arXiv:2305.02764v1 [math.OC] 4 May 2023

求解大型稀疏线性互补问题的新型加速模数型迭代方法

BharatKumar[a],1, Deepmala[a],2 和 A.K. Das [b],3[a]

数学学科,

印度贾巴尔普尔 PDPM-印度信息技术、设计与制造学院，邮编 482005（中央邦）

[b]印度统计研究所，B.T.路 203 号,

加尔各答 700108，印度

[1]电子邮箱：bharatnishad.kanpu@gmail.com， [2]电子邮箱：dmrai23@gmail.com[3]电子邮箱：akdas@isical.ac.in

摘要

本文提出了一类用于求解线性互补问题的新型加速模数迭代方法。当系统矩阵为 H_+-矩阵时，我们给出了用于收敛性分析的适当判据。此外，我们通过针对不同参数提供两个数值例子，验证了所提出方法的有效性，并减少了迭代次数和 CPU 时间，从而加快了收敛速度。关键词。线性互补问题，迭代方法， P-矩阵，H_+-矩阵，收敛性分析，矩阵分裂。

数学主题分类：90C33，65F10，65F50。

1 引言

大型稀疏矩阵是指行数和列数众多，但非零元素数量较少的矩阵。换言之，这类矩阵中的大多数元素均为零。稀疏矩阵通常用于表示计算机科学、数学、物理学和工程学等领域中的复杂系统或大型数据集。矩阵的稀疏性意味着，逐个存储每个元素并不切实际，因此必须采用专门的数据结构和算法，以高效地存储和处理矩阵。

给定 $A_1 \in R^{n\times n}$ 和向量 $q \in R^n.$，线性互补问题（表示为 LCP(q, A_1)）是求解下列系统的解 $z \in R^n$ ：

$$z \geq 0, \quad A_1 z + q \geq 0, \quad z^T(A_1 z + q) = 0. \tag{1}$$

自由边界问题、双矩阵博弈的纳什均衡点、运筹学、控制理论、数理经济学、优化理论、随机最优控制、美国期权定价问题和弹性理论，都是数学规划文献中广泛研究的线性互补问题的应用。更多详情见 [20], [11], [32], [7], [19], [23] 和 [25]。

求解线性互补问题的方法分为两类，即主元法 [6], [8] 和迭代法 [31], [15], [9], [18], [22], [24] 和 [26]。主元法的基本思想是通过一系列主元步骤获得一个基本可行互补向量，而迭代法则生成一系列迭代序列，最终得到一个解。将 LCP(q, A_1) 重新表述为一个方程，其解必须与以下内容相同。

LCP（q, A_1）是用于构造快速且经济的迭代方法的最知名、最受青睐的技术之一。因此，出现了一些有用的 LCP（q, A_1）等价形式。Mangasarian [29] 提出了三种方法：投影 Jacobi 超松弛法、投影 SOR 法和投影对称 SOR 法。有关运用 Mangasarian 的思想设计迭代方法的更多信息，另请参阅 [1], [4] 和 [39]。Bai 在 [3] 给出了以下一般等价形式：

$$(\Omega_1 + M_1)s = N_1 s + (\Omega_1 - A_1)|s| - rq, \tag{2}$$

其中 $r > 0$, $\Omega_1 \in R^{n\times n}$ 是一个正对角矩阵。最初，人们提出了一类基于模的矩阵分裂迭代算法。方程 (2) 涵盖了文献 [5], [34], [21], [10] 和 [14]中已发表的研究成果。这类基于模的矩阵分裂迭代方法被认为是求解线性互补问题(q, A_1)的有效方法。关于方程 (2) 的其他变形，详见 [42], [40], [27], [38] 和 [41] 。此外，这一概念也已成功应用于其他互补问题，例如非线性互补问题 [28], [37], 、隐式互补问题 [17], [16], 、拟互补问题 [36], 以及水平线性互补问题 [30]。

借鉴 Shilang [35] 和 Bai [3], 的思路，我们提出了一类用于求解大型稀疏线性互补问题($q, \mathcal{A}$)的新型加速模数迭代方法。此外，我们证明了线性互补问题与不动点方程等价，并给出了所提方法的一些收敛域。

以下是本文的结构：第2节给出了所需的一些定义、记号和众所周知的引理，所有这些都将用于本文其余各节的讨论。第3节借助线性互补问题($q, \mathcal{A}$)的新等价不动点形式，提出了一种新的加速模数型迭代方法。第4节为所提出的方法建立了一些收敛域。一项数值比较

第 5 节展示了所提出的方法与 Bai [3]，提出的基于模的矩阵分裂方法之间的比较。第 6 节给出了本文的结论。

2 预备知识

在本节中，我们简要介绍基本结果、定义和符号，其中大部分内容可见于 [12], [13] 和 [33]。

假设 $A_1 = (\bar{a}_{ij}) \in R^{n\times n}$和 $B_1 = (b_{ij}) \in R^{n\times n}$均为方阵。如果对于所有 i、$j \in \{1, 2, \ldots, n\}$，均有 $\bar{a}_{ij} \geq (>)\ b_{ij}$，则矩阵 A_1 和 B_1 分别记为 $A_1 \geq (>)\ B_1$。矩阵 $|A_1| = (\bar{c}_{ij})$ 定义为 $\bar{c}_{ij} = |\bar{a}_{ij}|\ \forall\ i$，$j$和 $|A_1|$ 表示 $\bar{a}_{ij} \geq 0\ \forall\ i$、$j$。此外，我们有 $|A_1 + B_1| \leq |A_1| + |B_1|$和 $|A_1B_1| \leq |A_1||B_1|$。进一步地，a_1，$b_1 \in R^n$，则 $|a_1 + b_1| \leq |a_1| + |b_1|$ 和$||a_1| - |b_1|| \leq |a_1 - b_1|$。矩阵 A_1 的比较矩阵定义为：当 $i = j$ 时，$\langle \bar{a}_{ij} \rangle = |\bar{a}_{ij}|$；当 $i \neq j$时，$\langle \bar{a}_{ij} \rangle = -|\bar{a}_{ij}|$；若其所有非对角元素均小于或等于零，则称为 Z-矩阵；若 $A_1^{-1} \geq 0$ 且为 Z-矩阵，则称为 M-矩阵；若 $\langle A_1 \rangle$ 为 M-矩阵，则称为 H-矩阵；若 A_1 为 H-矩阵且满足 $\bar{a}_{ii} > 0\ \forall\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，则称为 H_+-矩阵；若其所有主子式均为正，即 $det(A_{1\alpha_1\alpha_1}) > 0\ \forall\ \alpha_1 \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$，则称为 P-矩阵。若 M_1是一个非奇异的 M-矩阵且满足 $N_1 \geq 0$，则称矩阵分裂 $A_1 = M_1 - N_1$为 M-分裂；若$\langle M_1 \rangle - |N_1|$ 是一个 M-矩阵，则称为 H-分裂；若满足 $\langle A_1 \rangle = \langle M_1 \rangle - |N_1|$，则称为 H-相容分裂；若一个分裂是 H-矩阵的 H-相容分裂，则称其为 H-分裂，但反之不成立。

引理 2.1. *[2]* 令 $a_1, b_1 \in R^n$. $a_1 \geq 0$, $b_1 \geq 0$, $a_1^T b_1 = 0$ 当且仅当 $a_1 + b_1 = |a_1 - b_1|$。

引理 2.2。 *[13]* 设 A_1、$B_1 \in R^{n\times n}$。若 A_1 和 B_1 分别是 M 和 Z-矩阵，且 $A_1 \leq B_1$，则 B_1 是一个 M-矩阵。若 A_1 是一个H-矩阵，则 $|A_1^{-1}| \leq \langle A_1 \rangle^{-1}$。若 $A_1 \leq B_1$，则 $\rho(A_1) \leq \rho(B_1)$。

引理 2.3。 *[12]* 设 $A_1 \in R^{n\times n}$ 是一个 M-矩阵，且 $A_1 = M_1 - N_1$ 是一个M-分裂。令 ρ为谱半径，则 $\rho(M_1^{-1}N_1) < 1$。

引理 2.4. *[13]* 假设 $A_1 \geq 0$。若存在 $v > 0 \in R^n$ 和一个标量$\alpha_1 > 0$，使得 $A_1 v \leq \alpha_1 v$，则 $\rho(A_1) \leq \alpha_1$。此外，若 $A_1 v < v$，则$\rho(A_1) < 1$。

3 主要结果

给定向量 $s \in R^n$，记向量 $s_+ = max\{0, s\}$ 和 $A_1 =(M_1 + I - L_1) - ($ $N_1 + I - L_1)$，其中 I是 n阶单位矩阵， L_1是 A_1的严格下三角矩阵。在下面的结果中，我们将线性互补问题(q, A_1)转化为不动点形式。

定理 3.1. 设 $A_1 \in R^{n\times n}$ 具有分裂 $A_1 = (M_1 + I - L_1) - (N_1 + I - L_1)$。若 $z = \tau(|s| + s)$、 $\omega = \Omega_1(|s| - s)$以及矩阵$(M_1 + \Omega_1 + I - L_1)$均为非奇异矩阵，则线性互补问题$(q, A_1)$的等价不动点方程形式为

$$s = (M_1 + \Omega_1 + I - L_1)^{-1}[(N_1 + I - L_1)s + (\Omega_1 - A_1)|s| - rq]. \tag{3}$$

证明。我们有 $z = \tau(|s| + s)$ 和 $\omega = \Omega_1(|s| - s)$，由方程（1）可得

$$\Omega_1(|s| - s) = A_1\tau(|s| + s) + q$$

$$(A_1\tau + \Omega_1)s = (\Omega_1 - A_1\tau)|s| - q$$

$$((M_1 + I - L_1)\tau + \Omega_1)s = (N_1 + I - L_1)\tau s + (\Omega_1 - A_1\tau)|s| - q.$$

令 $\tau = \frac{1}{r}$，上述方程可改写为，

$$s = (M_1 + I - L_1 + \Omega_1)^{-1}[(N_1 + I - L_1)s + (\Omega_1 - A_1)|s| - rq].$$

□

下面，我们基于方程（3）提出一种迭代方法，称为方法 3.1，用于求解线性互补问题(q, A_1)。

方法 3.1。设 $A_1 = (M_1 + I - L_1) - (N_1 + I - L_1)$ 是矩阵 $A_1 \in R^{n\times n}$ 的一种分裂。假设 $(M_1 + \Omega_1 + I - L_1)$ 是一个非奇异矩阵。则方法 3.1 使用以下方程:

$$s^{(k+1)} = (M_1 + \Omega_1 + I - L_1)^{-1}[(N_1 + I - L_1)s^{(k)} + (\Omega_1 - A_1)|s^{(k)}| - rq] \quad (4)$$

令残差为误差向量的欧几里得范数，其定义如下:

$$Res(z^{(k)}) = \|min(z^{(k)}, A_1 z^{(k)} + q)\|_2.$$

考虑一个非负初始向量 $z^{(0)} \in R^n$。迭代过程持续进行，直至迭代序列 $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty} \subset R^n$ 收敛。对于 $k = 0$、1、2、.....，迭代过程持续进行，直至迭代序列 $z^{(k+1)} \in R^n$ 收敛。若 $Res(z^{(k)}) < \epsilon$，则迭代过程停止。计算 $z^{(k+1)}$ 时，我们采用以下步骤。

步骤 1：给定一个初始向量 $s^{(0)} \in R^n$， $\epsilon > 0$ 并令 $k = 0$。

步骤 2：利用以下格式生成序列 $z^{(k)}$:

$$s^{(k+1)} = (M_1 + \Omega_1 + I - L_1)^{-1}[(N_1 + I - L_1)s^{(k)} + (\Omega_1 - A_1)|s^{(k)}| - rq] \quad (5)$$

并令 $z^{(k+1)} = \frac{1}{r}(|s^{(k+1)}| + s^{(k+1)})$，其中 $z^{(k)}$ 是线性互补问题(q, A_1)的一个 k^{th} 近似解，而 $s^{(k}$ 是方程（3）的一个 k^{th} 近似解。

步骤 3：若 $Res(z^{(k)}) < \epsilon$，则停止；否则，设置 $k = k + 1$ 并返回步骤 2。
此外，所提出的方法 3.1 为求解 LCP(q, A_1) 提供了一个通用框架。我们利用矩阵分裂创建了一类新的加速模松弛方法。具体而言，我们将系统矩阵A_1 表示为 $A_1 = (M_1 + I - L_1) - (N_1 + I - L_1)$。然后

1. 当 $M_1 = A_1$、 $N_1 = 0$、$\Omega_1 = I$ 和 $r = 1$ 时，方程（4）给出了新的加速模迭代方法，即

$$s^{(k+1)} = (A_1 + 2I - L_1)^{-1}[(I - L_1)s^{(k)} + (I - A_1)|s^{(k)}| - q].$$

2. 当 $M_1 = A_1$、 $N_1 = 0$、$\Omega_1 = \alpha_1 I$ 和 $r = 1$ 时，方程（4）给出了新的加速修正模迭代方法，即

$$s^{(k+1)} = (A_1 + (\alpha_1 + 1)I - L_1)^{-1}[(I - L_1)s^{(k)} + (\alpha_1 I - A_1)|s^{(k)}| - q].$$

3. 当 $M_1 = D_1$、 $N_1 = L_1 + U_1$ 和 $r = 2$ 时，方程（4）给出的新的加速模迭代雅可比法为

$$s^{(k+1)} = (D_1 + \Omega_1 + I - L_1)^{-1}[(U_1 + I)s^{(k)} + (\Omega_1 - A_1)|s^{(k)}| - 2q].$$

4. 当 $M_1 = D_1 - L_1$、 $N_1 = U_1$ 和 $r = 2$ 时，方程（4）给出的新的加速模高斯-赛德尔迭代（NAMGS）方法为

$$s^{(k+1)} = (D_1 - 2L_1 + \Omega_1 + I)^{-1}[(U_1 + I - L_1)s^{(k)} + (\Omega_1 - A_1)|s^{(k)}| - 2q].$$

5. 当 $M_1 = (\frac{1}{\alpha_1}D_1 - L_1)$ 和 $N_1 = (\frac{1}{\alpha_1} - 1)D_1 + U_1$ 时，方程（5）给出的新的加速模逐次超松弛迭代（NAMSOR）方法为

$$\begin{aligned} s^{(k+1)} = (D_1 - 2\alpha_1 L_1 + \alpha_1\Omega_1 + \alpha_1 I))^{-1}[((1-\alpha_1)D_1 + \alpha_1 U_1 \\ + \alpha_1 I - L_1)s^{(k)} + (\alpha_1\Omega_1 - \alpha_1 A_1)s^{(k)} - 2\alpha_1 q]. \end{aligned}$$

6. 当 $M_1 = (\frac{1}{\alpha_1})(D_1 - \beta_1 L_1)$ 和 $N_1 = (\frac{1}{\alpha_1})[(1-\alpha_1)D_1 + (\alpha_1 - \beta_1)L_1 + \alpha_1 U_1]$ 时，方程（5）给出的新的加速模加速 b 超松弛迭代（NAMAOR）方法为

$$\begin{aligned} s^{(k+1)} = (D_1 - (\beta_1 + \alpha_1)L_1 + \alpha_1\Omega_1 + \alpha_1 I)^{-1}[((1-\alpha_1)D_1 + (2\alpha_1 - \beta_1)L_1 \\ + \alpha_1 U_1 + \alpha_1 I)s^{(k)} + (\alpha_1\Omega_1 - \alpha_1 A_1)s^{(k)} - 2\alpha_1 q]. \end{aligned}$$

当（α_1, β_1）分别取值为（α_1, α_1）、（1, 1）和（1, 0）时，NAMAOR 方法显然分别转化为新加速模数逐次超松弛（NAMSOR）方法、高斯-赛德尔（NAMGS）方法和雅可比方法。

4 收敛性分析

在下面的结果中，我们证明系统矩阵 A_1 为 P-矩阵时的收敛条件。

定理4.1. 设 $A_1 \in R^{n\times n}$ 为一个 P-矩阵，且 s^* 为方程（3）的解。设 $\rho(|(M+I-L_1+\Omega_1)^{-1}|(|N+I-L_1|+|\Omega_1-A_1|)) < 1$。则由方法 3.1 生成的序列 $\{s^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty}$ 对任意初始向量 $s^{(0)} \in R^n$ 均收敛到解 s^*。

证明。设 s^* 为方程（3）的解，则误差为

$$
\begin{aligned}
s^{(k+1)} - s^* &= (M_1 + I - L_1 + \Omega_1)^{-1}[(N_1 + I - L_1)(s^{(k)} - s^*) \\
&\quad + (\Omega_1 - A_1)(|s^{(k)}| - |s^*|)] \\
|s^{(k+1)} - s^*| &= |(M_1 + I - L_1 + \Omega_1)^{-1}[(N_1 + I - L_1)(s^{(k)} - s^*) + (\Omega_1 \\
&\quad - A_1)(|s^{(k)}| - |s^*|)]| \\
&\quad \le |(M_1 + I - L_1 + \Omega_1)^{-1}|(|(N_1 + I - L_1)(s^{(k)} - s^*)| + |\Omega_1 \\
&\quad - A_1)(|s^{(k)} - s^*|)| \\
&\quad \le |(M_1 + I - L_1 + \Omega_1)^{-1}|(|N_1 + I - L_1| \\
&\quad + |\Omega_1 - A_1|)|s^{(k)} - s^*| \\
|s^{(k+1)} - s^*| &< |s^{(k)} - s^*|.
\end{aligned}
$$

因此，序列 $\{s^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty}$ 收敛到解 s^*。 □

当系统矩阵 A_1 为一个 H_+-矩阵时，以下结果讨论了新型加速模基迭代方法中 Ω_1 的收敛域。

定理4.2. 设 A_1 为一个 H_+-矩阵，且 $A_1 = M_1 - N_1 = (M_1 + I - L_1) - (N_1 + I - L_1)$ 是矩阵 A_1的一个 H-相容矩阵，使得 $\langle A_1\rangle = \langle M_1 + I - L_1\rangle - |N + I - L_1|$，并且满足以下条件之一：(1) $\Omega_1 \ge D_1$;

(2) $\Omega_1 < D_1$ 和 $2\Omega_1 - D_1 - |B|$ 是一个 M 矩阵，$B = L_1 + U_1$。那么

由方法 3.1 生成的序列 $\{s^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty}$ 对任意初始向量 $s^{(0)} \in R^n$ 均收敛于解 s^*。

证明。令 $A_1 = M_1 - N_1 = (M_1 + I - L_1) - (N_1 + I - L_1)$，且有
$\langle A_1 \rangle \leq \langle M_1 + I - L_1 \rangle \leq diag(M_1 + I - L_1)$，$(M_1 + I - L_1)$ 是一个 H_+-矩阵。
并且有

$$|(\Omega_1 + M_1 + I - L_1)^{-1}| \leq (\Omega_1 + \langle M_1 \rangle + I - L_1)^{-1}.$$

由定理4.1，令 $T = |(M_1 + I - L_1 + \Omega_1)^{-1}|(|N_1 + I - L_1| + |\Omega_1 - A_1|)$，则

$$\begin{aligned}
T &= |(M_1 + \Omega_1 + I - L_1)^{-1}|[|N_1 + I - L_1| + |\Omega_1 - A_1|] \\
&\leq (\langle M_1 \rangle + \Omega_1 + I - L_1)^{-1}[|N_1 + I - L_1| + |\Omega_1 - A_1|] \\
&\leq (\langle M_1 \rangle + \Omega_1 + I - L_1)^{-1}[|N_1 + I - L_1| + |\Omega_1 - D_1 + L_1 + U_1|] \\
&\leq (\langle M_1 \rangle + \Omega_1 + I - L_1)^{-1}[(\langle M_1 \rangle + \Omega_1 + I - L_1) - (\langle M_1 \rangle + \Omega_1 + I - L_1) \\
&+ |N_1 + I - L_1| + |\Omega_1 - D_1| + |L_1 + U_1|].
\end{aligned}$$

情形 1. $\Omega_1 \geq D_1$,

$$\begin{aligned}
&\leq I - (\langle M_1 \rangle + \Omega_1 + I - L_1)^{-1}[(\langle M_1 \rangle + I - L_1) - |N_1 + I - L_1| + D_1 - |L_1 + U_1|] \\
&\leq I - 2(\Omega_1 + \langle M_1 \rangle + I - L_1)^{-1}\langle A_1 \rangle.
\end{aligned}$$

由于 $\langle A_1 \rangle$ 是一个 M-矩阵，因此存在一个正向量 $v > 0$ 使得

$$\langle A_1 \rangle v > 0.$$

因此

$$Tv \leq (I - 2(\Omega_1 + \langle M_1 \rangle + I - L_1)^{-1}\langle A_1 \rangle)v < v.$$

利用引理 2.4，我们可以得出 $\rho(T)<1$。

情形 2。$\Omega_1 < D_1$ 和 $\langle A_1 \rangle + 2\Omega_1 - D_1 - |B|$ 是一个 M-矩阵。因此，

$$\begin{aligned}
T &\leq (\langle M_1 \rangle + \Omega_1 + I - L_1)^{-1}[(\langle M_1 \rangle + \Omega_1 + I - L_1) - (\langle M_1 \rangle + \Omega_1 + I - L_1) \\
&+ |N_1 + I - L_1| + |\Omega_1 - D_1| + |L_1 + U_1|] \\
&\leq I - (\langle M_1 \rangle + \Omega_1 + I - L_1)^{-1}[(\langle M_1 \rangle + I - L_1) - |N_1 + I - L_1| \\
&+ 2\Omega_1 - D_1 - |L_1 + U_1|].
\end{aligned}$$

由于 $[\langle A_1\rangle + 2\Omega_1 - |D_1| - |L_1 + U_1|]$ 是一个 M-矩阵，因此存在一个正向量 $v > 0$，使得

$$[\langle A_1\rangle + 2\Omega_1 - |D_1| - |L_1 + U_1|]v > 0.$$

因此

$$Tv \leq I - (\Omega_1 + \langle M_1\rangle + I - L_1)^{-1}[\langle A_1\rangle + 2\Omega_1 - D_1 - |L_1 + U_1|]v < v.$$

利用引理 2.4，我们能够确定 $\rho(T)<1$。

因此，根据定理4.1，由方法 3.1 生成的迭代序列 $\{s^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty}$ 对任意初始向量 $s^{(0)}$. 都收敛到 s^* 。

□

5 数值例子

IT 表示迭代步数，而 CPU 表示以秒为单位的 CPU 时间。本节包含两个数值例子，以展示我们所提出方法的效率。我们考虑 LCP(q, A_1)，该问题始终具有唯一解。令 $A_1 = P_1+\delta_1 I$ 和 $q = -A_1 z^*$，其中 $z^* =(1, 2, \ldots, 1, 2, \ldots) \in R^n$ 是方程（1）的唯一解。令 $s^{(0)} =(1, 0, \ldots 1, 0, \ldots)^T \in R^n$ 为初始向量，并设置 $\epsilon = 10^{-5}$。将所提出的方法（NAMGS 和 NAMSOR）与基于模的 Gauss-Seidel（MGS）方法和逐次超松弛（MSOR）方法进行比较，[3], 这两种方法在求解 LCP(q, A_1) 方面均具有较高的效率。

所有计算均使用Acer台式机上的Matlab 2021a版本（Intel(R) Core(TM) i7-8700 CPU @ 3.2 GHz 3.19GHz，16.00GB 内存）完成。 [3] 中，新型加速模数型迭代方法和基于模数的矩阵分裂方法的数值结果列于表1和表2中。

例5.1。系统矩阵 $A_1 \in R^{n\times n}$ 由 $A_1 = P_1 + \delta_1 I$生成，其中 δ_1 是非负实参数，并且

$$P_1 = \begin{bmatrix} L_1 & -I_2 & 0 & \dots & 0 \\ -I_2 & L_1 & -I_2 & \dots & 0 \\ 0 & -I_2 & L_1 & -I_2 & 0 \\ 0 & \dots & -I_2 & \ddots & -I_2 \\ 0 & \dots & 0 & -I_2 & L_1 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & -1 & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

其中，$P_1 \in R^{n\times n}$、$L_1 \in R^{m\times m}$ 和 I_2 是 m阶单位矩阵。

表 1：MGS 和 MSOR 方法 [3] 以及 NAMGS 和 NAMSOR 方法的结果，$\delta_1 = 4$。

	n	100	900	2500	3600	6400	10000
MGS	**IT**	36	40	41	41	42	42
$\alpha = 1$	**CPU**	0.0039	0.0293	0.2699	0.6400	2.0785	4.5712
	Res	9.7e-06	8.0e-06	7.9e-06	8.9e-06	7.4e-06	8.4e-06
NAMGS	**IT**	16	17	17	17	18	18
$\alpha_1 = 1$	**CPU**	0.0024	0.0146	0.1089	0.2688	0.8179	2.0175
	Res	6.3e-06	6.3e-06	8.5e-06	9.5e-06	4.5e-06	5.1e-06
MSOR	**IT**	15	17	18	18	18	19
$\alpha = 0.85$	**CPU**	0.0034	0.0141	0.1201	0.2903	0.7826	2.0791
	Res	9.5e-06	7.6e-06	5.3e-06	6.5e-06	8.9e-06	4.3e-06
NAMSOR IT		12	12	13	13	13	13
$\alpha_1 = 0.91$	**CPU**	0.0028	0.0116	0.0905	0.2017	0.6467	2.1918
	Res	2.7e-06	7.6e-06	3.2e-06	3.7e-06	4.8e-06	5.9e-06

例 5.2。系统矩阵 $A_1 \in R^{n\times n}$ 由 $A_1 = P_1 + \delta_1 I$生成，

其中，δ 为非负实参数，且 p

$$P_1 = \begin{bmatrix} L_1 & -0.5I_2 & 0 & \dots \\ -1.5I_2 & L_1 & -0.5I_2 & \dots \\ \vdots & -1.5I_2 & \ddots & -0.5I_2 \\ 0 & \dots & -1.5I_2 & L_1 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 4 & -0.5 & \dots & \dots \\ -1.5 & 4 & -0.5 & \dots \\ \vdots & -1.5 & \ddots & -0.5 \\ 0 & \dots & -1.5 & 4 \end{bmatrix}$$

$P_1 \in R^{n\times n}$、 $L_1 \in R^{m\times m}$ 和 I_2 是 m阶单位矩阵。

表2：MGS 和 MSOR 方法 [3] 以及 NAMGS 和 NAMSOR 方法， $\delta_1 = 4$。

	n	100	900	2500	3600	6400	10000
MGS	**IT**	24	26	26	26	27	27
$\alpha = 1$	**CPU**	0.0034	0.0208	0.1707	0.3961	1.1542	2.9471
	Res	9.0e-06	6.5e-06	8.7e-06	9.6e-06	6.5e-06	7.3e-06
NAMGS	**IT**	12	12	13	13	13	13
$\alpha_1 = 1$	**CPU**	0.0026	0.0141	0.0837	0.1998	0.2987	1.4461
	Res	3.8e-06	8.4e-06	3.1e-06	3.5e-06	4.4e-06	5.3e-06
MSOR	**IT**	14	14	15	15	15	15
$\alpha = 0.88$	**CPU**	0.0029	0.0123	0.1040	0.2505	0.6543	1.6363
	Res	3.8e-06	8.2e-06	4.1e-06	4.6e-06	5.5e-06	6.3e-06
NAMSOR IT		8	9	9	9	9	9
$\alpha_1 = 0.88$	**CPU**	0.0022	0.0096	0.0655	0.1409	0.0441	1.7340
	Res	2.2e-06	1.5e-06	2.7e-06	3.7e-06	4.6e-06	5.9e-06

从表 1 和表 2 可以看出，与 [3] 中的 MGS 和 MSOR 方法相比，我们提出的 NAMGS 和 NAMSOR 方法所需的迭代步数更少、处理速度更快（CPU 时间更短），计算效率也更高。

6 结论

本文提出了一类基于矩阵分裂、用于求解 LCP(q, A_1) 的新型加速模数迭代方法。 A_1 的大规模稀疏结构在整个迭代过程中通过这种

迭代形式得以保留。此外，当系统矩阵 A_1 是一个 H_+-矩阵时，我们给出了一些收敛条件。最后，提供了两个数值例子以说明所提出方法的有效性。

利益冲突 作者声明不存在任何利益冲突。

致谢。第一作者谨向印度政府大学拨款委员会（UGC）在 SRF奖学金项目编号 1068/(CSIR-UGC NET DEC. 2017) 下提供的支持表示感谢。

参考文献

[1] BH Ahn。通过迭代方法求解非对称线性互补问题。《优化理论与应用杂志》，33：175–185，1981。

[2] R Ali、I Khan、A Ali 和 A Mohamed。利用 M矩阵求解绝对值方程的两种新广义迭代方法。《AIMS Mathematics》，7(5):8176–8187，2022年。

[3] ZZ Bai。用于线性互补问题的基于模的矩阵分裂迭代方法。《Numerical Linear Algebra with Applications》，17(6)：917–933，2010 年。

[4] ZZ Bai 和 DJ Evans。用于线性互补问题的矩阵多重分裂松弛方法。《国际计算数学杂志》，63(3-4):309–326，1997。

[5] A Berman 和 RJ Plemmons。《数学科学中的非负矩阵》。SIAM，1994。

[6] AK Das. 基于主枢轴变换的若干矩阵类的性质. 《运筹学年鉴》, 243:375–382, 2016.

[7] AK Das、Deepmala 和 R Jana. 求解运输问题的若干方面. 南斯拉夫运筹学杂志, 30(1):45–57, 2020.[8] AK Das 和 R Jana. 互补问题中交叉法的有限性. 载于《数学与计算：第三届国际会议，ICMC 2017》，印度哈尔迪亚，2017年1月17日至21日，论文集 3，第 170–180 页. 施普林格, 2017.

[9] AK Das 和 R Jana。关于广义正半定矩阵和内点算法。载于《运筹学与优化：FOTA 2016》，印度加尔各答，11月24日至26日，1，第3–16页。施普林格，2018年。

[10] JL Dong 和 MQ Jiang。一种求解对称正定线性互补问题的修正模数法。《数值线性代数及其应用》，16(2):129–143，2009 年。

[11] A Dutta、R Jana 和 AK Das。关于列相容矩阵和线性互补问题。载于《第七届数学与计算国际会议论文集：ICMC 2021》，第615–625页。施普林格，2022年。

[12] XM Fang。求解线性互补问题的广义不动点法。AIMS数学，6(11):11904–11920，2021。[13] A Frommer 和 DB Szyld。H-分裂与两阶段迭代法。数值数学，63:345–356，1992。

[14] A Hadjidimos 和 M Tzoumas。《用于求解线性互补问题的非定常外推模算法》。《线性代数及其应用》，431(1-2):197–210，2009。

[15] A Hadjidimos 和 LL Zhang. 关于采用 h+-矩阵求解线性互补问题的三类算法比较.《计算与应用数学杂志》，336:175–191，2018年。

[16] JT Hong 和 CL Li. 用于一类隐式互补问题的基于模的矩阵分裂迭代方法。《Numerical Linear Algebra with Applications》，23(4):629–641，2016.

[17] N Huang 和 C Ma. 用于一类弱非线性互补问题的基于模的矩阵分裂算法。《Numerical Linear Algebra with Applications》，23(3):558–569，2016。

[18] R Jana、AK Das 和 A Dutta. 关于隐式 z 矩阵与内点算法。OPSEARCH，56:1108–1116，2019。

[19] R Jana、AK Das 和 S Sinha. 关于 Lemke 算法的可处理性。《应用与应用数学：国际期刊》（AAM），13(2):31，2018年。

[20] R Jana、A Dutta 和 AK Das. 关于隐式 z 矩阵与线性互补问题的进一步研究。《线性与多重线性代数》，69(6):1151–1160，2021。

[21] NW Kappel 和 LT Watson. 线性互补问题的迭代算法。《国际计算数学杂志》，19(3-4):273–297，1986。

[22] B Kumar、Deepmala 和 AK Das。基于矩阵分裂的一般不动点方法及其在线性互补问题求解中的应用。《数值分析与逼近理论杂志》51(2):189–200，2022。

[23] B Kumar、Deepmala 和 AK Das。关于求解隐式互补问题的模数迭代方法的进一步研究。arXiv 预印本 arXiv:2303.12519，2023。

[24] B Kumar、Deepmala 和 AK Das。《用于求解大型稀疏水平线性互补问题的投影固定点迭代方法》。《印度纯粹与应用数学杂志》，第 1–10 页，2023。

[25]B Kumar、Deepmala、A Dutta 和 AK Das。利用正部函数求解线性互补问题的误差界。arXiv 预印本 arXiv:2209.00377，2022。

[26] B Kumar、A Dutta 和 AK Das。关于求解线性互补问题的基于矩阵分裂模的迭代方法的更多研究。OPSEARCH，第 1–18 页，2023】【。

[27]W Li. 一种用于H矩阵线性互补问题的一般模数型矩阵分裂方法。《Applied Mathematics Letters》，26(12):1159–1164，2013。

[28] C Ma 和 N Huang。《一类弱不可微非线性互补问题的改进的基于模的矩阵分裂算法》。《Applied Numerical Mathematics》，108:116–124，2016年。

[29] OL Mangasarian。通过迭代方法求解对称线性互补问题。《优化理论与应用杂志》，22(4):465–485，1977。

[30] F Mezzadri 和 E Galligani。用于求解水平线性互补问题的基于模的矩阵分裂方法。《Numerical Algorithms》，83(1)：201–219，2020。

[31]HS Najafi 和 SA Edalatpanah。求解线性互补问题的迭代方法改进。《工程计算》，30(7):910–923，2013。

[32] SK Neogy 和 AK Das。《奇异N_0矩阵与 Q类》。《线性代数及其应用》，434(3):813–819，2011。

[33] SK Neogy、AK Das 和 A Gupta。《广义主元变换、互补理论及其在随机博弈中的应用》。Optimization Letters，6：339–356，2012 年。

[34] WMG Van Bokhoven。一类线性互补问题可在多项式时间内求解。未发表论文，荷兰理工大学电气工程系，1980年。

[35] S Wu 和 C Li. 一类新的线性互补问题基于模的矩阵分裂方法。《Optimization Letters》，第1–17页，2022。

[36]SL Wu 和 P Guo. 拟互补问题的基于模的矩阵分裂算法。《Applied Numerical Mathematics》，132：127–137，2018年。

[37] Z Xia 和 C Li. 一类非线性互补问题的基于模的矩阵分裂迭代方法。《Applied Mathematics and Computation》，271：34–42，2015年。

[38] WW Xu. 线性互补问题的改进基于模的矩阵分裂迭代方法。《Numerical Linear Algebra with Applications》，22(4)：748–760，2015年。

[39] D Yuan 和 Y Song. 线性互补问题的改进 AOR 方法。《Applied Mathematics and Computation》，140(1)：53–67，2003年。

[40] LL Zhang. 线性互补问题的两步基于模的矩阵分裂迭代方法。《Numerical Algorithms》，57：83–99，2011。

[41] LLZhang 和 ZR Ren. 基于模的矩阵分裂迭代方法用于线性互补问题的改进收敛定理。《Applied Mathematics Letters》，26(6):638–642，2013。

[42] N Zheng 和 JF Yin. 用于线性互补问题的加速基于模的矩阵分裂迭代方法。《Numerical Algorithms》，64(2):245–262，2013。