j-1}.$$

根据柯西-施瓦茨不等式，可得以下不等式。

$$\begin{aligned}-\log(1-\lambda)-\sum_{j=1}^K\frac{\lambda^j}{j} &= \sum_{j=K+1}^\infty \frac{\lambda^j}{j} = \int_0^\lambda \frac{x^K}{1-x}dx\\ &\le \sqrt{\int_0^\lambda x^{2K}dx\int_0^\lambda \frac{dx}{(1-x)^2}} = \frac{\lambda^{K+1/2}}{\sqrt{2K+1}}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\lambda}}.\end{aligned}$$

□

2.2. **定理 1.1、1.2、1.3 和 1.5 的证明**。 本节最后给出主要结果的证明。

定理 *1.1* 的证明。 由命题 2.4 和 2.5 可知，对于任意固定的 m，$\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m$ 的阶为 $n^{a/2}$，其中 a 由 (2.19) 给出。由命题 2.3 (ii) 可得，所有累积量的阶均为 $n^{a/2}$。这就证明了所需的中心极限定理。□

定理 *1.2* 的证明。 只需证明定理 1.2 对于 $k=0$ 成立：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}}\log p_{2n,0}^{(\tau)} = -\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big).$$

关于一般 k 的陈述可以完全类似于 [37, 第 2 节。2], 这只需要引理 2.8 和命题 2.4 的结果。

令 $m_\tau \ge \frac{1+\tau}{1-\tau}$ 为一个整数。对于任意正整数 $K>m_\tau$，我们可以利用引理 2.7 中的不等式得到

$$\frac{1}{\sqrt{2n}}\sum_{m=m_\tau}^K \frac{1}{m}\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \le \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{1+2/n}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=m_\tau}^K\frac{1}{m^{3/2}}+\frac{\log K}{4\sqrt{2n}}+\frac{\sqrt{K}}{8n\sqrt{2\pi}}\frac{1-\tau}{1+\tau}.$$

现在我们取 $K = K_n$，使得当 $n \to \infty$时， $n^{-1/2}K_n \to \infty$ 和 $K_n = \mathcal{O}(n\log^2 n)$ 均成立。于是我们得到

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{m=m_\tau}^{K_n} \frac{1}{m} \operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \leq \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{1+2/n}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=m_\tau}^{K} \frac{1}{m^{3/2}} + C\frac{\log n}{\sqrt{n}}$$

对于某个常数 $C > 0$。由引理 2.9，余项满足

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} |R_n(K_n)| \leq c\frac{\sqrt{n}}{K_n}$$

对于某个常数 $c > 0$。我们推断得到

$$-\frac{1}{\sqrt{2n}} \log p_{2n,0}^{(\tau)} \leq \sum_{m=1}^{m_\tau - 1} \frac{1}{m} \operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m + \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{1+2/n}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=m_\tau}^{K_n} \frac{1}{m^{3/2}} + C\frac{\log n}{\sqrt{n}} + c\frac{\sqrt{n}}{K_n}.$$

对于任意固定的数值 K，我们有

$$-\frac{1}{\sqrt{2n}} \log p_{2n,0}^{(\tau)} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{m=1}^{K} \frac{1}{m} \operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m.$$

取极限 $n \to \infty$，并利用命题 2.4，我们得到的是

$$\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^{K} \frac{1}{m^{3/2}} \leq -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} \log p_{2n,0}^{(\tau)} \leq \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{\zeta(3/2)}{\sqrt{2\pi}}.$$

由于这对任意正整数 K都成立，我们得出结论：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} \log p_{2n,0}^{(\tau)} = -\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{\zeta(3/2)}{\sqrt{2\pi}}.$$

□

定理 1.3 的证明。 对于 $k = 0$，这立即由引理 2.8 和命题 2.5 得出。此外，对于一般的 k，也可以沿着与第 2 节相同的思路证明 [37,。2],这只需要引理 2.8 和命题 2.5 的结果。□

定理 1.5 的证明。 我们已经在定理 1.2 中证明了关于 $x = 0$ 的结论。根据引理 2.7，对于每个 $x \in (0, 1],$，我们有，对于 $m_\tau \geq \frac{1+\tau}{1-\tau}$，可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{m=m_\tau}^{\infty} \operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \frac{(1-x)^m}{m} \\ &\leq \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{1+2/n}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=m_\tau}^{\infty} \frac{(1-x)^m}{m^{3/2}} + \frac{1}{4\sqrt{2n}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-x)^m}{m} + \frac{1-\tau}{1+\tau} \frac{1+1/n}{8n\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-x)^m}{\sqrt{m}} \\ &= \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{1+2/n}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=m_\tau}^{\infty} \frac{(1-x)^m}{m^{3/2}} + \frac{\log 1/x}{4\sqrt{2n}} + \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{\operatorname{Li}_{1/2}(1-x)}{8n\sqrt{2\pi}}(1+1/n). \end{aligned} \tag{2.22}$$

因此，对于每个整数 $K > 0$，我们有

$$\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^{K} \frac{(1-x)^m}{m^{3/2}} \leq -\lim_{n\to\infty} \log\left(\sum_{k=0}^{2n} p_{2n,2k}^{(\tau)} x^{2k} \right) \leq \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{\operatorname{Li}_{3/2}(1-x)}{\sqrt{2\pi}}.$$

由于这对任意 K 都成立，我们得出，对于任意 $x \in (0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\sum_{k=0}^{2n} p_{2n,2k}^{(\tau)} x^{2k}\right) = -\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{\mathrm{Li}_{3/2}(1-x)}{\sqrt{2\pi}}.$$

此外，我们注意到，对于所有 $x \in [0,1]$

$$\sum_{m=K+1}^{\infty} \frac{(1-x)^m}{m^{3/2}} \le \int_K^{\infty} \frac{(1-x)^m}{m^{3/2}} dm = \frac{(1-x)^K}{\sqrt{K}} + \sqrt{\pi}\sqrt{-\log(1-x)}\,\mathrm{erfc}(\sqrt{-K\log(1-x)}),$$

其中，当 $x=1$ 时，右侧的表达式应理解为极限（该极限为 0）。结合 (2.22)，对于任意固定的 $r>0$，可得对所有 $x \in [r,1]$ 的一致界。

现在我们转向 $x \in [1,2]$ 的情形。我们可以写成

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \frac{(1-x)^m}{m} &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \,\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \frac{|1-x|^m}{m} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \frac{|1-x|^m}{m} - 2\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^{2m} \frac{|1-x|^{2m}}{2m}.\end{aligned}$$

最后一行中的两个级数都可以用我们在 $x \in (0,1]$ 情形中采用的相同论证来处理，从而得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \frac{(1-x)^m}{m} &= \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathrm{Li}_{3/2}(|1-x|) - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Li}_{3/2}(|1-x|^2)\right) \\ &= \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{\mathrm{Li}_{3/2}(1-x)}{\sqrt{2\pi}}.\end{aligned}$$

一致收敛性也可用类似的方法证明。 □

3. Analysis of the generating function

本节着重 考察实特征值数量的生成函数 s.

3.1. 命题 2.1 的证明。 我们首先证明命题 2.1。

命题 *2.1* 的证明。 记

$$\langle f, g\rangle := \langle f, g\rangle_{\mathbb{R}} + \langle f, g\rangle_{\mathbb{C}}, \tag{3.1}$$

其中

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{R}} := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2(1+\tau)}}\,\mathrm{sgn}(y-x) f(x) g(y), \tag{3.2}$$

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{C}} := i\int_{\mathbb{R}} dx \int_0^{\infty} dy\, e^{\frac{y^2-x^2}{1+\tau}}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{2}{1-\tau^2}}y\right)[f(x+iy)g(x-iy) - g(x+iy)f(x-iy)]. \tag{3.3}$$

关于缩放首一埃尔米特多项式

$$C_k(z) := \left(\frac{\tau}{2}\right)^{k/2} H_k\left(\frac{z}{\sqrt{2\tau}}\right), \tag{3.4}$$

我们定义

$$q_{2j}(x) := C_{2j}(x), \qquad q_{2j+1}(x) := C_{2j+1}(x) - 2jC_{2j-1}(x). \tag{3.5}$$

由 [27, 定理 1], $\{q_j\}$构成关于 (3.1) 的一族首一斜正交多项式。这里，斜范数 r_j 由下式给出

$$r_j := \langle q_{2j}, q_{2j+1}\rangle = \sqrt{2\pi}\,(1+\tau)\Gamma(2j+1). \tag{3.6}$$

我们还记

$$\mathbf{A}_{j,k} = \langle q_{j-1}, q_{k-1}\rangle_{\mathbb{R}}. \tag{3.7}$$

Let

$$g(z) \equiv g_{2n}^{(\tau)}(z) := \sum_{k=0}^{n} z^k p_{2n,2k}^{(\tau)}. \tag{3.8}$$

于是，沿着 [37,引理 2.1], 的证明思路，可得

$$g_{2n}^{(\tau)}(z) = \det\Big[\delta_{jk} + \frac{z-1}{\sqrt{r_{j-1}r_{k-1}}}\mathbf{A}_{2j-1,2k}\Big]_{j,k=1}^{n}. \tag{3.9}$$

因此，只需计算 (3.7)。为此，令

$$I_{j,k} = \int_{\mathbb{R}^2} dx\,dy\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2(1+\tau)}} C_{2j+1}(x)C_{2k}(y)\,\mathrm{sgn}(y-x). \tag{3.10}$$

由 (3.5)，$\mathbf{A}_{2j-1,2k}$ 可用 $I_{j,k}$ 表示为

$$\mathbf{A}_{2j-1,2k} = -\frac{1}{2}\Big(I_{k-1,j-1} - 2(k-1)I_{k-2,j-1}\Big). \tag{3.11}$$

另一方面，由 [27, 式 (5.9)]，$I_{j,k}$ 满足递推关系

$$I_{j+1,k} = (2j+2)I_{j,k} - 2\xi_{j,k}, \qquad \xi_{j,k} = (1+\tau)\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{1+\tau}} C_{2j+2}(x)C_{2k}(x)\,dx. \tag{3.12}$$

结合 (3.11) 和 (3.12)，可得

$$\mathbf{A}_{2j-1,2k} = \xi_{k-2,j-1}. \tag{3.13}$$

现在只需计算$I_{j,\ k}$. 为此，我们使用以下积分公式，该公式可在 [10, 引理 5.2] 的证明中找到：对于 $j+k$ 为偶数的情形，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{1+\tau}} H_j\Big(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\Big)H_k\Big(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\Big)\,dx\\ &= \Big(\frac{1+\tau}{1-\tau}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^{-\frac{j+k}{2}}\Gamma\Big(\frac{j+k+1}{2}\Big){}_2F_1\Big(\frac{j-k+1}{2},\frac{k-j+1}{2};\frac{1-j-k}{2};-\frac{\tau}{1-\tau}\Big).\end{aligned} \tag{3.14}$$

由 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}\xi_{j,k} &= (1+\tau)\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^{j+k+1}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{1+\tau}} H_{2j+2}\Big(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\Big)H_{2k}\Big(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\Big)\,dx\\ &= (1+\tau)\Big(\frac{1+\tau}{1-\tau}\Big)^{\frac{1}{2}}\Gamma\Big(j+k+\frac{3}{2}\Big){}_2F_1\Big(j-k+\frac{3}{2},k-j-\frac{1}{2};-j-k-\frac{1}{2};-\frac{\tau}{1-\tau}\Big).\end{aligned} \tag{3.15}$$

由（3.13）和（3.15）可得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{2j-1,2k} &= (1+\tau)\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^{j+k-2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{1+\tau}} H_{2j-2}\Big(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\Big)H_{2k-2}\Big(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\Big)\,dx\\ &= (1+\tau)\Big(\frac{1+\tau}{1-\tau}\Big)^{\frac{1}{2}}\Gamma\Big(j+k-\frac{3}{2}\Big){}_2F_1\Big(k-j+\frac{1}{2},j-k+\frac{1}{2};-j-k+\frac{5}{2};-\frac{\tau}{1-\tau}\Big).\end{aligned} \tag{3.16}$$

结合（3.9）、（3.6）和（3.16），我们得到所需的恒等式（2.4），其中第二个表达式由伽马函数的反射公式得到

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z). \tag{3.17}$$

□

3.2. **迹的幂的求值**。 在本小节中，我们在引理 3.1 和 3.5 中推导 $\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m$ 的两种不同表达式。

引理 3.1。我们有

$$\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m = \int_{\mathbb{R}^m} K_n^{(\tau)}(x_1,x_2)K_n^{(\tau)}(x_2,x_3)\cdots K_n^{(\tau)}(x_m,x_1)\,dx_1\cdots dx_m, \tag{3.18}$$

其中

$$K_n^{(\tau)}(x,y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2(1+\tau)}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\tau/2)^{2j}}{(2j)!} H_{2j}\Big(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\Big) H_{2j}\Big(\frac{y}{\sqrt{2\tau}}\Big). \tag{3.19}$$

证明。 根据定义，

$$\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_m=1}^{n} M_n^{(\tau)}(j_1,j_2)M_n^{(\tau)}(j_2,j_3)\cdots M_n^{(\tau)}(j_{m-1},j_m)M_n^{(\tau)}(j_m,j_1). \tag{3.20}$$

然后，将 (2.4) 的第一行代入，即得表达式 (3.19)。 □

注 3.2. 核 $K_n^{(\tau)}$也可以用拉盖尔多项式表示

$$L_j^{\nu}(z) := \sum_{k=0}^{j} \frac{\Gamma(j+\nu+1)}{(j-k)!\,\Gamma(\nu+k+1)} \frac{(-z)^k}{k!} \tag{3.21}$$

as

$$K_n^{(\tau)}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2(1+\tau)}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\tau^{2j}\,j!}{\Gamma(j+\frac{1}{2})} L_j^{-1/2}\Big(\frac{x^2}{2\tau}\Big) L_j^{-1/2}\Big(\frac{y^2}{2\tau}\Big). \tag{3.22}$$

这可由以下关系

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{-1/2}(x^2) \tag{3.23}$$

以及伽马函数的倍增公式得出：

$$\Gamma(2z+1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2z} \Gamma(z+\frac{1}{2})\Gamma(z+1). \tag{3.24}$$

注 3.3. 令 $T_n^{(\tau)}$定义为算子

$$f \mapsto T_n^{(\tau)}(f) := \int_{\mathbb{R}} f(y) K_n^{(\tau)}(x,y)dy.$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} -\log p_{2n,0}^{(\tau)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}^m} K_n^{(\tau)}(x_1,x_2)\cdots K_n^{(\tau)}(x_m,x_1) \prod_{k=1}^{m} dx_k \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \mathrm{Tr}\left((T_n^{(\tau)})^m\right) = -\log\det(1-T_n^{(\tau)}), \end{aligned}$$

其中最后一行中的行列式是 *Fredholm*行列式，

$$\det(1-T_n^{(\tau)}) = 1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\int_{\mathbb{R}^m}\det\left(K_n^{(\tau)}(x_j,x_k)\right)_{1\le j,k\le m}\prod_{k=1}^{m}dx_k.$$

例3.4。注意，根据 (2.6)，

$$K_n^{(0)}(x,y) = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(xy)^{2j}}{(2j)!} = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cosh_{n-1}(xy), \tag{3.25}$$

其中 双曲余弦$_n(x) = \sum_{j=0}^{n} x^{2j}/(2j)!$ 。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m &= \int_{\mathbb{R}^m}\frac{e^{-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_m^2}}{(2\pi)^{m/2}}\cosh_{n-1}(x_1x_2)\cosh_{n-1}(x_2x_3)\ldots\cosh_{n-1}(x_mx_1)\,dx_1\cdots dx_m\\ &= \int_0^\infty\frac{dx_1}{\sqrt{2\pi x_1}}\int_0^\infty\frac{dx_2}{\sqrt{2\pi x_2}}\cdots\int_0^\infty\frac{dx_m}{\sqrt{2\pi x_m}}e^{-x_1-\cdots-x_m}\cosh_{n-1}(\sqrt{x_1x_2})\ldots\cosh_{n-1}(\sqrt{x_mx_1}),\end{aligned}$$

这对应于 *[37,* 公式*(A.23)]*中的积分表示。

接下来，我们证明如下结论。

引理 3.5。 设 $j_1, j_2, \ldots, j_m = j_0 \in \mathbb{N}$. 则对于任意 $n, m \in \mathbb{N}$，有

$$\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m = \sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{n-1}\left(\frac{1+\tau}{2}\right)^{\frac{m}{2}+2\sum_{k=1}^m j_k}\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=0}^{j_{k-1}}\frac{(1-\tau)^{2l}(1+\tau)^{-2l}\,(2j_k)!}{2^{2l}l!(l+j_k-j_{k-1})!(2j_{k-1}-2l)!}\right). \tag{3.26}$$

注 3.6。 对于内层求和中给定的 l ，只需考虑满足以下条件的求和项。

$$j_k \ge l, \qquad j_k \ge j_{k-1}-l, \qquad k=1,2,\ldots,m. \tag{3.27}$$

特别地，如果 $l=0$，则得到 $j_1 = j_2 = \cdots = j_m$.

注3.7. 回顾一下，对于 $\tau = 1$，我们有 $M_n^{(1)} = I$. 因此 $\mathrm{Tr}(M_{(1)n})^m = n$. 这可利用恒等式 (3.26) 验证；具体而言，对于 $\tau = 1$，它写作

$$\mathrm{Tr}(M_n^{(1)})^m = \sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{n-1}\prod_{k=1}^{m}\frac{(2j_k)!}{(j_k-j_{k-1})!(2j_{k-1})!} = \sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{n-1}\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{(j_k-j_{k-1})!} = \sum_{j=0}^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{0!} = n. \tag{3.28}$$

引理*3.5*的证明。 利用围道积分表示

$$H_k(x) = \frac{k!}{2\pi i}\oint\frac{e^{2\zeta x-\zeta^2}}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta, \tag{3.29}$$

以及（3.19），我们有

$$K_n^{(\tau)}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2+y^2}{2(1+\tau)}}\sum_{j=0}^{n-1}(2j)!\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2j}\operatorname*{Res}_{\zeta,\eta=0}\left[\frac{e^{2\zeta\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+2\eta\frac{y}{\sqrt{2\tau}}-\zeta^2-\eta^2}}{(\zeta\eta)^{2j+1}}\right]. \tag{3.30}$$

在这里以及下文中，我们将使用简写记号

$$\operatorname*{Res}_{\zeta_1,\ldots,\zeta_k=0}[f(\zeta,\eta)] := \operatorname*{Res}_{\zeta_1=0}[\cdots[\operatorname*{Res}_{\zeta_k=0}[f(\zeta_1,\ldots,\zeta_k)]].$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
&K_n^{(\tau)}(x_1,x_2)K_n^{(\tau)}(x_2,x_3)\cdots K_n^{(\tau)}(x_m,x_1)\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}e^{-\frac{x_1^2+\ldots x_m^2}{1+\tau}}\sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{n-1}(2j_1)!\ldots(2j_m)!\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^{2(j_1+\cdots+j_m)}\\
&\quad\times\operatorname*{Res}_{\substack{\zeta_k,\eta_k=0\\k=1,\ldots,m}}\Big[\prod_{k=1}^m\exp\Big(\sqrt{\frac{2}{\tau}}(\zeta_k+\eta_k)x_k-\zeta_k^2-\eta_k^2\Big)\frac{1}{\zeta_k^{2j_{k-1}+1}\eta_k^{2j_k+1}}\Big].
\end{aligned}$$

由于

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{x^2}{1+\tau}+\sqrt{\frac{2}{\tau}}(\zeta+\eta)x}\,dx=\sqrt{\pi(1+\tau)}\exp\Big(\frac{1+\tau}{2\tau}(\zeta+\eta)^2\Big),\tag{3.31}$$

由引理 3.1 可知,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m&=\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{m/2}\sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{n-1}(2j_1)!\ldots(2j_m)!(\tau/2)^{2(j_1+\cdots+j_m)}\\
&\quad\times\operatorname*{Res}_{\substack{\zeta_k,\eta_k=0\\k=1,\ldots,m}}\Big[\prod_{k=1}^m\exp\Big(\frac{1+\tau}{2\tau}(\zeta_k+\eta_k)^2-\zeta_k^2-\eta_k^2\Big)\frac{1}{\zeta_k^{2j_{k-1}+1}\eta_k^{2j_k+1}}\Big].
\end{aligned}\tag{3.32}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{\substack{\zeta_k,\eta_k=0\\k=1,\ldots,m}}\Big[\prod_{k=1}^m\exp\Big(\frac{1+\tau}{2\tau}(\zeta_k+\eta_k)^2-\zeta_k^2-\eta_k^2\Big)\frac{1}{\zeta_k^{2j_{k-1}+1}\eta_k^{2j_k+1}}\Big]\\
&=\prod_{k=1}^m\operatorname*{Res}_{\zeta_k,\eta_k=0}\Big[\exp\Big(\frac{1+\tau}{2\tau}(\zeta_k+\eta_k)^2-\zeta_k^2-\eta_k^2\Big)\frac{1}{\zeta_k^{2j_{k-1}+1}\eta_k^{2j_k+1}}\Big].
\end{aligned}$$

由于

$$\exp\Big(\frac{1+\tau}{2\tau}(\zeta+\eta)^2-\zeta^2-\eta^2\Big)=\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}\Big(\frac{1-\tau}{2\tau}(\zeta^2+\eta^2)+\frac{1+\tau}{2\tau}2\zeta\eta\Big)^k$$

我们有 ，两次应用牛顿二项式公式可得（只有 $k=p+q$ 能够保留下来）

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{\zeta,\eta=0}\Big[\exp\Big(\frac{1+\tau}{2\tau}(\zeta+\eta)^2-\zeta^2-\eta^2\Big)\frac{1}{\zeta^{2p+1}\eta^{2q+1}}\Big]\\
&=\frac{1}{(p+q)!}\sum_{l=0}^p\Big(\frac{1-\tau}{2\tau}\Big)^{2l+q-p}\Big(\frac{1+\tau}{2\tau}\Big)^{2p-2l}2^{2p-2l}\binom{p+q}{2l-p+q}\binom{2l-p+q}{l}\\
&=\frac{1}{(p+q)!}\sum_{l=0}^p\Big(\frac{1-\tau}{2\tau}\Big)^{2l+q-p}\Big(\frac{1+\tau}{2\tau}\Big)^{2p-2l}\frac{2^{2p-2l}(p+q)!}{l!(l+q-p)!(2p-2l)!}\\
&=\frac{2^{p-q}}{\tau^{p+q}}\sum_{l=0}^p\frac{(1-\tau)^{2l+q-p}(1+\tau)^{2p-2l}}{2^{2l}l!(l+q-p)!(2p-2l)!}=:f(p,q).
\end{aligned}$$

由此可得

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\zeta_k,\eta_k=0\\k=1,\ldots,m}}\Big[\prod_{k=1}^m\exp\Big(\frac{1+\tau}{2\tau}(\zeta_k+\eta_k)^2-\zeta_k^2-\eta_k^2\Big)\frac{1}{\zeta_k^{2j_{k-1}+1}\eta_k^{2j_k+1}}\Big]=\prod_{k=1}^m f(j_{k-1},j_k)$$

因此我们得到

$$\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m = \Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{m/2} \sum_{j_1,\dots,j_m=0}^{n-1} (2j_1)!\dots(2j_m)!\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^{2(j_1+\cdots+j_m)} \prod_{k=1}^{m} f(j_{k-1},j_k)$$

$$= \Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{m/2} \sum_{j_1,\dots,j_m=0}^{n-1} (2j_1)!\dots(2j_m)!\Big(\frac{1}{2}\Big)^{2(j_1+\cdots+j_m)} \prod_{k=1}^{m} \Big(\sum_{l=0}^{j_{k-1}} \frac{(1-\tau)^{2l+j_k-j_{k-1}}(1+\tau)^{2j_{k-1}-2l}}{2^{2l} l!(l+j_k-j_{k-1})!(2j_{k-1}-2l)!} \Big),$$

这就得到了该引理。 □

3.3. **迹幂估计**。

引理 3.8。有

$$\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_m^2)} \mathscr{K}_n^{(\tau)}(x_m,x_1) e^{-\sum_{j=2}^{m-1} x_j^2} \prod_{j=2}^{m} \cosh\left(x_{j-1}x_j\right)\, dx_1\cdots dx_m, \tag{3.33}$$

其中

$$\mathscr{K}_n^{(\tau)}(x,y) := \sqrt{1-\tau^2}\, K_n^{(\tau)}(\sqrt{1-\tau^2}\, x, \sqrt{1-\tau^2}\, y). \tag{3.34}$$

这里， $K_n^{(\tau)}$由(3.19)给出。

证明。 回忆厄米特多项式乘法定理

$$H_{2n}(\lambda x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2k)!\,(n-k)!} \lambda^{2k}(\lambda^2-1)^{n-k} H_{2k}(x), \tag{3.35}$$

例如参见 [44, 式（18.18.13）]。令

$$e_\tau = \frac{1+\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

我们有

$$H_{2j}\Big(\sqrt{\frac{1-\tau^2}{2\tau}}x\Big) = H_{2j}\Big(\frac{e_\tau}{\sqrt{2\tau}}(1-\tau)x\Big) = \sum_{k=0}^{j} \Big(\frac{e_\tau}{\sqrt{\tau}}\Big)^{2k}\Big(\frac{e_\tau^2}{\tau}-1\Big)^{j-k} \frac{(2j)!}{(2k)!(j-k)!} H_{2k}\Big(\frac{1-\tau}{\sqrt{2}}x\Big).$$

注意到

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(\tau/2)^{2m}}{(2m)!} H_{2m}\Big(\sqrt{\frac{1-\tau^2}{2\tau}}x\Big) H_{2m}\Big(\sqrt{\frac{1-\tau^2}{2\tau}}y\Big)$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j,k=0}^{m} \Big(\frac{1}{1-\tau e_\tau^{-2}}\Big)^{j+k}\Big(\frac{e_\tau^2}{\tau}-1\Big)^{2m} \frac{(\tau/2)^{2m}(2m)!}{(2k)!(m-k)!(2j)!(m-j)!} H_{2k}\Big(\frac{1-\tau}{\sqrt{2}}x\Big) H_{2j}\Big(\frac{1-\tau}{\sqrt{2}}y\Big).$$

因此，我们可以将核表示为厄米特函数的组合。

$$\begin{aligned} \mathscr{K}_n^{(\tau)}(x,y) &= \sqrt{\frac{1-\tau^2}{2\pi}} e^{-\frac{1-\tau}{2}(x^2+y^2)} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\tau/2)^{2j}}{(2j)!} H_{2j}\Big(\sqrt{\frac{1-\tau^2}{2\tau}}x\Big) H_{2j}\Big(\sqrt{\frac{1-\tau^2}{2\tau}}y\Big) \\ &= \sum_{j,k=0}^{n-1} e^{-\frac{1-\tau}{2}x^2} H_{2j}\Big(\frac{1-\tau}{\sqrt{2}}x\Big) \hat{M}_{n,jk} e^{-\frac{1-\tau}{2}y^2} H_{2k}\Big(\frac{1-\tau}{\sqrt{2}}y\Big) \end{aligned} \tag{3.36}$$

ˆ 对于某个元素为正的矩阵 M_n。事实上，我们可以看到，

$$\hat{M}_{n,jk} = \sqrt{\frac{1-\tau^2}{2\pi}}\Big(\frac{1}{1-\tau e_\tau^{-2}}\Big)^{j+k} \sum_{m=\max(j,k)}^{n-1} \frac{(\tau/2)^{2m}(2m)!}{(2k)!(m-k)!(2j)!(m-j)!}\Big(\frac{e_\tau^2}{\tau}-1\Big)^{2m}. \tag{3.37}$$

由引理 3.1 和变量替换可得

$$\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m = \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{K}_n^{(\tau)}(x_1,x_2)\mathscr{K}_n^{(\tau)}(x_2,x_3)\cdots\mathscr{K}_n^{(\tau)}(x_m,x_1)\,dx_1\cdots dx_m, \tag{3.38}$$

由于厄米特函数是正交归一的，我们推得 $\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m$ 是由ˆ M_n 中的元素（均为正数）构成的乘积之和。

现在假设我们添加一个额外的项

$$\frac{(\tau/2)^{2n}}{(2n)!}H_{2n}\Big(\sqrt{\frac{1-\tau^2}{2\tau}}x_1\Big)H_{2n}\Big(\sqrt{\frac{1-\tau^2}{2\tau}}x_2\Big)$$

到 $\mathscr{K}_{(\tau)n}(x_1, x_2)$ 中。相应的矩阵ˆ M_{n+1} 中的元素均大于或等于ˆ M_n中的对应元素。此外，它还多出 $2n-1$ 个元素，且这些元素均为正数。因此，ˆ M_{n+1} 和ˆ M_n 中的元素乘积之和总体上增加了。也就是说，$\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m$ 增加了。我们可以归纳地重复这一论证，并将核 (3.19) 中的求和扩展到所有非负整数 j。这里回顾一下，迈勒核公式为

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\tau/2)^j}{j!}H_j(x)H_j(y) = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\exp\Big(\frac{2\tau}{1-\tau^2}xy - \frac{\tau^2}{1-\tau^2}(x^2+y^2)\Big), \tag{3.39}$$

由此得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\tau/2)^{2j}}{(2j)!}H_{2j}(x)H_{2j}(y) &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\tau/2)^j}{j!}H_j(x)H_j(y) + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\tau/2)^j}{j!}H_j(-x)H_j(y)\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}e^{-\frac{\tau^2}{1-\tau^2}(x^2+y^2)}\cosh\Big(\frac{2\tau}{1-\tau^2}xy\Big).\end{aligned}$$

利用这一点，无穷级数可计算为

$$\mathscr{K}_\infty^{(\tau)}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\cosh(xy).$$

将 $m-1$ 个 m 核替换为该表达式后，我们便得到结果。 □

引理 3.9. 我们有

$$\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \le \frac{\sqrt{1+\tau}}{2\pi}\oint_\gamma \frac{s^{-2n+1}}{\sqrt{(1-s)((m-1-(m+1)\tau)s+(m+1)-(m-1)\tau)}}\frac{ds}{1-s^2}, \tag{3.40}$$

其中，γ 是一个以0 为中心、沿正向绕行的小环路。

注 3.10. 对于情形 $\tau = 0$，不等式(3.40) 与 *[37, 式 (A.31)]*一致。

引理 3.9 的证明。 我们从引理 3.8 中的不等式开始。我们使用引理 A.2 对 x_2、……、x_{m-1} 进行积分。这得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi(m-1)}}\int_{\mathbb{R}^2}\mathscr{K}_n^{(\tau)}(x_m,x_1)e^{-\frac{1}{2(m-1)}(x_1^2+x_m^2)}\cosh\Big(\frac{x_1x_m}{m-1}\Big)\,dx_1dx_m\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(m-1)}}\int_{\mathbb{R}^2}\mathscr{K}_n^{(\tau)}(x_m,x_1)e^{-\frac{1}{2(m-1)}(x_1-x_m)^2}\,dx_1dx_m.\end{aligned} \tag{3.41}$$

这里，我们利用了对称性 $K_n^{(\tau)}(x_m,\ x_1) = K_n^{(\tau)}(-x_m,\ x_1$。然后，我们代入 [2, 式 (26)], 中核的单积分表示，该表示经过调整后仅包含偶数索引项，其形式如下：

$$\mathscr{K}_n^{(\tau)}(x,y) = \sqrt{\frac{1-\tau^2}{2\pi}} e^{-\frac{1-\tau}{2}(x^2+y^2)} \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma e^{\frac{1-\tau^2}{4\tau}\frac{s}{1+s}(x+y)^2 - \frac{1-\tau^2}{4\tau}\frac{s}{1-s}(x-y)^2} \frac{(\tau/s)^{2n}}{(\tau/s)^2-1} \frac{ds}{s\sqrt{1-s^2}}. \tag{3.42}$$

交换积分次序，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi(m-1)}} \int_{\mathbb{R}^2} \mathscr{K}_n^{(\tau)}(x_m,x_1) e^{-\frac{1}{2(m-1)}(x_1-x_m)^2}\, dx_1\, dx_m \\
&= \sqrt{\frac{1-\tau^2}{m-1}} \frac{1}{4\pi^2 i} \oint_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1-\tau}{2}(x^2+y^2) + \frac{1-\tau^2}{2\tau}\frac{s}{1+s}x^2 - (\frac{1-\tau^2}{2\tau}\frac{s}{1-s} + \frac{1}{m-1})y^2}\, dx\, dy \frac{(\tau/s)^{2n}}{(\tau/s)^2-1} \frac{ds}{s\sqrt{1-s^2}},
\end{aligned}$$

此处我们使用光锥坐标：

$$x = \frac{x_1+x_m}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{x_1-x_m}{\sqrt{2}}.$$

由于

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1-\tau}{2}(x^2+y^2) + \frac{1-\tau^2}{2\tau}\frac{s}{1+s}x^2 - (\frac{1-\tau^2}{2\tau}\frac{s}{1-s} + \frac{1}{m-1})y^2}\, dx\, dy \\
&= \pi\Big(-\frac{1-\tau}{2} + \frac{1-\tau^2}{2\tau}\frac{s}{1+s}\Big)^{-\frac{1}{2}} \Big(-\frac{1-\tau}{2} - \frac{1-\tau^2}{2\tau}\frac{s}{1-s} - \frac{1}{m-1}\Big)^{-\frac{1}{2}} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{1-s^2}{1-\tau}(m-1)} \Big(\frac{1}{s/\tau-1} \frac{1}{(1+m+\tau-m\tau) - s(1-m+\tau m+\tau)/\tau}\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{1-\tau^2}{m-1}} \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1-\tau}{2}(x^2+y^2) + \frac{1-\tau^2}{2\tau}\frac{s}{1+s}x^2 - (\frac{1-\tau^2}{2\tau}\frac{s}{1-s} + \frac{1}{m-1})y^2}\, dx\, dy \frac{(\tau/s)^{2n}}{(\tau/s)^2-1} \frac{1}{s\sqrt{1-s^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1+\tau}}{2\pi i} \Big(\frac{1}{s/\tau-1} \frac{1}{m+1-\tau(m-1) - s(m+1-(m-1)\tau^{-1})}\Big)^{\frac{1}{2}} \frac{(\tau/s)^{2n} s}{\tau^2-s^2}.
\end{aligned}$$

由此得到

$$\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \le \frac{\sqrt{1+\tau}}{2\pi} \oint_\gamma \frac{1}{\sqrt{(1-s/\tau)(m+1-\tau(m-1) - (m+1-\tau^{-1}(m-1))s)}} \frac{(\tau/s)^{2n} s}{\tau^2-s^2}\, ds.$$

经过一次代换 $s \to \tau s$ 后，我们得到这一结果。 □

3.4. 引理 2.7 和 2.8 的证明。 现在我们来证明引理 2.7。我们的证明与 [37, 附录 A3] 中给出的论证类似。

引理 2.7 的证明。 我们的出发点是估计式 (3.40)。回顾一下，(3.40) 中的 γ 是一个沿正方向绕 0 的小环路。(3.40) 右端的被积函数有三个奇点：1，-1以及一个我们将记为

$$a = -\frac{m+1-(m-1)\tau}{m-1-(m+1)\tau}.$$

首先，我们考虑 $\frac{m-1}{m+1} > \tau$ 的情形。在这种情况下 $a < -1$。然后，我们将 γ 变形为一个围绕 $(-\infty,\ a)$ 的带状区域 L_-，以及一个围绕 $(1,\ \infty)$ 的带状区域 L_+，二者由两个（近似）半圆连接（以及一个小圆

围绕极点 $s=-1$）。随着我们将半圆的半径增大到 ∞，沿半圆的积分趋于 0。$s=-1$ 处的留数产生贡献 $1/4$。沿 L_- 的积分为（不含前置因子）

$$\begin{aligned}&\left|2\int_{-\infty}^{a}\frac{s^{-2n+1}}{\sqrt{(1-s)((m-1-(m+1)\tau)s+(m+1)-(m-1)\tau)}}\frac{ds}{s^2-1}\right|\\ \le&\frac{2|a|}{(1+|a|)^{3/2}(|a|-1)}\frac{1}{\sqrt{m-1-(m+1)\tau}}\left|\int_{-\infty}^{a}\frac{s^{-2n}}{\sqrt{s-a}}\,ds\right|\\ =&\frac{2|a|^{-2n}}{|a|-1}\left(\frac{|a|}{1+|a|}\right)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{m-1-(m+1)\tau}}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\int_0^\infty\frac{(1+\frac{s}{2n})^{-2n}}{\sqrt{\pi s}}\,ds.\end{aligned}$$

我们将使用以下初等不等式。

$$\int_0^\infty\frac{(1+\frac{s}{2n})^{-2n}}{\sqrt{\pi s}}ds\le 1+1/n, \tag{3.43}$$

可见于 [37, 公式（A.33）]。利用这一点，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{1+\tau}}{2\pi}\int_{L_-}\frac{s^{-2n+1}}{\sqrt{(1-s)((m-1-(m+1)\tau)s+(m+1)-(m-1)\tau)}}\frac{ds}{1-s^2}\\ \le&\sqrt{\frac{1+\tau}{2\pi n}}\frac{1}{|a|-1}\frac{1+1/n}{\sqrt{m-1-(m+1)\tau}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi n(1+\tau)}}\sqrt{m-1-(m+1)\tau}\frac{1+1/n}{2(1+\tau)}.\end{aligned}$$

最后，我们估计关于 L_+ 的积分。由于被积函数含有因子 $(1-s)^{-3/2}$，我们先进行分部积分。随后可以令带宽趋于 0。主导部分（不含前置因子）为

$$\begin{aligned}&4n\int_1^\infty\frac{s^{-2n}}{\sqrt{(1-s)((m-1-(m+1)\tau)s+(m+1)-(m-1)\tau)}}\frac{ds}{1+s}\\ \le&\frac{4n}{2\sqrt{2m(1-\tau)}}\int_1^\infty\frac{s^{-2n}}{\sqrt{s-1}}\,ds=\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2m(1-\tau)}}\sqrt{\pi}\int_0^\infty\frac{(1+\frac{s}{2n})^{-2n}}{\sqrt{\pi s}}\,ds.\end{aligned}$$

然后我们可以再次使用估计式 (3.43)。非主导部分可以用以下方法估计。

$$\int_1^\infty\frac{s^{-2n}}{\sqrt{(1-s)(s-a)}}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{2}{(s+1)^2}\right)ds\le\frac{1}{\sqrt{1-a}}\int_1^\infty\frac{s^{-2n}}{\sqrt{1-s}}ds\le\sqrt{\frac{\pi}{1-a}}(1+1/n).$$

综合以上所有结果，我们得出：

$$\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m\le\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\sqrt{\frac{n}{\pi m}}(1+1/n)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{1+1/n}{\sqrt{2\pi mn}}+\frac{1}{8}\sqrt{\frac{m-1-(m+1)\tau}{(1+\tau)\pi n}}(1+1/n).$$

当 $m=\frac{1+\tau}{1-\tau}$ 时，这也成立。~~此~~情形与前一种情况类似，但更简单，因为此处不存在带状区域 L_-。一些简单的不等式即可完成证明。□

引理 *2.8* 的证明。令 $v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. 那么由 (2.4) 可得

$$\langle v,M_n^{(\tau)}v\rangle=\sum_{j,k=1}^n M_n^{(\tau)}(j,k)v_jv_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{x^2}{1+\tau}}\left[\sum_{j=1}^n\frac{(\tau/2)^{j-1}}{\sqrt{\Gamma(2j-1)}}H_{2j-2}\Big(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\Big)v_j\right]^2dx>0,$$

由此得到第一个断言。

接下来，我们证明第二个断言。令 m 为满足以下条件的最小整数：

$$m > \frac{1+\tau}{1-\tau} n.$$

因此，当 n 足够大时，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\frac{1-\tau}{1+\tau}\sqrt{\frac{m}{\pi n}}(1+1/n) &\le \frac{1}{8}\frac{1-\tau}{1+\tau}\sqrt{\frac{\frac{1+\tau}{1-\tau}n+1}{\pi n}}(1+1/n)\\ &\le \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\sqrt{1+\frac{1-\tau}{1+\tau}\frac{1}{n}}(1+2/n) \le \frac{1}{8\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

因此，由引理 2.7 可得生物器

$$\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \le \frac{1}{4} + \frac{1+1/n}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \le 1-a$$

对于某个常数 $a \in (0,$ 1) 当 n 足够大时。其余证明与 [37] 类似（但幂次不同），从而得到

$$\lambda_{\max} \le (1-a)^{1/m} \le 1 - \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\frac{a}{n}.$$

弱非厄米性的证明与此类似，这里取 m 为 n^2 的倍数（事实上，此时$m \ge \frac{1+\tau}{1-\tau}$）。□

4. Asymptotic analysis at strong non-Hermiticity

4.1. 核的渐近行为。 由于厄米多项式在 j 为奇数（分别为偶数）时是奇函数（分别为偶函数），根据对称性，可以将 (3.19) 重写为

$$\begin{aligned}K_n^{(\tau)}(x,y) = &\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2(1+\tau)}} \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{(\tau/2)^j}{j!} H_j\Big(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\Big) H_j\Big(\frac{y}{\sqrt{2\tau}}\Big)\\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2(1+\tau)}} \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{(\tau/2)^j}{j!} H_j\Big(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}\Big) H_j\Big(\frac{y}{\sqrt{2\tau}}\Big).\end{aligned} \tag{4.1}$$

强非厄米性下的渐近结果可直接从 [2,42] 中提取。定义重标度核会很方便。

$$\widehat{\mathscr{K}_n^{(\tau)}}(x,y) = \sqrt{2n}\,\mathscr{K}_n^{(\tau)}(\sqrt{2n}x, \sqrt{2n}y). \tag{4.2}$$

其中我们回顾一下， $\mathscr{K}_n^{(\tau)}$由 (3.34) 给出。

我们还定义了边缘和焦点。

$$e_\tau = \frac{1+\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \qquad f_\tau = \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{1-\tau^2}}. \tag{4.3}$$

定义……也将很方便。

$$\xi_x = \begin{cases} 0, & |x| \le f_\tau, \\ \cosh^{-1}(x/f_\tau), & |x| > f_\tau. \end{cases} \tag{4.4}$$

在下文中， H 将表示 Heaviside 函数，即当 $x \ge 0$ 时， $H(x) = 1$ ；当 $x < 0$ 时， $H(x) = 0$ 。

引理 4.1. 设 $0<\tau<1$ 和 $\frac{1}{3}<\mu<\frac{1}{2}$ 为固定值。则存在常数 c、$C>0$，使得

$$\begin{aligned}
&H(2\xi_{e_\tau}-n^{-\mu}-\xi_x-\xi_y)\left(\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n(x^2+y^2)}\cosh(2nxy)-e^{-cn^{1-2\mu}}\right)-Cn^{\mu}e^{-cn(|x|-e_\tau)^2}e^{-cn(|y|-e_\tau)^2}\\
&\quad\le \widehat{\mathscr{K}}_n^{(\tau)}(x,y)\\
&\le H(2\xi_{e_\tau}+n^{-\mu}-\xi_x-\xi_y)\left(\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n(x^2+y^2)}\cosh(2nxy)+e^{-cn^{1-2\mu}}\right)+Cn^{\mu}e^{-cn(|x|-e_\tau)^2}e^{-cn(|y|-e_\tau)^2}
\end{aligned}$$

对所有 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，均一致成立。

证明。不失一般性，我们假设 x，$y\ge 0$。下文将使用 [2] 。本文讨论如下核

$$\kappa_n(z,w)=\frac{n}{\pi\sqrt{1-\tau^2}}\sqrt{\omega(z)\omega(w)}\sum_{j=0}^{n-1}H_j\left(\frac{\sqrt{n}\,z}{\sqrt{2\tau}}\right)H_j\left(\frac{\sqrt{n}\,\overline{w}}{\sqrt{2\tau}}\right),$$

其中权函数为 $\omega(z)=\exp\left(-n\frac{(\operatorname{Re}z)^2}{1+\tau}-n\frac{(\operatorname{Im}z)^2}{1-\tau}\right)$。我们的核 (4.2) 可表示为

$$\widehat{\mathscr{K}}_n^{(\tau)}(x,y)=\frac{\sqrt{\pi n}}{2}\sqrt{1-\tau^2}\left(\kappa_{2n}\left(\sqrt{1-\tau^2}\,x,\sqrt{1-\tau^2}\,y\right)+\kappa_{2n}\left(-\sqrt{1-\tau^2}\,x,\sqrt{1-\tau^2}\,y\right)\right).$$

对于 $\xi_x+\xi_y>2\xi_{e_\tau}+n^{-\mu}$，由 [2, 定理 I.1 和注记 I.2], 以及一些简单的估计可得,

$$\left|\widehat{\mathscr{K}}_n^{(\tau)}(x,y)\right|\le Cn^{\mu}e^{-nh(x)}e^{-nh(y)}, \tag{4.5}$$

对于某个常数 $C>0$，其中 h 是连续函数

$$h(x)=\begin{cases}2\xi_{e_\tau}-\dfrac{(1-\tau)^2}{2\tau}x^2, & x\in[0,f_\tau],\\[2mm] 2\xi_{e_\tau}-1+(1-\tau)x^2-\dfrac{f_\tau^2}{(x+\sqrt{x^2-f_\tau^2})^2}+\log\left(\dfrac{f_\tau^2}{(x+\sqrt{x^2-f_\tau^2})^2}\right), & x>f_\tau,\end{cases} \tag{4.6}$$

见含 [2, $\cos\eta$ 或 $x=f_\tau\cosh\xi$ 的] 式（80） $x=f_\tau$。我们指出，也可以将（3.42）作为出发点，然后遵循 [2] 中的方法得出相同的结论。如 [2]所示， h在 $x=e_\tau$ 处有一个二重零点，并且对所有 $x\ne e_\tau$均为正。事实上，我们可以证明,

$$\frac{h(x)}{(x-e_\tau)^2}\ge\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{(x-e_\tau)^2}=1-\tau$$

对于所有 $x>f_\tau$。我们得出结论:

$$Cn^{\mu}e^{-nh(x)}e^{-nh(y)}\le Cn^{\mu}e^{-cn(x-e_\tau)^2}e^{-cn(y-e_\tau)^2}$$

其中 $c>0$ 是某个常数。对于 $\xi_x+\xi_y<2\xi_{e_\tau}-n^{-\mu}$，根据 [2, 定理 III.5]，我们有

$$\left|\widehat{\mathscr{K}}_n^{(\tau)}(x,y)-e^{-n(x^2+y^2)}\cosh(2nxy)\right|\le e^{-cn^{1-2\mu}},$$

其中我们可能会重新定义常数 c。这里我们用到了：对于某个常数 $a>0$，至少有一个 x，y是 $\le e_\tau-an^{-\mu}$。最后，我们考察区域 $|\xi_x+\xi_y-2\xi_{e_\tau}|\le n^{-\mu}$。于是，根据 [42, 命题 V.1]，有

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{K}}_n^{(\tau)}(x,y)&=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n(x-y)^2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{n}(x+y-2e_\tau)\right)+e^{-n(x-e_\tau)^2}e^{-n(y-e_\tau)^2}\mathscr{O}(n^{1-2\mu})\\
&\quad+H(2\xi_{e_\tau}-\xi_x-\xi_y)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n(x+y)^2}+\mathscr{O}(e^{-nh(x)}e^{-nh(y)}).
\end{aligned}$$

由于余误差函数对实参数的取值属于 (0，2)，我们推得

$$\begin{aligned}\widehat{\mathscr{K}_n^{(\tau)}}(x,y) &\leq \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n(x^2+y^2)}\cosh(2nxy) + Cn^{1-2\mu}e^{-cn(x-e_\tau)^2}e^{-cn(y-e_\tau)^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n(x^2+y^2)}\cosh(2nxy) + Cn^{\mu}e^{-cn(x-e_\tau)^2}e^{-cn(y-e_\tau)^2},\end{aligned}$$

对于某个常数 $C>0$。对于下界，我们显然有

$$\widehat{\mathscr{K}_n^{(\tau)}}(x,y) \geq -Cn^{\mu}e^{-cn(x-e_\tau)^2}e^{-cn(y-e_\tau)^2}.$$

综合以上结果，我们得到所需结论。 □

4.2. **命题 2.4 的证明**。

命题 *2.4* 的证明。 接下来，我们将作如下认定 $x_{m+1}=x_1$。由引理 **4.1** 可知，对于固定的 m

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^m}\prod_{j=1}^m \widehat{\mathscr{K}_n^{(\tau)}}(x_j,x_{j+1})\,dx_j \\ &\geq 2^m\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}}\int_{\mathbb{R}_+^m} e^{-2n\sum_{j=1}^m x_j^2}\prod_{j=1}^m H(2\xi_{e_\tau}-n^{-\mu}-\xi_{x_j}-\xi_x)\cosh(2nx_jx_{j+1})\,dx_j - c_m n^{-\frac{1}{2}+\mu},\end{aligned}$$

对于某个常数 $c_m>0$。存在一个常数 $a>0$，使得

$$\begin{aligned}&2^m\int_{\mathbb{R}_+^m} e^{-2n\sum_{j=1}^m x_j^2}\prod_{j=1}^m H(2\xi_{e_\tau}-n^{-\mu}-\xi_{x_j}-\xi_x)\cosh(2nx_jx_{j+1})\,dx_j \\ &\geq \int_{[-e_\tau+an^{-\mu},e_\tau-an^{-\mu}]^m} e^{-2n\sum_{j=1}^m x_j^2}\prod_{j=1}^m \cosh(2nx_jx_{j+1})\,dx_j \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{[-e_\tau+an^{-\mu},e_\tau-an^{-\mu}]^m} e^{-2n\sum_{j=1}^m (x_j^2-x_jx_{j+1})}\prod_{j=1}^m dx_j.\end{aligned}$$

在最后一步中，我们只取了这样的指数函数组合 $e^{\pm 2nx_jx_{j+1}}$：经过代换$x_j\to\pm x_j$后，我们可以在被积函数中得到 $e^{n\sum_{j=1}^m x_j}$，这占所有组合的一半。现在我们作代换 $y_m=x_1+\ldots+x_m$和$y_j=x_{j+1}-x_j$，其中 $j=1,\ldots,m-1$。于是有

$$\begin{aligned}&\int_{[-e_\tau+an^{-\mu},e_\tau-an^{-\mu}]^m} e^{-2n\sum_{j=1}^m (x_j^2+2x_jx_{j+1})}\prod_{j=1}^m dx_j \\ &= \frac{1}{m}\int_{-m(e_\tau-an^{-\mu})}^{m(e_\tau-an^{-\mu})}\int_{[-e_\tau+n^{-\mu},e_\tau-n^{-\mu}]^{m-1}} e^{-n(\sum_{j=1}^{m-1}y_j^2+(\sum_{j=1}^{m-1}y_j)^2)}\prod_{j=1}^m dy_j.\end{aligned}$$

这可以写成

$$\begin{aligned}
&(e_\tau - an^{-\mu}) \int_{[-e_\tau+n^{-\mu}, e_\tau-n^{-\mu}]^{m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\lambda^2+2n\lambda\sum_{j=1}^{m-1} y_j} e^{-n\sum_{j=1}^{m-1} y_j^2}\, d\lambda \prod_{j=1}^{m-1} dy_j \\
&= (e_\tau - an^{-\mu}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n}{2}\lambda^2} \left(\int_{-e_\tau+n^{-\mu}}^{e_\tau-n^{-\mu}} e^{-nx^2+2n\lambda x} \right)^{m-1} d\lambda \\
&\geq (e_\tau - an^{-\mu}) \int_{-e_\tau+\varepsilon}^{e_\tau-\varepsilon} e^{-n\lambda^2} \left(\int_{-e_\tau+n^{-\mu}}^{e_\tau-n^{-\mu}} e^{-nx^2+2n\lambda x} \right)^{m-1} d\lambda
\end{aligned}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$ （当 n 足够大时）。我们有

$$\begin{aligned}
\int_{-e_\tau+\varepsilon}^{e_\tau-\varepsilon} e^{-n\lambda^2} \left(\int_{-e_\tau+n^{-\mu}}^{e_\tau-n^{-\mu}} e^{-nx^2+2n\lambda x} \right)^{m-1} d\lambda &= \int_{-e_\tau+\varepsilon}^{e_\tau-\varepsilon} e^{-n\lambda^2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{m-1}{2}} e^{-(m-1)n\lambda^2} (1 + \mathscr{O}(1/n))\, d\lambda \\
&= 2(e_\tau - \varepsilon) \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{m}} (1 + \mathscr{O}(1/n)).
\end{aligned}$$

我们得出结论:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} \operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \geq (e_\tau - \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}.$$

由于这对任意的 $\varepsilon > 0$ 都成立，因此我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} \operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \geq e_\tau \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} = \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}.$$

对于 $m \geq \frac{1+\tau}{1-\tau}$，我们已经有一个上界，但还需要为剩余的 m 找到一个上界。我们从 (3.41) 开始，并将引理 4.1 的结果代入剩余的核中。由此得到

$$\operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m \leq \frac{n}{\pi} \frac{1}{\sqrt{m-1}} \int_{\mathbb{R}_+^2} H(2\xi_{e_\tau} + n^{-\mu} - \xi_x - \xi_y) 4e^{-n\frac{m}{m-1}(x^2+y^2)} \cosh\left(\frac{2nxy}{m-1}\right) \cosh(nxy)\, dx\, dy.$$

我们可以写成

$$\begin{aligned}
&4e^{-n\frac{m}{m-1}(x^2+y^2)} \cosh\left(\frac{2nxy}{m-1}\right) \cosh(nxy) \\
&= e^{-n\frac{m}{m-1}(x^2+y^2)} \left(e^{2n\frac{m}{m-1}xy} + e^{-2n\frac{m}{m-1}xy} + e^{2n\frac{m-2}{m-1}xy} + e^{-2n\frac{m-2}{m-1}xy} \right) \\
&= e^{-n\frac{m}{m-1}(x-y)^2} + e^{-n\frac{m}{m-1}(x+y)^2} + e^{-\frac{4n}{m}x^2} \left(e^{-n\frac{m}{m-1}(y-\frac{m-2}{m}x)^2} + e^{-n\frac{m}{m-1}(y+\frac{m-2}{m}x)^2} \right).
\end{aligned}$$

注意，我们可以重新 将积分域 $\mathbb{R}_+^2$ 替换为 $[0, g_\tau + bn^{-\mu}]^2$，其中 $b > 0$ 为某个常数，an d

$$g_\tau = f_\tau \cosh(2\xi_{e_\tau}) = \frac{1+\tau^2}{2\tau} f_\tau.$$

这是允许的，因为 Heaviside 函数在该区域之外为零。现在我们将该区域分成 $[f_\tau, g_\tau + bn^{-\mu}]$ 和剩余区域。对于后者，我们可以用 1 作为 Heaviside 函数的上界（边界贡献的阶较小），由此通过最速下降论证可直接得到，相应的积分等于

$$\frac{n}{\pi} \frac{1}{\sqrt{m-1}} \int_0^{f_\tau} \sqrt{\pi \frac{m-1}{mn}} dx = \sqrt{\frac{n}{\pi m}} f_\tau.$$

达到主导阶。对于第一个区域，我们发现相应的积分等于

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\pi m}}\int_{f_\tau}^{g_\tau}\left(\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{mn}{m-1}}x\right)+\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{mn}{m-1}}\left(f_\tau\cosh(2\xi_{e_\tau}-\xi_x)-x\right)\right)\right)dx$$

在主导阶下。对于 $x>1+\tau$，我们有

$$f_\tau\cosh(2\xi_{e_\tau}-\xi_x)-x<f_\tau\cosh(\xi_{e_\tau})-e_\tau=0,$$

并且两个误差函数在极限 $n\to\infty$ 下相互抵消。剩下的是

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\pi m}}\int_{f_\tau}^{g_\tau}2\,dx=\sqrt{\frac{n}{\pi m}}(e_\tau-f_\tau).$$

加上来自 $[0,f_\tau]^2$ 的贡献，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}}\operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m\le\frac{1}{\sqrt{2\pi m}}(f_\tau+e_\tau-f_\tau)=\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

□

5. Asymptotic analysis at weak non-Hermiticity

在本节中，我们证明命题 2.5，即对于任意固定的 $m>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m=\frac{c(\sqrt{m}\,\alpha)}{2}=\frac{e^{-m\alpha^2/2}}{2}\Big[I_0\Big(\frac{m\alpha^2}{2}\Big)+I_1\Big(\frac{m\alpha^2}{2}\Big)\Big]. \tag{5.1}$$

注意，(1.10) 中的 $c(\alpha)$ 可以写成

$$c(\alpha)=\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}\int_0^1\operatorname{erf}(\alpha\sqrt{1-s^2})\,ds=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k\,k!\,(k+1)!}(-1)^k\alpha^{2k}, \tag{5.2}$$

参见例如 [10, 注 2。7]。因此，(5.1) 的右端可写为

$$\frac{c(\sqrt{m}\,\alpha)}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m^k}{2^{2k+1}(k+1)!}\binom{2k}{k}(-\alpha^2)^k. \tag{5.3}$$

回顾引理 3.5，$\operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m$ 的计算结果为

$$\operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m=\sum_{j_1,\dots,j_m=0}^{n-1}\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2\sum_{k=1}^m j_k+\frac{m}{2}}\prod_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(1-\tau)^{2l}(1+\tau)^{-2l}\,(2j_k)!}{2^{2l}l!(l+j_k-j_{k-1})!(2j_{k-1}-2l)!}\Big). \tag{5.4}$$

此处及下文中，我们采用约定 $j_0=j_m$。

注 5.1. 我们首先讨论表达式 (5.4) 中来自 $l=0$ 的贡献。若 $l=0$，则 (5.4) 的右端为

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{m/2}\sum_{j_1,\dots,j_m=0}^{n-1}\prod_{k=1}^{m}\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2j_k}\frac{(2j_k)!}{(j_k-j_{k-1})!(2j_{k-1})!}\\&=\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{m/2}\sum_{j_1,\dots,j_m=0}^{n-1}\prod_{k=1}^{m}\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2j_k}\frac{1}{(j_k-j_{k-1})!}\\&=\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{m/2}\sum_{j=0}^{n-1}\prod_{k=1}^{m}\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2j}=\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{m/2}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2jm}=\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{m/2}\frac{1-\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2mn}}{1-\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2m}}.\end{aligned}$$

*(*从第二行到第三行的推导，参见注 *3.6*。*)* 由此可得，对于 $\tau = 1 - \alpha^2/(2n)$，当 $n \to \infty$ 时，

$$\frac{1}{2n}\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{m/2} \sum_{j_1,\dots,j_m=0}^{n-1} \prod_{k=1}^{m} \Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2j_k} \frac{(2j_k)!}{(j_k - j_{k-1})!(2j_{k-1})!} = \frac{1 - e^{-\frac{\alpha^2 m}{2}}}{\alpha^2 m} + \mathscr{O}\Big(\frac{1}{n}\Big). \tag{5.5}$$

5.1. **重新考察期望与方差**。首先考察 $m = 1$，2 的情形很有启发性，然后再处理一般的 m。根据命题 2.3 (ii)，下面对 $m = 1$，2 的分析为 [10,定理 2.1 和 2.3] 提供了一种不同且更统一的证明。

5.1.1. 情形 $m = 1$。我们先考虑最简单的情形 $m = 1$. 然后由 (5.4)，可得

$$\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)}) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{(l!)^2} \frac{(1-\tau)^{2l}(1+\tau)^{-2l}}{2^{2l}} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2j+\frac{1}{2}} \frac{(2j)!}{(2j-2l)!}. \tag{5.6}$$

注意，对于 $\tau = 1 - \alpha^2/(2n)$，我们有

$$\frac{1}{2n} \frac{(1-\tau)^{2l}(1+\tau)^{-2l}}{2^{2l}} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2j+\frac{1}{2}} \frac{(2j)!}{(2j-2l)!} \sim \frac{(\alpha/2)^{4l}}{(2n)^{2l+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2j+\frac{1}{2}} \frac{(2j)!}{(2j-2l)!}.$$

对于 $l = o(n)$，黎曼和近似给出

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2n)^{2l+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2j+\frac{1}{2}} \frac{(2j)!}{(2j-2l)!} &= \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(1 - \frac{\alpha^2}{4n}\Big)^{2j} \frac{2j}{2n} \frac{2j-1}{2n} \cdots \frac{2j-2l+1}{2n} \\ &\sim \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\alpha^2 x}{2}} x^{2l}\, dx = \frac{2^{2l}}{\alpha^{4l+2}} \gamma\Big(2l+1, \frac{\alpha^2}{2}\Big). \end{aligned}$$

注意，此处对于 $l = 0$，它与 (5.5) 相符，因为 $\gamma(1,\ x) = 1 - e^{-x}$。综上，对于$l = o(n)$,

$$\frac{1}{2n} \frac{(1-\tau)^{2l}(1+\tau)^{-2l}}{2^{2l}(l!)^2} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2j+\frac{1}{2}} \frac{(2j)!}{(2j-2l)!} \sim \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \gamma\Big(2l+1, \frac{\alpha^2}{2}\Big). \tag{5.7}$$

这意味着当 $L > 0$ 足够大时，

$$\frac{1}{2n}\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)}) \sim \frac{1}{\alpha^2} \sum_{l=0}^{L} \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \gamma\Big(2l+1, \frac{\alpha^2}{2}\Big) + \sum_{l=L+1}^{n-1} \frac{1}{(l!)^2} \frac{(\alpha/2)^{4l}}{(2n)^{2l+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2j+\frac{1}{2}} \frac{(2j)!}{(2j-2l)!}.$$

注意，对于任意 $l = 0, \dots, n-1$,

$$\frac{1}{(2n)^{2l+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2j+\frac{1}{2}} \frac{(2j)!}{(2j-2l)!} = \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2j+\frac{1}{2}} \frac{2j}{2n} \frac{2j-1}{2n} \cdots \frac{2j-2l+1}{2n} < \frac{1}{2}. \tag{5.8}$$

因此，在保持 $L = o(N)$ 的情况下令 $L \to \infty$ 趋于.....，我们有

$$\sum_{l=L+1}^{n-1} \frac{1}{(l!)^2} \frac{(\alpha/2)^{4l}}{(2n)^{2l+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2j+\frac{1}{2}} \frac{(2j)!}{(2j-2l)!} \le \sum_{l=L+1}^{n-1} \frac{(\alpha/2)^{4l}}{2(l!)^2} \to 0.$$

因此我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)}) = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \gamma\Big(2l+1, \frac{\alpha^2}{2}\Big). \tag{5.9}$$

现在，$m = 1$ 命题 2.5 由以下引理得出。

引理 5.2。我们有

$$\frac{1}{\alpha^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\gamma\Big(2l+1,\frac{\alpha^2}{2}\Big)=\frac{c(\alpha)}{2}. \tag{5.10}$$

证明。 注意到

$$\gamma(j,x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{j+s}}{s!(j+s)}, \tag{5.11}$$

见 [44, 公式（8.7.1）]。因此我们有

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\gamma\Big(2l+1,\frac{\alpha^2}{2}\Big)=\frac{1}{2^{4l+1}(l!)^2}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{2^s s!(2l+1+s)}(-\alpha^2)^{s+2l}. \tag{5.12}$$

由此可得、】【

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\gamma\Big(2l+1,\frac{\alpha^2}{2}\Big)&=\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{\substack{s,l=0\\ s+2l=k}}^{\infty}\frac{1}{2^{4l+s+1}(l!)^2 s!(2l+1+s)}\Bigg)(-\alpha^2)^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\Bigg(\sum_{\substack{s,l=0\\ s+2l=k}}^{\infty}\frac{2^{s-2k-1}}{(l!)^2 s!}\Bigg)(-\alpha^2)^k.\end{aligned}$$

那么由 (5.3) 可知，只需证明

$$\sum_{\substack{s,l=0\\ s+2l=k}}^{\infty}2^s\frac{k!}{(l!)^2 s!}=\binom{2k}{k}. \tag{5.13}$$

This 组合恒等式可通过比较 $(xy)^k$ 项的系数得到。

$$(x^2+2xy+y^2)^k=(x+y)^{2k}, \tag{5.14}$$

由此完成证明。 □

5.1.2. 情形 $m=2$。对于 $m=2$，由 (5.4)，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M_n^{(\tau)})^2=&\sum_{j_1,j_2=0}^{n-1}\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2(j_1+j_2)+1}\\&\times\sum_{l_1,l_2=0}^{n-1}\frac{(1-\tau)^{2(l_1+l_2)}(1+\tau)^{-2(l_1+l_2)}\,(2j_1)!(2j_2)!}{2^{2(l_1+l_2)}l_1!l_2!(l_1+j_1-j_2)!(l_2+j_2-j_1)!(2j_2-2l_1)!(2j_1-2l_2)!}.\end{aligned} \tag{5.15}$$

这里，被加数仅在以下指标集合上不为零。

$$j_1-j_2\geq -l_1,\qquad j_2-j_1\geq -l_2,\qquad j_2\geq l_1,\qquad j_1\geq l_2. \tag{5.16}$$

与之前一样，由于因子 $1/(l_1!l_2!)$ 快速衰减，只需考虑 l_1 和 l_2 均为有限值的情形。此外，由于项

$$\frac{1}{(l_1+j_1-j_2)!(l_2+j_2-j_1)!},$$

只需考虑 $j_1 - j_2$ 为有限值的情形。令 $M = j_1 - j_2$，即可得出

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n}\operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^2 \sim & \sum_{M=-\infty}^{\infty}\sum_{l_1,l_2=0}^{\infty}\frac{1}{l_1!l_2!(l_1+M)!(l_2-M)!}\\ & \times\frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{4j}\frac{(1-\tau)^{2(l_1+l_2)}(1+\tau)^{-2(l_1+l_2)}\,(2j+M)!(2j-M)!}{2^{2(l_1+l_2)}(2j-2M-2l_1)!(2j-2l_2)!}.\end{aligned}\tag{5.17}$$

这里，由黎曼和近似可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{4j}\frac{(1-\tau)^{2(l_1+l_2)}(1+\tau)^{-2(l_1+l_2)}\,(2j+M)!(2j-M)!}{2^{2(l_1+l_2)}(2j-2M-2l_1)!(2j-2l_2)!}\\ &\sim\frac{(\alpha/2)^{4l}}{2}\int_0^1 e^{-\alpha^2 x}x^{2l}\,dx=\frac{1}{\alpha^2\,2^{4l+1}}\gamma\Big(2l+1,\alpha^2\Big),\end{aligned}\tag{5.18}$$

其中记 $l = l_1 + l_2$。因此我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^2=\frac{1}{\alpha^2}\sum_{M=-\infty}^{\infty}\sum_{\substack{l_1,l_2=0\\ l_1+l_2=l}}^{\infty}\frac{1}{2^{4l+1}}\frac{1}{l_1!l_2!(l_1+M)!(l_2-M)!}\gamma\Big(2l+1,\alpha^2\Big).\tag{5.19}$$

现在只需证明以下结论。

引理 5.3. 我们有

$$\frac{1}{\alpha^2}\sum_{M=-\infty}^{\infty}\sum_{\substack{l_1,l_2=0\\ l_1+l_2=l}}^{\infty}\frac{1}{2^{4l+1}}\frac{1}{l_1!l_2!(l_1+M)!(l_2-M)!}\gamma\Big(2l+1,\alpha^2\Big)=\frac{c(\sqrt{2}\alpha)}{2}.\tag{5.20}$$

证明。 利用 (5.11)，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha^2}\sum_{\substack{l_1,l_2=0\\ l_1+l_2=l}}^{\infty}\frac{1}{2^{4l+1}}\frac{1}{(l_1!)^2(l_2!)^2}\gamma\Big(2l+1,\alpha^2\Big)=\sum_{\substack{l_1,l_2=0\\ l_1+l_2=l}}^{\infty}\frac{1}{2^{4l+1}}\frac{1}{(l_1)!^2(l_2)!^2}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-\alpha^2)^{s+2l}}{s!(2l+1+s)}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{\substack{s,l=0\\ s+2l=k}}^{\infty}\sum_{\substack{l_1,l_2=0\\ l_1+l_2=l}}^{\infty}\frac{1}{2^{4l+1}}\frac{1}{(l_1)!^2(l_2)!^2}\frac{1}{s!(2l+1+s)}\Bigg)(-\alpha^2)^k\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\Bigg(\sum_{\substack{s,l=0\\ s+2l=k}}^{\infty}\sum_{\substack{l_1,l_2=0\\ l_1+l_2=l}}^{\infty}\frac{1}{2^{4l+1}}\frac{1}{(l_1)!^2(l_2)!^2}\frac{1}{s!}\Bigg)(-\alpha^2)^k.\end{aligned}$$

那么由 (5.3) 可知，只需证明

$$\sum_{M=-\infty}^{\infty}\sum_{\substack{s,l=0\\ s+2l=k}}^{\infty}\sum_{\substack{l_1,l_2=0\\ l_1+l_2=l}}^{\infty}2^{s-2l}\frac{k!}{l_1!l_2!(l_1+M)!(l_2-M)!s!}=\binom{2k}{k}.\tag{5.21}$$

注意，对于任意 k，此恒等式左边只有有限个非平凡求和项。为了证明这个组合恒等式，我们可以比较展开式中 $(xy)^k$ 项的系数：

$$\Big(\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2}\Big)^k=(x+y)^{2k}.\tag{5.22}$$

更确切地说，(5.21) 的左边可以由 (5.22) 左边展开式中 $(xy)^k$ 项的系数得到。为此，我们分别选取第一项和第二项 $x^2/2$ 和 $x^2/2$ 的 l_1 个和 l_2 个实例，选取项 $2xy$ 的 s 个实例，并分别选取最后两项 $y^2/2$ 和 $y^2/2$ 的 l_1+M 个和 l_2-M 个实例。然后，我们汇集 l_1、l_2 和 M 的所有可能组合，使得

$$l_1+l_2+s+(l_1+M)+(l_2-M)=s+2(l_1+l_2)=s+2l=k.$$

这就完成了证明。 □

5.2. **命题 2.5 的证明**。现在我们考虑 $m\geq 1$ 的一般情形。首先将 (5.4) 改写为

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m=&\sum_{j_1,\dots,j_m=0}^{n-1}\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2\sum_{k=1}^m j_k+\frac{m}{2}}\sum_{l_1,\dots,l_m=0}^{n-1}\frac{(1-\tau)^{2(l_1+\cdots+l_m)}(1+\tau)^{-2(l_1+\cdots+l_m)}}{2^{2(l_1+\cdots+l_m)}l_1!\dots l_m!}\\&\times\frac{(2j_1)!\dots(2j_m)!}{(l_1+M_1)!\dots(l_m+M_m)!\,(2j_m-2l_1)!(2j_1-2l_2)!\dots(2j_{m-1}-2l_m)!},\end{aligned}$$

其中 $M_k=j_k-j_{k-1}(k=1,\ \dots\dots,\ m)$。同样，只需考虑 l_j 均为有限值的情形。因此，由于这些项

$$\frac{1}{(l_1+M_1)!\cdots(l_m+M_m)!}$$

在 (5.4) 中，只需考虑 $j_k-j_{k-1}(k=1,\dots,m)$ 为有限的情形。我们记

$$\widetilde{M}_k=\sum_{p=2}^{k}M_p=j_k-j_1.$$

然后结合以上结果，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n}\operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m\sim&\sum_{\substack{M_1,\dots,M_m=-\infty\\M_1+\cdots+M_m=0}}^{\infty}\ \sum_{\substack{l_1,\dots l_m=0\\l_1+\cdots+l_m=l}}^{\infty}\frac{1}{l_1!\dots l_m!(l_1+M_1)!\dots(l_m+M_m)!}\\&\times\frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2mj+\frac{m}{2}}\frac{(1-\tau)^{2l}}{(2(1+\tau))^{2l}}\frac{(2j)!(2j+2\widetilde{M}_2)\dots(2j+2\widetilde{M}_m)!}{(2j+2\widetilde{M}_m-2l_1)!(2j-2l_2)!\dots(2j+2\widetilde{M}_{m-1}-2l_m)!},\end{aligned}$$

其中 $l=l_1+\cdots+l_m$。注意，

$$\begin{aligned}&(1-\tau)^{2l}\frac{(2j)!(2j+2\widetilde{M}_2)\dots(2j+2\widetilde{M}_m)!}{(2j+2\widetilde{M}_m-2l_1)!(2j-2l_2)!\dots(2j+2\widetilde{M}_{m-1}-2l_m)!}\\&=\alpha^{4l}\Big(\frac{2j+2\widetilde{M}_m-2l_1+1}{2n}\cdots\frac{2j}{2n}\Big)\dots\Big(\frac{2j+2\widetilde{M}_{m-1}-2l_m+1}{2n}\cdots\frac{2j+2\widetilde{M}_m}{2n}\Big).\end{aligned}$$

因此，由黎曼和近似可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\frac{1+\tau}{2}\Big)^{2mj+\frac{m}{2}}\frac{(1-\tau)^{2l}}{(2(1+\tau))^{2l}}\frac{(2j)!(2j+2\widetilde{M}_2)\dots(2j+2\widetilde{M}_m)!}{(2j+2\widetilde{M}_m-2l_1)!(2j-2l_2)!\dots(2j+2\widetilde{M}_{m-1}-2l_m)!}\\&\sim\frac{(\alpha/2)^{4l}}{2}\int_0^1 e^{-\frac{m\alpha^2}{2}x}x^{2l}\,dx=\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{2^{2l}m^{2l+1}}\gamma\Big(2l+1,\frac{\alpha^2m}{2}\Big).\end{aligned}\tag{5.23}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\operatorname{Tr}(M_n^{(\tau)})^m\\&=\frac{1}{\alpha^2}\sum_{\substack{M_1,\dots,M_m=-\infty\\M_1+\cdots+M_m=0}}^{\infty}\sum_{\substack{l_1,\dots l_m=0\\l_1+\cdots+l_m=l}}^{\infty}\frac{1}{l_1!\dots l_m!(l_1+M_1)!\dots(l_m+M_m)!}\frac{1}{2^{2l}m^{2l+1}}\gamma\Big(2l+1,\frac{\alpha^2m}{2}\Big).\end{aligned}\tag{5.24}$$

那么，下面的引理便完成了命题 2.5 的证明。

引理 5.4. 我们有

$$\frac{1}{\alpha^2}\sum_{\substack{M_1,\dots,M_m=-\infty\\M_1+\cdots+M_m=0}}^{\infty}\sum_{\substack{l_1,\dots l_m=0\\l_1+\cdots+l_m=l}}^{\infty}\frac{1}{l_1!\dots l_m!(l_1+M_1)!\dots(l_m+M_m)!}\frac{1}{2^{2l}m^{2l+1}}\gamma\Big(2l+1,\frac{\alpha^2m}{2}\Big)=\frac{c(\sqrt{m}\alpha)}{2}.$$

证明。 利用 (5.11)，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha^2}\sum_{\substack{l_1,\dots l_m=0\\l_1+\cdots+l_m=l}}^{\infty}\frac{1}{l_1!\dots l_m!(l_1+M_1)!\dots(l_m+M_m)!}\frac{1}{2^{2l}m^{2l+1}}\gamma\Big(2l+1,\frac{\alpha^2m}{2}\Big)\\&=\frac{1}{\alpha^2}\sum_{\substack{l_1,\dots l_m=0\\l_1+\cdots+l_m=l}}^{\infty}\frac{1}{l_1!\dots l_m!(l_1+M_1)!\dots(l_m+M_m)!}\frac{1}{2^{2l}m^{2l+1}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(s+2l+1)}\Big(\frac{\alpha^2m}{2}\Big)^{s+2l+1}\\&=\sum_{\substack{l_1,\dots l_m=0\\l_1+\cdots+l_m=l}}^{\infty}\frac{1}{2^{4l+1}}\frac{1}{l_1!\dots l_m!(l_1+M_1)!\dots(l_m+M_m)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{m^s}{2^ss!(s+2l+1)}(-\alpha^2)^{s+2l}.\end{aligned}$$

这可以改写为

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{l_1,\dots l_m=0\\l_1+\cdots+l_m=l}}^{\infty}\frac{1}{2^{4l+1}}\frac{1}{l_1!\dots l_m!(l_1+M_1)!\dots(l_m+M_m)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{m^s}{2^ss!(s+2l+1)}(-\alpha^2)^{s+2l}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{s,l=0\\s+2l=k}}^{\infty}\sum_{\substack{l_1,\dots l_m=0\\l_1+\cdots+l_m=l}}^{\infty}\frac{1}{2^{4l+1}}\frac{1}{l_1!\dots l_m!(l_1+M_1)!\dots(l_m+M_m)!}\frac{m^s}{2^ss!(s+2l+1)}(-\alpha^2)^k.\end{aligned}$$

由（5.3）可知，我们所需证明的只有

$$\sum_{\substack{M_1,\dots,M_m=-\infty\\M_1+\cdots+M_m=0}}^{\infty}\sum_{\substack{s,l=0\\s+2l=k}}^{\infty}\sum_{\substack{l_1,\dots l_m=0\\l_1+\cdots+l_m=l}}^{\infty}\frac{2^s\,m^{s-k}\,k!}{l_1!\dots l_m!(l_1+M_1)!\dots(l_m+M_m)!\,s!}=\binom{2k}{k}.\tag{5.25}$$

与之前一样，这个恒等式可通过比较下式中 $(xy)^k$ 项的系数得出

$$\Big(\frac{x^2}{m}+\cdots+\frac{x^2}{m}+2xy+\frac{y^2}{m}+\cdots+\frac{y^2}{m}\Big)^k=(x+y)^{2k}.\tag{5.26}$$

也就是说，我们分别选取前 m 项 $x^2/m,\dots,x^2/m$ 中的 $l_1,l_2,\dots,l_m$ 个实例、项 $2xy$ 的 s 个实例，以及最后 m 项 $y^2/m,\dots,y^2/m$ 中的 $l_1+M_1,\dots,l_m+M_m$ 个实例。然后，我们收集 $l_1,\dots,l_m$ 和 $M_1,\dots,M_m$ 的所有可能组合，使得 $M_1+\dots M_m=0$ 且

$$\Big(l_1+\cdots+l_m\Big)+s+\Big((l_1+M_1)+\dots(l_m+M_m)\Big)=s+2(l_1+\cdots+l_m)=s+2l=k.$$

注意，此处 m 的指数为

$$-\Big(l_1+\cdots+l_m\Big)-\Big((l_1+M_1)+\ldots(l_m+M_m)\Big)=-2l=s-k.$$

这就完成了证明。 □

Appendix A. Auxiliary lemmas

引理 A.1. 对于固定的 $\alpha>0$，我们有

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c(\sqrt{m}\,\alpha)}{2m}=\frac{2}{\pi}\int_0^1\log\Big(1-e^{-\alpha^2s^2}\Big)\sqrt{1-s^2}\,ds. \tag{A.1}$$

证明。 我们注意到。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha}\int_0^1\operatorname{erf}(\alpha\sqrt{1-s^2})\,ds=\frac{1}{\alpha}\int_0^1\operatorname{erf}(\alpha s)\frac{s\,ds}{\sqrt{1-s^2}}\\&=\Big[-\frac{1}{\alpha}\operatorname{erf}(\alpha s)\sqrt{1-s^2}\Big]_0^1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-(\alpha s)^2}\sqrt{1-s^2}\,ds=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-\alpha^2s^2}\sqrt{1-s^2}\,ds.\end{aligned}$$

我们利用 (1.10) 和 (5.2) 得出结论：

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c(\sqrt{m}\,\alpha)}{2m}=-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1\frac{1}{m}e^{-m\alpha^2s^2}\sqrt{1-s^2}\,ds=\frac{2}{\pi}\int_0^1\log\Big(1-e^{-\alpha^2s^2}\Big)\sqrt{1-s^2}\,ds.$$

我们需要证明确实可以交换求和与积分的顺序。首先，根据最速下降论证，可以观察到存在一个整数 $M>0$，使得 $m>M$ 意味着以下结论成立：

$$\Big|\int_0^1 e^{-m\alpha^2s^2}\sqrt{1-s^2}ds-\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{m}}\Big|\le C\frac{1}{m\sqrt{m}}$$

对于某个一致常数 C（仅取决于 α）。现在令 $\varepsilon>0$ 满足 $\varepsilon<M^{-2}$。令 M_ε 为 $(\varepsilon^{-1/2},1+\varepsilon^{-1/2}]$ 中的整数。于是我们有 $M_\varepsilon>M$，从而

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_0^{\varepsilon}e^{-m\alpha^2s^2}\sqrt{1-s^2}ds&=\sum_{m=1}^{M_\varepsilon}\frac{1}{m}\int_0^{\varepsilon}e^{-m\alpha^2s^2}\sqrt{1-s^2}ds+\sum_{m=M_\varepsilon+1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_0^{\varepsilon}e^{-m\alpha^2s^2}\sqrt{1-s^2}ds\\&\le\sum_{m=1}^{M_\varepsilon}\frac{\varepsilon}{m}+\sum_{m=M_\varepsilon+1}^{\infty}\frac{1}{m}\Big(\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{m}}+\frac{C}{m\sqrt{m}}\Big)\\&\le\varepsilon(1+\log M_\varepsilon)+\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{M_\varepsilon}}+\frac{2}{3}\frac{C}{M_\varepsilon\sqrt{M_\varepsilon}}.\end{aligned}$$

当 $\varepsilon\to0$ 趋于 0 时，该式也趋于 0，证毕。 □

引理 A.2. 设 $k>1$ 为一个整数，且设 $x_0,x_k\in\mathbb{R}$。那么我们有

$$\int_{\mathbb{R}_+^{k-1}}e^{-\sum_{j=1}^{k-1}x_j^2}\prod_{j=1}^{k}\cosh(x_{j-1}x_j)\,dx_1\cdots dx_{k-1}=\frac{1}{\sqrt{k}}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{\frac{k-1}{2}}e^{\frac{k-1}{k}\frac{x_0^2+x_k^2}{2}}\cosh\Big(\frac{x_0x_k}{k}\Big).$$

证明。 首先，我们验证该陈述对于 $k=2$ 成立。

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x_1^2}\cosh(x_0x_1)\cosh(x_1x_2)\,dx_1\\
&=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x_1^2}\left(e^{x_1(x_0+x_2)}+e^{-x_1(x_0+x_2)}+e^{x_1(x_0-x_2)}+e^{-x_1(x_0-x_2)}\right)dx_1\\
&=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}\left(e^{x_1(x_0+x_2)}+e^{-x_1(x_0+x_2)}\right)dx_1\\
&=\frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{\frac{(x_0+x_2)^2}{4}}+\frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{\frac{(x_0-x_2)^2}{4}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{x_0^2+x_2^2}{4}}\cosh\left(\frac{x_0x_2}{2}\right).
\end{aligned}$$

现在我们使用归　纳法，并假设该结论对 k成立。于是我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^k} e^{-\sum_{j=1}^k x_j^2}\prod_{j=1}^{k+1}\cosh(x_{j-1}x_j)\,dx_1\cdots dx_k\\
&=\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}}e^{\frac{k-1}{k}\frac{x_0^2}{2}}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\frac{k+1}{2k}x_k^2}\cosh\left(\frac{x_0x_k}{k}\right)\cosh(x_kx_{k+1})\,dx_k\\
&=\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}}e^{\frac{k-1}{k}\frac{x_0^2}{2}}\sqrt{\frac{2k}{k+1}}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x_k^2}\cosh\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{2k}{k+1}}x_0x_k\right)\cosh\left(\sqrt{\frac{2k}{k+1}}x_kx_{k+1}\right)dx_k\\
&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k+1}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}}e^{\frac{k-1}{k}\frac{x_0^2}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{1}{4}\left(\frac{2}{k(k+1)}x_0^2+\frac{2k}{k+1}x_{k+1}^2\right)}\cosh\left(\frac{x_0x_{k+1}}{k+1}\right),
\end{aligned}$$

注意到 $\frac{k-1}{k}+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$ 后，即可得到该结果。 —— □

Appendix B. An equivalent determinantal formula

以下命题见 [27, 第 3]节。

命题 B.1 （参见 [27]第 3 节）。我们有

$$p_{N,k}^{(\tau)}=\left(\frac{1+\tau}{2}\right)^{N(N-1)/4}\frac{1}{2^{N/2}\prod_{l=1}^N\Gamma(l/2)}[z^{k/2}]\det\left[z\,\alpha_{2j-1,2m}+\beta_{2j-1,2m}[1]\right]_{j,m=1}^{N/2}, \tag{B.1}$$

其中

$$\alpha_{2j-1,2m}[1]=2^m(m-1)!\sum_{p=1}^m\frac{\Gamma(j+p-3/2)}{2^{p-1}(p-1)!}, \tag{B.2}$$

$$\beta_{2j-1,2m}[1]=-4\,\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}}dx\int_0^\infty dy\,e^{y^2-x^2}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{2}{1-\tau}}y\right)(x+iy)^{2j-2}(x-iy)^{2m-1}. \tag{B.3}$$

特别地，我们有

$$p_{2n,0}^{(\tau)}=\left(\frac{1+\tau}{2}\right)^{n(2n-1)/2}\frac{1}{2^n\prod_{l=1}^{2n}\Gamma(l/2)}\det\left[\beta_{2j-1,2m}[1]\right]_{j,m=1}^{n}. \tag{B.4}$$

示例 B.2。根据(2.4)，我们有

$$M_2^{(\tau)}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2(1+\tau)}}{2} & \frac{(1-\tau)\sqrt{1+\tau}}{4}\\ \frac{(1-\tau)\sqrt{1+\tau}}{4} & \frac{\sqrt{2(1+\tau)}(3+2t+3t^2)}{16}\end{bmatrix} \tag{B.5}$$

随后可以验证，(2.5) 中关于 $n=1$、2 的公式可推出

$$p_{2,0}^{(\tau)} = 1 - \frac{\sqrt{2(1+\tau)}}{2}, \qquad p_{4,0}^{(\tau)} = \frac{9+3\tau+3\tau^2+\tau^3}{8} - \frac{\sqrt{2(1+\tau)}(11+2\tau+3\tau^2)}{16}. \tag{B.6}$$

特别地，对于 $\tau=0$，我们有

$$p_{2,0}^{(0)} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad p_{4,0}^{(0)} = \frac{18-11\sqrt{2}}{16}. \tag{B.7}$$

公式(B.7) 也曾出现在 *[14]*中。在对称情形下，当 $\tau = 1$时，显然有$p_2^{(1)}{}_{,0} = p_4^{(1)}{}_{,0} = 0.$

另一方面，通过使用 (B.3) 直接计算可得。

$$\beta_{1,2}[1] = 2\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{2}-s}{s}, \qquad \beta_{3,4}[1] = \sqrt{\pi}\frac{12\sqrt{2}-16\sqrt{2}s+12\sqrt{2}s^4-7s^5}{2s^5},$$
$$\beta_{3,2}[1] = -\sqrt{\pi}\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}s^2+s^3}{s^3}, \qquad \beta_{1,4}[1] = -\sqrt{\pi}\frac{2\sqrt{2}-6\sqrt{2}s^2+5s^3}{s^3},$$

其中 $s=\sqrt{1+\tau}$。因此，由（B.4），可得（B.6）。

References

[1] G. Akemann 和 S.-S. Byun。 m 实 $N\times N$ Ginibre 矩阵的乘积：临界区间内的实特征值 $m=O(N)$。 *Constr. Approx. (online), arXiv:2201.07668*，2022年。[2] G. Akemann、M. Duits 和 L. D. Molag。椭圆 Ginibre 系综：一种统一研究高维局部统计与整体统计的方法。 *J. Math. Phys.*，64：023503，2023年。[3] G. Akemann 和 E. Kanzieper。Ginibre 实随机矩阵系综的可积结构与 Pfaff 积分定理。 *J. Stat. Phys.*，129(5-6)：1159–1231，2007年。[4] G. Akemann 和 M. J. Phillips。 $\beta=1$ 和 $\beta=4$ 椭圆 Ginibre 系综的插值 Airy 核。*J. Stat. Phys.*，155(3)：421–465，2014年。[5] J. Alt 和 T. Kr¨uger。局部椭圆定律。 *Bernoulli*，28(2)：886–909，2022年。[6] A. Borodin 和 E. Kanzieper。关于 Pfaff 积分定理的一则注记。 *J. Phys. A*，40(36)：F849–F855，2007年。[7] S.-S. Byun 和 C. Charlier。关于随机正规矩阵特征值模的特征多项式。*preprint arXiv:2205.04298*，2022年。[8] S.-S. Byun 和 P. J. Forrester。Ginibre 系综研究进展 I：GinUE。 *preprint arXiv:2211.16223*，2022年。[9] S.-S. Byun 和 P. J. Forrester。Ginibre 系综研究进展 II：GinOE 和 GinSE。 *preprint arXiv:2301.05022* 2023 ，。

[10] S.-S. Byun、N.-G. Kang、J. O. Lee 和 J. Lee。椭圆随机矩阵的实特征值。 *Int. Math. Res. Not.*，(3)：2243–2280，2023年。[11] C. Charlier。具有旋转不变权重及圆周上不连续性的行列式的渐近行为。 *Adv. , Math.* 408 108600, 36, 2022

(A 部分)：论文编号为[12] L. C. G. del Molino、K. Pakdaman、J. Touboul 和 G. Wainrib。具有 $k=O(n)$ 个实特征值的实 Ginibre 系综。 *J. Stat. Phys.*，163(2)：303–323，2016年。[13] I. Dumitriu 和 P. J. Forrester。反对称高斯 β-系综的三对角实现。 *J. Math. Phys.*，51 9 093302，25，2010 ( )：。[14] A. Edelman。实随机高斯矩阵具有 k 个实特征值的概率、相关分布以及圆律。 *J. Multivariate Anal.*，60(2)：203–232，1997年。[15] A. Edelman、E. Kostlan 和 M. Shub。随机矩阵有多少个实特征值？ *J. Amer. Math. Soc.*，7 1 247 267，1994 ( )：–。[16] M. Fenzl 和 G. Lambert。不变行列式点过程的圆盘计数统计的精确偏差。 *Int.* , ( )：–。 *Math. Res. Not.* 2022 10 7420 7494, 2022

[17] J. Fischmann、W. Bruzda、B. A. Khoruzhenko、H.-J. Sommers 和 K. ˙Zyczkowski。随机矩阵的诱导 Ginibre 系综与量子操作。 *J. Phys. A*，45(7)：075203，2012年。[18] J. Fischmann 和 P. J. Forrester。球形环带上的单组分等离子体与随机矩阵系综。*J. Stat. Mech.: Theor. Exp.*，2011(10)：P10003，2011年。

[19] W. FitzGerald 和 N. Simm。实非对称随机矩阵乘积的涨落与关联。

Ann. , . [20] P. J. *Inst. Henri Poincare (B) Probab. Stat (to appear) arXiv:2109.00322* 2021
Forrester。极限 Kac 随机多项式与截断随机正交矩阵。

J. Stat. Mech.: , ( ):P . [21] *Theor. Exp.* 2010 12 12018, 2010
P. J. Forrester。实 Ginibre 系综与四元数实 Ginibre 系综及其推广的斜正交多项式。*J. Phys. A*, 46(24):245203, 2013。[22] P. J. Forrester。实 Ginibre 系综的扩散过程与渐近体区间隙概率。

J. Phys. , ( ): . [23] *A* 48 32 324001, 2015
P. J. Forrester、J. R. Ipsen 和 S. Kumar。截断正交矩阵乘积中有多少个特征值是实数? *Exp. Math.*, 29(3):276–290, 2020。[24] P. J. Forrester 和 A. Mays。一种计算奇数阶随机矩阵关联函数的方法。

$\beta = 1$ *J.* 随机矩阵。 *Stat. Phys.* 134 3 443 462, 2009
, ( ): – . [25] P. J. Forrester 和 A. Mays。高斯实广义特征值问题的 Pfaffian 点过程。

Probab. , (-): – . *Theory Related Fields* 154 1 2 1 47, 2012
[26] P. J. Forrester 和 T. Nagao。实 Ginibre 系综的特征值统计。 *Phys. Rev. Lett.*, 99 050603, 2007 5( ): .[27] P. J. Forrester 和 T. Nagao。斜正交多项式与部分对称实 Ginibre 系综。

J. , ( ): . [28] *Phys. A* 41 37 375003, 19, 2008
P. J. Forrester 和 E. Nordenstam。反对称 GUE 子式过程。 *Mosc. Math. J.*, 9 774, 934, 2009 4 749( ): – .[29] Y. V. Fyodorov 和 B. A. Khoruzhenko。May-Wigner 不稳定性转变的非线性类比。

Proc. Natl. , ( ): – . *Acad. Sci. USA* 113 25 6827 6832, 2016
[30] Y. V. Fyodorov、B. A. Khoruzhenko 和 H.-J. Sommers。近厄米随机矩阵：从 Wigner-Dyson 特征值统计到 Ginibre 特征值统计的交叉。 *Phys. Rev. Lett.*, 79(4):557–560, 1997年。[31] Y. V. Fyodorov、B. A. Khoruzhenko 和 H.-J. Sommers。近厄米随机矩阵：复平面中的特征值密度。 *Phys. Lett. A*, 226(1-2):46–52, 1997年。[32] Y. V. Fyodorov、H.-J. Sommers 和 B. A. Khoruzhenko。弱非厄米性区间内随机矩阵谱的普适性。 *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 68(4):449–489, 1998年。[33] Y. V. Fyodorov 和 W. Tarnowski。实椭圆高斯系综中实特征值的条件数。*Ann. Henri Poincaré*, 22(1):309–330, 2021年。[34] J. Ginibre。复矩阵、四元数矩阵和实矩阵的统计系综。 *J. Math. Phys.*, 6(3):440–449, 1965年。[35] V. L. Girko。椭圆律。 *Theory Probab. Appl.*, 30(4):677–690, 1986年。[36] E. Kanzieper 和 G. Akemann。Ginibre 随机实矩阵系综中的实特征值统计。

Phys. , ( ): . [37] *Rev. Lett.* 95 23 230201, 4, 2005
E. Kanzieper、M. Poplavskyi、C. Timm、R. Tribe 和 O. Zaboronski。大型随机矩阵没有实特征值的概率是多少? *Ann. Appl. Probab.*, 26(5):2733–2753, 2016年。[38] B. A. Khoruzhenko、H.-J. Sommers 和 K. ˙Zyczkowski。随机正交矩阵的截断。 *Phys. Rev. E*, 82 4 040106, 2010 ( ): . [39] N. Lehmann 和 H.-J. Sommers。实随机矩阵的特征值统计。 *Phys. Rev. Lett.*, 67 944, 1991 8 941( ): – .[40] A. Little、F. Mezzadri 和 N. Simm。关于截断随机正交矩阵乘积的实特征值个数。 *Electron. J. Probab.*, 27:论文编号 5, 32, 2022年。[41] R. M. May。大型复杂系统会稳定吗? *Nature*, 238:413–414, 1972年。[42] L. D. Molag。随机正规矩阵的边缘普适性向高维推广。

preprint , . [43] H. *arXiv:2208.12676* 2022
H. Nguyen 和 S. O'Rourke。椭圆律。 *Int. Math. Res. Not.*, 2015(17):7620–7689, 2015年。[44] F. W. Olver、D. W. Lozier、R. F. Boisvert 和 C. W. Clark（编者）。 *NIST Handbook of Mathematical Functions*。剑桥大学出版社，剑桥，2010年。[45] N. Simm。大型高斯随机矩阵实特征值的中心极限定理。

Random Matrices *Theory Appl.* 6 1 1750002, 18, 2017 , ( ): . [46]
N. Simm。关于高斯矩阵乘积的实谱。 *Electron. Commun. Probab.*, 22 41, 11, 2017 :论文编号 . [47] C. D. Sinclair。Ginibre 随机实矩阵系综上的平均值。 *Int. Math. Res. Not.*, (5 015, 15, 2007):文章编号 rnm . [48] H.-J. Sommers、A. Crisanti、H. Sompolinsky 和 Y. Stein。大型随机非对称矩阵的谱。

Phys. , ( ): – . *Rev. Lett.* 60 19 1895 1898, 1988

Center for Mathematical Challenges, Korea Institute for Advanced Study, 85 Hoegiro, Dongdaemun-gu, Seoul 02455, Republic of Korea*Email address*: sungsoobyun@kias.re.kr

Department of Mathematics, University of Sussex, Brighton, BN1 9RH, United Kingdom
Email address: L.D.Molag@sussex.ac.uk

Department of Mathematics, University of Sussex, Brighton, BN1 9RH, United Kingdom
Email address: n.j.simm@sussex.ac.uk