图连接上的量子超可积自旋系统

NICOLAI RESHETIKHIN 和 JASPER STO KMAN

arXiv:2305.02767v1 [math.RT] 4 May 2023

ABSTRACT. 本文构造了定义在连通有向有限图上 G-连接模空间上的某些量子自旋系统，其中 G 取单连通紧李群。我们用局部不变张量构造了相互对易的量子哈密顿量的联合特征函数。我们利用 Harish-Chandra 和 Lepowsky & McCollum 提出的 Harish-Chandra 模不可约性判据，确定了保证量子自旋系统超可积的充分条件。

由此得到的量子超可积自旋系统类别将量子周期和开放自旋 Calogero-Moser 自旋链作为特例。在周期情形下，用局部不变张量表示的联合特征函数是多点广义迹函数；在开放情形下，则是紧对称空间上的多点球函数。

Dedicated to the memory of Gerrit van Dijk

1. INTRODUCTION

1.1. 令 Γ 为一个连通有向有限图，其顶点集为 V，边集为 E，源映射与目标映射分别为 s、t：$E \to V$。令 G 为一个连通紧李群。图 G 上的 Γ 取值于乘积群 $G^E = \{\boldsymbol{g} = (g_e)_{e\in E} \mid g_e \in G\}$ 的连接（或格点规范场）由着色 $\boldsymbol{g}$ 构成，即将 Γ 的边赋以群元素 $g_e \in G$ $(e \in E)$。我们将 G^E 既视为紧李群，也视为代数群（通过 Tannaka 对偶）。

格点规范变换群 $G^V = \{\boldsymbol{k} = (k_v)_{v\in V} \mid k_v \in G\}$ 通过 [1] 作用于 G^E

$$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{g})_e = k_{s(e)} g_e k_{t(e)}^{-1}. \tag{1}$$

由此得到的 G^E 中 G^V-轨道空间，是由 Fock 和 Rosly [11] 引入的图 G-连接的模空间，用于描述曲面上平坦连接的模空间，另见 [2, 3]。关于相关的量子化问题，参见 [1, 4, 5, 22] 及其中的参考文献。本文构造了量子系统

[1]按照这种作用约定，$g_e \in G$ 描述沿 e 反方向的整体单值化。

其哈密顿量是模空间 G^E/K 上的微分算子，其中图G-连接对形式为 K $= \prod_{v\in V} K_v \subseteq G^V$ 的规范群 K 取模， K_v是 G的任意子群。

1.2. 令 $\mathcal{D}(G^E)$ 为 G^E 上的代数微分算子代数。代数函数空间上的逆伴 K-作用在 G^E 上诱导出 $\mathcal{D}(G^E)$ 上由代数自同构给出的 K-作用。我们用 $\mathcal{D}(G^E)^{\mathbf{K}} \subseteq \mathcal{D}(G^E)$ 表示 K-不变微分算子的子代数。本文研究其子代数

$$\mathcal{D}_{\mathrm{biinv}}(G^E) \subseteq \mathcal{D}_{\mathrm{inv}}(G^E)^{\mathbf{K}} \subseteq \mathcal{D}(G^E)^{\mathbf{K}}, \tag{2}$$

其中， $\mathcal{D}_{\mathrm{inv}}(G^E) \subseteq \mathcal{D}(G^E)$ 是由左、右 G^E 不变微分算子生成的子代数，而 $\mathcal{D}_{\mathrm{biinv}}(G^E) \subseteq \mathcal{D}(G^E)$ 是 G^E 双不变微分算子的子代数。

1.3. 设 $\sigma : \mathrm{K} \to \mathrm{GL}(S)$ 为一个有限维 K-表示。与 K 上的 $G^E/$ 相关联的向量丛的代数截面空间 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\Gamma,G,S}$ 中的函数称为自旋图函数。它们是满足以下条件的代数函数 $f : G^E \to S$

$$f(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{g}) = \sigma(\boldsymbol{k})f(\boldsymbol{g})$$

对于 $\boldsymbol{k} \in$K 和 $\boldsymbol{g} \in G^E$。这里的“自旋”指将 S 解释为相应量子自旋系统的自旋空间，参见 §1.4 和 §1.9。

1.4. 代数 $\mathcal{D}(G^E)^{\mathbf{K}}$ 在由自旋图函数构成的空间 $\mathcal{H}$ 上作为标量值 K-不变微分算子作用。由代数的包含关系 (2) 所得到的同态像构成一个包含关系

$$I \subseteq J \subseteq A \tag{3}$$

End($\mathcal{H}$) 的子代数。我们将 (3) 视为一个量子自旋系统，其量子态空间为 $\mathcal{H}$；同态像 $A = A_{\Gamma,\ G,\ S} \subseteq$ End($\mathcal{H}$) of$\mathcal{D}(G^E)^{\mathbf{K}}$ 作为量子可观测量代数，同态像 $J = J_{\Gamma,\ G,\ S}$ of$\mathcal{D}_{\mathrm{inv}}(G^E)^{\mathbf{K}}$ 作为量子积分代数，以及同态像 $I = I_{\Gamma,\ G,\ S}$of $\mathcal{D}_{\mathrm{biinv}}(G^E)$ 作为量子哈密顿量代数。

1.5. 量子态空间 $\mathcal{H}$ 分解为有限维公共特征空间的代数直和，这些空间对应于量子哈密顿量的作用，

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\chi\in I^\wedge} \mathcal{H}_\chi,$$

其中 $I^\wedge$ 是 I 的特征集合。我们称量子自旋系统为超可积，如果对所有 $\chi \in I^\wedge$，公共特征空间 $\mathcal{H}_\chi$ 要么是 $\{0\}$，要么是不可约的 J-模。等价地，当具有相同能量本征值 $\chi \in I^\wedge$ 的本征态 f、$g \in \mathcal{H}_\chi$ 可通过某个量子积分 $g = D(f)$ 相互关联时，量子自旋系统具有超可积性，其中 $D \in J$。

当 $I = J$ 时，我们称该超可积量子自旋系统是可积的。在这种情况下，对于所有 $\chi \in I^\wedge$，$\dim(\mathcal{H}_\chi) \leq 1$，即本征态由其能量本征值确定，且只差一个归一化因子。

1.6. 本文的主要结果如下。

定理。若满足以下三个条件，则 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\Gamma,\, G,\, S}$ 上的量子自旋系统是超可积的：

(a) G 是单连通的；(b) 对所有 $v \in V$，局部规范群 K_v 是 G 的闭连通子群；(c) $\sigma : \mathrm{K} \to \mathrm{GL}(S)$ 是不可约的。

我们将利用 Harish-Chandra [13] 和 Lepowsky & McCollum [14] 的一项结果来证明该定理。该结果将不可约 $\mathfrak{g}$-模与适当紧李群 K 的不可约 $U(\mathfrak{g})^K$-模联系起来（该结果在 Harish-Chandra 模的子商定理的证明中发挥着重要作用）。

1.7. 若自旋图函数 f 是量子哈密顿量的共同本征函数，即对于某个 $\chi \in I^\wedge$，有 $f \in \mathcal{H}_\chi$，则称其为初等自旋图函数。对于张量积 K- 表示 S，我们利用以下着色版本 Γ中的数据构造 $\mathcal{H}_\chi$ 的张成集。

顶点 $v \in V$ 上的颜色是张量积表示 S 的局部表示 $\sigma_v : K_v \to \mathrm{GL}(S_v)$。为确定边的颜色，我们利用以下事实：$\mathcal{H}_\chi \neq \{0\}$ 当且仅当 χ 是 G^E 的某个不可约表示的中心特征。不可约 G^E表示通过局部不可约 G表示，为 Γ 的边提供颜色。

我们利用局部不变张量，构造 $\mathcal{H}_\chi$ 中初等自旋图函数的生成集（这里的“局部”是指它们只依赖于有色图 Γ 的某个顶点 v 的星）。

1.8. 如果 Γ 是具有 n 条边且对所有 $v \in V$ 都有 $K_v = G$ 的有向循环图，那么我们将证明，由此得到的初等自旋图函数本质上是 Etingof & Schiffmann [8] 中的广义（或 n 点）迹函数。

如果 Γ 是具有 n 条边的线性有序线性图，并且对于 2 价（分别为 1 价）顶点 $v \in V$，局部规范群 K_v 为 G（分别为 K），那么我们将证明，由此得到的初等自旋图函数是 [21] 中的 n 点球函数。对于 $n = 1$，这些就是 G 上通常的初等 σ 球函数，参见例如 [12, 24]。

在这两种情况下，局部不变张量都可以视为顶点算子的拓扑退化形式，参见 [24, 23]。

1.9. §1.8 中两个特殊情形下，将初等自旋图函数明确描述为多点迹函数和多点球函数，从而分别将相关量子自旋系统与来自 [8, 21, 20] 和 [24, 21], 的周期型和开放型量子自旋 Calogero-Moser 链联系起来。

这可以在量子哈密顿量层面具体实现。这需要用 G 的一个适当子环面 T 来参数化 G-图连接的模空间 G^E/K，并运用 Harish-Chandra 的径向分量技术，以显式的二阶 End(S) 值微分算子 $H_e(e \in E)$ 的形式，描述边坐标二次卡西米尔算子在 $\mathcal{H}_{\Gamma,\, G,\, S}$ 上的作用；这些算子在经过规范变换后，即为量子自旋 Calogero-Moser 链的二次哈密顿量。相邻边 e 和 e' 对应的差 $H_e - H_{e'}$ 随后构成一个显式的一阶微分算子交换族，称为渐近 Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard 算子。详情请见 [8] 和 [24, 21]。

1.10. 结合§1.6和§1.9中的结果，我们得到了确保周期性和开放式量子自旋 Calogero-Moser 链具有超可积性的明确条件。对于具有一个顶点且 $\mathrm{K} = G$ 的有向循环图 Γ 这一特殊情形，相关周期性量子自旋 Calogero-Moser 系统的超可积性此前已在 [18] 中讨论过。周期性和开放式 Calogero-Moser 自旋链的经典超可积性在 [19] 中进行了讨论。

1.11. 本文的内容安排如下。

在第 2 节中，我们将介绍本文所研究的量子系统类型，并讨论这一背景下的超可积性概念。

在第 3 节中，我们将阐述 Harish-Chandra [13] 和 Lepowsky & McCollum [14] 的一项结果（推论 3.17），该结果将在确立图连接模空间上量子自旋系统的超可积性方面发挥关键作用。这涉及李代数的约化扩张这一概念，我们将对此进行详细讨论。

在第 4 节中，我们引入图连接上的自旋图函数空间，并用局部不变张量给出其一组生成集（定理 4.15）。对于有向循环图和线性有序线性图，我们将自旋图函数与多点迹函数及多点球函数联系起来（见 §4.17 和 §4.18）。

在第 5 节中，我们详细介绍图连接的模空间上的量子自旋系统。我们陈述了保证量子自旋系统超可积性的条件，并讨论量子周期与开放自旋 Calogero-Moser 链的超可积性（见 §5.12 和 §5.13）。

在第 6 节中，我们给出主要结果（定理 1.6/5.11）的证明。关键的中间步骤是将超可积性条件转化为关于图的各顶点星形邻域处局部交织空间的不可约性条件（见推论 6.9），这使我们能够在此背景下应用 Harish-Chandra 和 Lepowsky & McCollum 的结果。

约定：除非明确说明，基域为 $\mathbb{C}$ 。除非明确另有说明，李代数均为有限维。我们用 Hom(V,W) 表示复向量空间范畴中的 Hom 空间。对于G群、 A结合代数和 $\mathfrak{g}$李代数，我们分别用 Hom$_G(V,W)$、Hom$_A(V,W)$、Hom$_{\mathfrak{g}}(V,W)$ 表示 G表示范畴、左 A模范畴和 $\mathfrak{g}$模范畴中的 Hom 空间。我们用 $U(\mathfrak{k})$ 表示复李代数 $\mathfrak{k}$ 的泛包络代数，用 $Z(\mathfrak{k})$ 表示其中心。

对于集合 X、$\mathcal{I}$ （其中 $\mathcal{I}$ 为有限集），我们用 $X^{\mathcal{I}}$ 表示 X 的 $\#\mathcal{I}$ 个副本的直积。当 X 为李群/李代数时，我们赋予 $X^{\mathcal{I}}$ 直积李群/李代数结构。

对于一族有限的向量空间 M_i，其指标集为 $\mathcal{I}=\{i_1,\dots,i_s\}$，并由 $i_1<\cdots<i_s$ 给出全序，我们记作

$$\bigotimes_{i\in\mathcal{I}} M_i := M_{i_1}\otimes\cdots\otimes M_{i_s}.$$

致谢：两位作者均得到荷兰研究委员会（NWO）项目（项目编号：613.009.1260）的资助。此外，N.R. 的工作还得到 NSF 基金 DMS-1902226、RSF 基金 18-11-00-297 以及长江基金的资助。

2. 中心化子代数

本节推导中心化子代数的一些基本性质，旨在将其应用于量子超可积系统。出发点是一个复向量空间 $\mathcal{H}$ 以及一个包含关系

$$I\subseteq A\subseteq \mathrm{End}(\mathcal{H})$$

含幺代数，其中 I 是交换的。在量子力学的应用中， $\mathcal{H}$ 是量子态空间， A 是可观测量代数，而 I 是其量子哈密顿量子代数。我们不指定某个特定的 $H\in I$ 作为系统的量子哈密顿量，因为此处不考虑量子动力学。

2.1. 记 I 的特征所成的集合为 $I^\wedge$ 。对于元素 $\chi\in I^\wedge$，即对于含幺代数同态 χ: $I\to\mathbb{C}$，我们记

$$\mathcal{H}_\chi := \{h\in\mathcal{H}\mid y\cdot h=\chi(y)h \quad \forall\, y\in I\}$$

表示相应的联合特征空间（它可能为零）。

2.2. 记

$$C_A(I) := \{x\in A\mid xy=yx \quad \forall y\in I\}$$

A 中 I 的中心化子。它是一个包含 I 的 A 子代数。对于所有 $\chi\in I^\wedge$，它都稳定 $\mathcal{H}_\chi$ 。

2.3. 假设 $J \subseteq \mathrm{End}(\mathcal{H})$ 是一个稳定 $\mathcal{H}_\chi \subseteq \mathcal{H}$ 的子代数。那么 $\mathcal{H}_\chi$ 是一个 J-模，并且

$$J_\chi := \{x|_{\mathcal{H}_\chi} \mid x \in J\}$$

是 $\mathrm{End}(\mathcal{H}_\chi)$ 的子代数。如果 $\mathcal{H}_\chi$ 是有限维不可约 J-模，那么根据稠密定理，$J_\chi = \mathrm{End}(\mathcal{H}_\chi)$。如果 $J = I$，那么我们有 $I_\chi = \mathbb{C}\mathrm{id}_{\mathcal{H}_\chi}$。

2.4. 设 J 是包含 I 的 A 子代数。那么

$$C_A(J) \subseteq C_A(I).$$

此外，如果 J 对某个 $\chi \in I^\wedge$稳定 $\mathcal{H}_\chi$，那么根据 §2.2，$C_A(J)$ 稳定 $\mathcal{H}_\chi$。由于 J 和 $C_A(J)$ 都稳定 $\mathcal{H}_\chi$，因此 $C_A(J)_\chi$ 包含于 J_χ 在 $\mathrm{End}(\mathcal{H}_\chi)$ 中的交换子之中。

此外，如果 $\mathcal{H}_\chi$ 是不可约有限维 J-模（特别是，$\mathcal{H}_\chi \neq \{0\}$），那么

$$C_A(J)_\chi = \mathbb{C}\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}_\chi} = I_\chi$$

根据舒尔引理。

2.5. 假设 $J \subseteq A$ 是满足以下条件的子代数

$$I \subseteq J \subseteq C_A(I).$$

对于这样的代数 J，根据 §2.2，联合特征空间 $\mathcal{H}_\chi$ 对所有 $\chi \in I^\wedge$ 都是 J-稳定的。

如果进一步假设 $\mathcal{H}$ 是一个半单 I-模（即 $\mathcal{H} = \bigoplus_{\chi\in I^\wedge} \mathcal{H}_\chi$），那么 map

$$J \to \prod_{\chi\in I^\wedge} \mathrm{End}(\mathcal{H}_\chi), \qquad x \mapsto \big(x|_{\mathcal{H}_\chi}\big)_{\chi\in I^\wedge}$$

是一个单射代数同态，其中 $\prod_{\chi\in I^\wedge}\mathrm{End}(\mathcal{H}_\chi)$ 是代数族 $\{\mathrm{End}(\mathcal{H}_\chi) \mid \chi \in I^\wedge\}$ 的直积。其像包含于 $\prod_{\chi\in I^\wedge} J_\chi$。

2.6. 假设 $J \subseteq A$ 是满足以下条件的子代数

$$I \subseteq J \subseteq C_A(I) \subseteq A \subseteq \mathrm{End}(\mathcal{H}). \tag{4}$$

此外，假设以下两个谱性质成立：

(a) $\mathcal{H}$ 是一个半单的 I-模。(b) 对于 $\chi \in I^\wedge$，$\mathcal{H}_\chi = \{0\}$ 或 $\mathcal{H}_\chi$ 是一个有限维不可约J-模。

由§2.3和§2.4可得

$$\begin{aligned} J_\chi &= \mathrm{End}(\mathcal{H}_\chi) = C_A(I)_\chi, \\ I_\chi &= \mathbb{C}\mathrm{id}_{\mathcal{H}_\chi} = C_A(J)_\chi \end{aligned} \tag{5}$$

对所有 $\chi \in I^\wedge$。通俗地说，J 在“局部”具有最大维数，且等于$C_A(I)$；而 I 在“局部”是 J的中心。

2.7. §2.6 的设定为本文量子系统的超可积性提供了数学框架。从这一角度看，(4) 定义了一个量子系统，其量子态空间为 $\mathcal{H}$，量子可观测量代数为 A，量子哈密顿量代数为 I，量子积分代数为 J。

定义。若谱条件 2.6(a)&(b) 均成立，则称量子系统 (4) 是超可积的。

量子超可积系统所具有的这些性质 (5)，与 [18, §2]中所考虑的量子超可积系统核心结构的概念建立了联系。

如果 $I = J$，则称量子超可积系统是量子可积的。在这种情况下，对于所有 $\chi \in I^\wedge$，$\dim(\mathcal{H}_\chi) \leq 1$，也就是说，量子哈密顿量的特征值将相应的联合本征向量确定到一个乘法常数。

对于量子超可积系统的本征态，情况不再如此。但是，当 f、$g \in \mathcal{H}_\chi$ 时，存在一个量子积分 $D \in J$，使得 $g = D(f)$。这里利用了密度定理，即 J-模 $\mathcal{H}_\chi$ 的不可约性等价于

$$J_\chi = \mathrm{End}(\mathcal{H}_\chi).$$

因此，对于量子超可积系统的这些例子，我们采用了一个较弱的条件，即公共特征空间是有限维的；但是，具有相同特征值的两个联合特征向量总是可以通过某个量子积分的作用相互关联。

2.8. 从量子化的角度来看，量子超可积性要求代数 I、J 和 A 分别是经典超可积系统（有时也称为退化可积系统）中哈密顿量、积分和可观测量的泊松代数的量子化形式。对于周期性和开放量子自旋 Calogero-Moser 链 [17, 19]，这一点已得到证实。关于经典超可积性的讨论，请参见 [17] 及其中的参考文献。

3. Preservation of irreducibility

本节我们重点讨论 Lepowsky 和 McCollum [14, Thm. 5.5] 提出的一个纯粹的表示论结果（在特殊情况下，该结果可追溯至 Harish-Chandra [13, Thm. 2]）。这一结果将成为第 6 节证明图连接上的量子自旋系统具有超可积性的关键要素。

3.1. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数。回顾一下，若 M 是其不可约 $\mathfrak{g}$-子模之和，则称 M 为半单 $\mathfrak{g}$- 模。此外，如果 M 的所有不可约 $\mathfrak{g}$- 子模都是有限维的，那么我们称 M 是有限半单 $\mathfrak{g}$-模。

3.2. 设 G 是一个实李群，$K \subseteq G$ 是其连通紧李子群。记 G 的李代数为 $\mathfrak{g}_0$，其复化为 $\mathfrak{g}$。若 π 是一个希尔伯特空间表示，则其由光滑 K-有限向量构成的（稠密）子空间 M 成为一个 $(\mathfrak{g}, K)$-模，其中 $x \in \mathfrak{g}_0$ 的作用为

$$x \cdot m := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(\exp(tx))m$$

（例如，参见 [25, §3.3.1]，其中给出了（$\mathfrak{g}, K$）-模的定义）。（$\mathfrak{g}, K$）-模 M 作为 $\mathfrak{k}$-模是有限半单的。此外，如果 π 是不可约且酉的，那么相应的（$\mathfrak{g}, K$）-模 M 作为 $\mathfrak{g}$-模也是不可约的。事实上，在更弱的假设下，这一结论仍然成立，即只要求 π 是不可约且容许的（更多细节参见 [25, §3.3-4]）。

3.3. 设 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ 是李代数的一个包含关系，M 是一个 $\mathfrak{g}$-模。用 $\mathfrak{k}^\wedge$ 表示有限维不可约 $\mathfrak{k}$-模的同构类集合。对于 $\alpha \in \mathfrak{k}^\wedge$，$\alpha$-型分量 M_α 是 M 中由 M 的、属于同构类 α的有限维不可约 $\mathfrak{k}$-子模生成的子空间。和 $\sum_{\alpha \in \mathfrak{k}^\wedge} M_\alpha \subseteq M$ 是直和（例如参见 [6, §1.2.8]）。此外，$M = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{k}^\wedge} M_\alpha$当且仅当 M 作为 $\mathfrak{k}$-模是有限半单的。

3.4. 当 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的一个李子代数，且 $\mathfrak{g}$ 是一个半单的 $\mathrm{ad}(\mathfrak{k})$-模时，称 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中是约化的。

注意，如果 $\mathfrak{k}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中是约化的，那么 $\mathfrak{k}$ 是约化李代数。另一方面，如果 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的半单李子代数，那么根据 Weyl 完全可约性定理，$\mathfrak{k}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中是约化的。

3.5. 设 G 是一个实李群，其李代数为 $\mathfrak{g}_0$，$K \subseteq G$ 是一个连通紧李子群。分别用 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{g}$ 表示 K 和 G 的复化李代数。那么 $\mathfrak{k}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中是约化的。

3.6. 设 $\mathfrak{g}$ 为一个李代数，且 $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 是一个有限阶为 n 的自同构。与之相关的定点李代数是

$$\mathfrak{g}^\theta := \{x \in \mathfrak{g} \mid \theta(x) = x\}.$$

命题。假设 θ 是有限阶 m的半单李代数 $\mathfrak{g}$的一个自同构。那么 $\mathfrak{g}^\theta$ 在 $\mathfrak{g}$中是约化的。

证明。该证明只需对关于对合的命题证明作相当直接的调整，参见 [6, 命题 1.13.3]。为方便读者，我们给出证明。

将 $\mathfrak{g}_{\overline{r}}$ ($\overline{r} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$) 记为 θ 的特征值为 $e^{2\pi i/r}$时对应的特征子空间。于是，$\mathfrak{g}^\theta = \mathfrak{g}_{\overline{0}}$ 和 $\mathfrak{g}_{\overline{r}}$ 是 $\mathfrak{g}$的 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}^\theta)$-不变子空间。由于 θ 的阶为 m,

赋值 $\overline{1} \mapsto \theta$ 定义了有限阿贝尔群 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$在 GL(𝔤) 上的表示 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to$ 。根据马施克定理，我们得出

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\overline{r} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\overline{r}}.$$

写出 $\mathfrak{p} := \bigoplus_{\overline{r} \neq \overline{0}} \mathfrak{g}_{\overline{r}}$，使得

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\theta} \oplus \mathfrak{p}.$$

设 $\kappa: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ 为 $\mathfrak{g}$的 Killing 形式。则对于所有 $x, y \in \mathfrak{g}$，有 $\kappa(\theta(x)\ \theta(y))$ $= \kappa(x, y)$，因此 $\kappa(\mathfrak{g}^{\theta}, \mathfrak{p}) = 0$。由于 $\mathfrak{g}$ 是半单的，我们得出 $\kappa|_{\mathfrak{g}^{\theta} \times \mathfrak{g}^{\theta}}$ 是非退化的。此外，若 $x \in \mathfrak{g}^{\theta}$ 和 $x = s + n$ 是 x 在 $\mathfrak{g}$中的抽象 Chevalley 分解，其中 $s \in \mathfrak{g}$（分别为 $n \in \mathfrak{g}$）是 x的半单（分别为幂零）部分，则 $s, n \in \mathfrak{g}^{\theta}$（这对于 $\mathfrak{g}$的任意自同构 θ 均成立）。因此，命题 1.7.6] 表明 $\mathfrak{g}^{\theta}$ 在 $\mathfrak{g}$中是约化的。□

3.7. 若 $\mathfrak{k}$在 $\mathfrak{g}$ 中是约化的，且 M 是有限半单 $\mathfrak{g}$-模，则根据 [6, Prop. 1.7.9(ii)]， M 是有限半单的 $\mathfrak{k}$-模。特别地，假设我们有如下李代数的包含关系

$$\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}$$

其中 $\mathfrak{m}$ 在 $\mathfrak{g}$中是约化的，且 $\mathfrak{l}$ 在 $\mathfrak{m}$中是约化的，则 $\mathfrak{l}$ 在 $\mathfrak{g}$中是约化的。

3.8. 对于李代数 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ 的同态像（其中 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}$中是约化的），有如下结果。

引理。假设 $\mathfrak{k}$ 在 $\mathfrak{g}$中是约化的。设 ϕ: $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{l}$ 是李代数的一个满同态。那么 ϕ(𝔨) 在 $\mathfrak{l}$中是约化的。

证明。设 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{m} S_i$ 是有限维不可约 ad(𝔨)-模的直和分解。那么 $\mathfrak{l} = \sum_{i=1}^{m} \phi$ (S_i)。 $\phi(S_i) = \{0\}$ 或 $\phi(S_i)$ 是不可约的 ad(ϕ(𝔨))-模。通过一个直接的归纳论证可知，对于某个子集 $\mathcal{I} \subseteq \{1, \ldots, m\}$，有 $\mathfrak{l} = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \phi(S_i)$。证明完毕。□

3.9. 对于 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ ，用 $\delta_{\mathfrak{g}}^{(m)}$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{\times m}$ 表示将 $x \in \mathfrak{g}$映射到 m元组（$x, \ldots, x$）的李代数同态。如果 $\mathfrak{k}$是 $\mathfrak{g}$的李子代数，则用 $\mathfrak{k}^{(m)} \subseteq \mathfrak{g}^{\times m}$ 表示它在 $\delta_{\mathfrak{g}}^{(m)}$下的像。

命题。假设 $\mathfrak{g}$ 是半单的，且 $\mathfrak{k}$ 在 $\mathfrak{g}$中是约化的。那么 $\mathfrak{k}^{(m)}$在 $\mathfrak{g}^{\times m}$中是约化的。

证明。由引理 3.8， $\mathfrak{k}^{(m)}$ 在 $\mathfrak{g}^{(m)}$中是约化的。注意到

$$\mathfrak{g}^{(m)} = (\mathfrak{g}^{\times m})^{\theta_m}$$

其中， θ_m 是由.....定义的 $\mathfrak{g}^{\times m}$ 的 m 阶自同构。

$$\theta_m(x_1, \ldots, x_m) := (x_m, x_1, \ldots, x_{m-1}).$$

命题 3.6 随后表明，$\mathfrak{g}^{(m)}$ 在 $\mathfrak{g}^{\times m}$ 中是可约化的。因此，根据 §3.7，$\mathfrak{k}^{(m)}$ 在 $\mathfrak{g}^{\times m}$ 中是可约化的。□

3.10. 设 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ 为李代数的一个包含。若包含映射 $\mathfrak{k} \hookrightarrow \mathfrak{g}$是 ad($\mathfrak{k}$)-模的一个截面，且商模 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 是半单 $\mathfrak{k}$-模，则称 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{k}$ 的约化扩张。通常，我们用 $\mathfrak{p}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中 $\mathfrak{k}$ 的一个 ad($\mathfrak{k}$)-不变补空间（作为 ad($\mathfrak{k}$)-模，它是有限半单的）。

3.11. 设 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ 为一个李子代数。以下两个陈述等价：(a) $\mathfrak{k}$ 在 $\mathfrak{g}$中是约化的。(b) $\mathfrak{k}$ 是约化李代数，且 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{k}$的约化扩张。

特别地，§3.5、§3.6 和 §3.7 给出了约化扩张的例子。

3.12. 以下结果应与 §3.7 中的传递性性质进行比较。

引理。设 $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}$ 是有限维李代数的包含关系。假设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的约化扩张，且 $\mathfrak{l}$ 在 $\mathfrak{m}$中是约化的。那么 $\mathfrak{l}$ 在 $\mathfrak{g}$中是约化的。

证明。设 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个 ad($\mathfrak{m}$)-不变子空间，使得 $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{p}$。根据假设，$\mathfrak{m}$ 是有限维半单 ad($\mathfrak{l}$)-模，且 $\mathfrak{p}$ 是有限维半单 ad($\mathfrak{m}$)-模。因此，由 [6, 命题 1.7.9(ii)]（另见 §3.7）可知，$\mathfrak{p}$ 作为 ad($\mathfrak{l}$)-模也是半单的。由于 $\mathfrak{l}$ 在$\mathfrak{m}$中是约化的，因此 $\mathfrak{l}$在 $\mathfrak{g}$中也是约化的。□

3.13. 以下引理是引理 3.8 关于约化扩张的对应结果 .

引理。设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{k}$的约化扩张。设 $\phi : \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{l}$ 是李代数的满同态。那么 $\mathfrak{l}$ 是 $\phi(\mathfrak{k})$的约化扩张。

证明。设 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个 ad($\mathfrak{k}$)-不变子空间，使得 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$。设 $\mathfrak{p} = \bigoplus_{i=1}^{m} S_i$ 是有限维不可约 ad($\mathfrak{k}$)-模的直和分解。则 $\mathfrak{l} = \phi(\mathfrak{k}) + \sum_{i=1}^{m} \phi(S_i)$，并且 $\phi(S_i) = \{0\}$ 或 $\phi(S_i)$ 是一个不可约 ad($\phi(\mathfrak{k})$)-模。由此进行直接的归纳论证可知，对于某个子集 $\mathcal{I} \subseteq \{1, \ldots, m\}$，有 $\mathfrak{l} = \phi(\mathfrak{k}) \oplus \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \phi(S_i)$。证明完毕。□

3.14. 设 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ 为李代数的一个包含关系，$\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{k}$ 的一个约化扩张。Lepowsky 和 McCollum 在 [14, 命题 4.2] 中得到了以下判据，用于判断一个不可约 $\mathfrak{g}$-模是否作为 $\mathfrak{k}$-模是有限半单的。

命题. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{k}$的约化扩张，且 M 是一个不可约的 $\mathfrak{g}$-模。那么，除非对所有 $\alpha \in \mathfrak{k}$^都有 $M_\alpha = 0$，否则 M 作为 $\mathfrak{k}$-模是有限半单的。

3.15. 设 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ 是李代数的一个包含。利用相应的泛包络代数的典范包含 $U(\mathfrak{k}) \subseteq U(\mathfrak{g})$，我们定义

$$U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}} := C_{U(\mathfrak{g})}\big(U(\mathfrak{k})\big)$$

$U(\mathfrak{g})$ 中 $U(\mathfrak{k})$ 的中心化子子代数（它等于 $U(\mathfrak{g})$ 中 $\mathfrak{k}$ 的中心化子）。

设 M 是一个 $\mathfrak{g}$-模，并将其视为一个 $U(\mathfrak{g})$-模。相应的同态 $U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(M)$ 限制为一个代数映射

$$U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}} \to \mathrm{End}_{\mathfrak{k}}(M).$$

因此，对于一个 $\mathfrak{k}$-模 S，$\mathfrak{k}$-线性映射 $S \to M$ 构成的空间 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(S, M)$ 成为左 $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$-模，其中 $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$ 作用于陪域 M。

3.16. 设 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ 是李代数的包含关系。设 S^{α} 是同构类为 $\alpha \in \mathfrak{k}^{\wedge}$ 的有限维不可约 $\mathfrak{k}$-模。对于 $\mathfrak{g}$-模 M，空间

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}\big(S^{\alpha}, M\big)$$

构成 S^{α} 在 M 中的重数空间。事实上，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}\big(S^{\alpha}, M\big)$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}\big(S^{\alpha}, M_{\alpha}\big)$ 作为复向量空间同构，并且 $\mathfrak{k}$-模 M_{α} 同构于由 $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(S^{\alpha}, M))$ 个 S^{α} 的代数直和（见 [6, §1.2.8]）。特别地，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}\big(S^{\alpha}, M\big) = 0$ 当且仅当 $M_{\alpha} = 0$。因此，命题 3.14 可重述如下：

命题。设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{k}$的约化扩张，且 M 是不可约的 $\mathfrak{g}$-模。那么 M 作为 $\mathfrak{k}$-模是有限半单的，除非对所有$\alpha \in \mathfrak{k}^{\wedge}$，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(S^{\alpha}, M) = 0$。

重数空间 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}\big(S^{\alpha}, M\big)$ 通过 §3.15 中的左 $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$-作用，“记住”了 $\mathfrak{g}$ 在 M 上的作用。模同构意义下，重数空间 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(S^{\alpha}, M)$ 不依赖于 S^{α} 的选择。

3.17. 令 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{k}$ 的约化扩张，$\alpha \in \mathfrak{k}^{\wedge}$ 为有限维不可约 $\mathfrak{k}$-模的一个同构类。Lepowsky 和 McCollum [14, 定理 5.5] 证明，$M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(S^{\alpha}, M)$ 在满足 $M_{\alpha} \neq 0$ 的不可约 $\mathfrak{g}$-模 M 的同构类与商代数 $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}/(U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}} \cap U(\mathfrak{g})\mathcal{J}^{\alpha})$ 上不可约模的同构类之间建立了一一对应，其中 $\mathcal{J}^{\alpha} \subseteq U(\mathfrak{k})$ 是 S^{α} 在 $U(\mathfrak{k})$ 中的湮灭子。在 §3.2 的语境下，这一对应可追溯至 Harish-Chandra [13]。

鉴于 §3.16，我们立即得到这一对应关系的如下推论。

推论。设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{k}$的约化扩张。设 M 是一个不可约 $\mathfrak{g}$-模。对于每个 $\alpha \in \mathfrak{k}^{\wedge}$，重数空间 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(S^{\alpha}, M)$ 要么是 $\{0\}$，要么是一个不可约 $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$-模。

4. Spin graph functions

本节中，我们引入自旋图函数空间$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{G,\,\Gamma,\,s}$，并利用局部张量不变量构造 $\mathcal{H}$ 的张成集。这里， G是一个连通紧李群， $\Gamma = (V, E, s, t)$是一个有限有向图，其顶点为$V = \{v_1, \dots, v_r\}$，边为 $E = \{e_1, \dots, e_n\}$，源映射与目标映射为 $s, t\colon E \to V$。

4.1. 令 $C(G)$为 G 上连续复值函数的空间，将其视为由左正则和右正则 G作用给出的 $G^{\times 2}$ 表示，

$$\big((g_1, g_2) \cdot f\big)(g) := f(g_1^{-1} g g_2).$$

令 $\mathcal{R}(G) \subset C(G)$ 为 G 上代表函数的子代数。换言之， $\mathcal{R}(G)$ 由函数 $f \in C(G)$ 构成，这些函数生成 $C(G)$ 的有限维 $G^{\times 2}$- 子表示。

4.2. 设 $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(M)$ 是一个有限维连续 G-表示，并用 $\pi^*\colon G \to \mathrm{GL}(M^*)$ 表示其对偶表示。对于 $m \in M$和 $\phi \in M^*$，我们将相关矩阵系数记作 $c^{\pi}_{\phi,m} \in C(G)$

$$c^{\pi}_{\phi,m}(g) := \phi\big(\pi(g)m\big) = (\pi^*(g^{-1})\phi)(m)$$

由 π （以及 π^*）构成。于是 $c^{\pi}_{\phi,m} \in \mathcal{R}(G)$。此外，由矩阵系数 $c^{\pi}_{\phi,m}$ ($m \in M$, $\phi \in M^*$) 张成的空间 $\mathcal{R}^{\pi}(G)$ 是 $\mathcal{R}(G)$ 的一个 $G^{\times 2}$-不变子空间。事实上，该映射

$$M^* \otimes M \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}^{\pi}(G), \qquad \phi \otimes m \mapsto c^{\pi}_{\phi,m}$$

是 $G^{\times 2}$-表示的一个同构，其中 $M^* \otimes M$ 赋有 $G^{\times 2}$的自然张量积作用。

4.3. 令 $G^\wedge$ 为不可约有限维连续 G-表示的同构类集合。我们将不可约有限维 G-表示的同构类简记为其表示映射 π。相应的表示空间记为 M^{π}。

彼得-外尔定理给出了如下分解

$$\mathcal{R}(G) = \bigoplus_{\pi \in G^\wedge} \mathcal{R}^{\pi}(G)$$

$\mathcal{R}(G)$ 在不可约 $G^{\times 2}$-子表示中的分解。

4.4. 对于两个 G-表示 M和 N，我们将 $M^* \otimes N^* \simeq (M \otimes N)^*$视为$G^{\times 2}$-表示，其中 $M \otimes N$和 $M^* \otimes N^*$赋予张量积 $G^{\times 2}$-作用。在这一对应关系下， $\phi \otimes \psi$对于 $\phi \in M^*$和 $\psi \in N^*$对应于 $M \otimes N$ 上的线性泛函，该泛函满足：对于$m \in M$ 和 $n \in N$，有 $m \otimes n \mapsto \phi(m)\psi(n)$。特别地，如果 $\{m_i\}_i$ 和 $\{n_j\}_j$ 分别是 M 和 N 的基，而 $\{m_i^*\}_i$和 $\{n_j^*\}_j$分别是 M^*和 N^*的对偶基，那么 $M \otimes N$的基$\{m_i \otimes n_j\}_{i,\,j}$的对偶基为$\{m_i^* \otimes n_j^*\}_{i,\,j}$。

4.5. 我们将紧致乘积李群 G^E 记作 G^E。其元素记为 $\boldsymbol{g} = (g_e)_{e\in E}$，或记为 $\boldsymbol{g} = (g_1, \dots, g_n)$，其中 $g_j = g_{e_j}$ 是与边 e_j 相连的群元素。群 G^E 称为 Γ 上的图 G-联络群。

4.6. 对于每个顶点 $v \in V$，我们固定一个李子群 $K_v \subseteq G$。它将在顶点 v处充当局部规范群。乘积群 $\mathbf{K} := \prod_{v\in V} K_v$ 是关联规范群。它是格点规范变换群 G^V 的一个子群。

$\mathbf{K}$ 中的群元素记为 $\boldsymbol{k} = (k_v)_{v\in V}$，其中 $k_v \in K_v$。有时我们也写作 $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_r)$，其中 $k_i = k_{v_i}$。$\mathbf{K}$ 在 G^E 上的规范作用定义为

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{g} := \left(k_{s(e)} g_e k_{t(e)}^{-1}\right)_{e\in E} \qquad \left(\boldsymbol{k}\in\mathbf{K},\ \boldsymbol{g}\in G^E\right).$$

4.7. 设 $\sigma : \mathbf{K} \to \mathrm{GL}(S)$ 是一个有限维表示。关联向量丛在 $G^E/\mathbf{K}$ 上的全局代数截面空间记为$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\Gamma,\, G,\, S}$。具体而言，$\mathcal{H}$ 是以下空间

$$\left(\mathcal{R}(G^E)\otimes S\right)^{\mathbf{K}}$$

的 $\mathbf{K}$-不变 S值代表函数 f，定义在 G^E上，并且相对于 $\mathbf{K}$-作用

$$\left(\boldsymbol{k}\cdot f\right)(\boldsymbol{g}) := \sigma(\boldsymbol{k}) f(\boldsymbol{k}^{-1}\cdot\boldsymbol{g})$$

在 $\mathcal{R}(G^E)\otimes S$ 上。换言之，$\mathcal{H}$由满足等变性条件的 S-值代表函数f 构成，这些函数定义在 G^E 上

$$f(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{g}) = \sigma(\boldsymbol{k}) f(\boldsymbol{g})$$

对 $\boldsymbol{k}\in\mathbf{K}$ 和 $\boldsymbol{g}\in G^E$而言。我们将函数 $f\in\mathcal{H}$ 称为自旋图函数（自旋是指将 S 解释为相关量子自旋系统的自旋空间，参见 §5.9、§5.12 和 §5.13）。

4.8. 固定 $\pi\in(G^E)^\wedge$，它是 G^E 的一个有限维不可约表示的同构类；并固定一个有限维表示 $\sigma : \mathbf{K} \to \mathrm{GL}(S)$。那么子空间

$$\mathcal{R}^\pi(G^E)\otimes S \subseteq \mathcal{R}(G^E)\otimes S$$

π-初等自旋图函数的空间是 $\mathbf{K}$-不变的。

如果自旋图函数 $f\in\mathcal{H}$ 对某个 $\pi\in(G^E)^\wedge$ 而言是 π-初等的，我们就称其为初等自旋图函数。记作

$$\mathcal{H}^\pi = \mathcal{H}^\pi_{\Gamma,G,S}$$

表示由 π-初等自旋图函数构成的空间 $(\mathcal{R}^\pi(G^E)\otimes S)^{\mathbf{K}}$。

注意，初等自旋图函数张成 $\mathcal{H}$，因为

$$(\mathcal{R}(G^E)\otimes S)^{\mathbf{K}} = \bigoplus_{\pi\in(G^E)^\wedge} (\mathcal{R}^\pi(G^E)\otimes S)^{\mathbf{K}}$$

根据彼得-外尔定理（见 §4.3）。

4.9. 设 $\pi_{e_j} = \pi_j : G \to \mathrm{GL}(M_j)$ 是有限维的 G-表示，附着于 Γ 的边上。相应的张量积表示 $\boldsymbol{\pi} : G^E \to \mathrm{GL}(\mathrm{M})$ 定义为

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{g}) := \pi_1(g_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(g_n),$$

其中 $\mathrm{M} := M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$。将局部表示$\pi_e$ ($e \in E$)视为对 Γ 的边进行着色的一种选择，是很方便的。

我们将按照 §4.9 的方式识别 $\mathrm{M}^* \simeq M_1^* \otimes \cdots \otimes M_n^*$。特别地，对于纯张量$\boldsymbol{m} = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \in \mathrm{M}$ 和 $\boldsymbol{\phi} := \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n \in M_1^* \otimes \cdots \otimes M_n^*$，$\mathrm{M}$ 的矩阵系数 $c^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\phi},\,\boldsymbol{m}}$ 为

$$c^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{g}) = c^{\pi_1}_{\phi_1,m_1}(g_1) \cdots c^{\pi_n}_{\phi_n,m_n}(g_n), \qquad \boldsymbol{g} \in \mathbf{G}.$$

当 $\pi_j : G \to \mathrm{GL}(M^{\pi_j})$ 都是不可约的，则 $\boldsymbol{\pi}$ 不可约，其表示空间记为 $\mathrm{M}^{\boldsymbol{\pi}}$。赋值 $(\pi_e)_{e\in E} \mapsto \boldsymbol{\pi}$ 诱导出一个双射

$$(G^\wedge)^{\times n} \xrightarrow{\sim} (G^E)^\wedge.$$

如果 $\pi \in (G^E)^\wedge$，那么我们将满足 $\pi \simeq \boldsymbol{\pi}$ 的 $\pi_e \in G^\wedge$ 称为 π 的局部分量。π^* 的局部分量为 π_e^*。

4.10. 类似地，我们将规范群 $\mathrm{K} = \prod_{v\in V} K_v$ 的张量积表示记作 $\boldsymbol{\sigma} : \mathrm{K} \to \mathrm{GL}(\mathrm{S})$ with

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}) := \sigma_1(k_1) \otimes \cdots \otimes \sigma_r(k_r)$$

以及 \(S:\{v1\}\)，其中 \(\sigma_{v_i} = \sigma_i :\ K_{v_i} \to \mathrm{GL}(S_i)\) 是局部规范群 \(K_{v_i}\) 的有限维表示。现在，我们将局部表示 \(\sigma_v\ (v \in V)\) 视为对 \(\Gamma\) 的顶点进行着色的一种选择。

如果 $\sigma : \mathrm{K} \to \mathrm{GL}(S)$ 是一个有限维不可约表示，那么 σ 同构于一个张量积表示，其局部不可约有限维 K_v-表示为 $\sigma_v : K_v \to \mathrm{GL}(S_v)$。

4.11. 乘积群 $G^E \times G^E$ 作用于 $\mathcal{R}(G)^{\otimes n}$，其作用为

$$(\boldsymbol{g}', \boldsymbol{g}'') \cdot (f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) := (g_1', g_1'') \cdot f_1 \otimes \cdots \otimes (g_n', g_n'') \cdot f_n,$$

w这里 $\boldsymbol{g}' = (g_1', \ldots, g_n') \in G^E$ 和 $\boldsymbol{g}'' = (g_1'', \ldots, g_n'') \in G^E$。线性同构

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(G)^{\otimes n} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(G^E) \\ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n &\mapsto \boldsymbol{f}, \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{f} \in \mathcal{R}(G^E)$ 定义为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}) := f_1(g_1) \cdots f_n(g_n),$$

交织了 $G^E \times G^E$ 作用。

4.12. 对于 $\pi_j \in G^\wedge\ (1 \le j \le n)$，同构（6）限制为一个同构

$$\mathcal{R}^{\pi_1}(G) \otimes \cdots \otimes \mathcal{R}^{\pi_n}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}^{\boldsymbol{\pi}}(G^E).$$

它将 $c^{\pi_1}_{\phi_1,\ m_1} \otimes \cdots \otimes c^{\pi_n}_{\phi_n,\ m_n}$ 映射到 $c^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\phi},\ \boldsymbol{m}}$，其中 $\boldsymbol{\phi} := \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n$ 和 $\boldsymbol{m} := m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$，参见 §4.9。

4.13。 $v \in V$ 的星 $\mathcal{S}(v)$ 是源点和/或目标点等于 v 的边 $e \in E$ 的集合。于是

$$\mathcal{S}(v) = \mathcal{S}(v|s) \cup \mathcal{S}(v|t)$$

其中，$\mathcal{S}(v|s)$ 是从 v 向外定向的边的集合，而 $\mathcal{S}(v|t)$ 是向内定向至 v 的边的集合。注意，由于我们允许图 Γ 中存在自环，这两个集合的并不一定是不交的。

我们考虑 K_v-表示

$$\pi_{\mathcal{S}(v)} : K_v \to \mathrm{GL}(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}})$$

with

$$\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}} := \Big(\bigotimes_{e \in \mathcal{S}(v|s)} M^{\pi_e^*} \Big) \otimes \Big(\bigotimes_{e \in \mathcal{S}(v|t)} M^{\pi_e} \Big)$$

以及 K_v 的对角作用，

$$\pi_{\mathcal{S}(v)}(k_v) := \Big(\bigotimes_{e \in \mathcal{S}(v|s)} \pi_e^*(k_v) \Big) \otimes \Big(\bigotimes_{e \in \mathcal{S}(v|t)} \pi_e(k_v) \Big).$$

这里的张量因子按照由 E 上的全序诱导出的 $\mathcal{S}(v|s)$ 和 $\mathcal{S}(v|t)$ 上的全序排序。

我们将把对偶 K_v-表示 $\big(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}\big)^*$ 认定为

$$\Big(\bigotimes_{e \in \mathcal{S}(v|s)} M^{\pi_e} \Big) \otimes \Big(\bigotimes_{e \in \mathcal{S}(v|t)} M^{\pi_e^*} \Big),$$

其中 K_v 以对角形式作用，参见 §4.4。

4.14. 固定有限维的 K_v-表示 $\sigma_v : K_v \to \mathbf{GL}(S_v)$（对应 $v \in V$）以及有限维的 G-表示 $\pi_e : G \to \mathbf{GL}(M_e)$（对应 $e \in E$），从而为 Γ 的顶点和边提供表示颜色。

在顶点 $v \in V$ 处，我们将 K_v-表示赋给有色图 Γ 。

$$\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}} \otimes S_v,$$

其中 K_v 以对角方式作用，并且我们赋予了

$$\bigotimes_{v \in V} \big(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}} \otimes S_v \big)$$

配备规范群 $\mathbf{K} = \prod_{v \in V} K_v$ 的张量积作用。具体而言

$$\boldsymbol{k} \cdot \bigotimes_{v \in V} \big(C_v \otimes u_v \big) := \bigotimes_{v \in V} \big(\pi_{\mathcal{S}(v)}(k_v) C_v \otimes \sigma_v(k_v) u_v \big)$$

,

对于 $\boldsymbol{k}=(k_v)_{v\in V}\in \mathbf{K}$、$C_v\in \mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}$ 和 $u_v\in S_v$。

4.15. 对于 $\pi_e\in G^\wedge$ 和 $\sigma_v: K_v\to \mathbf{GL}(S_v)$ 有限维 K_v-表示，考虑线性映射

$$\Psi^{\boldsymbol{\pi}}:\bigotimes_{v\in V}\big(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}\otimes S_v\big)\to \mathcal{R}^{\boldsymbol{\pi}}(G^E)\otimes \mathbf{S}$$

定义在纯张量上为

$$\Psi^{\boldsymbol{\pi}}\Big(\bigotimes_{v\in V}\Big(\Big(\bigotimes_{e\in\mathcal{S}(v|s)}\phi_e\Big)\otimes\Big(\bigotimes_{e\in\mathcal{S}(v|t)}m_e\Big)\otimes u_v\Big)\Big):=c^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{m}}\otimes\boldsymbol{u} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}:=\bigotimes_{e\in E}\phi_e$、$\boldsymbol{m}:=\bigotimes_{e\in E}m_e$ 和 $\boldsymbol{u}:=\bigotimes_{v\in V}u_v$。这一定义良好，这是因为不交并分解。

$$\bigsqcup_{v\in V}\mathcal{S}(v|s)=E=\bigsqcup_{v\in V}\mathcal{S}(v|t)$$

的边集 E，属于 Γ。

定理。线性映射 $\Psi^{\boldsymbol{\pi}}$ 定义了一个 $\mathbf{K}$-线性同构。

$$\Psi^{\boldsymbol{\pi}}:\bigotimes_{v\in V}\big(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}\otimes S_v\big)\xrightarrow{\sim}\mathcal{R}^{\boldsymbol{\pi}}(G^E)\otimes\mathbf{S}.$$

它限制为一个线性同构

$$\Psi^{\boldsymbol{\pi}}:\bigotimes_{v\in V}\big(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}\otimes S_v\big)^{K_v}\xrightarrow{\sim}\big(\mathcal{R}^{\boldsymbol{\pi}}(G^E)\otimes\mathbf{S}\big)^{\mathbf{K}}.$$

证明。根据 §4.12，显然 $\Psi^{\boldsymbol{\pi}}$ 是一个线性同构。它是 $\mathbf{K}$-线性的，因为对于 $\boldsymbol{k}=(k_v)_{v\in V}\in\mathbf{K}$ 和 $\boldsymbol{g}\in G^E$，

$$\begin{aligned}\Psi^{\boldsymbol{\pi}}\Big(\bigotimes_{v\in V}\Big(\Big(\bigotimes_{e\in\mathcal{S}(v|s)}\phi_e\pi_e(k_v^{-1})\Big)\otimes\Big(\bigotimes_{e\in\mathcal{S}(v|t)}\pi_e(k_v)m_e\Big)\otimes\sigma_v(k_v)u_v\Big)\Big)(\boldsymbol{g})&=\\ =\Big(\prod_{e\in E}\phi_e\big(\pi_e(k_{s(e)}^{-1}g_ek_{t(e)})m_e\big)\Big)\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{u}&\\ =c^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{k}^{-1}\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{u}.&\end{aligned}$$

定理的第二个结论现在立即由以下事实得出：$\bigotimes_{v\in V}\big(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}\otimes S_v\big)$ 带有 $\mathbf{K}=\prod_{v\in V}K_v$ 的张量积作用，参见 §4.14。□

4.16. 我们沿用 §4.15 中的设置。对于 $e\in E$，令 $\{m_{e,i_e}\}_{i_e\in\mathcal{I}_e}$ 为 M^{π_e} 的一组基。对于 $v\in V$，令

$$\mathcal{I}(v|s):=\{\boldsymbol{i}=(i_e)_{e\in\mathcal{S}(v|s)}\mid i_e\in\mathcal{I}_e\}$$

并为 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{I}(v|s)$ 编写，

$$\boldsymbol{m_i}(v|s):=\bigotimes_{e\in\mathcal{S}(v|s)}m_{e,i_e}.$$

以类似的方式，我们对指标 $\boldsymbol{i}$ from 定义 $\boldsymbol{m_i}(v|t)$

$$\mathcal{I}(v|t) := \{\boldsymbol{i} = (i_e)_{e\in\mathcal{S}(v|t)} \mid i_e \in \mathcal{I}_e\}.$$

Then

$$\{\, \boldsymbol{m_i}(v|s)^* \otimes \boldsymbol{m_j}(v|t) \quad | \quad (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) \in \mathcal{I}(v|s)\times\mathcal{I}(v|t)\,\} \tag{8}$$

是 $\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}$ 的一组基。因此，我们有一个线性同构

$$\mathrm{Hom}_{K_v}\big((\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}})^*, S_v\big) \xrightarrow{\sim} \big(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}} \otimes S_v\big)^{K_v} \tag{9}$$

将 $\Phi \in \mathrm{Hom}_{K_v}\big((\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}})^*, S_v\big)$ 映射到不变张量

$$\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathcal{I}(v|s)} \sum_{\boldsymbol{j}\in\mathcal{I}(v|t)} \boldsymbol{m_i}(v|s)^* \otimes \boldsymbol{m_j}(v|t) \otimes \Phi\big(\boldsymbol{m_i}(v|s) \otimes \boldsymbol{m_j}(v|t)^*\big).$$

结合定理 4.15，我们由此得到空间 $\big(\mathcal{R}^{\pi}(G^E) \otimes \mathbf{S}\big)^{\mathbf{K}}$ 中 $\boldsymbol{\pi}$-初等自旋图函数的一种参数化表示，该表示通过局部交织算子空间给出（此处“局部”是指它们仅依赖于顶点 v 的星 Γ 的颜色）。

4.17. 设 $n \geq 1$，并考虑具有 n 条边的有向循环图 Γ。我们以如下方式对顶点 v_i 和边 e_j（$i,\ j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$）进行编号：对于 $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，$s(e_i) = v_i$，且 $t(e_i) = v_{i+1}$。$1 < 2 < \cdots < n$ 在 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上的次序为 V 和 E 提供了一个全序。我们取 $\mathbf{K} = G^V$ 作为规范群。

按照这些约定，$G^E \simeq G^{\times n}$ 由 $(g_e)_{e\in E} \mapsto (g_{e_1}, \ldots, g_{e_n})$ 给出，而 $\mathbf{K}$ 由 $(k_v)_{v\in V} \mapsto (k_{v_1}, \ldots, k_{v_n})$ 给出。$\mathbf{K}$ 在 G^E 上的左规范作用为

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{g} := (k_1 g_1 k_2^{-1}, k_2 g_2 k_3^{-1}, \ldots, k_n g_n k_1^{-1})$$

对于 $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in G^{\times n} \simeq \mathbf{K}$ 和 $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^{\times n} \simeq G^E$。

设 $\sigma_i : G \to \mathbf{GL}(S_i)$ 是与顶点 v_i 关联的有限维 $K_{v_i} = G$-表示，π_i: $G \to \mathbf{GL}(M^{\pi_i})$ 是与边 e_i 关联的有限维不可约 G-表示。

$B \in \mathrm{Hom}(M^{\pi_n}, M^{\pi_n} \otimes \mathbf{S})$ 的偏迹 $\mathrm{Tr}^{\mathbf{S}}_{M^{\pi_n}}(B)$ 是 $\mathbf{S}$ 中满足下式的唯一向量

$$\phi\big(\mathrm{Tr}^{\mathbf{S}}_{M^{\pi_n}}(B)\big) = \mathrm{Tr}_{M^{\pi_n}}\big((\mathrm{id}_{M^{\pi_n}} \otimes \phi)B\big) \qquad \forall\, \phi \in \mathbf{S}^*,$$

其中，$\mathrm{Tr}_{M^{\pi_n}}$ 是 $\mathrm{End}(M^{\pi_n})$ 上的通常迹。初等自旋图函数现在可以用交织算子复合的部分迹作如下描述。

命题。赋予 $M^{\pi_{i-1}} \otimes S_i$ 对角 G-作用。我们有一个线性同构

$$\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_G\big(M^{\pi_i}, M^{\pi_{i-1}} \otimes \mathbf{S}_i\big) \xrightarrow{\sim} \big(\mathcal{R}^{\boldsymbol{\pi}}(G^{\times n}) \otimes \mathbf{S}\big)^{\mathbf{K}},$$

$$\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \Phi_i \mapsto f^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\Phi}}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi} := (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ 和 $f^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\Phi}} \in \big(\mathcal{R}^{\pi}(G^{\times n}) \otimes \mathbf{S}\big)^{\mathbf{K}}$ 是初等 n 点迹函数

$$f^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{g}) := \mathrm{Tr}^{\mathbf{S}}_{M^{\pi_n}}\Big((\Phi_1\pi_1(g_1) \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{S}_2\otimes\cdots\otimes\mathbf{S}_n}) \cdots (\Phi_{n-1}\pi_{n-1}(g_{n-1}) \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{S}_n})\Phi_n\pi_n(g_n)\Big).$$

证明。在当前情形下，我们有 $\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v_i)}} = M^{\pi_i^*} \otimes M^{\pi_{i-1}}$。利用（9）以及 $K_{v_i} = G$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v_i)}} \otimes S_i\big)^{K_{v_i}} &\simeq \mathrm{Hom}_G\big(M^{\pi_i} \otimes M^{\pi_{i-1}^*}, S_i\big)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_G(M^{\pi_i}, M^{\pi_{i-1}} \otimes S_i),\end{aligned}$$

其中，$M^{\pi_i} \otimes M^{\pi_{i-1}^*}$ 被视为通过对角 G 作用定义的 G 表示。同构 $\mathrm{Hom}_G(M^{\pi_i}, M^{\pi_{i-1}} \otimes S_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(M^{\pi_i} \otimes M^{\pi_{i-1}^*}, S_i)$ 将 Φ_i 映射为 G 交织算子 $m_i \otimes \phi_{i-1} \mapsto (\phi_{i-1} \otimes \mathrm{id}_{S_i})\Phi_i(m_i)$。

在这些识别下，交织算子 $\Phi_i \in \mathrm{Hom}_G\big(M^{\pi_i}, M^{\pi_{i-1}} \otimes S_i\big)$ 对应于局部不变张量

$$\widetilde{\Phi}_i := \sum_{k\in\mathcal{I}_{e_i}} m^*_{e_i,k} \otimes \Phi_i(m_{e_i,k}) \in \big(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v_i)}} \otimes S_i\big)^{K_{v_i}}.$$

结合定理 4.15，我们由此得到一个线性同构

$$\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_G\big(M^{\pi_i}, M^{\pi_{i-1}} \otimes S_i\big) \xrightarrow{\sim} \big(\mathcal{R}^{\boldsymbol{\pi}}(G^{\times n}) \otimes \mathbf{S}\big)^{\mathbf{K}}, \qquad \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \Phi_i \mapsto \widetilde{f}^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\Phi}}$$

其中 $\widetilde{f}^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\Phi}} := \Psi^{\boldsymbol{\pi}}\big(\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \widetilde{\Phi}_i\big)$。

改写 $\widetilde{\text{将}}\,\Phi_i$ 写作

$$\widetilde{\Phi}_i = \sum_{k_{i-1}\in\mathcal{I}_{e_{i-1}}} \sum_{\ell_i\in\mathcal{I}_{e_i}} m^*_{e_i,\ell_i} \otimes m_{e_{i-1},k_{i-1}} \otimes \big((m^*_{e_{i-1},k_{i-1}} \otimes \mathrm{id}_{S_i})\Phi_i(m_{e_i,\ell_i})\big) \tag{10}$$

并应用 (7)，我们得到显式表达式

$$\widetilde{f}^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{g}) = \sum_{k_1\in\mathcal{I}_{e_1}} \cdots \sum_{k_n\in\mathcal{I}_{e_n}} \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \big(m^*_{e_{i-1},k_{i-1}}\pi_{i-1}(g_{i-1}) \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{S}_i}\big)\Phi_i(m_{e_i,k_i}).$$

对于 $i \neq n$，关于 $k_i \in \mathcal{I}_{e_i}$ 的求和可以利用恒等式简化

$$\sum_{k_i \in \mathcal{I}_{e_i}} \Phi_i(m_{e_i,k_i}) \otimes \big((m^*_{e_i,k_i}\pi_i(g_i) \otimes \mathrm{id}_{S_{i+1}})\Phi_{i+1}(m_{e_{i+1},k_{i+1}})\big) = \\ = (\Phi_i\pi_i(g_i) \otimes \mathrm{id}_{S_{i+1}})\Phi_{i+1}(m_{e_{i+1},k_{i+1}})$$

~在 $M^{\pi_{i-1}} \otimes S_i \otimes S_{i+1}$中。于是， $f^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{g})$ 的表达式化简为

$$\widetilde{f}^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{g}) = \sum_{k_n \in \mathcal{I}_{en}} \big\{\big(m^*_{e_n,k_n}\pi_n(g_n) \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{S}}\big)\,(\Phi_1\pi_1(g_1) \otimes \mathrm{id}_{S_2\otimes\cdots\otimes S_n})\cdots \\ \cdots(\Phi_{n-1}\pi_{n-1}(g_{n-1}) \otimes \mathrm{id}_{S_n})\Phi_n(m_{e_n,k_n})\big\}$$

$$=\mathrm{Tr}^{\boldsymbol{S}}_{M^{\pi_n}}\Big((\pi_n(g_n) \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{S}})(\Phi_1\pi_1(g_1) \otimes \mathrm{id}_{S_2\otimes\cdots\otimes S_n})\cdots(\Phi_{n-1}\pi_{n-1}(g_{n-1}) \otimes \mathrm{id}_{S_n})\Phi_n\Big).$$

~因此，根据偏迹的循环性，有： $f^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\Phi}} = f^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{\Phi}}$

$$\mathrm{Tr}^{\mathbf{S}}_{M^{\pi_n}}((A \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{S}})B) = \mathrm{Tr}^{\mathbf{S}}_{M^{\pi_n}}(BA)$$

对于 $A \in \mathbf{End}(M^{\pi_n})$ 和 $B \in \mathbf{End}(M^{\pi_n} \otimes \mathbf{S})$。 □

n点迹函数的研究源于论文 [8]。交织算子 $\mathbf{Hom}_G\big(M^{\pi_i}, M^{\pi_{i-1}} \otimes S_i\big)$ 可视为顶点算子的拓扑退化。（初等） n点迹函数及其在仿射群和量子群层面的推广都得到了深入研究，参见例如 [8,10, 9]。

4.18. 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。作为下一个例子，我们考虑具有 n 条边的线性有序线性图 Γ。我们将有序顶点集和边集分别记为 $V = \{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ 和 $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$。对于 $i = 1, \ldots, n$，源映射与目标映射分别为 $s(e_i) = v_i$ 和 $t(e_i) = v_{i+1}$。局部规范群取为

$$K_{v_i} = \begin{cases} H & \text{for } i = 1, \\ G & \text{for } i = 2, \ldots, n, \\ K & \text{for } i = n+1, \end{cases} \tag{11}$$

其中 $H, K \subseteq G$ 是子群。

关联规范群的作用

$$\mathbf{K} = \prod_{i=1}^{n+1} K_{v_i} = H \times G^{\times(n-1)} \times K$$

在 $G^E \simeq G^{\times n}$ 上则变为

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{g}' := (hg'_1g_2^{-1}, g_2g'_2g_3^{-1}, \ldots, g_ng'_nk^{-1})$$

对于 $\boldsymbol{k} = (h, g_2, \ldots, g_n, k) \in \mathbf{K}$ 和 $\boldsymbol{g}' = (g'_1, \ldots, g'_n) \in G^E$。

设 $S_i\,(1<i\leq n)$ 为有限维 G-表示， L 为有限维H-表示， N 为有限维 K-表示。记

$$\mathbf{S}:=L\otimes S_2\otimes\cdots\otimes S_n\otimes N$$

由此得到的 $\mathbf{K}$ 的张量积自旋表示。我们还记作

$$\underline{S}:=S_2\otimes\cdots\otimes S_n,$$

对于与 $\mathbf{S}$ 相关联的"整体" $G^{\times(n-1)}$表示，使得 $\mathbf{S}\;=\;L\otimes\underline{S}\otimes N$。记为

$$Q_{L\otimes\underline{S},N}:\mathrm{Hom}(N^*,L\otimes\underline{S})\xrightarrow{\sim}\mathbf{S}$$

所定义的线性同构

$$Q_{L\otimes\underline{S},N}(T):=\sum_j T(n_j^*)\otimes n_j,$$

其中， $\{n_j\}_j$是 N的一个基，$\{n_j^*\}_j$是 N^*的相应对偶基。

令 $\boldsymbol{\pi}:G^{\times n}\to\mathbf{GL}(\mathbf{M}^{\boldsymbol{\pi}})$ 为一个不可约张量积表示，其局部分量为 $\pi_i:G\to\mathbf{GL}(M^{\pi_i})\;(1\leq i\leq n)$。在下面的命题中，我们还将通过限制，把 M^{π_1}（分别为 M^{π_n}）视为 H-表示（分别为 K-表示）。

命题。我们有一个线性同构

$$\mathrm{Hom}_H(M^{\pi_1},L)\otimes\bigotimes_{i=2}^n\mathrm{Hom}_G\big(M^{\pi_i},M^{\pi_{i-1}}\otimes S_i\big)\otimes\mathrm{Hom}_K(N^*,M^{\pi_n})$$

$$\xrightarrow{\sim}\big(\mathcal{R}^{\boldsymbol{\pi}}(G^{\times n})\otimes\mathbf{S}\big)^{\mathbf{K}}$$

将 $\Theta\otimes\big(\bigotimes_{i=2}^n\Phi_i\big)\otimes\Xi$映射到自旋图函数 $f^{\boldsymbol{\pi}}_{\Theta,\,\boldsymbol{\Phi},\,\Xi}\in\big(\mathcal{R}^{\boldsymbol{\pi}}(G^{\times n})\otimes\mathbf{S}\big)^{\mathbf{K}}$，其定义如下：

$$f^{\boldsymbol{\pi}}_{\Theta,\boldsymbol{\Phi},\Xi}(\boldsymbol{g}):=Q_{L\otimes\underline{S},N}\Big((\Theta\pi_1(g_1)\otimes\mathrm{id}_{\underline{S}})(\Phi_2\pi_2(g_2)\otimes\mathrm{id}_{S_3\otimes\cdots\otimes S_n})\cdots$$

$$\cdots(\Phi_{n-1}\pi_{n-1}(g_{n-1})\otimes\mathrm{id}_{S_n})\Phi_n\pi_n(g_n)\Xi\Big).$$

证明。对于顶点 v_i，当 $1<i\leq n$ 时，不变量局部空间$\big(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v_i)}}\otimes S_i\big)^{K_{v_i}}$ 的分析与命题 4.17 的证明相同。对于 $i=1$，我们有

$$\big(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v_1)}}\otimes L\big)^{K_{v_1}}=\big(M^{\pi_1^*}\otimes L\big)^H\simeq\mathrm{Hom}_H\big(M^{\pi_1},L\big),$$

其中同构如 §4.16 所述。对于 $i=n+1$，类似地有

$$\big(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v_{n+1})}}\otimes N\big)^{K_{v_{n+1}}}=\big(M^{\pi_n}\otimes N\big)^K\simeq\mathrm{Hom}_K(N^*,M^{\pi_n}).$$

在这些同构下，交织算子 $\Theta\in\mathbf{Hom}_H\big(M^{\pi_1},L\big)$ 对应于

$$\widetilde{\Theta}:=\sum_{\ell_1\in\mathcal{I}_{e_1}}m^*_{e_1,\ell_1}\otimes\Theta(m_{e_1,\ell_1})\in\big(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v_1)}}\otimes L\big)^{K_{v_1}}$$

而 $\Xi \in \mathrm{Hom}_K(N^*, M^{\pi_n})$ 对应于

$$\widetilde{\Xi} := \sum_j \Xi(n_j^*) \otimes n_j \in \big(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v_{n+1})}} \otimes N\big)^{K_{v_{n+1}}}.$$

结合定理 4.15，我们由此得到一个线性同构

$$\mathrm{Hom}_H(M^{\pi_1}, L) \otimes \bigotimes_{i=2}^{n} \mathrm{Hom}_G\big(M^{\pi_i}, M^{\pi_{i-1}} \otimes S_i\big) \otimes \mathrm{Hom}_K(N^*, M^{\pi_n}) \xrightarrow{\sim} \big(\mathcal{R}^{\boldsymbol{\pi}}(G^{\times n}) \otimes \mathbf{S}\big)^{\mathbf{K}}$$

将 $\Theta \otimes \big(\bigotimes_{i=2}^n \Phi_i\big) \otimes \Xi$ 映射到

$$\widetilde{f}^{\boldsymbol{\pi}}_{\Theta,\boldsymbol{\Phi},\Xi} := \Psi^{\boldsymbol{\pi}}\Big(\widetilde{\Theta} \otimes \big(\bigotimes_{i=2}^{n} \widetilde{\Phi}_i\big) \otimes \widetilde{\Xi}\Big),$$

~其中 Φ_i 由（10）给出。

~直接计算可得，自旋图函数 $f^{\boldsymbol{\pi}}_{\Theta,\boldsymbol{\Phi},\Xi}(\boldsymbol{g})$ 明确表示为

$$\sum_{i_1 \in \mathcal{I}_{e_1}} \cdots \sum_{i_{n-1} \in \mathcal{I}_{e_{n-1}}} \sum_j \Theta(m_{e_1,i_1}) \otimes \big((m^*_{e_1,i_1} \pi_1(g_1) \otimes \mathrm{id}_{S_2}) \Phi_2(m_{e_2,i_2})\big) \otimes \cdots$$
$$\cdots \otimes \big((m^*_{e_{n-1},i_{n-1}} \pi_{n-1}(g_{n-1}) \otimes \mathrm{id}_{S_n}) \Phi_n(\pi_n(g_n) \Xi(n_j^*))\big) \otimes n_j.$$

按照命题 4.17 的证明对体交织算子 $\Phi_i (i = 2, \ldots, n)$ 进行缩并，我们得到表达式

$$\sum_{i_1 \in \mathcal{I}_{e_1}} \sum_j \Theta(m_{e_1,i_1}) \otimes \big\{(m^*_{e_1,i_1} \pi_1(g_1) \otimes \mathrm{id}_{\underline{S}})(\Phi_2 \pi_2(g_2) \otimes \mathrm{id}_{S_3 \otimes \cdots \otimes S_n}) \cdots$$
$$\cdots \big(\Phi_{n-1} \pi_{n-1}(g_{n-1}) \otimes \mathrm{id}_{S_n}\big) \Phi_n(\pi_n(g_n) \Xi(n_j^*))\big\} \otimes n_j$$

~对于 $f^{\boldsymbol{\pi}}_{\Theta,\ \boldsymbol{\Phi},\ \Xi}(\boldsymbol{g})$，容易看出它等于 $f^{\boldsymbol{\pi}}_{\Theta,\ \boldsymbol{\Phi},\ \Xi}(\boldsymbol{g})$。证明至此完成。□

对于 $H = K$ 修正自旋图函数 $Q^{-1}_{L \otimes \underline{S},\ N} f^{\boldsymbol{\pi}}_{\Theta,\ \boldsymbol{\Phi},\ \Xi}$ 是来自 [24, 21] 的初等 n-点球函数。对于 $n = 1$，它们退化为紧对称空间上的初等球函数。

5. Quantum spin systems on graph connections

设 Γ 是一个有限有向图，G 是一个连通紧李群。我们用 $V = \{v_1, \ldots, v_r\}$ 和 $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ 表示 Γ 的全序顶点集和边集。我们用 $\mathfrak{g}$ 表示 G 的李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的复化。本节我们将在自旋图函数空间 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\Gamma,\ G,\ S}$ 上引入一个量子自旋系统。

5.1. 如果线性微分算子 D on G 保持代表函数空间 $\mathcal{R}(G)$ on G （见 §4.1）不变，则称其为代数算子。我们有如下代数的包含关系

$$\mathcal{D}_{\mathrm{biinv}}(G) \subseteq \mathcal{D}_{\mathrm{inv}}(G) \subseteq \mathcal{D}(G)$$

其中 $\mathcal{D}(G)$ 是 G 上的代数微分算子代数， $\mathcal{D}_{\mathrm{inv}}(G) \subseteq \mathcal{D}(G)$ 是由 G 上左、右 G-不变微分算子生成的子代数，而 $\mathcal{D}_{\mathrm{biinv}}(G) \subseteq \mathcal{D}_{\mathrm{inv}}(G)$ 是 G 上的 G-双不变微分算子子代数。

5.2. 我们有一个满射代数映射

$$U(\mathfrak{g}^{\times 2}) \twoheadrightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{inv}}(G), \qquad X \mapsto D_X \tag{12}$$

定义为

$$\begin{aligned}\big(D_{(x,y)}f\big)(g) :=& \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f\big(\exp(-sx)g\exp(sy)\big)\\ =& \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f\big(\exp(-sx)g\big) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\big(g\exp(ty)\big)\end{aligned}$$

对于 $(x,y) \in \mathfrak{g}_0^{\times 2}$。将 $U(\mathfrak{g}^{\times 2}) \simeq U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ 视为代数，其同构 $U(\mathfrak{g}^{\times 2}) \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ 由 $(x,y) \mapsto x\otimes 1 + 1\otimes y$ 对于 $x,y \in \mathfrak{g}$ 诱导。于是我们得到平衡条件

$$D_{X\otimes ZY} = D_{X\iota(Z)\otimes Y}$$

对于 $X,Y \in U(\mathfrak{g})$ 和 $Z \in Z(\mathfrak{g})$，其中 ι 是 $U(\mathfrak{g})$ 的反极（即， ι 是 $U(\mathfrak{g})$ 的唯一反代数自同构，使得对于 $x \in \mathfrak{g}$，有 $x \mapsto -x$ ）。因此，代数映射 (12) 诱导出一个代数同构

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{Z(\mathfrak{g})} U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\mathrm{inv}}(G) \tag{13}$$

关于 ι-扭曲的 $U(\mathfrak{g})$ 上的右正则$Z(\mathfrak{g})$-作用，取 $Z(\mathfrak{g})$ 上的平衡张量积

$$X \cdot Z := X\iota(Z) \qquad (X \in U(\mathfrak{g}),\ Z \in Z(\mathfrak{g}))$$

以及 $U(\mathfrak{g})$ 上的左正则 $Z(\mathfrak{g})$-作用。（映射 (13) 的单射性已在[15]中证明。）

5.3. G 上的 G-双不变微分算子代数 $\mathcal{D}_{\mathrm{biinv}}(G)$ 与 $Z(\mathfrak{g})$同构，同构映射为

$$Z(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\mathrm{biinv}}(G), \qquad Z \mapsto D_{1\otimes Z} = D_{\iota(Z)\otimes 1}.$$

特别地， $\mathcal{D}_{\mathrm{biinv}}(G)$包含在 $\mathcal{D}_{\mathrm{inv}}(G)$的中心中。

5.4. 考虑连通紧李群 G^E上的代数微分算子代数 $\mathcal{D}(G^E)$，并回顾K在 G^E 上的规范作用（参见§4.6）。相应的K在 $\mathcal{R}(G^E)$上的逆变作用为

$$(\mathbf{k}\cdot f)(\mathbf{g}) := f(\mathbf{k}^{-1}\cdot\mathbf{g})$$

对于 $\mathbf{k}\in\mathrm{K}$、$f\in\mathcal{R}(G^E)$ 和 $\mathbf{g}\in\mathrm{G}$（这是 §4.7 中 S 为平凡 K-表示时，K 在 $\mathcal{R}(G^E)\otimes S$ 上的作用这一特殊情形）。此作用诱导出一个 K-作用

$$\mathbf{K}\times\mathcal{D}(G^E)\to\mathcal{D}(G^E),\qquad (\mathbf{k},D)\mapsto\mathbf{k}\bullet D$$

在 $\mathcal{D}(G^E)$ 上，由代数自同构给出，使得

$$\mathbf{k}\cdot(Df) = (\mathbf{k}\bullet D)(\mathbf{k}\cdot f) \tag{14}$$

对于 $\mathbf{k}\in\mathrm{K}$、$D\in\mathcal{D}(G^E)$ 和 $f\in\mathcal{R}(G^E)$。我们将 $\mathcal{D}(G^E)^{\mathbf{K}}\subseteq\mathcal{D}(G^E)$ 记为 G^E 上 K-不变微分算子的子代数。

5.5. 与 §5.2 一样，我们将 $U((\mathfrak{g}^E)^{\times 2})\simeq U(\mathfrak{g}^E)\otimes U(\mathfrak{g}^E)$ 视为相同。此外，我们将$U(\mathfrak{g}^E)\simeq U(\mathfrak{g})^{\otimes\#E}$视为代数，其同构由以下映射诱导:

$$(x_e)_{e\in E}\mapsto\sum_{i=1}^{n}1^{\otimes(i-1)}\otimes x_{e_i}\otimes 1^{\otimes(n-i)}$$

对于$(x_e)_{e\in E}\in\mathfrak{g}^E$。它限制为同构 $Z(\mathfrak{g}^E)\simeq Z(\mathfrak{g})^{\otimes\#E}$。

我们将使用以下记号

$$X^{(i)} := 1^{\otimes(i-1)}\otimes X\otimes 1^{\otimes(n-i)}\in U(\mathfrak{g})^{\otimes\#E}$$

对于 $X\in U(\mathfrak{g})$ 和 $i\in\{1,\dots,n\}$，$U((\mathfrak{g}^E)^{\times 2})$ 中的纯张量记作 $\mathbf{X}\otimes\mathbf{Y}$，其中

$$\mathbf{X}=\bigotimes_{e\in E}X_e,\qquad \mathbf{Y}=\bigotimes_{e'\in E}Y_{e'}.$$

以及 X_e、$Y_{e'}\in U(\mathfrak{g})$。

引理。公式

$$\boldsymbol{k}\bullet\big(\mathbf{X}\otimes\mathbf{Y}\big) := \Big(\bigotimes_{e\in E}\mathrm{Ad}(k_{s(e)})X_e\Big)\otimes\Big(\bigotimes_{e'\in E}\mathrm{Ad}(k_{t(e')})Y_{e'}\Big) \tag{15}$$

通过代数自同构定义了 K 在 $U((\mathfrak{g}^E)^{\times 2})$ 上的作用。此外 $e,$

$$\boldsymbol{k}\bullet D_{\mathbf{X}\otimes\mathbf{Y}} = D_{\boldsymbol{k}\bullet(\mathbf{X}\otimes\mathbf{Y})}. \tag{16}$$

证明。第一个陈述是显然的。对于第二个陈述，只需在 $\mathbf{X}=x^{(i)}$ and $\mathbf{Y}=1_{U(\mathfrak{g}^E)}$ 以及 $\mathbf{X}=1_{U(\mathfrak{g}^E)}$ and $\mathbf{Y}=y^{(i)}$ 的情况下验证 (16) 即可。

其中 $x, y \in \mathfrak{g}_{0\circ}$。当 $\mathbf{X} = x^{(i)}$ 且 $\mathbf{Y} = 1_{U(\mathfrak{g}^E)}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{k}\cdot(D_{\mathbf{X}\otimes\mathbf{Y}}f)\big)(\boldsymbol{g}) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\cdots,\exp(-tx)k_{s(e_i)}^{-1}g_ik_{t(e_i)},\cdots)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\cdots,k_{s(e_i)}^{-1}\exp(-t\mathrm{Ad}(k_{s(e_i)})x)g_ik_{t(e_i)},\cdots)\\ &= \big(D_{\mathbf{k}\bullet(\mathbf{X}\otimes\mathbf{Y})}(\boldsymbol{k}\cdot f)\big)(\boldsymbol{g}),\end{aligned}$$

如所需。当 $\mathbf{X} = 1_{U(\mathfrak{g}^E)}$ 且 $\mathbf{Y} = y^{(i)}$ 时，类似的计算可证明（16）。 □

5.6. 引理 5.5 表明，$\mathcal{D}_{\mathrm{inv}}(G^E)$ 是 $\mathcal{D}(G^E)$ 的 K-不变子代数。记

$$\mathcal{D}_{\mathrm{inv}}(G^E)^{\mathbf{K}} \subseteq \mathcal{D}_{\mathrm{inv}}(G^E)$$

$\mathcal{D}_{\mathrm{inv}}(G^E)$ 中的 K-不变微分算子子代数。

根据 §5.3 和引理 5.5，我们随后得到

$$\mathcal{D}_{\mathrm{biinv}}(G^E) \subseteq \mathcal{D}_{\mathrm{inv}}(G^E)^{\mathbf{K}} \subseteq \mathcal{D}(G^E)^{\mathbf{K}} \tag{17}$$

代数的包含关系。

5.7. 设 S 为一个有限维 K-表示。空间 $\mathcal{R}(G^E)\otimes S$ 上的 S-值代表函数构成一个 $\mathcal{D}(G^E)$-模，其定义为

$$D(h\otimes u) := D(h)\otimes u$$

对于 $D\in\mathcal{D}(G^E)$、$h\in\mathcal{R}(G^E)$ 和 $u\in S$。此外，受限规范群 K 通过 §4.7 中的扭曲 K-作用 $(\boldsymbol{k}, f)\mapsto \boldsymbol{k}\cdot f$ 作用于 $\mathcal{R}(G^E)\otimes S$。那么公式 (14) 在这一更一般的情形下仍然成立，

$$\mathbf{k}\cdot(Df) = (\mathbf{k}\bullet D)(\mathbf{k}\cdot f)$$

对于 $\mathbf{k}\in\mathbf{K}$、$D\in\mathcal{D}(G^E)$ 和 $f\in\mathcal{R}(G^E)\otimes S$。

5.8. 由 §5.7 可知，$\mathcal{D}(G^E)^{\mathbf{K}}$ 上的 K-不变代数微分算子代数作用于自旋图函数空间 $\mathcal{H}_{\Gamma,\,G,\,S} = (\mathcal{R}(G^E)\otimes S)^{\mathbf{K}}$。代数 $\mathrm{End}(\mathcal{H}_{\Gamma,\,G,\,S})$ 中代数包含关系 (17) 的同态像由此给出包含关系。

$$I_{\Gamma,G,S}\subseteq J_{\Gamma,G,S}\subseteq A_{\Gamma,G,S}$$

$\mathrm{End}(\mathcal{H}_{\Gamma,G,S})$ 的子代数。若上下文足以明确标签 Γ、G、S，则省略它们。注意，根据 §5.3，I 包含于 J 的中心中。

5.9. 按照 §2.7，我们将代数的包含关系视为

$$I \subseteq J \subseteq C_A(I) \subseteq A \subseteq \mathrm{End}(\mathcal{H})$$

作为一个量子自旋系统，其量子态空间为 $\mathcal{H}$，量子可观测量代数为 A，量子积分代数为 J，量子哈密顿量交换代数为 I。对于 $i \in \{1, \dots, n\}$ 和 $\Omega \in Z(\mathfrak{g})$，二次Casimir元，作用

$$\Omega^{(i)} \in Z(\mathfrak{g}^E) \simeq \mathcal{D}_{\mathrm{biinv}}(G^E)$$

在 $\mathcal{H}$ 上是该量子自旋系统的量子哈密顿量 $H_i \in I$。

我们称 $H_i (i \in \{1, \dots, n\})$ 为该量子自旋系统的边分量二次哈密顿量。

5.10. 记 $\chi_\pi : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ 为 $\pi \in G^\wedge$ 的中心特征。则

$$(G^\wedge)^E \hookrightarrow I^\wedge, \qquad \boldsymbol{\pi} \mapsto \boldsymbol{\chi_\pi}$$

其中 $\boldsymbol{\chi_\pi} \in I^\wedge$ 由下式确定

$$\boldsymbol{\chi_\pi}(Z_i) = \chi_{\pi_i}(Z)$$

对于 $i = 1, \dots, n$ 和 $Z \in Z(\mathfrak{g})$（这里 π_j 是张量积表示 $\boldsymbol{\pi}$ 的局部分量，见 §4.9）。由 §4.12 可知， $\boldsymbol{\pi}$-初等自旋图函数构成的空间 $\mathcal{H}^{\boldsymbol{\pi}}$，也可以描述为一维 I-模 $\boldsymbol{\chi_\pi} \in I^\wedge$ 的同时 I-特征子空间，

$$\mathcal{H}^{\boldsymbol{\pi}} = \mathcal{H}_{\boldsymbol{\chi_\pi}}.$$

因此，§2.6 中的条件 (a) 对量子自旋系统总是成立，

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\boldsymbol{\pi} \in (G^\wedge)^E} \mathcal{H}_{\boldsymbol{\chi_\pi}},$$

其中 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\chi_\pi}} = \mathcal{H}^{\boldsymbol{\pi}}$ 是由 $\boldsymbol{\pi}$-初等自旋图函数构成的有限维空间。

5.11. 以下是本文的主要结果。

定理。设 Γ 是有限连通有向图， G 是连通紧李群，$\mathrm{K} = \prod_{v \in V} K_v$ 具有 $K_v \subseteq G$ 个子群，且 $\sigma : \mathrm{K} \to \mathrm{GL}(S)$ 是有限维表示。

如 §5.9 中所定义，$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\Gamma,\, G,\, s}$ 上的量子自旋系统在以下三个条件成立时是超可积的：

(a) G 是单连通的。(b) 对每个 $v \in V$，局部规范群 $K_v \subseteq G$ 是闭且连通的。(c) 表示 $\sigma : \mathrm{K} \to \mathrm{GL}(S)$ 是不可约的。

我们给出 §6.10 中定理的证明。

5.12. 考虑量子自旋系统，其中 Γ 是具有n 条边的有向环图，$\mathrm{K} = G^V$ 和 $\sigma : \mathrm{K} \to \mathrm{GL}(V)$ 是一个有限维表示，见 §4.17。根据定理 5.11，当 G 是单连通的且 σ 是不可约的时，它是超可积的。关于 σ 的条件意味着 σ 等价于张量积表示 $\boldsymbol{\sigma}$，其局部表示 $\sigma_v : G \to \mathrm{GL}(S_v)$ 对所有$v \in V$均不可约。

利用其模空间 $\mathcal{M}$ （图 G-联络的模空间）以极大环面$T \subset G$参数化，可以更明确地描述这个量子自旋系统。于是，边分量二次哈密顿量 H_i 变为定义在 T 上的显式二阶 $\mathrm{End}(S)$-值微分算子，且属于 Calogero-Moser 型。差算子 $H_i - H_{i-1}$ 是称为渐近 Knizhnik-Zamolodchikov 算子的彼此对易的一阶微分算子，可以完全用 Felder 的经典三角动态 r-矩阵来描述（见 [8, 23, 20]）。这为将该量子自旋系统理解为量子周期自旋 Calogero-Moser 链 [21]提供了诠释。

对于特殊情形 $n = 1$，文献 [18]讨论了量子周期 Calogero-Moser 自旋系统的超可积性。

5.13. 现在考虑如下量子自旋系统：Γ 为具有 n 条边的线性有序线性图，局部规范群具有式 (11) 的形式，其中 H、$K \subseteq G$ 是闭连通子群，并且 $\sigma : \mathrm{K} \to \mathrm{GL}(S)$ 是关联规范群 K 的一个有限维表示（见 §4.18）。根据定理 5.11，当 G 单连通且 σ 不可约时，该量子自旋系统是超可积的。对 σ的条件意味着 $S \simeq L \otimes S_2 \otimes \cdots \otimes S_n \otimes N$，其中 L是一个不可约的 H-表示，N 是一个不可约的 K 表示，而 S_j 是不可约的 G-表示。

当 $H = K$ 是对合 Θ 作用于 G 所得到的不动点子群 G^Θ 的单位元的连通分支时，利用以适当子环面 $A \subset G$ 参数化其图 G-连接模空间 $\mathcal{M}$ 的适当参数化，可以使该量子自旋系统更加具体。此时，边分量二次哈密顿量 H_i 变为作用在 A 上的二阶 $\mathrm{End}(S)$-值 Calogero-Moser 型微分算子，而 $H_i - H_{i-1}$ 则是渐近边界 Knizhnik-Zamolodchikov 算子；后者是一阶微分算子，涉及折叠的经典动态 r-矩阵及其关联的动态 k-矩阵（见 [24, 21, 23, 20]）。这使得可以将该量子自旋系统解释为量子开放自旋 Calogero-Moser 链 [21]。

6. Conditions for superintegrability

本节中，我们将证明确保第 5 节中定义的量子自旋系统具有超可积性的充分条件（参见定理 5.11）。我们沿用第 5 节中的记号和约定。特别地，Γ 是一个有向有限图，G 是一个连通紧李群，而 $\mathrm{K} = \prod_{v \in V} K_v$ 具有子群 $K_v \subseteq G$。

我们将量子系统的有限维 K-表示取为张量积表示 $\boldsymbol{\sigma}: \mathrm{K} \to \mathrm{GL}(\mathrm{S})$（参见 §4.10）。此外，我们固定一个不可约的有限维张量积表示 $\boldsymbol{\pi}: G^E \to \mathrm{GL}(\mathbf{M}^{\boldsymbol{\pi}})$，其局部不可约 G-表示为 $\pi_e\colon G \to \mathrm{GL}(M^{\pi_e})$。

最后，我们用 $\mathfrak{g}_0$ 表示 G 的李代数，用 $\mathfrak{g}$ 表示它的复化。

6.1. 对于 $v \in V$，考虑线性同构

$$\tau_v : \mathrm{Hom}(S_v^*, \mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}} \otimes S_v \tag{18}$$

定义如下:

$$\tau_v(\phi_v) := \sum_{t_v} \phi_v(u_{t_v}^{(v),*}) \otimes u_{t_v}^{(v)}$$

其中 $\{u_t^{(v)}\}_t$ 是 S_v 的一组基，而 $\{u_t^{(v),*}\}_t$ 是 S_v^* 对应的对偶基.

通常，按 $\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}$ 的张量积基展开 $\phi_v(u^{(v)}, {}_{t_v}{}^{*})$ 会很方便（见 §4.16）。其展开系数记为 $\phi_v[t_v; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] \in \mathbb{C}$,

$$\phi_v(u_{t_v}^{(v),*}) = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathcal{I}(v|s)} \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathcal{I}(v|t)} \phi_v[t_v; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] \left(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{i}}(v|s)^* \otimes \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{j}}(v|t)\right),$$

从而

$$\tau_v(\phi_v) = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathcal{I}(v|s)} \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathcal{I}(v|t)} \sum_{t_v} \phi_v[t_v; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] \left(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{i}}(v|s)^* \otimes \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{j}}(v|t)\right) \otimes u_{t_v}^{(v)}. \tag{19}$$

6.2. 将 $\mathrm{Hom}(S_v^*, \mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}})$ 转化为一个带有作用的 K_v-表示

$$k_v \cdot T := \pi_{\mathcal{S}(v)}(k_v) \circ T \circ \sigma_v^*(k_v^{-1}), \qquad k_v \in K_v.$$

线性映射 τ_v （见（19））是 K_v-线性的，在 τ_v 的陪域上按照 §4.14 中定义的 K_v-作用。因此， τ_v 限制为一个线性同构

$$\tau_v : \mathrm{Hom}_{K_v}(S_v^*, \mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}) \xrightarrow{\sim} \left(\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}} \otimes S_v\right)^{K_v}.$$

6.3. 回顾 §4.15 中定义的同构 $\Psi^{\boldsymbol{\pi}}$ 。由 §6.2 可知

$$\Upsilon^{\boldsymbol{\pi}} := \Psi^{\boldsymbol{\pi}} \circ \left(\bigotimes_{v \in V} \tau_v\right) : \bigotimes_{v \in V} \mathrm{Hom}(S_v^*, \mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}^{\boldsymbol{\pi}}(G^E) \otimes \mathbf{S}$$

是一个 K-线性同构，其中 $\Upsilon^{\boldsymbol{\pi}}$ 的定义域被视为相对于 $\mathrm{K} = \prod_{v \in V} K_v$ 的张量积作用的 K-表示。映射 $\Upsilon^{\boldsymbol{\pi}}$ 限制为一个线性同构。

$$\Upsilon^{\boldsymbol{\pi}} : \bigotimes_{v \in V} \mathrm{Hom}_{K_v}(S_v^*, \mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{\boldsymbol{\pi}}.$$

6.4. 令 $\mathcal{I}$ 为满足 $i_e \in \mathcal{I}_e$ 的序列 $(i_e)_{e\in E}$ 的集合。考虑 $\mathbf{M}^{\boldsymbol{\pi}}$ 的张量积基 $\{\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}}\}_{\boldsymbol{i}\in\mathcal{I}}$，其中

$$\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}} := \bigotimes_{e\in E} m_{i_e,e},$$

并将 $\mathbf{m}^*_{\boldsymbol{i}} := \bigotimes_{e\in E} m^*_{i_e,e}$ 记作 $(\mathbf{M}^{\boldsymbol{\pi}})^* \simeq \otimes_{e\in E} M^{\pi^*_e}$ 的相应对偶基元素，参见 §4.9。对于 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{I}$，记

$$\boldsymbol{i}_{v|s} := (i_e)_{e\in\mathcal{S}(v|s)} \in \mathcal{I}(v|s), \qquad \boldsymbol{i}_{v|t} := (i_e)_{e\in\mathcal{S}(v|t)} \in \mathcal{I}(v|t).$$

利用 (19) 直接计算可得公式

$$\Upsilon^{\boldsymbol{\pi}}\Big(\bigotimes_{v\in V}\phi_v\Big) = \sum_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\in\mathcal{I}} c^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{m}^*_{\boldsymbol{i}},\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{j}}} \otimes \Big(\bigotimes_{v\in V}\big(\sum_{t_v}\phi_v[t_v;\boldsymbol{i}_{v|s},\boldsymbol{j}_{v|t}]\,u^{(v)}_{t_v}\big)\Big) \tag{20}$$

对于 $\phi_v \in \mathrm{Hom}(S^*_v, \mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}})$。

6.5. 考虑张量积代数

$$U(\mathfrak{g})^{(v)} := U(\mathfrak{g})^{\otimes\#\mathcal{S}(v|s)} \otimes U(\mathfrak{g})^{\otimes\#\mathcal{S}(v|t)}.$$

$U(\mathfrak{g})^{(v)}$ 中的纯张量记作 $\mathbf{X}_{v|s}\otimes\mathbf{Y}_{v|t}$，其中

$$\mathbf{X}_{v|s} = \bigotimes_{e\in\mathcal{S}(v|s)} X_e, \qquad \mathbf{Y}_{v|t} = \bigotimes_{e'\in\mathcal{S}(v|t)} Y_{e'},$$

其中，我们按照由 E 上的全序所诱导的 $\mathcal{S}(v|s)$ 和 $\mathcal{S}(v|t)$ 上的全序，对张量积进行排序。在 §4.13 中，我们考察了空间

$$\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}} = \Big(\bigotimes_{e\in\mathcal{S}(v|s)} M^{\pi^*_e}\Big)\otimes\Big(\bigotimes_{e'\in\mathcal{S}(v|t)} M^{\pi_{e'}}\Big),$$

作为相对于对角 K_v 作用 $\pi_{\mathcal{S}(v)}$ 的 K_v-表示空间。对 G 作用求微分后，$M^{\pi^*_e}$ 和 $M^{\pi_{e'}}$ 变成不可约的 $U(\mathfrak{g})$-模，因此通过对角 $U(\mathfrak{g})^{(v)}$ 作用，$\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}$ 也成为不可约的 $U(\mathfrak{g})^{(v)}$-模。

我们将线性空间

$$\mathrm{Hom}(S^*_v, \mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}})$$

视为 $U(\mathfrak{g})^{(v)}$-模，其中 $U(\mathfrak{g})^{(v)}$ 作用于其陪域，

$$\big((\mathbf{X}_{v|s}\otimes\mathbf{Y}_{v|t})\cdot T\big)(\xi) := (\mathbf{X}_{v|s}\otimes\mathbf{Y}_{v|t})\cdot(T(\xi)) \tag{21}$$

对于 $\mathbf{X}_{v|s}\otimes\mathbf{Y}_{v|t}\in U(\mathfrak{g})^{(v)}$、$T\in\mathrm{Hom}(S^*_v, \mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}})$ 和 $\xi\in S^*_v$。

6.6. 局部规范群 K_v 通过对角伴随作用在 $U(\mathfrak{g})^{(v)}$ 上施加代数自同构,

$$k_v \bullet_v \left(\mathbf{X}_{v|s} \otimes \mathbf{Y}_{v|t}\right) := \Big(\bigotimes_{e\in\mathcal{S}(v|s)} \mathrm{Ad}(k_v)X_e\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{e'\in\mathcal{S}(v|t)} \mathrm{Ad}(k_v)Y_{e'}\Big).$$

于是有

$$k_v \cdot \big((\mathbf{X}_{v|s} \otimes \mathbf{Y}_{v|t}) \cdot B\big) = \big(k_v \bullet_v (\mathbf{X}_{v|s} \otimes \mathbf{Y}_{v|t})\big) \cdot \big(k_v \cdot B\big)$$

对于 $k_v \in K_v$, $\mathbf{X}_{v|s} \otimes \mathbf{Y}_{v|t} \in U(\mathfrak{g})^{(v)}$ 和 $B \in \mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}$。

令 $(U(\mathfrak{g})^{(v)})^{K_v}$ 为 K_v-不变元在 $U(\mathfrak{g})^{(v)}$ 中的代数，其中不变性是相对于 K_v-作用 $\bullet_v$ 而言的。由 §6.2 和 §6.5 可知，空间

$$\mathrm{Hom}_{K_v}(S_v^*, \mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}})$$

K_v-交织算子空间是一个 $(U(\mathfrak{g})^{(v)})^{K_v}$-模，其在 $\mathrm{Hom}_{K_v}(S_v^*, \mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}})$ 上的作用由 (21) 给出。

6.7. 考虑代数同构

$$U((\mathfrak{g}^E)^{\times 2}) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{v\in V} U(\mathfrak{g})^{(v)} \tag{22}$$

定义为

$$\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} \mapsto \bigotimes_{v\in V} \big(\mathbf{X}_{v|s} \otimes \mathbf{Y}_{v|t}\big)$$

对于 $\mathbf{X} = \bigotimes_{e\in E} X_e$ 和 $\mathbf{Y} = \bigotimes_{e'\in E} Y_{e'}$，其中

$$\mathbf{X}_{v|s} = \bigotimes_{e\in\mathcal{S}(v|s)} X_e, \qquad \mathbf{Y}_{v|t} = \bigotimes_{e'\in\mathcal{S}(v|t)} Y_{e'}.$$

考虑规范群 $\mathbf{K} = \prod_{v\in V} K_v$ 在代数同构 (22) 的陪域 $\bigotimes_{v\in V} U(\mathfrak{g})^{(v)}$ 上的张量积作用，其中 K_v-作用在$U(\mathfrak{g})^{(v)}$ 上的定义见 §6.6。直接验证可知，代数同构 (22) 是 $\mathbf{K}$-线性的，其中 $\mathbf{K}$ 按照引理 5.5 作用于 $U((\mathfrak{g}^E)^{\times 2})$。因此，代数同构 (22) 限制为一个代数同构

$$U((\mathfrak{g}^E)^{\times 2})^{\mathbf{K}} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{v\in V} (U(\mathfrak{g})^{(v)})^{K_v}. \tag{23}$$

6.8. 赋予

$$\bigotimes_{v\in V} \mathrm{Hom}(S_v^*, \mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}) \tag{24}$$

配备 $\bigotimes_{v\in V} U(\mathfrak{g})^{(v)}$ 的张量积作用。我们通过代数同构 (22)，将其重新诠释为 $U((\mathfrak{g}^E)^{\times 2})$ 的作用。

根据 §5.2 和 §5.7，泛包络代数 $U((\mathfrak{g}^E)^{\times 2})$ 也作用于空间 $\mathcal{R}^{\boldsymbol{\pi}}(G^E)\otimes \mathbf{S}$，即定义在 G^E 上的 S-值代表函数空间，其作用方式为

$$(\mathbf{X}\otimes\mathbf{Y})\cdot(f\otimes u):=D_{\mathbf{X}\otimes\mathbf{Y}}(f)\otimes u$$

对于 $\mathbf{X}、\mathbf{Y}\in U(\mathfrak{g}^E)$、$f\in\mathcal{R}^{\boldsymbol{\pi}}(G^E)$ 和 $u\in\mathbf{S}$。

引理。K-线性同构

$$\Upsilon^{\boldsymbol{\pi}}:\bigotimes_{v\in V}\mathrm{Hom}(S_v^*,\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}})\xrightarrow{\sim}\mathcal{R}^{\boldsymbol{\pi}}(G^E)\otimes\mathbf{S}$$

如§6.3 中所定义，是 $U((\mathfrak{g}^E)^{\times 2})$-线性的。

证明。使用 §6.7 中的记号，我们有

$$\Upsilon^{\boldsymbol{\pi}}\Big((\mathbf{X}\otimes\mathbf{Y})\cdot\Big(\bigotimes_{v\in V}\phi_v\Big)\Big)=\Upsilon^{\boldsymbol{\pi}}\Big(\bigotimes_{v\in V}(\mathbf{X}_{v|s}\otimes\mathbf{X}_{v|t})\cdot\phi_v\Big)$$
$$=\sum_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\in\mathcal{I}}c^{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{X}\cdot\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}}^*,\mathbf{Y}\cdot\mathbf{m}_{\boldsymbol{j}}}\otimes\Big(\bigotimes_{v\in V}\big(\sum_{t_v}\phi_v[t_v;\boldsymbol{i}_{v|s},\boldsymbol{j}_{v|t}]\,u_{t_v}^{(v)}\big)\Big)$$

（此处 $\mathbf{X}\cdot\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}}^*$ 和 $\mathbf{Y}\cdot\mathbf{m}_{\boldsymbol{j}}$ 指 $(\mathbf{M}^{\boldsymbol{\pi}})^*$ 和 $\mathbf{M}^{\boldsymbol{\pi}}$ 上的 $U(\mathfrak{g}^E)$-作用，它们由对 G^E-作用求微分得到）。第二个等式由展开公式得出

$$\big((\mathbf{X}_{v|s}\otimes\mathbf{Y}_{v|t})\cdot\phi_v\big)[t_v;\boldsymbol{i}'_{v|s},\boldsymbol{j}'_{v|t}]=$$
$$=\sum_{\boldsymbol{i}_{v|s},\boldsymbol{j}_{v|t}}\big(\mathbf{X}_{v|s}\cdot\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}_{v|s}}(v|s)^*\big)(\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}'_{v|s}}(v|s))\mathbf{m}_{\boldsymbol{j}'_{v|t}}(v|t)^*(\mathbf{Y}_{v|t}\cdot\mathbf{m}_{\boldsymbol{j}_{v|t}}(v|t))\phi_v[t_v;\boldsymbol{i}_{v|s},\boldsymbol{j}_{v|t}]$$

其中，左端的求和分别对 $\boldsymbol{i}_{v|s}\in\mathcal{I}(v|s)$ 和 $\boldsymbol{j}_{v|t}\in\mathcal{I}(v|t)$ 进行，且利用以下事实：

$$\sum_{\boldsymbol{i}'\in\mathcal{I}}\Big(\prod_{v\in V}\big(\mathbf{X}_{v|s}\cdot\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}_{v|s}}(v|s)^*\big)(\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}'_{v|s}}(v|s))\Big)\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}'}^*=\sum_{\boldsymbol{i}'\in\mathcal{I}}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}}^*)(\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}'})\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}'}^*=\mathbf{X}\cdot\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}}^*,$$
$$\sum_{\boldsymbol{j}'\in\mathcal{I}}\Big(\prod_{v\in V}\mathbf{m}_{\boldsymbol{j}'_{v|t}}(v|t)^*\big(\mathbf{Y}_{v|t}\cdot\mathbf{m}_{\boldsymbol{j}_{v|t}}(v|t)\big)\Big)\mathbf{m}_{\boldsymbol{j}'}=\sum_{\boldsymbol{j}'\in\mathcal{I}}\mathbf{m}_{\boldsymbol{j}'}^*(\mathbf{Y}\cdot\mathbf{m}_{\boldsymbol{j}})\mathbf{m}_{\boldsymbol{j}'}=\mathbf{Y}\cdot\mathbf{m}_{\boldsymbol{j}}.$$

现在，该结果由以下事实得出：

$$c^{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{X}\cdot\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}}^*,\mathbf{Y}\cdot\mathbf{m}_{\boldsymbol{j}}}=D_{\mathbf{X}\otimes\mathbf{Y}}(c^{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{m}_{\boldsymbol{i}}^*,\mathbf{m}_{\boldsymbol{j}}}).$$

□

6.9. §6.6–§6.8 的结果立即导出以下结论。

推论。

(a) 同构 $\Upsilon^{\boldsymbol{\pi}}$ 限制为一个 $U((\mathfrak{g}^E)^{\times 2})^{\mathbf{K}}$-线性同构

$$\Upsilon^{\boldsymbol{\pi}}:\bigotimes_{v\in V}\mathrm{Hom}_{K_v}\big(S_v^*,\mathbf{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}}\big)\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}^{\boldsymbol{\pi}}.$$

(b) $\mathcal{H}^{\boldsymbol{\pi}}$是不可约的 $U((\mathfrak{g}^E)^{\times 2})^{\mathbf{K}}$-模，当且仅当对所有 $v \in V$，$\mathrm{Hom}_{K_v}(S_v^*, \mathrm{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}})$ 是不可约的 $(U(\mathfrak{g})^{(v)})^{K_v}$- 模。

6.10. 现在我们已经具备了证明定理 5.11 所需的全部要素。

定理 5.11 的证明。设定理 5.11 中的三个条件 (a)-(c) 均成立。根据 §4.10，不失一般性，我们可以假设 K-表示 σ 是一个张量积表示 $\boldsymbol{\sigma}$，其局部表示 σ_v 均不可约：$K_v \to \mathrm{GL}(S_v)$。令 $\boldsymbol{\pi} \in (G^\wedge)^E$ 满足 $\mathcal{H}^{\boldsymbol{\pi}} \neq 0$。我们需要证明 $\mathcal{H}^{\boldsymbol{\pi}}$ 是一个不可约的 $U((\mathfrak{g}^E)^{\times 2})^{\mathbf{K}}$-模。

用 $\mathfrak{k}_v$ 表示 K_v 的复化李代数。令

$$e(v) := \#\mathcal{S}(v|s) + \#\mathcal{S}(v|t)$$

（它可能严格大于 $\#\mathcal{S}(v)$，因为 Γ 可能含有自环）。注意，$e(v) > 0$，因为 Γ 是连通的。

根据推论 6.9 以及 K_v 是连通的这一事实，只需证明 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}_v}(S_v^*, \mathrm{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}})$ 是一个不可约的 $U(\mathfrak{g}^{\times e(v)})^{\mathfrak{k}_v^{(e(v))}}$-模，其中 $\mathfrak{k}_v^{(e(v))} \subseteq \mathfrak{g}^{\times e(v)}$ 是 $\mathfrak{k}_v$ 在对角嵌入 $\delta_{\mathfrak{g}}^{(e(v))}\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}^{\times e(v)}$ 下的像，见 §3.9。

注意，由于 G 是单连通的，因此 $\mathfrak{g}$ 是半单的；根据 §3.5，$\mathfrak{k}_v$ 在 $\mathfrak{g}$ 中是约化的。因此，$\mathfrak{g}^{\times e(v)}$ 是 $\mathfrak{k}_v^{(e(v))}$ 的约化扩张，见命题 3.9。推论 3.17 随即表明，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}_v}(S_v^*, \mathrm{M}^{\pi_{\mathcal{S}(v)}})$ 是一个不可约的 $U(\mathfrak{g}^{\times e(v)})^{\mathfrak{k}_v^{(e(v))}}$-模。□

References

[1] A. Yu. Alekseev、H. Grosse、V. Schomerus，《哈密顿量陈-西蒙斯理论的组合量子化》，《数学物理通讯》172（1995），317–358。[2] J. E. Andersen、J. Mattes、N. Reshetikhin，《平坦连接模空间上的泊松结构与弦图》，《拓扑学》15（1996），1069–1083。[3] S. Arthamonov、N. Reshetikhin，《平坦连接模空间上的超可积系统》，《数学物理通讯》386（2021），1337–1381。[4] E. Buffenoir、Ph. Roche，《基于量子群的二维格点规范理论》，《数学物理通讯》170（1995），669–698。[5] E. Buffenoir、Ph. Roche，《哈密顿量陈-西蒙斯理论的链环不变量与组合量子化》，《数学物理通讯》181（1996），331–365。[6] J. Dixmier，《包络代数》，《数学研究生教材》第11卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1996年。[7] P. Etingof、O. Golberg、S. Hensel、T. Liu、A. Schwendner、D. Vaintrob、E. Yudovina，《表示论导论》，《学生数学图书馆》第59卷，美国数学会（2011）。[8] P. Etingof、O. Schiffmann，《Kac-Moody代数交织算子的扭曲迹及与Belavin-Drinfeld三元组对应的经典动力学 r矩阵》，《数学研究快报》6（1999），593–612。[9] P. Etingof、O. Schiffmann、A. Varchenko，《量子群交织算子的迹与差分方程》，《数学物理快报》62（2002），143–158。[10] P. Etingof、A. Varchenko，《量子群交织算子的迹与差分方程：第一部分》，《杜克数学杂志》104（2000），391–432。

[11] V.V. Fock，A.A. Rosly，黎曼曲面上平坦连接模空间的泊松结构与 r-矩阵，数学物理莫斯科研讨会，67–86，美国数学会译丛第 2 辑，191，数学科学进展，43，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1999 年。[12] Harish-Chandra，半单李群上的球函数 I，《美国数学杂志》80 (1958)，241–310。[13] Harish-Chandra，半单李群表示 II，《美国数学会汇刊》76 (1954)，26–65。[14] J. Leposwky，G.W. McCollum，通过限制到子代数确定不可约模，《美国数学会汇刊》176 (1973)，45–57。[15] Ju. A. Neretin，李群上的微分算子（俄文），《数学科学进展》36，第 2 期（218）（1981），195–196。[16] E.M. Opdam，根系与超几何函数 IV，《Compositio Mathematica》67 (1988)，191–209。[17] N. Reshetikhin，自旋 Calogero-Moser 系统的退化可积性及其与自旋 Ruijsenaars 系统的对偶性，《数学物理快报》63 (2003)，55–71。[18] N. Reshetikhin，量子自旋 Calogero-Moser 系统的退化可积性，《数学物理快报》107 (2017)，187–200。[19] N. Reshetikhin，周期与开放经典自旋 Calogero-Moser 链，arXiv:2302.14281。[20] N. Reshetikhin，自旋 Calogero-Moser 周期链与带角点的二维 Yang-Mills 理论，arXiv:2303.10579。[21] N. Reshetikhin，J.V. Stokman，渐近边界 KZB 算子与量子 Calogero-Moser 自旋链，载于《超几何、可积性与李理论》，205–241，当代数学，780，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2022 年。[22] P. Roche，A. Szenes，平坦连接模空间的非交换变形上的泛函，《数学进展》168 (2002)，133–192。[23] J.V. Stokman，耦合经典动力学 Yang-Baxter 方程与反射方程的折叠解和收缩解，《荷兰数学学会会刊》（新系列）32 (2021)，1372–1411。[24] J.V. Stokman，N. Reshetikhin， N-点球函数与渐近边界 KZB 方程，《数学发明》229 (2022)，1–86。[25] N. Wallach，实约化群 I。纯数学与应用数学丛书，第 132 卷。Academic Press, Inc.，马萨诸塞州波士顿，1988 年。

N.R.: YMSC, Tsinghua University, Beijing, China & BIMSA, Beijing, China &Department of Mathematics, University of California, Berkeley, CA 94720, USA.电子邮箱：reshetik@math.berkeley.edu
J.S.: KdV Institute for Mathematics, University of Amsterdam, Science Park 105-107, 1098 XG Amsterdam, The Netherlands.电子邮箱：J.V.Stokman@uva.nl