arXiv:2305.02762v2 [math.CO] 9 Apr 2025

保证禁掉某些奇圈的图为二部图的最小度紧界

Xiaoli Yuan* Yuejian Peng†

摘要

Erd˝os 和 Simonovits 提出了以下问题：对于一个整数 $r \geq 2$ 和一个非二部图族 $\mathcal{H}$, 确定 α 的下确界，使得任何最小度至少为 αn 的 $\mathcal{H}$-自由 n-顶点图的色数都至多为 r。我们对 $r = 2$ 以及任意由奇圈组成的图族回答了这个问题。设 $\mathcal{C}$ 为一个奇圈族，其中$C_{2\ell+1}$是 $\mathcal{C}$ 中不包含的最短奇圈， C_{2k+1} 是 $\mathcal{C}$中的最长奇圈。我们证明，若 G 是一个满足 $n \geq 1000k^8$ 且 $\delta(G) > \max\{n/(2(2\ell+1)), 2n/(2k+3)\}$的 n-顶点 $\mathcal{C}$-自由图，则 G 是二部图。此外，最小度的界是紧的。

关键词：圈；稳定性；最小度条件。

数学主题分类。05C35。

1 引言

设 H 为一个图。如果一个图不包含 H 作为子图，则称其为 H-自由图。极值图论中的一个核心问题是确定H-自由图的最大边数。我们用 ex(n, H) 表示具有 n 个顶点的 H-自由图的最大边数。令 $T_r(n)$表示 Tur´án 图，即具有 n 个顶点的完全 r部图，其中有 r 个部，每个部的大小为 $\lfloor n/r \rfloor$ 或 $\lceil n/r \rceil$，并且 $t_r(n) = e(T_r(n))$。经典的 Tur´án 定理[15] 表明，在所有具有 n 个顶点的K_{r+1}-自由图中， $T_r(n)$是边数达到最大值的唯一图。Erd˝os 和 Simonovits [5, 14] 证明了如下稳定性结果：如果G 是一个 K_{r+1}-自由图，且有 $t_r(n) - o(n^2)$ 条边，那么通过添加或删除总共 $o(n^2)$ 条边，可以将 G 变为 Tur´án 图$T_r(n)$。相比边数，自然会想到考察具有大最小度的 K_{r+1}-自由图的结构是否接近r部图。1974年，Andr´asfai、Erd˝os 和 S´os [1] 证明了以下重要结果。

*湖南大学数学学院，中国长沙 410082。电子邮箱：xiaoliyuan@hnu.edu.cn。

†通讯作者。湖南大学数学学院，中国长沙 410082。电子邮箱：ypeng1@hnu.edu.cn。部分工作得到国家自然科学基金（编号：11931002）资助。本文发表于《欧洲组合学杂志》127 卷（2025 年），第 104143 号。本文为最终版本，参见 https://doi.org/10.1016/j.ejc.2025.104143。

定理 1.1（Andr´asfai、Erd˝os 和 S´os [1]）。设 $r \geq 2$。若 G 是一个有 n 个顶点、最小度大于 $(3r-4)n/(3r-1)$ 的 K_{r+1}-自由图，则 G 是 r部图。此外，该界是紧的。

此外，他们还证明了如下关于禁止某些奇圈的图的最小度稳定性结果。令 $\delta(G)$ 表示图 G 的最小度。

定理 1.2（Andr´asfai、Erd˝os 和 S´os [1]）。如果 G 是一个有 n 个顶点的 $\{C_3, C_5, \ldots, C_{2k+1}\}$-自由图，且

$$\delta(G) > \frac{2n}{2k+3},$$

那么 G 是二部图。

对于具有足够大最小度的图中圈的存在性，人们已经进行了深入研究（参见 [2, 3, 6, 9, 11–13, 16]）。在 [9], H¨aggkvist 获得了以下关于长度不超过 9 的单个奇圈的相关结果。

定理 1.3（H¨aggkvist [9]）。设 $n > \binom{k+2}{2}(2k+3)(3k+2)$，且 G 是一个具有 n 个顶点的 C_{2k+1}-自由图，满足

$$\delta(G) > \frac{2n}{2k+3}.$$

如果 $k = \{1, 2, 3, 4\}$，那么 G是二部的。

给定一个图 G，图 G的膨胀图是通过将 G 中的每个顶点 v_i替换为一个由 V_i 个顶点组成的独立集，并在 V_i 中的每个顶点与 V_j 中的每个顶点之间连边而得到的，前提是 $v_iv_j \in E$（G）。在上述定理中，关于最小度的条件是最佳可能的，这一点可由极值图 C_{2k+3}（$n/$（$2k+3$））明显看出，其中 C_{2k+3}（$n/$（$2k+3$））表示 C_{2k+3} 的一个膨胀图，且每个部分都是大小为 $n/$（$2k+3$）的独立集。在定理 1.3 中， k 的取值无法进一步扩大。H¨aggkvist 构造了如下反例：取 $K_{n/6,n/6}$的三个点不交副本，从每个副本中选取一个顶点，并将所选的任意两个顶点连接起来。显然，对于 $k \geq 5$，该图是 C_{2k+1}-自由的，且最小度为 $n/6 > 2n/$（$2k+3$），但它不是二部的。注意，在上述 H¨aggkvist 的构造中，最小度为 $n/6$。Yuan 和 Peng [17] 考虑了这样一个问题：δ（G） $> n/6$ 是否能保证一个 n-顶点的 C_{2k+1}-自由图 G 在 $k \geq 5$时是二部的，并对此问题给出了肯定的回答。

定理 1.4（Yuan、Peng [17]）。设 $k \geq 5$ 和 $n \geq 21000k$ 为整数。设 G 为一个 n顶点C_{2k+1}自由图。若

$$\delta(G) \geq \frac{n}{6},$$

则 G 要么是二部的，要么 $\delta(G) = n/6$ ，且 G 是由$K_{n/6,\ n/6}$的三个点不交副本构成的图：从每个副本中选取一个顶点，并将所选的任意两个顶点相连。

定理 1.2、1.3 和 1.4 之间有什么联系？一般而言，我们探讨要保证一个 n 顶点图在不含某个

奇圈族时成为二部图，最小度的紧界是多少。设 $\mathcal{C}$ 为一个奇圈族。我们发现，不属于 $\mathcal{C}$ 的最短奇圈的长度与 $\mathcal{C}$ 中最长奇圈的长度决定了这个紧界。设 $C_{2\ell+1}$ 为不属于 $\mathcal{C}$ 的最短奇圈，C_{2k+1} 为 $\mathcal{C}$ 中最长奇圈。令 $BC_{2\ell+1}(n)$ 表示这样一个图：取 $K_{n/(2(2\ell+1))}$ 的 $2\ell+1$ 个点不交副本，并在每个副本中选取一个顶点，使这些顶点构成一个长度为 $2\ell+1$ 的圈。注意，$BC_{2\ell+1}(n)$ 和具有 n 个顶点的 C_{2k+3} 的平衡膨胀（记为 $C_{2k+3}(n/(2k+3))$）都是 n 顶点的 $\mathcal{C}$-自由非二部图。我们发现，如果 G 是一个 n 顶点的 $\mathcal{C}$-自由图，且其最小度为 $\delta(G) > \max\{n/(2(2\ell+1)),\ 2n/(2k+3)\}$（注意，$\delta(BC_{2\ell+1}(n)) = n/(2(2\ell+1))$，且 $\delta(C_{2k+3}(n/(2k+3))) = 2n/(2k+3)$），那么 G 是二部图。注意，图 $BC_{2\ell+1}(n)$ 和 $C_{2k+3}(n/(2k+3))$ 表明这个界是紧的。此外，最小度为 $\max\{n/(2(2\ell+1)),\ 2n/(2k+3)\} = n/(2(2\ell+1))$ 的 n 顶点 $\mathcal{C}$-自由非二部图只有 $BC_{2\ell+1}(n)$；而最小度为 $\max\{n/(2(2\ell+1)),\ 2n/(2k+3)\} = 2n/(2k+3)$ 的 n 顶点 $\mathcal{C}$-自由非二部图只有 $C_{2k+3}(n/(2k+3))$。这是我们的主要结果。

定理 1.5。设 $\ell < k$ 和 $n \geq 1000k^8$ 为正整数。设 $\mathcal{C}$ 为一族奇圈，$C_{2\ell+1}$ 为不属于 $\mathcal{C}$ 的最短奇圈，C_{2k+1} 为 $\mathcal{C}$ 中的最长奇圈。若 G 是一个有 $\delta(G) > \max\{n/(2(2\ell+1)),\ 2n/(2k+3)\}$ 的 n 顶点 $\mathcal{C}$ 无圈图，则 G 是二部的。此外，最小度为 $\max\{n/(2(2\ell+1)),\ 2n/(2k+3)\} = n/(2(2\ell+1))$ 的 n 顶点 $\mathcal{C}$ 无圈非二部图仅有 $BC_{2\ell+1}(n)$；最小度为 $\max\{n/(2(2\ell+1)),\ 2n/(2k+3)\} = 2n/(2k+3)$ 的 n 顶点 $\mathcal{C}$ 无圈非二部图仅有 $C_{2k+3}(n/(2k+3))$。

定理 1.5 统一了定理 1.2、1.3 和 1.4。我们的结果也与 Erd˝os 和 Simonovits 提出的一个问题有关：给定一个整数 $r \geq 2$ 和一个非二部图族 $\mathcal{H}$，使得任何最小度至少为 αn 的 $\mathcal{H}$-自由 n-顶点图的色数至多为 r 的 α 紧界是多少？当 n 足够大时，定理 1.5 对 $r = 2$ 以及任意奇圈族回答了这个问题。

注意，若 $\ell < (2k-1)/8$，则 $\max\{n/(2(2\ell+1)),\ 2n/(2k+3)\} = n/(2(2\ell+1))$；若 $\ell > (2k-1)/8$，则 $\max\{n/(2(2\ell+1)),\ 2n/(2k+3)\} = 2n/(2k+3)$。另请注意，一个 $\mathcal{C}$-自由图（$\mathcal{C}$ 是一个奇圈族，其中 $C_{2\ell+1}$ 是不属于 $\mathcal{C}$ 的最短奇圈，而 C_{2k+1} 是 $\mathcal{C}$ 中最长的奇圈）必定是 $\{C_3, C_5, \ldots, C_{2\ell-1};\ C_{2k+1}\}$-自由的。因此，要证明定理 1.5，只需证明以下等价形式。

定理 1.6. 设 $2 \leq \ell < k$、$n \geq 1000k^8$ 为整数，且 G 是一个 n-顶点的 $\{C_3, C_5, \ldots, C_{2\ell-1};\ C_{2k+1}\}$-自由图。

(i) 若 $\ell > (2k-1)/8$ 且 $\delta(G) \geq 2n/(2k+3)$，则 G 要么是二部的，要么 $\delta(G) = 2n/(2k+3)$ 且 $G = C_{2k+3}(n/(2k+3))$。

(ii) 若 $2 \leq \ell < (2k-1)/8$ 且 $\delta(G) \geq n/(2(2\ell+1))$，则 G 要么是二部的，要么 $\delta(G) = n/(2(2\ell+1))$ 且 $G = BC_{2\ell+1}(n)$。

注。通过更仔细的计算，可以改进定理 1.6 中的界 $n \geq 1000k^8$。定理 1.3 和定理 1.4 对应于 $\ell = 1$ 的情形，因此我们假设定理 1.6 中的 $\ell \geq 2$。

我们始终采用标准记号。设 $G(V,E)$ 为一个简单无向图，其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$，我们用 $e(G)$ 表示 $E(G)$ 的大小。对于 $S \subseteq V(G)$，$G[S]$ 表示由 S 在 G 中诱导的子图，我们用 $e(S)$ 表示 $G[S]$ 中的边数。对于任意顶点 $v \in V(G)$，$N(v)$ 表示 v 在 G 中的所有邻点构成的集合，而 $N_S(v) = N(v) \cap S$。我们用 $d(v) = |N(v)|$ 和 $d_S(v) = |N_S(v)|$。对于 $T \subseteq V(G)$，令 $N_S(T) = \{x \in S \setminus T$: 存在一个顶点 $y \in T$，使得 $xy \in E(G)\}$。令 $G - T$ 表示由$V(G) - T$诱导的子图。对于不相交的 X、$Y \subseteq V(G)$，$G[X,Y]$ 表示由X和 Y 在 G 中诱导的二部子图，即 $G[X,Y]$ 由所有关联于 X 中一个顶点和 Y 中一个顶点的边构成，我们用 $e(X,Y)$ 表示 $E(G[X,Y])$ 的大小。全文中，令 P_k 表示一个具有 k 个顶点的路径，并将 P_k 中的端点称为端点。令 C_k 为一个具有 k 个顶点的圈，我们将连接 C_k 中任意两个不相邻顶点的边称为弦。

2 定理1.6的证明

证明中将应用以下两个结果。第一个是 Erd˝os 和 Gallai 关于路径 Tur´an 数的经典结果。

定理 2.1（Erd˝os 和 Gallai [8]）。对于 $k \geq 1$,

$$\mathrm{ex}(n, P_{k+1}) \leq \frac{(k-1)n}{2}.$$

第二个结果保证，每个图 G 都包含一个子图，其最小度至少为 G 平均度的一半。

引理 2.2。如果 G 有 m 条边和 n 个顶点，那么 G 包含一个子图 H，其 $\delta(H) \geq \frac{m}{n}$。

上述引理已见于许多参考文献中，其证明方法是逐个删除最小度顶点，直到没有顶点的度小于平均度的一半。

现在我们将给出定理 1.6 的证明。

定理 1.6 的证明。设 $2 \leq \ell < k$ 和 $n \geq 1000k^8$ 为整数。设 G 是一个 n-顶点、$\{C_3, C_5, \ldots, C_{2\ell-1}$-自由图，且满足定理 1.6 (i) 或 (ii) 中的最小度条件。假设 G 不是二部图，则 G 中存在一个奇圈。令 $C_{2m+1} = v_1v_2 \ldots v_{2m+1}v_1$ 为 G 的最短顺时针奇圈。注意，由于 G 是 $\{C_3, \ldots, C_{2\ell-1}$、$C_{2k+1}\}$- 自由的，且 $\ell \geq 2$，因此 $m \geq \ell \geq 2$。令 $G' = G - V$（C_{2m+1}）。对于任意一对顶点 v_i、$v_j \in V$（C_{2m+1}），令 $d_{C_{2m+1}}$（v_i, v_j）表示 v_i 和 v_j 在 C_{2m+1} 中之间的最短路径长度。回顾一下，$d_{C_{2m+1}}$（v）表示 v 在 C_{2m+1} 中的邻居数。

断言 2.1. 对于任意 $v \in V(G')$，有 $d_{C_{2m+1}}(v) \leq 2$. 此外，对于任意 $v \in V(G')$，若 v 与 C_{2m+1}中的两个顶点 v_i和 v_j相邻，则 $d_{C_{2m+1}}(v_i, v_j) = 2$。

断言 2.1 的证明。反设存在一个顶点 $x \in V(G')$，使得$d_{C_{2m+1}}(x) \geq 3$。我们假设 $\{v_i, v_j, v_k\} \subseteq N_{C_{2m+1}}(x)$，其中 $1 \leq i < j < k \leq 2m+1$。由于$m \geq 2$，$\{v_i, v_j, v_k\}$中的任意两个顶点都不相邻。否则，不失一般性，假设 $v_iv_j \in E(G)$，那么 vv_iv_jv 是 C_3的一个副本，这与 C_{2m+1} 是最短圈矛盾。此外，C_{2m+1}被 $\{v_i, v_j, v_k\}$分成三条路径。由于 C_{2m+1}是 G的奇圈，因此至少有一条路径的长度为奇数。不失一般性，假设 $v_kv_{k+1}\dots v_{2m+1}v_1\dots v_i$是 C_{2m+1} 的一条奇路径。由于$\{v_i, v_j, v_k\}$中的任意两个顶点都不相邻，$v_iv_{i+1}\dots v_jv_{j+1}\dots v_k$是一条长度至少为 4 的路径，于是我们用路径 v_ivv_k替换 C_{2m+1}的路径 $v_iv_{i+1}\dots v_jv_{j+1}\dots v_k$，得到一个更短的奇圈$v_ivv_kv_{k+1}\dots v_{2m+1}v_1\dots v_i$，矛盾。因此，对于任意顶点 $v \in V(G')$，有 $d_{C_{2m+1}}(v) \leq 2$.

假设 $v \in V(G')$ 和 v 与 C_{2m+1} 中的两个顶点 v_i 和 v_j 相邻。假设 $j > i$，若 $d_{C_{2m+1}}(v_i, v_j) \neq 2$，则 $d_{C_{2m+1}}(v_i, v_j) > 2$，因此 $v_iv_{i+1}\dots v_j$ 和 $v_iv_{i-1}\dots v_{2m+1}\dots v_j$ 是两条长度至少为 3 的路径。由于 C_{2m+1} 是一个奇圈，$v_iv_{i+1}\dots v_j$ 是 C_{2m+1} 的一条奇路径，或 $v_iv_{i-1}\dots v_{2m+1}\dots v_j$ 是 C_{2m+1}的一条奇路径。不失一般性，假设 $v_iv_{i+1}\dots v_j$ 是 C_{2m+1}的一条奇路径，那么 $v_iv_{i-1}\dots v_{2m+1}\dots v_j$ 是C_{2m+1} 的一条长度至少为 4 的偶路径。因此，$\{v_iv_{i+1}\dots v_j\}$ 与 v 一起在 G 中诱导出一个更短的奇圈，矛盾。断言 2.1 的证明到此完成。□

设 $S_i = N_{G'}(v_i)$，其中 $i \in [2m+1]$ 和 $S = \bigcup_{i=1}^{2m+1} S_i$。设 $T_i = N_{G'-S}(S_i)$，其中 $i \in [2m+1]$、$T = \bigcup_{i=1}^{2m+1} T_i$ 和 $H = G' - S - T$。

接下来，我们证明以下结果，从而获得关于 G 的重要结构信息。

命题 2.3. (i) 若 $\ell > (2k-1)/8$ and $\delta(G) \geq 2n/(2k+3)$，则 $m = k+1$。(ii) 若 $2 \leq \ell < (2k-1)/8$, $\delta(G) \geq n/(2(2\ell+1))$，则 $m = \ell$ and 对于 $i \neq j \in [2\ell+1]$，我们有$S_i \cap S_j = \emptyset$, $T_i \cap T_j = \emptyset$, $E(G[S_i]) = \emptyset$, $E(G[T_i]) = \emptyset$, $E(G[S_i, S_j]) = \emptyset$, $E(G[T_i, T_j]) = \emptyset$, and$E(G[S_i, T_j]) = \emptyset$。

命题 2.3 的证明。我们首先证明 m 不能太大。

断言 2.2。我们有 $\ell \leq m$，此外，以下结论成立。(i) 若 $\delta(G) \geq \frac{2}{2k+3}n$，则 $m \leq k+1 (m \neq k)$。(ii) 若 $2 \leq \ell < \frac{2k-1}{8}$ 且 $\delta(G) \geq \frac{1}{(2\ell+1)}n$，则 $m \leq k-1$。

断言 2.2 的证明。由于 G 是 $\{C_3, \dots, C_{2\ell-1};\ C_{2k+1}\}$-自由的，因此有 $m \geq \ell$。由于 C_{2m+1} 是 G 的最短奇圈，它不含任何弦。根据断言 2.1，对任意 $v \in V(G')$，$d_{C_{2m+1}}(v) \leq 2$，因此

$$(2m+1) \cdot (\delta(G) - 2) \leq e(V(C_{2m+1}), V(G')) \leq 2 \cdot (n - (2m+1)).$$

根据 (i) 和 (ii) 中关于最小度的条件，这意味着若 $\delta(G) \geq 2n/(2k+3)$，则 $m \leq k+1 (m \neq k)$; 且若 $\ell < (2k-1)/8$ 且 $\delta(G) \geq n/(2(2\ell+1))$，则$m \leq k-1$。断言 2.2 的证明至此完成。□

对于 i、$j \in [2m+1]$ 和 $i \neq j$，如果我们考察从 v_i 到 v_j 的路径（沿 C_{2m+1} 顺时针方向）以及从 v_i 到 v_j 的路径（沿 C_{2m+1} 逆时针方向），那么其中一条的阶为偶数

（顶点数），另一条的阶为奇数。在全文中，我们用 P_{ij}^{even} 表示阶为偶数的那条路径，其阶记为 p_{ij}^{even}；用 P_{ij}^{odd} 表示阶为奇数的那条路径，其阶记为 p_{ij}^{odd}。

若 $m = k+1$，则命题 2.3(i) 成立。假设 $m \neq k+1$，由命题 2.2 可得 $\ell \leq m \leq k-1$。因此，我们只需证明，在假设$\ell \leq m \leq k-1$下，命题 2.3(i) 中的假设 $\ell > (2k-1)/8$和 $\delta(G) \geq 2n/(2k+3)$ 不会成立，并证明命题 2.3(ii) 成立。

断言 2.3。设 i、$j \in [2m+1]$ 和 $i \neq j$。则有以下结论。

(i) 在 G' 中，不存在两端都在 S_i中的 P_{2k}。(ii) 在 G' 中，不存在一端在 S_i、另一端在 S_j的 $P_{2k+1-p_{ij}^{odd}}$。(iii) 在 G' 中，不存在一端在 $S_i \setminus S_j$、另一端在 T_j的 $P_{2k-p_{ij}^{even}}$。(iv) 在 G' 中，不存在一端在 $T_i \setminus T_j$、另一端在 T_j的 $P_{2k-1-p_{ij}^{odd}}$。

断言 2.3 的证明。(i) 如果 G' 中有一条 P_{2k}，其两个端点都在 S_i 中，那么 $V(P_{2k})$ 与 v_i 一起会在 G' 中诱导出一个 C_{2k+1} 的副本，这与此矛盾。

(ii) 如果 G' 中有一条 $P_{2k+1-p_{ij}^{odd}}$，其一个端点 x 在 S_i 中，另一个端点 y 在 S_j 中，那么 $V(P_{2k+1-p_{ij}^{odd}})$ 与 $V(P_{ij}^{odd})$ 一起会诱导出一个 C_{2k+1} 的副本，这与此矛盾。

(iii) 如果 G' 中有一条 $P_{2k-p_{ij}^{even}}$，其一个端点 x 在 $S_i \setminus S_j$ 中，另一个端点 y 在 T_j 中。根据 T_j 的定义，存在一个顶点 $z \in S_j$，使得 $yz \in E(G)$。于是，$V(P_{2k-p_{ij}^{even}}) \cup V(P_{ij}^{even}) \cup \{z\}$ 会诱导出一个 C_{2k+1} 的副本，这与此矛盾。

(iv) 若在 G' 中存在一条 $P_{2k-1-p_{ij}^{odd}}$，其一端在 $T_i \setminus T_j$ 中，另一端在 T_j 中。根据 $T_i \setminus T_j$ 和 T_j 的定义，存在两个顶点 $x' \in S_i$ 和 $y' \in S_j$，使得 $xx' \in E(G)$ 且 $yy' \in E(G)$。于是，$V(P_{2k-1-p_{ij}^{odd}}) \cup V(P_{ij}^{odd}) \cup \{x', y'\}$ 诱导出一个 C_{2k+1} 的副本，矛盾。至此，断言 2.3 的证明完成。□

以下观察对于获得 G 的结构信息至关重要。

断言 2.4. 设 $\frac{1}{40k^5} \leq \epsilon \leq \frac{1}{20k^5}$。则对于 i、$j \in [2m+1]$ 和 $i \neq j$，$|S_i \cap S_j| < \epsilon n$.

断言 2.4 的证明。反设存在 i、$j \in [2m+1]$ 和 $i \neq j$，使得 $|S_i \cap S_j| \geq \epsilon n$。令 $S_{ij} = S_i \cap S_j$、$N_T(S_{ij}) = T_{ij}$，则 $|S_{ij}| \geq \epsilon n$。对于每个顶点 $v \in V(S_{ij})$，由于 $d(v) \geq \delta(G)$，且根据断言 2.1，可得 $d_{G'}(v) \geq \delta(G) - 2$。然后

$$|S_{ij}| \cdot (\delta(G) - 2) \leq \sum_{v \in S_{ij}} d_{G'}(v) \leq e(S_{ij}, T_{ij}) + \sum_{q=1}^{2m+1} e(S_{ij}, S_q - S_{ij}) + 2e(S_{ij}). \tag{2.1}$$

由断言 2.3(ii)，对于每个 $q \in [2m+1]$，$G[S_{ij}, S_q - S_{ij}]$ 均为 $P_{2k+1-p_{iq}^{odd}}$-自由的。由断言 2.3(i)，$G[S_{ij}]$ 为 P_{2k}-自由的。由于 $m \leq k-1$，根据定理 2.1，我们有

$$\sum_{q=1}^{2m+1} e(S_{ij}, S_q - S_{ij}) + 2e(S_{ij}) \leq (2m+3)kn \leq (2k+1)kn. \tag{2.2}$$

由于 $|S_{ij}| \geq \epsilon n$，根据不等式 (2.1) 和 (2.2)，无论 $\delta(G) \geq n/(2(2\ell+1))$ 还是 $\delta(G) \geq 2n/(2k+3)$，我们都有

$$\begin{aligned} e(S_{ij}, T_{ij}) &\geq |S_{ij}| \cdot (\delta(G) - 2) - \left(\sum_{q=1}^{2m+1} e(S_{ij}, S_q - S_{ij}) + 2e(S_{ij}) \right) \\ &\geq |S_{ij}| \cdot (\delta(G) - 2) - (2k+1)kn \\ &\geq \epsilon n \cdot (\delta(G) - 2) - (2k+1)kn \\ &> \frac{\epsilon n}{2} \delta(G), \end{aligned}$$

因为 $\epsilon \geq \frac{1}{40k^5}$ 和 $n \geq 1000k^8$。

由引理 2.2，存在一个子图 $F \subseteq G[S_{ij}, T_{ij}]$，使得 $\delta(F) \geq \epsilon\delta(G)/2 > 2k$，因此我们可以在 F 中贪心地找到一条路径 $P_{2k+1-p_{ij}^{even}}$，其两端都在 S_{ij} 中；于是 $V(P_{2k+1-p_{ij}^{even}}) \cup V(P_{ij}^{even})$ 诱导出一个 C_{2k+1} 的副本，矛盾。断言 2.4 的证明至此完成。□

我们继续证明命题 2.3。对于每个顶点 $v_i \in V(C_{2m+1})$，$d_{G'}(v_i) \geq \delta(G) - 2$，于是 $|S_i| \geq \delta(G) - 2$ 对于 $i \in [2m+1]$。由断言 2.4，我们有

$$\begin{aligned} |S| &\geq \sum_{i=1}^{2m+1} |S_i| - \sum_{\substack{i,j \in [2m+1] \\ i \neq j}} |S_i \cap S_j| \\ &> (2m+1) \cdot (\delta(G) - 2) - \binom{2m+1}{2} \cdot \epsilon n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

对于每个 $i \in [2m+1]$，令

$$\widetilde{S}_i = S_i \setminus \bigcup_{j \in [2m+1] \setminus \{i\}} (S_i \cap S_j),$$

$$\widetilde{T}_i = T_i \setminus \bigcup_{j \in [2m+1] \setminus \{i\}} (T_i \cap T_j).$$

~ ~ ~ ~根据 S_i 和 T_i 的定义，显然可得 $S_i \cap S_q = \emptyset, T_i \cap T_q = \emptyset$，其中 $q \in [2m+1] \setminus \{i\}$。对于~，任意顶点 $v \in S_i$，我们都有 $N_{C_{2m+1}}(v) = \{v_i\}$，因此 $d_{G'}(v) \geq \delta(G) - 1$。然后

$$|\widetilde{S}_i| \cdot (\delta(G) - 1) \leq \sum_{v \in \widetilde{S}_i} d_{G'}(v) \leq e(\widetilde{S}_i, \widetilde{T}_i) + \sum_{q \in [2m+1] \setminus \{i\}} e(\widetilde{S}_i, S_q) + \sum_{q \in [2m+1] \setminus \{i\}} e(\widetilde{S}_i, T_q) + 2e(\widetilde{S}_i). \tag{2.4}$$

~ ~根据断言 2.3(ii)，$G[S_i, S_q]$ 是 $P_{2k+1-p_{iq}^{odd}}$-自由的。根据断言 2.3(iii)，$G[S_i, T_q]$ 是 $P_{2k-p_{iq}^{even}}$-自由的。~根据断言 2.3(i)，$G[S_i]$ 是 P_{2k}-自由的。因此，根据定理 2.1，我们有

$$\sum_{q \in [2m+1] \setminus \{i\}} e(\widetilde{S}_i, S_q) + \sum_{q \in [2m+1] \setminus \{i\}} e(\widetilde{S}_i, T_q) + 2e(\widetilde{S}_i) \leq (4m+2)kn \leq (4k-2)kn \tag{2.5}$$

因为 $m \le k-1$。根据不等式 (2.4) 和 (2.5)，我们有

$$\begin{aligned} e(\widetilde{S}_i, \widetilde{T}_i) &\ge |\widetilde{S}_i| \cdot (\delta(G)-1) - \left(\sum_{q\in[2m+1]\setminus\{i\}} e(\widetilde{S}_i, S_q) + \sum_{q\in[2m+1]\setminus\{i\}} e(\widetilde{S}_i, T_q) + 2e(\widetilde{S}_i) \right) \\ &\ge |\widetilde{S}_i| \cdot (\delta(G)-1) - (4k-2)kn. \end{aligned} \tag{2.6}$$

接下来，我们根据不同情形继续证明命题 2.3。

命题 2.3 的情形 (i)。 $k \ge \ell > (2k-1)/8$ 且 $\delta(G) \ge 2n/(2k+3)$。将 $\delta(G) \ge 2n/(2k+3)$ 代入不等式 (2.3)，得到

$$\begin{aligned} |S| &> (2m+1)\cdot\left(\frac{2n}{2k+3}-2\right) - \binom{2m+1}{2}\cdot\epsilon n \\ &= \frac{2n}{2k+3}\cdot(2m+1) - 2(2m+1) - (2m+1)\cdot m\cdot\epsilon n \\ &> \frac{6k}{(2k+3)\cdot 3k+1}\cdot(2m+1)n \end{aligned} \tag{2.7}$$

因为 $\epsilon \le \frac{1}{20k^5}$。由断言 2.4 可知，对于 $i,j \in [2m+1]$，有 $|S_i \cap S_j| < \epsilon n$。此外，对于 $i \in [2m+1]$，$|S_i| \ge 2n/(2k+3) - 2$，因此我们有

$$|\widetilde{S}_i| = \left| S_i \setminus \bigcup_{j\in[2m+1]\setminus\{i\}} (S_i \cap S_j) \right| > \frac{2n}{2k+3} - 2 - 2m\cdot\epsilon n \ge \frac{n}{k+2}, \tag{2.8}$$

因为 $\epsilon \le \frac{1}{20k^5}$ 且 $n \ge 1000k^8$。将 $\delta(G) \ge 2n/(2k+3)$ 代入不等式 (2.6)，得到

$$\begin{aligned} e(\widetilde{S}_i, \widetilde{T}_i) &\ge |\widetilde{S}_i| \cdot \left(\frac{2n}{2k+3} - 1\right) - (4k-2)kn \\ &> |\widetilde{S}_i| \cdot \frac{6kn}{(2k+3)\cdot 3k+1} \end{aligned} \tag{2.9}$$

由于 $|\widetilde{S}_i| > n/(k+2)$（见 (2.8)）以及 $n \ge 1000k^8$。因此，对于每个 $i \in [2m+1]$，我们都有 $|\widetilde{T}_i| > 6kn/\widetilde{((2k+3)\cdot 3k+1)}$。根据 T_i 的定义，我们有

$$|T| \ge (2m+1)\cdot|\widetilde{T}_i| > \frac{6k}{(2k+3)\cdot 3k+1}\cdot(2m+1)n. \tag{2.10}$$

根据不等式 (2.7) 和 (2.10)，我们有

$$\frac{12k}{(2k+3)\cdot 3k+1}\cdot(2m+1)n < |S| + |T| < n.$$

这意味着

$$m < \frac{6k^2-3k+1}{24k} = \frac{2k-1}{8} + \frac{1}{24k} \le \lfloor\frac{2k-1}{8}\rfloor + \frac{7}{8} + \frac{1}{24k} < \lfloor\frac{2k-1}{8}\rfloor + 1.$$

然而，不可能存在满足 $(2k-1)/8 < m < \lfloor (2k-1)/8 \rfloor + 1$ 的整数 m。因此，当 $\ell > (2k-1)/8$ 且 $\delta(G) \geq 2n/(2k+3)$ 时，我们有 $m \notin [\ell, k-1]$。根据命题 2.2，我们有 $m = k+1$。因此，命题 2.3(i) 成立。

接下来我们继续证明命题 2.3(ii)。

命题 2.3 的情形 (ii)。 $\ell < (2k-1)/8$ 且 $\delta(G) \geq n/(2(2\ell+1))$。将 $\delta(G) \geq n/(2(2\ell+1))$ 代入不等式 (2.3)，得到

$$\begin{aligned} |S| &\geq (2m+1) \cdot \left(\frac{n}{2(2\ell+1)} - 2 \right) - \binom{2m+1}{2} \cdot \epsilon n \\ &= \frac{n}{2(2\ell+1)} \cdot (2m+1) - 2(2m+1) - (2m+1) \cdot m \cdot \epsilon n \\ &> \frac{2}{4(2\ell+1)+1} \cdot (2m+1)n \end{aligned} \tag{2.11}$$

因为 $\epsilon \leq \frac{1}{20k^5}$。由断言 2.4，$|S_i \cap S_j| < \epsilon n$ 对于 i，$j \in [2m+1]$。此外，对于 $i \in [2m+1]$，$|S_i| \geq n/(2(2\ell+1)) - 2$，因此我们有

$$|\widetilde{S}_i| = \left| S_i \setminus \bigcup_{j \in [2m+1] \setminus \{i\}} (S_i \cap S_j) \right| > \frac{n}{2(2\ell+1)} - 2 - 2m \cdot \epsilon n \geq \frac{n}{2(2\ell+1)+1} \tag{2.12}$$

因为 $\epsilon \leq \frac{1}{20k^5}$，$m \leq k-1$ 且 $n \geq 1000k^8$。由不等式 (2.6)，我们有

$$\begin{aligned} e(\widetilde{S}_i, \widetilde{T}_i) &\geq |\widetilde{S}_i| \cdot \left(\frac{n}{2(2\ell+1)} - 1 \right) - (4k-2)kn \\ &= |\widetilde{S}_i| \cdot \frac{2n}{4(2\ell+1)+1} + |\widetilde{S}_i| \cdot \left(\frac{n}{32\ell^2+36\ell+10} - 1 \right) - (4k-2)kn \\ &> |\widetilde{S}_i| \cdot \frac{2n}{4(2\ell+1)+1}, \end{aligned}$$

因为 $|\widetilde{S}_i| > n/(2(2\ell+1)+1)$（见 ((2.12)）且 $n \geq 1000k^8$。因此，对于每个 $i \in [2m+1]$，我们有 $|\widetilde{T}_i| > 2n/(4(2\ell+1)+1)$。所以

$$|T| \geq (2m+1) \cdot |\widetilde{T}_i| > \frac{2}{4(2\ell+1)+1} \cdot (2m+1)n. \tag{2.13}$$

由不等式 (2.11) 和 (2.13)，我们得到

$$\frac{2}{4(2\ell+1)+1} \cdot (2m+1)n \cdot 2 < |S| + |T| < n.$$

这意味着 $m \leq \ell$。由于 G 是 $\{C_3, C_5, \ldots, C_{2\ell-1}\}$-自由的，因此有 $m = \ell$。至此，我们完成了命题 2.3(ii) 第一部分的证明；接下来将证明命题 2.3(ii) 的第二部分。此外

$$\begin{aligned} |V(H)| &= n - |S| - |T| - |V(C_{2\ell+1})| \\ &< n - \frac{4n}{4(2\ell+1)+1} \cdot (2\ell+1) = \frac{n}{4(2\ell+1)+1}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

以下断言对于证明至关重要。

断言 2.5. 设 $i \in [2\ell+1]$。则以下结论成立。

(i) 对于每个顶点 $v \in S_i$, $d_{T_i}(v) \geq 2k$;
(ii) 对于每个顶点 $v \in T_i$, $d_{S_i}(v) \geq 2k$。

断言 2.5 的证明。(i) 反设存在一个顶点 $x \in S_i$，使得$d_{T_i}(x) < 2k$。那么

$$d(x) - d_{T_i}(x) - d_{C_{2\ell+1}}(x) > \frac{n}{2(2\ell+1)} - 2k - 2.$$

根据鸽巢原理，必定存在某个 S_j，使得

$$d_{S_j}(x) > \frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{n}{2(2\ell+1)} - 2k - 2\right).$$

设 $S'_j = N_{S_j}(x)$。那么

$$|S'_j| > \frac{n}{2(2\ell+1)^2} - \frac{2k+2}{2\ell+1}. \tag{2.15}$$

由于 $\delta(G) \geq n/(2(2\ell+1))$，对于任意顶点 $v \in S'_j$，根据断言 2.1，我们有 $d_{G'}(v) \geq n/(2(2\ell+1)) - 2$。然后

$$|S'_j| \cdot \left(\frac{n}{2(2\ell+1)} - 2\right) \leq \sum_{v \in S'_j} d_{G'}(v) \leq e(S'_j, T_j) + \sum_{q=1}^{2\ell+1} e(S'_j, S_q - S'_j) + 2e(S'_j). \tag{2.16}$$

对于 $q \neq j$，根据断言 2.3(ii)，$G[S'_j, S_q - S'_j]$ 是 $P_{2k+1-p_{jq}^{odd}}$-自由的。对于 $q = j$，根据断言 2.3(i)，$G[S'_j, S_j - S'_j]$ 是 P_{2k}-自由的。根据断言 2.3(i)，$G[S'_j]$ 是 P_{2k}-自由的。因此，根据不等式 (2.16) 和定理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}
e(S'_j, T_j) &\geq |S'_j| \cdot \left(\frac{n}{2(2\ell+1)} - 2\right) - \left(\sum_{q=1}^{2\ell+1} e(S'_j, S_q - S'_j) + 2e(S'_j)\right) \\
&\geq |S'_j| \cdot \left(\frac{n}{2(2\ell+1)} - 2\right) - (2\ell+3)kn \\
&= |S'_j| \cdot \frac{n}{2(2\ell+1)} - (2|S'_j| + (2\ell+3)kn) \\
&= |S'_j| \cdot \frac{n}{4(2\ell+1)} + |S'_j| \cdot \frac{n}{4(2\ell+1)} - (2|S'_j| + (2\ell+3)kn) \\
&> |S'_j| \cdot \frac{n}{4(2\ell+1)},
\end{aligned}$$

由于$|S'_j| > 2\frac{n}{(2\ell+1)^2} - \frac{2k+2}{2\ell+1}$（见（2.15））且 $n \geq 1000k^8$。因此，

$$e(S'_j, T_j) > |S'_j| \cdot \frac{n}{4(2\ell+1)} > \frac{n}{4(2\ell+1)^2} \cdot \frac{n}{4(2\ell+1)} = \frac{n^2}{16(2\ell+1)^3}.$$

由引理 2.2，存在一个子图 $K \subseteq G[S'_j, T_j]$，使得 $\delta(K) > n/(16(2\ell+1)^3) > 2k$。若 $j = i$，则我们可以在 K 中贪心地找到一条阶为 $2k-1$ 的路径 P，其两端均在 S'_i 中，使得

$V(P) \cup \{x, v_i\}$ 诱导出一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。若 $j \neq i$，则我们可以在 K 中贪心地找到一条路径 $P_{2k-p_{ij}^{odd}}$，其两端均在 S_j' 中，使得 $V(P_{2k-p_{ij}^{odd}}) \cup V(P_{ij}^{odd}) \cup \{x\}$ 诱导出一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。

(ii) 反设存在一个顶点 $y \in T_i$，使得 $d_{S_i}(y) < 2k$。由于 $y \in T_i$，存在一个顶点 $y' \in S_i$，使得 $yy' \in E(G)$。由于 $|H| < n/(4(2\ell+1)+1)$（见 (2.14)），且 $\delta(G) \geq n/(2(2\ell+1))$，我们有

$$d(y) - d_{S_i}(y) - |V(H)| > \frac{n}{2(2\ell+1)} - 2k - \frac{n}{4(2\ell+1)+1} > \frac{n}{4(2\ell+1)+1},$$

由于 $n \geq 1000k^8$。根据平均原理，或者存在某个 S_j 和 $j \neq i$，使得

$$d_{S_j}(y) > \frac{n}{(4(2\ell+1)+1)\cdot 2\cdot(2\ell+1)} = \frac{n}{32\ell^2+36\ell+10},$$

或者存在某个 T_j，使得

$$d_{T_j}(y) > \frac{n}{32\ell^2+36\ell+10}.$$

情形 1。存在某个 S_j和 $j \neq i$，使得 $d_{S_j}(y) > \frac{n}{32\ell^2+36\ell+10}$。

令 $S_j'' = N_{S_j}(y)$，则 $|S_j''| > n/(32\ell^2+36\ell+10)$。由于 $\delta(G) \geq n/(2(2\ell+1))$，对任意顶点 $v \in S_j''$，我们有 $d_{G'}(v) \geq n/(2(2\ell+1)) - 2$，由断言 2.1 可得。然后

$$|S_j''| \cdot \left(\frac{n}{2(2\ell+1)} - 2\right) \leq \sum_{v \in S_j''} d_{G'}(v) \leq e(S_j'', T_j) + \sum_{q=1}^{2\ell+1} e(S_j'', S_q - S_j'') + 2e(S_j''). \tag{2.17}$$

对于 $q \neq j$，根据断言 2.3(ii)，$G[S_j'', S_q - S_j'']$ 是 $P_{2k+1-p_{jq}^{odd}}$-自由的。对于 $q = j$，根据断言 2.3(i)，$G[S_j'', S_j - S_j'']$ 是 P_{2k}-自由的。根据断言 2.3(i)，$G[S_j'']$ 是 P_{2k}-自由的。因此，由不等式 (2.17) 和定理 2.1 可得

$$\begin{aligned} e(S_j'', T_j) &\geq |S_j''| \cdot \left(\frac{n}{2(2\ell+1)} - 2\right) - \left(\sum_{q=1}^{2\ell+1} e(S_j'', S_q - S_j'') + 2e(S_j'')\right) \\ &\geq |S_j''| \cdot \left(\frac{n}{2(2\ell+1)} - 2\right) - (2\ell+3)kn \\ &> |S_j''| \cdot \frac{n}{4(2\ell+1)}, \end{aligned}$$

因为 $|S_j''| > n/(32\ell^2+36\ell+10)$ 和 $n \geq 1000k^8$。因此，

$$e(S_j'', T_j) > |S_j''| \cdot \frac{n}{4(2\ell+1)} > \frac{n}{32\ell^2+36\ell+10} \cdot \frac{n}{4(2\ell+1)} = \frac{n^2}{256\ell^3+416\ell^2+224\ell+40}.$$

由引理 2.2，存在一个子图 $L \subseteq G[S_j'', T_j]$，使得 $\delta(L) > n/(256\ell^3+416\ell^2+224\ell+40) > 2k$ 由 $n \geq 1000k^8$ 和 $\ell \leq k-1$。然后我们可以贪心地找到一条路径 $P_{2k-1-p_{ij}^{even}}$，位于

L，其两端都在 S_j'' 中，使得 $V(P_{2k-1-p_{ij}^{even}}) \cup V(P_{ij}^{even}) \cup \{y, y'\}$ 诱导出一个长度为$2k+1$的圈，矛盾。

情形 2。存在某个 T_j，使得 $d_{T_j}(y) > \frac{n}{32\ell^2+36\ell+10}$。

令 $T_j' = N_{T_j}(y)$。则 $|T_j'| > n/(32\ell^2+36\ell+10)$。由于 $\delta(G) \geq n/(2(2\ell+1))$ 且 $|H| < n/(4(2\ell+1)+1)$（见 (2.14)），对于任意顶点 $v \in T_j'$，我们有

$$d_{G'-H}(v) \geq \frac{n}{2(2\ell+1)} - |H| > \frac{n}{4(2\ell+1)+1}.$$

Then

$$|T_j'| \cdot \frac{n}{4(2\ell+1)+1} < \sum_{v \in T_j'} d_{G'-H}(v) \leq e(S_j, T_j') + \sum_{q \neq j} e(T_j', T_q - T_j') + e(T_j', T_j - T_j') + 2e(T_j'). \quad (2.18)$$

对于 $q \neq j$，由断言 2.3(iv)，$G[T_j', T_q - T_j']$ 不含 $P_{2k-1-p_{jq}^{odd}}$。图 $G[T_j']$ 不含 P_{2k}，因为 $T_j' = N_{T_j}(y)$。于是由不等式 (2.18) 和定理 2.1，我们有

$$\begin{aligned} e(S_j, T_j') + e(T_j', T_j - T_j') &> |T_j'| \cdot \frac{n}{4(2\ell+1)+1} - \left(\sum_{q \neq j} e(T_j', T_q - T_j') + 2e(T_j') \right) \\ &> \frac{n}{32\ell^2+36\ell+10} \cdot \frac{n}{4(2\ell+1)+1} - (2\ell+2)kn \\ &> \frac{n^2}{512\ell^3+896\ell^2+520\ell+100}, \end{aligned}$$

因为 $n \geq 1000k^8$。根据平均原理，要么 $e(S_j, T_j') > n^2/(1024\ell^3+1792\ell^2+1040\ell+200)$，要么 $e(T_j', T_j - T_j') > n^2/(1024\ell^3+1792\ell^2+1040\ell+200)$。

情形 2.1. $e(S_j, T_j') > \frac{n^2}{1024\ell^3+1792\ell^2+1040\ell+200}$。

由引理 2.2，存在一个子图 $M \subseteq G[S_j, T_j']$，使得

$$\delta(M) > \frac{n}{1024\ell^3+1792\ell^2+1040\ell+200} > 2k.$$

若 $j \neq i$，则我们可以在 M 中贪心地找到一条路径 $P_{2k-1-p_{ij}^{odd}}$，其一端不同于 S_j 中的 y'，另一端位于 T_j' 中，使得 $V(P_{2k-1-p_{ij}^{odd}}) \cup V(P_{ij}^{odd}) \cup \{y, y'\}$ 诱导出一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。若 $j = i$，则我们可以在 M 中贪心地找到一条阶为 $2k-2$ 的路径 P，其一端不同于 S_i 中的 y'，另一端位于 T_i' 中，使得 $V(P) \cup \{y, y', v_i\}$ 诱导出一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。

情形 2.2。$e(T_j', T_j - T_j') > \frac{n^2}{1024\ell^3+1792\ell^2+1040\ell+200}$。

由引理 2.2，存在一个子图 $G[T_j'', Q_j] \subseteq G[T_j', T_j - T_j']$，使得 $\delta(G[T_j'', Q_j]) > n/(1024\ell^3+1792\ell^2+1040\ell+200)$，其中 $T_j'' \subseteq T_j'$ 和 $Q_j \subseteq T_j - T_j'$。

设 $N_{S_j}(T_j'') = \{v \in S_j \setminus T_j'$: 存在一个顶点 $u \in T_j''$，使得 $uv \in E(G)\}$.

情形 2.2.1 $N_{S_j}(T_j'') = \{y'\}$。

由于 $\delta(G[T_j'', Q_j]) > n/(1024\ell^3 + 1792\ell^2 + 1040\ell + 200) > 2k$，我们可以在 $G[T_j'', Q_j]$ 中贪心地找到一条阶为 $2k-1$ 的路径 P，其两端都在 T_j'' 中，使得 $V(P) \cup \{y, y'\}$ 诱导出一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。

情形 2.2.2 存在一个顶点 $x' \in S_j$（$x' \neq y'$），使得 $x' \in N_{S_j}(T_j'')$。

由于 $x' \in N_{S_j}(T_j'')$，存在一个顶点 $x \in T_j''$使得 $xx' \in E(G)$。若 $j \neq i$。由于$\delta(G[T_j'', Q_j]) > n/(1024\ell^3 + 1792\ell^2 + 1040\ell + 200) > 2k$，我们可以贪心地在 $G[T_j'', Q_j]$ 中找到一条路径 $P_{2k-2-p_{ij}^{odd}}$，其一个端点为 $x \in T_j''$，另一个端点在 T_j''中，使得 $V(P_{2k-2-p_{ij}^{odd}}) \cup V(P_{ij}^{odd}) \cup \{y, y', x'\}$ 诱导出一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。若 $j = i$，我们可以贪心地在 $G[T_i'', Q_i]$ 中找到一条阶为 $2k-3$ 的路径 P，其一个端点为 $x \in T_i''$，另一个端点在 T_i''中，使得$V(P) \cup \{y, y', v_i, x'\}$ 诱导出一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。这就完成了断言 2.5 的证明。□

由于我们已经证明了 $m = \ell$ 当 $\ell < (2k-1)/8$ 且 $\delta(G) \geq n/(2(2\ell+1))$ 时成立。通过证明以下断言，即可完成命题 2.3(ii) 的证明。

断言 2.6。对于 $i \neq j \in [2\ell+1]$，我们有 (i) $S_i \cap S_j = \emptyset$ 和 $T_i \cap T_j = \emptyset$。(ii) $E(G[S_i]) = \emptyset$ 和 $E(G[T_i]) = \emptyset$。(iii) $E(G[S_i, S_j]) = \emptyset$、$E(G[T_i, T_j]) = \emptyset$和 $E(G[S_i, T_j]) = \emptyset$。

断言 2.6 的证明。(i) 反设存在一个顶点 $x \in S_i \cap S_j$。由断言 2.5，$G[S_i, T_i]$ 的最小度至少为 $2k$，因此我们可以贪心地在 $G[S_i, T_i]$ 中找到一条路径 $P_{2k+1-p_{ij}^{even}}$，其一端为 x，另一端在 S_i 中，使得 $V(P_{2k+1-p_{ij}^{even}}) \cup V(P_{ij}^{even})$ 诱导出一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。类似地，若存在一个顶点$y \in T_i \cap T_j$，由于 $y \in T_j$，存在一个顶点 $y' \in S_j$，使得 $yy' \in E(G)$。由断言 2.5，我们可以贪心地在 $G[S_i, T_i]$ 中找到一条路径 $P_{2k-p_{ij}^{even}}$，其一端为 y，另一端在 S_i 中，使得$V(P_{2k-p_{ij}^{even}}) \cup V(P_{ij}^{even}) \cup \{y'\}$ 诱导出一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。

(ii) 反设存在一条边 $x_1y_1 \in E(G[S_i])$。那么 $v_ix_1y_1v_i$ 构成一个 C_3 的副本，矛盾。若存在一条边 $x_2y_2 \in E(G[T_i])$，由于 $x_2 \in T_i$，存在一个顶点 $x_2' \in S_i$，使得 $x_2x_2' \in E(G)$。根据断言 2.5，我们可以在 $G[S_i, T_i]$ 中贪心地找到一条阶为 $2k-2$ 的路径 P，其一端为 $y_2 \in T_i$，另一端在 S_i 中，使得 $V(P) \cup \{x_2, x_2', v_i\}$ 构成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。

(iii) 反设存在一条边 $xy \in E(G[S_i, S_j])$，其中 $x \in S_i$和$y \in S_j$。由断言 2.5，我们可以贪心地找到 $G[S_i, T_i]$ 中的一条路径 $P_{2k-p_{ij}^{odd}}$，其一端为 x，另一端位于 S_i，使得 $V(P_{2k-p_{ij}^{odd}}) \cup V(P_{ij}^{odd}) \cup \{y\}$ 诱导出一个长度为 $2k+1$的圈，矛盾。若存在一条边 $pq \in E(G[T_i, T_j])$，其中 $p \in T_i$和 $q \in T_j$，则存在一个顶点 $p' \in S_i$，使得 $pp' \in E(G)$。由断言 2.5，我们可以贪心地找到$G[S_j, T_j]$中的一条路径 $P_{2k-1-p_{ij}^{odd}}$，其一端为 $q \in T_j$，另一端位于 S_j，使得 $V(P_{2k-1-p_{ij}^{odd}}) \cup V(P_{ij}^{odd}) \cup \{p, p'\}$诱导出一个长度为 $2k+1$的圈，矛盾。若存在一条边 $st \in E(G[S_i, T_j])$，其中$s \in S_i$ 和 $t \in T_j$，则存在一个顶点 $t' \in S_j$，使得 $tt' \in E(G)$。由断言 2.5，我们可以贪心地找到 $G[S_i, T_i]$ 中的一条路径 $P_{2k-1-p_{ij}^{even}}$，其一端为 s，另一端位于 S_i，使得

$V(P_{2k-1-p_{ij}^{even}}) \cup V(P_{ij}^{even}) \cup \{t, t'\}$ 诱导出一个长度为 $2k+1$的圈，矛盾。至此，断言 2.6 的证明完成，因此命题 2.3 的证明也告完成。□

现在我们将应用命题 2.3 来证明定理 1.6。首先，考虑定理 1.6(ii) 的情形。根据命题 2.3(ii)， G 的最短奇圈是 $C_{2\ell+1} = v_1v_2 \dots v_{2\ell+1}$。由于 $\delta(G) \geq n/(2(2\ell+1))$，通过应用命题 2.3(ii)，我们得到对每个 $i \in [2\ell+1]$， $|S_i| \geq n/(2(2\ell+1)) - 2$ 且 $|T_i| \geq n/(2(2\ell+1)) - 1$。于是

$$\begin{aligned} |V(H)| &= n - \sum_{i=1}^{2\ell+1} (|S_i| + |T_i|) - |V(C_{2\ell+1})| \\ &\leq n - (2\ell+1)\left(\frac{n}{2(2\ell+1)} - 2 + \frac{n}{2(2\ell+1)} - 1\right) - (2\ell+1) \\ &= 2(2\ell+1). \end{aligned}$$

断言 2.7。 $N_H(T_i) \cap N_H(T_j) = \emptyset$。

断言 2.7 的证明。反设存在一个顶点 $x \in N_H(T_i) \cap N_H(T_j)$。于是存在两个顶点 $t_i \in T_i$ 和 $t_j \in T_j$，使得 $xt_i, xt_j \in E(G)$，并且存在一个顶点 $s_j \in S_j$，使得 $t_js_j \in E(G)$。根据断言 2.5，我们可以在 $G[S_i, T_i]$ 中贪心地找到一条路径 $P_{2k-2-p_{ij}^{even}}$，其一端为 t_i，另一端位于 S_i 中，使得 $V(P_{2k-2-p_{ij}^{even}}) \cup V(P_{ij}^{even}) \cup \{x, t_j, s_j\}$ 构成一个长度为 $2k+1$ 的圈，矛盾。□

断言 2.8。$|S_i| \geq {}_2\ \frac{n}{(2\ell+1)}$ 对每个 $i \in [2\ell+1]$。

断言 2.8 的证明。反设存在 S_i，使得对于某个 $i \in [2m+1]$ 有 $|S_i| < n/(2(2\ell+1))$。我们断言 $|S_i| + |T_i| + |N_H(T_i)| \geq n/(2\ell+1)$。对于任意顶点 $v \in T_i$， $N(v) \subseteq S_i \cup N_H(T_i)$。由于 $d(v) \geq n/(2(2\ell+1))$ 且 $|S_i| < n/(2(2\ell+1))$，我们有

$$|N_H(T_i)| + |S_i| \geq \frac{n}{2(2\ell+1)}, \tag{2.19}$$

并且 $N_H(T_i) \neq \emptyset$。根据断言 2.7，对于任意顶点 $x \in N_H(T_i)$，我们有 $N(x) \subseteq T_i \cup V(H)$。我们断言，对于任意顶点 $x \in N_H(T_i)$， $N(x) \cap V(H) = \emptyset$。反设存在一个顶点 $x' \in V(H)$，使得 $xx' \in E(G)$。由于 $x \in N_H(T_i)$，存在一个顶点 $t_i \in T_i$，使得 $xt_i \in E(G)$，并且存在一个顶点 $s_i \in S_i$，使得 $t_is_i \in E(G)$。由于 $|H| \leq 2(2\ell+1)$， $d_T(x') \geq n/(2(2\ell+1)) - 2(2\ell+1)$。根据断言 2.7，存在某个 T_j，使得 $d_{T_j}(x') = d_T(x') \geq n/(2(2\ell+1)) - 2(2\ell+1)$。如果 $j = i$，则存在一个顶点 $x'' \in N_{T_i}(x')$。根据断言 2.5，我们可以贪心地在 $G[S_i, T_i]$ 中找到一条阶为 $2k-4$ 的路径 P，其一端为 x''，另一端位于 S_i 中，使得 $V(P) \cup \{x', x, t_i, s_i, v_i\}$ 诱导出 C_{2k+1} 的一个副本，矛盾。如果 $j \neq i$，则存在一个顶点 $x''' \in N_{T_j}(x')$。根据断言 2.5，我们可以贪心地在 $G[S_j, T_j]$ 中找到一条路径 $P_{2k-3-p_{ij}^{odd}}$，其一端为 $x''' \in T_j$，另一端位于 S_j 中，使得 $V(P_{2k-3-p_{ij}^{odd}}) \cup V(P_{ij}^{odd}) \cup \{x', x, t_i, s_i\}$ 诱导出 C_{2k+1} 的一个副本，矛盾。因此，对于任意顶点 $x \in N_H(T_i)$，我们有 $N(x) \cap V(H) = \emptyset$，于是 $N(x) \subseteq T_i$，所以

$$|T_i| \geq d(x) \geq \frac{n}{2(2\ell+1)}. \tag{2.20}$$

根据不等式 (2.19) 和 (2.20)，我们得到

$$|S_i| + |T_i| + |N_H(T_i)| \geq \frac{n}{2\ell+1}, \tag{2.21}$$

其中 $|S_i| < n/(2(2\ell+1))$。若 $|S_j| \geq n/(2(2\ell+1))$，则有

$$|S_j| + |T_j| \geq \frac{n}{2(2\ell+1)} + \frac{n}{2(2\ell+1)} - 1 = \frac{n}{2\ell+1} - 1, \tag{2.22}$$

因为 $|T_j| \geq n/(2(2\ell+1)) - 1$ 对 $j \in [2m+1]$成立。于是由不等式 (2.21) 和 (2.22)，我们得到 $V(G) = 2\ell + 1 + \sum_{i=1}^{2\ell+1} (|S_i| + |T_i| + |N_H(T_i)|) > n$，矛盾。断言 2.8 的证明至此完成。□

由断言 2.8，我们有 $|S_i| \geq n/(2(2\ell+1))$，且对每个 $i \in [2\ell+1]$，$|T_i| \geq n/(2(2\ell+1)) - 1$。于是

$$\sum_{i=1}^{2\ell+1} (|S_i| + |T_i|) + |V(C_{2\ell+1})| \geq (2\ell+1)\left(\frac{n}{2(2\ell+1)} + \frac{n}{2(2\ell+1)} - 1\right) + 2\ell + 1 \geq n,$$

因此，对每个 $i \in [2\ell+1]$，$H = \emptyset$, $|S_i| = n/(2(2\ell+1))$ 且 $|T_i| = n/(2(2\ell+1)) - 1$，并且$\delta(G) = n/(2(2\ell+1))$。再次根据命题 2.3(ii)，$G$ 是由 $2\ell+1$ 个 $K_{n/(2(2\ell+1)),\ n/(2(2\ell+1))}$ 的点不交副本构成的图，从每个副本中选取一个顶点，使这些顶点构成一个长度为 $2\ell+1$ 的圈，其中 $\delta(G) = n/(2(2\ell+1))$。

定理 1.6(ii) 的证明至此完成。

现在我们来证明定理 1.6(i)。根据命题 2.3(i)，当 $\ell > (2k-1)/8$ and $\delta(G) \geq 2n/(2k+3)$ 时，我们可以得出 $m = k+1$，即 G 的最短奇圈为 $C_{2k+3} = v_1 v_2 \dots v_{2k+3}$。根据断言 2.1，对于任意 $v \in V(G')$，如果 v 在 C_{2k+3} 中与两个顶点 v_i 和 v_j 相邻，那么 $d_{C_{2k+3}}(v_i, v_j) = 2$。令

$$D_i = N(v_{i-1}) \cap N(v_{i+1}), D = \bigcup_{i\in[2k+3]} D_i.$$

根据　根据 D 的定义和断言 2.1，对于任意两个集合 D_i 和 D_j，我们有 $D_i \cap D_j = \emptyset$。S　o

$$|D| = \sum_{i\in[2k+3]} |D_i| = \sum_{i,j\in[2k+3]} |N(v_i) \cap N(v_j)|.$$

根据容斥原理和断言 2.1，我们有

$$\left|\bigcup_{i\in[2k+3]} N(v_i)\right| \geq \sum_{i\in[2k+3]} |N(v_i)| - \sum_{i,j\in[2k+3]} |N(v_i) \cap N(v_j)|.$$

由于 $\delta(G) \geq 2n/(2k+3)$，这意味着

$$|D| = \sum_{i,j\in[2k+3]} |N(v_i) \cap N(v_j)| \geq \sum_{i\in[2k+3]} |N(v_i)| - n \geq n.$$

因此，$\delta(G) = 2n/(2k+3)$ 且 $|D| = n$，并且对于任意 $v \in V(G)$，$d_{C_{2k+3}}(v) = 2$。现在我们将证明 G 必定是 C_{2k+3} 的平衡膨胀。对于 $i \in [2k+3]$，D_i 是一个独立集。反设对于某个 $i \in [2k+3]$，D_i 不是独立集，则我们很容易找到一个 C_3 的副本。因此我们得出结论，G 是 C_{2k+3} 的膨胀。由于 $\delta(G) = 2n/(2k+3)$ 且 $|D| = n$，对于任意 $i \in [2k+3]$，$|D_i| = n/(2k+3)$。因此，G 是 C_{2k+3} 的平衡膨胀。定理 1.6(i) 的证明至此完成。□

注

注意，定理 1.4 意味着，如果 G 是一个最小度大于 $n/6$ 的非二部图，那么当 $k \leq n/21000$ 时，G 包含长度从 11 到 $2k+1$ 的所有奇圈。改进定理 1.4 中的条件 $n \geq 21000k$ 将是有价值的。同样，改进定理 1.5 中的条件 $n \geq 1000k^8$ 也很有意义。

在本文中，我们主要研究最小度稳定性：对于图族 $\mathcal{H}$，α 的紧界是多少，使得任何最小度至少为 αn 的 $\mathcal{H}$-自由 n-顶点图，其结构都继承自其极值图？Erd˝os 和 Simonovits [7] 从色数的角度提出了一个问题：对于整数 $r \geq 2$ 和图族 $\mathcal{H}$，α 的紧界是多少，使得任何最小度至少为 αn 的 $\mathcal{H}$-自由 n-顶点图的色数至多为 r？这里我们不详细介绍关于这一问题的研究，但值得一提的是 B¨ottcher、Frankl、Cecchelli、Parzcyk 和 Skokan [4]，最近证明了以下有趣的结果：当 k 足够大时，任何最小度至少为 $n/(2k-1)$ 的 n-顶点 $\{C_3, C_5, \ldots, C_{2k-1}\}$-自由图 G 都满足 $\chi(G) \leq 3$。目前尚不清楚，要保证上述结果中的相同结论，最小度条件的紧界是多少。

致谢

我们衷心感谢两位审稿人认真细致地阅读稿件，投入大量时间核查细节，并提出宝贵意见，帮助我们改进文章的表述。本文得到国家自然科学基金（编号：11931002和12371327）的资助。

参考文献

[1] B. Andrsf´ai、P. Erd˝os、V. T. S´os，《色数、极大团与图的最小度之间的联系》，《离散数学》8（1974年），205–218。

[2] P. Balister, B. Bollob´as, O. Riordan, R. H. Schelp，《不含给定长度奇圈且最大度较大的图》，J. Combin. Theory Ser. B 87 (2003), 366–373。

[3] S. Brandt, R. Faudree, W. Goddard，弱泛圈图，《图论杂志》27（1998），141–176。[4] J. B¨ottcher, N. Frankl, D. M. Cecchelli, O. Parzcyk, J. Skokan，具有大最小度且不含短奇圈的图是3-可着色的，（2023），arXiv:2302.01875v1。[5] P. Erd˝os，关于图的极值性质的一些新不等式，载于：P. Erd˝os, G. Katona（编），《图论》，学术出版社，纽约，1968年，第77–81页。[6] Erd˝os, R. J. Faudree, A. Gy´arf´as, R. H. Schelp，给定最小度的图中的奇圈，载于《图论、组合学与应用》第1卷（密歇根州卡拉马祖，1988），威利出版社，纽约，1991年，第407-418页。[7] P. Erd˝os, M. Simonovits，极值图论中的一个度数问题，《离散数学》5（1973），323–334。[8] P. Erd˝os, T. Gallai，关于图的极大路径和回路，《匈牙利数学学报》10（1959），337–356。[9] R. H¨aggkvist，非二部图中长度指定的奇圈，《图论》（剑桥，1981），北荷兰出版社，阿姆斯特丹、纽约，1982年，第89-99页。[10] J. Koml´os, M. Simonovits，Szemer´edi 正则性引理及其在图论中的应用，载于《组合学：Paul Erd˝os 八十寿辰纪念文集》第2卷，J´anos Bolyai 数学学会，布达佩斯，1996年，第295–352页。[11] S. Letzter, R. Snyder，不含 $\{C_3, C_5\}$的图的同态阈值，《图论杂志》90（2019），83–106。[12] V. Nikiforov, R. H. Schelp，大最小度图中的路径和圈，《图论杂志》47（2004），39-52。[13]M. Sankar，同伦与奇圈的同态阈值，arXiv:2206.07525v1。[14] M. Simonovits，具有对称极值图及附加色数条件的极值图问题，《离散数学》7（1974），349–376。[15] P. Tur´an，图论中的一个极值问题。《数学与物理学报》48（1941年），436–452。[16] J. Verstra¨ete，图中圈长的等差数列，《组合概率计算》9（2000），369–373。[17] X. Yuan, Y. Peng，不含 C_{2k+1}的图的最小度稳定性，《图论杂志》，（2024），307–321。