arXiv:2305.02754v1 [math.CA] 4 May 2023

研究论文

贝塔函数的下界

Tiehong Zhao[1], Miaokun Wang[2,✉]

摘要。 我们提出了欧拉贝塔函数 $B(x,y)$ 的一个新下界，该下界表明不等式

$$B(x,y) > \frac{x+y}{xy}\left(1-\frac{2xy}{x+y+1}\right)$$

成立于 $(0,1]\times(0,1],$，这改进了 P. Ivády 所获得的一个下界 [12, 定理，(3.2)] 在 $0<x+y<1$ 的情形下。

关键词。 贝塔函数、伽马函数、ψ函数、不等式

数学主题分类。 主类 26D07 · 次类 33B15

1 引言

经典的 伽马函数及其对数导数（或称 ψ 函数）的定义为

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \quad \text{and} \quad \psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \qquad x>0.$$

ψ 的导数，即 ψ'、ψ''、$\cdots$，称为多伽马函数。贝塔函数作为著名的欧拉第一类积分，定义为

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x,y>0,$$

它通过一个优美的恒等式与伽马函数密切相关。

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

贝塔函数的实用性常常被伽马函数的实用性所掩盖，这或许部分是因为贝塔函数可以用伽马函数来表示。事实上，贝塔函数不仅在特殊函数理论中有多种应用，还在其他领域发挥着重要作用，例如统计学、数理物理和图论；参见 [1, 10, 17]。

✉ Miaokun Wang
wangmiaokun@zjhu.edu.cn
Tiehong Zhao
tiehong.zhao@hznu.edu.cn

[1] 数学学院，杭州师范大学，311121，中华人民共和国 数学系，湖州大学，湖州 313000，中华人民
[2] 共和国

近年来，发表了大量关于伽马函数和多伽马函数的著名不等式的论文（参见 [5,7,9,14–16,18,25] 及其中的参考文献），然而，文献中关于贝塔函数的不等式却寥寥无几 [3,4,6,8,11]。

2000年，S. Dragomir等人 [8] 证明了不等式

$$0 \leq \frac{1}{xy} - B(x,y) \leq \frac{1}{4}$$

对 $x,y \geq 1$成立。后来，Alzer [2] 将 $1/4$ 改进为最优常数 $\max_{x\geq 1}\{\Delta(x)\} = 0.08731\cdots$，其中 $\Delta(x) = 1/x^2 - \Gamma^2(x)/\Gamma(2x)$。

对于所有 $x,y \in$，差值 $1/(xy) - B(x,y)$的（$0,1]$, 最优有理界）在[4], 中得到，其形式为

$$\frac{1}{xy}\left[1 - \alpha\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}\right] \leq B(x,y) \leq \frac{1}{xy}\left[1 - \beta\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}\right] \tag{1.1}$$

其中最优常数为 $\alpha = \frac{2}{3}\pi^2 - 4 = 2.57973\cdots$和 $\beta = 1$。

2012年，Ivády [12] 加强了（1.1）的右侧，尽管证明中存在一些错误，后来已在[13], 中予以纠正，其中给出了关于 $B(x,\ y)$ 的一个双边不等式，具体而言，对所有 $x,\ y \in (0,1]$, 不等式

$$\frac{x+y-xy}{xy} \leq B(x,y) \leq \frac{x+y}{xy(1+xy)} \tag{1.2}$$

等号仅在 $x = y = 1$时成立。我们指出，不仅（1.1）的上界得到了改进，而且（1.2）的下界对于 $x,\ y \in (0,1]$ 满足$x+y \leq 1$。事实上，由于 $\alpha > 5/2$，对于 $x+y \leq 1$,

$$\begin{aligned} &x+y-xy-\left[1-\alpha\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}\right] > x+y-xy-\left[1-\frac{5}{2}\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}\right] \\ &= \frac{(1-x)(1-y)(3-2x-2y-2xy)}{2(1+x)(1+y)} \geq \frac{(1-x)(1-y)\left[3-2x-2y-(x+y)^2\right]}{2(1+x)(1+y)} \\ &= \frac{(1-x)(1-y)(1-x-y)(3+x+y)}{2(1+x)(1+y)} \geq 0. \end{aligned}$$

本文旨在为所有 $x,y \in (0,1]$ 给出 $B(x,y)$ 的一个新下界。

定理 1.1。设 $x,\ y \in (0,1]$。则不等式

$$B(x,y) > \frac{x+y}{xy}\left(1 - \frac{2xy}{x+y+1}\right)$$

成立。

注 1.1. 人们已经观察到

$$1 - \frac{xy}{x+y} \geq 1 - \frac{2xy}{x+y+1}$$

对以下情况成立： $x+y\geq 1$ 以及 $xy>0$，结合（1.2）可得

$$B(x,y)\geq \frac{x+y}{xy}\left(1-\frac{xy}{x+y}\right)\geq \frac{x+y}{xy}\left(1-\frac{2xy}{x+y+1}\right), \tag{1.3}$$

<escape>其中等号不能同时成立。这使我们能够证明定理 1.1 仅在 $0<x+y<1$ 的情况下成立。此外，如果定理 1.1 成立，那么</escape>

$$B(x,y)>\frac{x+y}{xy}\left(1-\frac{2xy}{x+y+1}\right)\geq \frac{x+y}{xy}\left(1-\frac{xy}{x+y}\right)$$

对 x， $y\in(0,1]$ 其中 $x+y\leq 1$，在此情形下，也就是说，我们的下界优于（1.2）。

2 个引理

在证明主定理之前，我们需要以下四个引理。第一个引理旨在估计两个ψ函数之差的一个下界，该结果由 H. Alzer 提出 [2,定理 7]

引理 2.1. 设 $n\geq 0$ 为整数且 $s\in(0,1)$。则不等式

$$\psi(x+1)-\psi(x+s)>(1-s)\left[\frac{1}{x+s+n}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(x+i+1)(x+i+s)}\right]$$

对 $x>0$成立。

下面的引理在主定理的证明中起着重要作用，该主定理给出了 ψ函数导数的有理界。在[19], 中，Yang 引入了函数

$$\mathcal{L}(x,a)=\frac{1}{90a^2+2}\log\left(x^2+x+\frac{3a+1}{3}\right)+\frac{45a^2}{90a^2+2}\log\left(x^2+x+\frac{15a-1}{45a}\right),$$

该函数将用于逼近 ψ函数。取 $a=2/5$ 或 $4/5$， $\mathcal{L}(x,a)$的若干偏导数为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x(x,2/5)&=\frac{3(1+2x)(61+90x+90x^2)}{2(11+15x+15x^2)(5+18x+18x^2)},\\
\mathcal{L}_x(x,4/5)&=\frac{3(1+2x)(199+180x+180x^2)}{2(17+15x+15x^2)(11+36x+36x^2)},\\
\mathcal{L}_{xx}(x,2/5)&=-\frac{3(4993+36546x+110526x^2+196560x^3+219780x^4+145800x^5+48600x^6)}{2(11+15x+15x^2)^2(5+18x+18x^2)^2},\\
\mathcal{L}_{xx}(x,4/5)&=-\frac{3(46537+322206x+784446x^2+1118880x^3+1045440x^4+583200x^5+194400x^6)}{2(17+15x+15x^2)^2(11+36x+36x^2)^2}.
\end{aligned}$$

特别地，[19, 引理 1] 已证明， $a\mapsto\mathcal{L}_x(x,a)$ 在 $(1/15,\infty)$ 上递减，而 $a\mapsto\mathcal{L}_{xx}(x,a)$ 递增。结合 [27, 推论 3.3]，可得如下引理。

引理 2.2。 设 $a_1 = \frac{40+3\sqrt{205}}{105} = 0.79003\cdots$, $a_2 = \frac{45-4\pi^2+3\sqrt{4\pi^4-80\pi^2+405}}{30\ \pi^2-9}() = 0.47053\cdots$和 $a_3 = 0.43218\cdots$是方程 $\mathcal{L}_{xx}(0,a) = \psi''(1)$的唯一解。那么不等式

$$\mathcal{L}_x(x,4/5) < \mathcal{L}_x(x,a_1) < \psi'(x+1) < \mathcal{L}_x(x,a_2) < \mathcal{L}_x(x,2/5) \tag{2.1}$$
$$\mathcal{L}_{xx}(x,2/5) < \mathcal{L}_{xx}(x,a_3) < \psi''(x+1) < \mathcal{L}_{xx}(x,a_1) < \mathcal{L}_{xx}(x,4/5) \tag{2.2}$$

对所有 $x > 0$ 均成立，且常数 a_1, a_2 和 a_3 是可能的最佳常数。

引理 2.3. 设 $0 < x < (\sqrt{3}+1)/2$，并定义函数

$$f(x) = \log\left[\frac{\Gamma(x+1)^2}{\Gamma(2x+1)}\right] - \log\left(1 - \frac{2x^2}{1+2x}\right).$$

则 $f(x) > 0$。

证明. 求导可得

$$f'(x) = 2\left[\psi(x+1) - \psi(2x+1) + \frac{2x(1+x)}{(1+2x)(1+2x-2x^2)}\right] \triangleq 2\hat{f}(x), \tag{2.3}$$
$$\hat{f}'(x) = \psi'(x+1) - 2\psi'(2x+1) + \frac{2(1+2x+2x^2+8x^3+4x^4)}{(1+2x)^2(1+2x-2x^2)^2},$$

结合式 (2.1) 可得

$$\begin{aligned}\hat{f}'(x) &> \mathcal{L}_x(x,4/5) - 2\mathcal{L}_x(2x,2/5) + \frac{2(1+2x+2x^2+8x^3+4x^4)}{(1+2x)^2(1+2x-2x^2)^2} \\ &= \frac{\left(\begin{array}{c} 5533+37994x+92054x^2+935456x^3+11448028x^4+67479864x^5 \\ +232646232x^6+513934848x^7+747879552x^8+717361920x^9 \\ +442143360x^{10}+158630400x^{11}+18662400x^{12} \end{array}\right)}{2\left[\begin{array}{c} (1+2x)^2(1+2x-2x^2)^2(17+15x+15x^2) \\ \times(11+36x+36x^2)(11+30x+60x^2)(5+36x+72x^2) \end{array}\right]} > 0.\end{aligned}$$

也就是说， $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上严格递增。由此，结合（2.3）以及 $f(0) = \hat{f}(0) = 0$，可得 $f(x) > 0$对于 $0 < x < (\sqrt{3}+1)/2$。 □

下面的引理给出一个简单的判据，用于确定一类特殊多项式的符号。这类多项式称为正负型多项式（简称 PN 型多项式）（见 [22, 24, 26]），其相反类型称为负正型多项式。关于这些多项式及其级数形式的更多信息，见 [20, 21, 23]。

引理 2.4. ([24,引理 4]) 设 $P_n(x)$ 是一个次数为 n 的正负型多项式，其表达式为

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k - \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k,$$

其中，对于所有 $k \geq 0$， $a_k \geq 0$，且存在至少两个整数 $0 \leq k_1 \leq m$ 和 $m+1 \leq k_2 \leq n$，使得 a_{k_1}, $a_{k_2} \neq 0$。那么存在 $x_0 \in (0, \infty)$，使得 $P_n(x_0) = 0$，且对于$x \in (0, x_0)$， $P_n(x) > 0$，而对于 $x \in (x_0, \infty)$， $P_n(x) < 0$。

注 2.1. 对于 PN 型多项式，很容易看出，如果 $P_n(x_1) > 0$，则 $P_n(x) > 0$ 在 $x \in (0, x_1)$ 上成立；如果 $P_n(x_2) < 0$，则 $P_n(x) < 0$ 在 $x \in (x_2, \infty)$ 上成立。相应地，对于 NP 型多项式 $P_n(x)$，$P_n(x)$ 在 $(0, x_1)$ 和 (x_2, ∞) 上的符号相反。

应用引理 2.4，我们列出一些 PN 型或 NP 型多项式的例子如下，用于证明主定理。

例 2.1。下面介绍几个 PN 型多项式:

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= 1802 + 51043x - 183763x^2 - 789936x^3 - 613605x^4, \\
p_1(x) &= \left[\begin{array}{l} 158486648 + 11733123789x + 31469130662x^2 + 40356637167x^3 \\ \quad +19492784598x^4 - 25810079475x^5 - 68587238430x^6 - 84246205050x^7 \\ \quad -76169872800x^8 - 54370440000x^9 - 28066500000x^{10} - 9112500000x^{11} \end{array} \right], \\
p_2(x) &= \left[\begin{array}{l} 9221 + 85665x + 368643x^2 + 918717x^3 + 1422360x^4 \\ \quad +1354842x^5 + 652860x^6 - 76140x^7 - 291600x^8 - 145800x^9 \end{array} \right], \\
p_3(x) &= \left[\begin{array}{l} 3699375712 + 26523455964x + 60608029362x^2 + 68646948321x^3 + 32033337786x^4 \\ \quad -25862152266x^5 - 50136084000x^6 - 35657677440x^7 - 11393978400x^8 \end{array} \right], \\
p_4(x) &= 37 + 90x - 93x^2 - 636x^3 - 810x^4 - 540x^5.
\end{aligned}
$$

由于 $p_0(3/20) = 75107551/32000$，$p_1(1/5) = 64124455182553/15625$，$p_2(1) = 4298768$，$p_3(1) = 68461255039$ 以及 $p_4(9/25) = 21101408/1953125$，由引理 2.4 可得

$$
\begin{aligned}
p_0(x) > 0 \quad &\text{for} \quad x \in [0, 3/20], && (2.4) \\
p_1(x) > 0 \quad &\text{for} \quad x \in [0, 1/5], && (2.5) \\
p_2(x) > 0 \quad &\text{for} \quad x \in [0, 1], && (2.6) \\
p_3(x) > 0 \quad &\text{for} \quad x \in [0, 1], && (2.7) \\
p_4(x) > 0 \quad &\text{for} \quad x \in [0, 9/25]. && (2.8)
\end{aligned}
$$

例 2.2。下面我们将使用几个 NP 型多项式，它们定义如下:

$$
\begin{aligned}
q_0(x) &= -11 - 5x + 11x^2 + 5x^3, & q_1(x) &= -5 + 129x + 131x^2 + 33x^3, \\
q_2(x) &= -65 + 254x + 242x^2 + 49x^3, & q_3(x) &= -84 + 222x + 157x^2 + 19x^3, \\
q_4(x) &= -45 + 101x + 43x^2 + 2x^3, & q_5(x) &= -11 + 23x + 4x^2.
\end{aligned}
$$

由于 $q_0(1/2) = -81/8$, $q_1(1/2) = 771/8$, $q_2(1/2) = 1029/8$, $q_3(1/2) = 549/8$, $q_4(1/2) = 33/2$ 以及 $q_5(1/2) = 3/2$，由引理 2.4 可知，对于 $x \in (0, 1/2)$，$q_j(x)$ $(1 \le j \le 5)$ 中的每一个在 $(0, 1/2)$ 上都有唯一的根。假设 x_j 是 $q_j(x)$ 对于$1 \le j \le 5$的正根。简单的数值计算得出 $x_1 = 0.03733\cdots < x_2 = 0.2114\cdots < x_3 = 0.3085\cdots < x_4 = 0.3822\cdots < x_5 = 0.4439\cdots$。换言之，根据注 2.1，我们看到$q_j(x) < 0$ 意味着 $q_{j+1}(x) < 0$ 在 $(0, 1/2]$ 对于 $1 \le j \le 4$。

3 定理证明1.1

本节给出以下情形下定理1.1 的证明： $0 < x + y \le 1$。不失一般性，我们假设 $x \le y$。

定理1.1的证明。设 $0 < x \le y \le 1 - x$ （即， $0 < x \le 1/2$），并且

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \log\left[\frac{xyB(x,y)}{x+y}\right] - \log\left(1 - \frac{2xy}{x+y+1}\right) \\ &= \log\left[\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)}\right] - \log\left(1 - \frac{2xy}{x+y+1}\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

对 F 关于 x （分别为 y）求导，得

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \psi(x+1) - \psi(x+y+1) + \frac{2y(1+y)}{(1+x+y)(1+x+y-2xy)} \tag{3.2}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \psi(y+1) - \psi(x+y+1) + \frac{2x(1+x)}{(1+x+y)(1+x+y-2xy)} \\ &= \psi(y+1) - \psi(y+x) - \frac{1}{x+y} + \frac{2x(1+x)}{(1+x+y)(1+x+y-2xy)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

我们分两种情形来完成证明。

情形 1： $1/5 \le x \le 1/2$ 和 $x \le y \le 1 - x$。

代入 $n = 3$ 引理2.1，由（3.3）可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &> (1-x)\left[\frac{1}{x+y+3} + \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{(y+i+1)(y+i+x)}\right] \\ &\quad - \frac{1}{x+y} + \frac{2x(1+x)}{(1+x+y)(1+x+y-2xy)} \\ &= \frac{xQ(x,y)}{(1+x+y-2xy)\prod_{j=1}^{3}\left[(y+j)(x+y+j)\right]}, \end{aligned}$$

其中， $Q(x,y) = -q_0(x) + \sum_{k=1}^{5} q_k(x) y^k - (1-2x)y^6$ 和 $q_k(x)$ $(0 \le k \le 5)$在例 2.2 中给出。由例 2.2 可知， $Q(x,y)$是 $x \in (0, 1/2]$上的 y的 PN 型多项式。因此，根据引理 2.4，对于 $1/5 < x \le 1/2$， $Q(x,y) > 0$，并且 $x \le y \le 1 - x$ 与

$$Q(x, 1-x) = \frac{4}{625}(1-x)\Big[252 + (5x-1)\big(7137 + (1-x)(24365 + 375x^2) + 5300x^2\big)\Big] > 0.$$

因此， $F(x, y) \ge F(x, x) = f(x) > 0$ 对于 $1/5 \le x \le 1/2$ 和 $x \le y \le 1 - x$ 根据引理2.3。

情形 2： $0 < x < 1/5$ 和 $x \le y \le 1 - x$。

在此情形下，我们将梯形区域 $\{(x,y) | x < y < 1-x$记为 D 和 ∂D，并将其边界记为 $0 < x < 1/5\}$。随后我们将证明， $F(x,y)$ 在 $(x,y) \in D$上没有极值。

由（3.2）和（3.3），

$$G(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \psi(x+1) - \psi(y+1) - \frac{2(x-y)}{1+x+y-2xy}. \tag{3.4}$$

我们继续分为三种子情况。

子情况 A: $y \geq x + 9/25$。

在此情形下，通过求导，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \psi'(x+1) - \frac{2(1+2y-2y^2)}{(1+x+y-2xy)^2}, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} = \frac{12(y-x)}{(1+x+y-2xy)^3} > 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

这给出

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} > \frac{\partial G(x, x+9/25)}{\partial x} = \psi'(x+1) - \frac{913+350x-1250x^2}{2(17+16x-25x^2)^2} \triangleq g(x). \tag{3.6}$$

由（2.1）和（2.4）可知

$$\begin{aligned} g(x) &> \mathcal{L}_x(x, 4/5) - \frac{913+350x-1250x^2}{2(17+16x-25x^2)^2} \\ &= \frac{p_0(x) + 307230x^5 + 823500x^6 + 675000x^7}{2(17+15x+15x^2)(17+16x-25x^2)^2(11+36x+36x^2)} > 0 \end{aligned}$$

当 $x \in (0, 3/20]$。另一方面，由（2.2）和（2.5），

$$\begin{aligned} g'(x) &= \psi''(x+1) + \frac{11633-21600x-13125x^2+31250x^3}{(17+16x-25x^2)^3} \\ &< \mathcal{L}_{xx}(x, 4/5) + \frac{11633-21600x-13125x^2+31250x^3}{(17+16x-25x^2)^3} \\ &= -\frac{127679911(10x-1) + xp_1(x)}{2(17+15x+15x^2)^2(17+16x-25x^2)^3(11+36x+36x^2)^2} < 0 \end{aligned}$$

当 $x \in (1/10, 1/5)$，这意味着 $g(x) > g(1/5) = 0.001914\cdots > 0$ 当 $x \in (1/10, 1/5)$。综上，$\partial G/\partial x > 0$ 当 $0 < x < 1/5$ 由（3.6）可知。此外，由（2.2）、（2.6）和（3.4），当$y \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} G(0,y) &= -\frac{4}{(1+y)^3} - \psi''(1+y) < -\frac{4}{(1+y)^3} - \mathcal{L}_{yy}(y, 2/5) \\ &= -\frac{p_2(y)}{2(1+y)^3(11+15y+15y^2)^2(5+18y+18y^2)^2} < 0, \end{aligned}$$

这表明 $G(0, y)$ 在 $[0,1]$ 上严格凹。因此，

$$G(x,y) > G(0,y) \geq \min\left\{G(0,0), G(0,1)\right\} = 0$$

对于 $0 < x < 1/5$ 和 $x + 9/25 \leq y < 1$。

子情形 B: $9/25 < y < x + 9/25$。

在这种情况下，$y - 9/25 < x < 1/5$。由（3.5）容易看出，$\partial G/\partial y$严格递增

对于 $0<x<y$，因此由（2.1）

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(x,y)}{\partial y} &> \frac{\partial G(y-9/25,y)}{\partial y}\\ &= \frac{13+2150y-1250y^2}{2(8+34y-25y^2)^2}-\psi'(y+1) > \frac{13+2150y-1250y^2}{2(8+34y-25y^2)^2}-\mathcal{L}_y(y,2/5)\\ &= \frac{5275352+(25y-9)\left[\begin{array}{c}4404553+18643550y+55576875y^2+88996875y^3\\ +9375000y^4+843750y^4(1-y)(57+50y)\end{array}\right]}{6250(11+15y+15y^2)(5+18y+18y^2)(8+34y-25y^2)^2}>0.\end{aligned}$$

此外，由（2.2）和（2.7），

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}G(x,9/25) &= \psi''(x+1)+\frac{25564}{(34+7x)^3} < \mathcal{L}_{xx}(x,4/5)+\frac{25564}{(34+7x)^3}\\ &= -\frac{p_3(x)+200037600x^9}{2(34+7x)^3(17+15x+15x^2)^2(11+36x+36x^2)^2}<0\end{aligned}$$

对于 $x\in(0,1/5)$。也就是说，$G(x,9/25)$ 在 $(0,1/5)$ 上严格凹，因此

$$\begin{aligned}G(x,y) > G(x,9/25) &> \min\left\{G(0,9/25),G(1/5,9/25)\right\}\\ &= \min\{0.0554\cdots,0.04015\cdots\}>0.\end{aligned}$$

子情形 C：$x<y\le 9/25$。

如子情形 B 中所述，$\partial G/\partial y$ 在 $0<x<y$ 上严格递增，因此由（2.1）

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(x,y)}{\partial y} &> \frac{\partial G(0,y)}{\partial y}=\frac{2}{(y+1)^2}-\psi'(y+1) > \frac{2}{(y+1)^2}-\mathcal{L}_y(y,2/5)\\ &= \frac{p_4(y)}{2(1+y)^2(11+15y+15y^2)(5+18y+18y^2)}>0\end{aligned}$$

对于 $0<x<y\le 9/25$，其中 $p_4(y)>0$ 对于 $y\in(0,9/25]$ 可由（2.8）推出。因此，$G(x,y)>G(x,x)=0$ 由（3.4）得出。

总之，对于所有的 $(x,y)\in D$，$G(x,y)>0$，这表明 $F(x,y)$ 在 $(x,y)\in D$ 上没有极值。否则，存在一点 $(x_0,y_0)\in D$，使得

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad G(x_0,y_0)=0.$$

对于 $(x,y)\in\partial D$，$F(x,y)$ 具有以下性质：

(i) 当 $x+y=1$, $F(x,y)>0$ 时，由 (1.3) 和 (3.1) 得出；(ii) 当 $x=0$ 时，由 (3.1) 易知 $F(0,y)=0$；(iii) 当 $x=y$ 时，由引理 2.3，$F(x,x)=f(x)>0$，其中 $x\in\in(0,1)$；(iv) 当 $x=1/5$ 时，已在情形 1 中证明 $F(1/5,y)>0$，其中 $1/5\le x\le 4/5$。

¯由于 $F(x,y)$ 在 D 上的连续性可知， $F(x,y)$ 只能在 D 的边界处取得其最小值¯，也就是说，

$$F(x,y) \geq \min_{(x,y)\in\partial D} \left\{F(x,1-x), F(0,y), F(x,x), F(1/5,y)\right\} = 0$$

等号仅在 $x = 0$ 时成立。

证明至此完成。 □

资金支持
本研究得到中国国家自然科学基金（11971142）和浙江省自然科学基金（LY19A010012）的资助。

数据和材料的可用性 不适用。

声明
利益冲突 作者声明不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] Ahag P., Czy˙z R.：一条贝塔函数不等式及其在多复势理论中的应用，《不等式及其应用》**2009**，文章编号：901397，（2009）[2] Alzer H.：关于伽马函数和ψ函数的一些不等式，《数学计算》**66**(217)，373–389，（1997）[3] Alzer H.：贝塔函数的锐不等式，《数学研究》**12**，15–21，（2001）[4] Alzer H.：若干贝塔函数不等式，《爱丁堡皇家学会会刊》**133A**，731–745，（2003）[5] Atale O.：纽曼不等式与伽马函数的对数凸性。《国际数学虚拟研究所通报》**12**(3)，469–476，（2022）[6] Cerone P.：特殊函数：近似与界，《应用分析与离散数学》**1**(1)，72–91，（2007）[7] Chen C.-P., Mortici C.：与伽马函数相关的渐近展开与不等式。《应用分析与离散数学》**16**(2)，379–399，（2022）[8] Dragomir S. S., Agarwal R. P., Barnett N. S.：通过一些经典及新型积分不等式研究贝塔函数和伽马函数的不等式。《不等式及其应用》**5**，103–165（2000）[9] Das S., Swaminathan, A.：多伽马函数的一个调和平均不等式。《数学不等式杂志》**23**(1)，71–76，（2020）[10] Dwyer J.：完全图中的回路及其与快速增长特殊函数的关系，www.algana.co.uk/publications/Circuits.pdf[11] From, S. G., Ratnasingam, S.：贝塔函数及某些贝塔函数之比的一些新不等式。数学研究成果《应用数学成果》**15**，论文编号100302，共17页，（2022）[12] Ivády P.：关于一个贝塔函数不等式，《数学不等式杂志》**6**(3)，333-341，（2012）[13] Ivády P.：关于“一个贝塔函数不等式”的更正，《数学不等式杂志》**10**(2)，597–601，（2016）

[14]Liang L.-C., Zheng L.-F., Wan, A.：涉及多伽马函数的一类完全单调函数。《不等式及其应用》论文编号12，共16页，（2022）[15] Pérez-Marco, R.：欧拉伽马函数的定义。数学教学 68(1-2)，135–160，（2022）[16] Qi, F.：贝塔分布的Fisher-Rao流形截面曲率下界及涉及多伽马函数的函数的完全单调性。数学研究成果 76(4)，论文编号217，共16页，（2021）[17] Rao B. R.：多元分布不完全矩的Gautschi型不等式及其应用，Metron.，39，43–51，（1981年）[18] Yin L.：广义(p,k)-多伽马函数之比的单调性。《数学不等式杂志》16(3)，915–921，（2022）[19] Yang Z.-H.：涉及双伽马函数的函数的单调性与凸性及其应用（2014）。arXiv:1408.2245 [math.CA][20] Yang Z.-H.：用单参数均值逼近第二类完全椭圆积分的锐估计。数学分析及其应用杂志 467(1)，446—461，（2018）[21] Yang Z.-H, Tian J.-F.：两个拉普拉斯变换之比的单调性法则及其应用。数学分析及其应用杂志 470(2)，821—845，（2019）[22] Yang Z.-H., Qian W.-M., Chu Y.-M, Zhang W.：关于伽马函数的有理界。《不等式及其应用》，2017，17页，论文编号210，（2017）[23] Yang Z.-H., Qian, W.-M., Chu, Y.-M., Zhang, W.：算术几何平均数与第一类完全椭圆积分的近似。《数学分析及其应用杂志》462(2)，1714–1726，（2018）[24] Yang Z.-H., Tian J.-F.：与伽马函数相关的单调性与锐不等式。《数学不等式杂志》12(1)，1–22，（2018）[25] Yang, Z.-H. Tian, J.-F.：两个伽马函数之比的渐近级数余项的完全单调性。数学分析及其应用杂志 517(2)，论文编号126649，共15页，（2023年）[26] Yang Z.-H., Tian J.-F., Wang M.-K.：关于新均值对其参数的单调性的Bhatia–Li猜想得到肯定回答。西班牙皇家精确、物理与自然科学学会A辑数学，114(3)，论文编号126，（2020）[27] Zhao, T.-H., Yang Z.-H., Chu Y.-M.：涉及ψ函数的函数的单调性及其应用，《不等式及其应用》2015，文章编号193（2015）。