arXiv:2305.02771v1 [math.MG] 4 May 2023

关于度量空间中长度距离的变分问题

Fares Essebei 和 Enrico Pasqualetto

Abstract. 给定一个局部紧的完备度量空间 (X, D) 以及一个开集 Ω ⊆ X，我们研究 Ω 上的长度距离 d 类，其中这些距离由环境距离 D 的固定倍数从上、下两方面控制。更确切地说，我们证明，该类中距离在紧集上一致收敛，当且仅当若干相关变分问题的 Γ-收敛成立。在此过程中，我们还纠正了以往文献中的一些疏漏。

1. Introduction

总体概述。 文献中已广泛研究了与长度距离相关的若干不同变分泛函的收敛性。其中，这类研究对于获得黎曼度量和芬斯勒度量的均质化型结果 [1, 2], 、研究质量输运和优化问题 [3], 以及建立关于欧几里得度量和距离的逼近结果 [8]都具有重要意义。一个关键结果归功于 Buttazzo–De Pascale–Fragal`a [5]，他们证明了欧几里得空间开子集上的长度距离（这些距离由欧几里得距离的固定倍数从上、下两方面控制）的收敛性，可以用适当长度泛函和能量泛函的 Γ-收敛来刻画。最近，我们将这一结果推广到了次黎曼情形 [10]。更具体地说，我们研究了上述关于距离的变分问题，其中环境空间是赋备固定次黎曼距离（或更一般地，次芬斯勒距离）的 Carnot 群。

本文旨在将上述讨论的结果推广到更一般的（局部紧、完备）度量空间情形。这表明，只要以恰当的方式定义所考虑的各类对象，等价性结果背后的原理就具有很强的普适性，且与底层环境空间的结构关系不大。在此过程中，我们还针对该主题现有文献中的一些问题提出了解决方案。

引言其余部分安排如下：首先，我们将更详细地介绍主要结果，然后将其与该领域先前的研究进行比较。

结果陈述。设 (X,D) 是一个局部紧、完备度量空间，Ω ⊆ X 是一个开集，且 $\alpha > 1$ 为给定常数。我们研究的主要对象是如下类 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$，其中包含 Ω 上所有满足以下条件的长度距离 $\alpha^{-1}\mathsf{D} \leqslant \mathsf{d} \leqslant \alpha\mathsf{D}$，参见定义 2.4。我们指出，$\bar{\mathsf{d}}$ 的连续延拓 d 至闭包 $\overline{\Omega \times \Omega}$ 是 Ω 上的一个测地距离，并满足 $\alpha^{-1}\mathsf{D} \leqslant \bar{\mathsf{d}} \leqslant \alpha\mathsf{D}$，见引理 2.7。

我们将考虑与任意给定距离 $\mathsf{d} \in \mathcal{D}_\alpha(\Omega)$ 相关的三个不同泛函：

- 长度泛函 $L_{\bar{\mathsf{d}}}$，定义在从 $[0,1]$ 到闭包 Ω 的 Lipschitz 曲线空间上；该空间赋予一致收敛拓扑；参见（2.1）。
- “最优传输型”泛函 J_{d}，其定义如下：

$$J_{\mathsf{d}}(\mu) := \int \mathsf{d}(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x,y) \quad \text{for every finite Borel measure } \mu \geqslant 0 \text{ on } \Omega \times \Omega;$$

参见（2.2）。 J_{d} 的定义域配备了弱* 拓扑。

Date: 2023年5月5日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 49J45、53C23、53C60、51K05。
Key words and phrases. 长度距离、伽马收敛、变分问题、长度泛函。

- “凸极小化型”泛函 F_{d}，其定义为

$$F_{\mathsf{d}}(u) := \begin{cases} 0 & \text{if } u \text{ is 1-Lipschitz with respect to } \mathsf{d}, \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

对于每个利普希茨函数 $u\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$；见（2.3）。定义域赋予紧集上一致收敛拓扑。

我们的主要 结果（即定理3.1）表明，若给定 $(\mathsf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_\alpha(\Omega)$ 和 $\mathsf{d} \in \mathcal{D}_\alpha(\Omega)$，则

$$\underset{\text{(A)}}{\mathsf{d}_n \to \mathsf{d}} \iff \underset{\text{(B)}}{J_{\mathsf{d}_n} \xrightarrow{\Gamma} J_{\mathsf{d}}} \iff \underset{\text{(C)}}{L_{\bar{\mathsf{d}}_n} \xrightarrow{\Gamma} L_{\bar{\mathsf{d}}}} \iff \underset{\text{(D)}}{F_{\mathsf{d}_n} \xrightarrow{\Gamma} F_{\mathsf{d}}},$$

其中，记号 $\xrightarrow{\Gamma}$ 用于表示相应泛函的 Γ-收敛。需要指出的是，在条件（C）中，有必要要求与扩展距离 d_n 相关的长度泛函的 Γ-收敛；我们将在下一段对此进行说明。

与先前工作的比较。不幸的是，在上述等价结果的欧几里得版本中，[5, 定理 3.1] 错误地表述为：（A）等价于长度泛函 L_{d_n} 到 L_{d} 的 Γ-收敛；这里我们考虑的是定义在开集 Ω 上的原始距离 d_n 和 d。这一错误后来被延续到后续工作中，例如我们的论文 [10]；见其中的定理 4.4。这正是我们注意到这一问题的原因（遗憾的是，是在我们的论文发表之后）。事实上，（A）确实蕴含 L_{d_n} 收敛到 L_{d}，见命题 4.4，但逆向蕴含可能不成立。事实上，在引理 4.1 中，我们考虑平面中的一个正方形 Q，并构造了一个距离序列 $(\mathsf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_2(Q)$，使其 L_{d_n} Γ-收敛到某个 $\mathsf{d} \in \mathcal{D}_2(Q)$ 的 L_{d}，但 d_n 并不收敛到 d；实际发生的是，d_n 收敛到某个更小的距离 $\tilde{\mathsf{d}}$，而该距离并非长度距离。事实上，在每个具有 $n \geqslant 2$ 的 $\mathbb{R}^n$ 的开子集上，都可以构造出类似的反例，见备注 4.3。这一现象源于这样一个事实：–不同于 [5, 定理 3.1] 以及 [10, 推论 4.3]的证明中所声称的–空间 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$ 一般并不紧。严格来说，证明 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$ 紧性的错误在于：不能根据辅助泛函（例如 $L^{x,y}_{\mathsf{d}_n}$ 在 [10, 推论 4.3]的证明中）的 Γ-收敛，推出其下确界的收敛，因为这些泛函未必等度强制。正如（A）与（C）之间的等价性所说明的，修正这一问题的一种可能方式，是改为在 Ω 的闭包上考虑长度泛函。

由于（类似于）蕴含关系 (B) $\implies$ (A) 和 (D) $\implies$ (A) 的证明是基于 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$ 的紧致性的，因此这里需要采用新的证明方法。据我们所知，我们上文讨论的错误此前尚未被发现。不过，我们指出，例如 Briani–Davini [4] 证明了闭集 Ω 上的测地线芬斯勒距离类构成一个紧致的可度量化空间。我们还指出，该勘误 [6] 涉及的是另一个不同的问题，而这一问题并未出现在本文中，这要归功于我们所选择的 F_{d} 定义；在一般度量空间框架下，这似乎是唯一合理的公理化方式。

致谢。作者感谢 Tapio Rajala 就本文主题进行的多次有益讨论。

2. 预备知识

设 $(\mathrm{E}_1, \mathsf{d}_1)$ 和 $(\mathrm{E}_2, \mathsf{d}_2)$ 为度量空间。于是，我们分别用 $C(\mathrm{E}_1; \mathrm{E}_2)$ 和 $\mathrm{Lip}(\mathrm{E}_1; \mathrm{E}_2)$ 表示从 E_1 到 E_2 的所有连续映射和利普希茨映射构成的空间。我们在 $C(\mathrm{E}_1; \mathrm{E}_2)$ 和 $\mathrm{Lip}(\mathrm{E}_1; \mathrm{E}_2)$ 上都赋予紧集上一致收敛拓扑。当 $(\mathrm{E}_2, \mathsf{d}_2)$ 是配备欧几里得距离的实数轴 $\mathbb{R}$ 时，我们分别将 $C(\mathrm{E}_1; \mathbb{R})$ 和 $\mathrm{Lip}(\mathrm{E}_1; \mathbb{R})$ 简记为 $C(\mathrm{E}_1)$ 和 $\mathrm{Lip}(\mathrm{E}_1)$。给定任意 $u \in \mathrm{Lip}(\mathrm{E}_1)$，我们用 $\mathrm{Lip}_{\mathsf{d}_1}(u)$ 表示其利普希茨常数。

备注 2.1. 给定任意度量空间 (E, d)，有以下结论。

$$\mathsf{d}(x,y) = \sup\big\{u(x) - u(y) \;\big|\; u \in \mathrm{Lip}(\mathrm{E}),\, \mathrm{Lip}_{\mathsf{d}}(u) \leqslant 1\big\} \quad \text{for every } x, y \in \mathrm{E}.$$

事实上，不等式 $\geqslant$ 显然成立，而不等式 $\leqslant$ 可通过取 $u := \mathsf{d}(\cdot, y)$ 得出。 ∎

一些拓扑事实。若存在一个由 T 的紧子集组成的序列 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$，且满足以下性质，则称拓扑空间 (T τ) 为半紧：给定 T 的任意紧子集 K，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $K\subseteq K_n$。特别地，由于所有单点集都是紧的，因此 T $=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n$。

引理 2.2. 每个局部紧、连通的度量空间都是半紧的。

证明。设 (E, d) 是一个局部紧、连通的度量空间。由于度量空间是仿紧的（见 [12]），由 [11, 附录 A] 可知，(E, d) 是 σ-紧的。也就是说，存在 E 的一个紧子集序列 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 E $=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n$。给定任意一个 $n\in\mathbb{N}$，我们可以找到 E 的一个有限紧子集族 $\mathcal{F}_n$，使得 K_n 包含在 $\bigcup_{H\in\mathcal{F}_n}H$ 的内部中。于是容易验证，$\mathcal{C}$（即 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ 中元素的所有有限并）是 E 的一个可数紧子集族，并满足以下性质：给定任意 $K\subseteq$ E 紧集，存在 $H\in\mathcal{C}$，使得 $K\subseteq H$。这就证明了 (E, d) 是半紧的，证毕。□

长度泛函 L_{d}。给定一个度量空间 (E, d) 和一条连续曲线 $\gamma\colon [a,b]\to$E，我们将 γ 的长度定义为

$$L_{\mathsf{d}}(\gamma) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{k}\mathsf{d}(\gamma_{t_i},\gamma_{t_{i-1}})\;\middle|\; k\in\mathbb{N},\, a=t_0<t_1<\ldots<t_k=b\right\}. \tag{2.1}$$

如果 $L_{\mathsf{d}}(\gamma)<+\infty$，则称 γ 是可求长的。注意，每条利普希茨曲线都是可求长的。

注 2.3。长度泛函 $L_{\mathsf{d}}\colon\ C([0,1];\mathrm{E})\to[0,+\infty]$ 是下半连续的。事实上，它可以表示为连续泛函 $C([0,1];\mathrm{E})\ni\gamma\mapsto\sum_{i=1}^{k}\mathsf{d}(\gamma_{t_i},\gamma_{t_{i-1}})$ 的上确界，其中 $(t_i)_{i=0}^{k}$ 遍历区间 $[0,1]$ 的所有有限划分。■

若度量空间 (E, d) 满足

$$\mathsf{d}(x,y)=\inf\left\{L_{\mathsf{d}}(\gamma)\;\middle|\;\gamma\in\mathrm{Lip}([0,1];\mathrm{E}),\,\gamma_0=x,\,\gamma_1=y\right\}\quad\text{for every } x,y\in\mathrm{E}.$$

如果一条可求长曲线 $\gamma\colon\ [a,b]\to$E 满足

$$L_{\mathsf{d}}(\gamma|_{[t,s]})=\frac{L_{\mathsf{d}}(\gamma)}{|a-b|}|t-s|\quad\text{for every } t,s\in[a,b]\text{ with } t<s.$$

每条可求长曲线 $\gamma\colon\ [a,b]\to$E 都 admite 恒速重参数化 $\hat{\gamma}\colon\ [0,1]\to$E，即 $\hat{\gamma}$ 是一条可求长曲线，满足 ($\hat{\gamma}_0,\hat{\gamma}_1$) $=(\gamma_a,\gamma_b)$，具有恒定速度并且与 γ 具有相同的像，同时满足 $L_{\mathsf{d}}(\hat{\gamma})=L_{\mathsf{d}}(\gamma)$。若曲线 $\gamma\colon\ [a,b]\to$ E 具有恒定速度，则称其为测地线，并且

$$L_{\mathsf{d}}(\gamma|_{[t,s]})=\mathsf{d}(\gamma_t,\gamma_s)\quad\text{for every } t,s\in[a,b]\text{ with } t<s.$$

如果对于任意 $x,y\in$E，都存在一条测地线 $\gamma\colon\ [0,1]\to$E，使得 $\gamma_0=x$ 且 $\gamma_1=y$，则称 (E, d) 为测地空间。每个测地空间都是长度空间。反之通常并不成立；例如，当该度量空间是局部紧且完备时，反向蕴含成立。

类 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$。接下来，我们介绍本文所研究的距离类。

定义 2.4. 设 (X, D) 是一个度量空间，且 $\alpha>1$。那么我们将 Ω 上满足以下条件的所有距离 d 的集合记为 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega,\mathsf{D})$，或简记为 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$：(Ω, d) 是一个长度空间，且

$$\frac{1}{\alpha}\mathsf{D}(x,y)\leqslant\mathsf{d}(x,y)\leqslant\alpha\mathsf{D}(x,y)\quad\text{for every } x,y\in\Omega.$$

我们在 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$ 上赋予 $\Omega\times\Omega$ 的紧子集上的一致收敛拓扑。

类 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$ 可能为空，例如当 Ω 不连通时。给定任意 $\mathsf{d}\in\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$，对于每个 $\gamma\in\mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$，都有 $\mathrm{Lip}_{\mathsf{d}}([0,1];\Omega)=\mathrm{Lip}_{\mathsf{D}}([0,1];\Omega)$，且 $\alpha^{-1}L_{\mathsf{D}}(\gamma)\leqslant L_{\mathsf{d}}(\gamma)\leqslant\alpha L_{\mathsf{D}}(\gamma)$。

引理 2.5。设 (E, D) 是一个半紧度量空间，且设 $\alpha>1$。设 $(\mathsf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 E 上给定的距离，使得对于每个 $n\in\mathbb{N}$，$\alpha^{-1}\mathsf{D}\leqslant\mathsf{d}_n\leqslant\alpha\mathsf{D}$。则我们可以提取一个子序列 $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $\mathsf{d}_{n_i}\to\mathsf{d}$ 在 E 的紧子集上一致收敛 $\times$E，其中某个 E 上的极限距离 d 满足不等式 $\alpha^{-1}\mathsf{D}\leqslant\mathsf{d}\leqslant\alpha\mathsf{D}$。

证明。固定 E 的任意递增序列 $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$，其中各项均为紧子集，并且 E 的任意紧子集都包含于某个 $j\in\mathbb{N}$ 中。注意，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们可以估计

$$\big|\mathsf{d}_n(x,y)-\mathsf{d}_n(\tilde{x},\tilde{y})\big|\leqslant \mathsf{d}_n(x,\tilde{x})+\mathsf{d}_n(y,\tilde{y})\leqslant \alpha\big(\mathsf{D}(x,\tilde{x})+\mathsf{D}(y,\tilde{y})\big)\quad \text{for every } x,\tilde{x},y,\tilde{y}\in \mathrm{E}.$$

这表明，每个函数 $\mathsf{d}_n\colon \mathrm{E}\times\mathrm{E}\to[0,+\infty)$ 在其定义域赋予距离 $(\mathsf{D}\times_1\mathsf{D})\big((x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\big):=\mathsf{D}(x,\tilde{x})+\mathsf{D}(y,\tilde{y})$ 时都是利普希茨函数，并且 $\mathrm{Lip}_{\mathsf{D}\times_1\mathsf{D}}(\mathsf{d}_n)\leqslant\alpha$。因此，借助阿尔泽拉–阿斯科利定理和对角线论证，我们可以提取一个子序列 $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $\mathsf{d}_{n_i}\to\mathsf{d}$ 在每个集合 $K_j\times K_j$ 上一致收敛于某个函数 $\mathsf{d}:\mathrm{E}\times\mathrm{E}\to[0,+\infty)$。通过近似，可以很容易地验证 d 是 E 上的伪距离，且 $\alpha^{-1}\mathsf{D}\leqslant\mathsf{d}\leqslant\alpha\mathsf{D}$。由 $\alpha^{-1}\mathsf{D}\leqslant\mathsf{d}$ 可知，d 是一个距离。最后，给定 $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ 的一个紧子集 H，我们有 $H\subseteq\pi_1(H)\times\pi_2(H)$，其中映射 $\pi_1,\pi_2\colon\mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathrm{E}$ 定义为 $\pi_1(x,y):=x$ 和 $\pi_2(x,y):=y$。由于 π_1 和 π_2 连续，因此 $\pi_1(H)$ 和 $\pi_2(H)$ 是紧的，所以 $\pi_1(H)\,\pi_2(H)\subseteq K_j$，其中某个 $j\in\mathbb{N}$，从而 $H\subseteq K_j\times K_j$。这意味着 $\mathsf{d}_{n_i}\to\mathsf{d}$ 在 $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ 的紧子集上一致收敛。因此，命题得证。□

定义 2.6. 设 (X, D) 为一个度量空间。设 $\Omega\subseteq\mathrm{X}$ 为一个开集。设 d 为 Ω 上的一个距离，使得在 $\Omega\times\Omega$ 上，对于某个 $\alpha>1$，有 $\alpha^{-1}\mathsf{D}\leqslant\mathsf{d}\leqslant\alpha\mathsf{D}$。则我们将 $\bar{\mathsf{d}}:\overline{\Omega\times\Omega}\to[0,+\infty)$ 记为函数 d 在 $\Omega\times\Omega=\Omega\times\Omega$ 上的唯一连续延拓。

容易验证，$\bar{\mathsf{d}}$ 是 $\bar{\Omega}$ 上的距离，并且在 $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$ 上满足 $\alpha^{-1}\mathsf{D}\leqslant\bar{\mathsf{d}}\leqslant\alpha\mathsf{D}$。

引理 2.7. 设 (X, D) 是一个局部紧、完备的度量空间，并设 $\alpha>1$。令 $\mathsf{d}\in\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$，$\bar{\ }$ 为给定的距离。那么度量空间 (Ω,d) 是一个测地空间。

证明。设给定 $x,y\in\Omega$。取序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\Omega$，使得 $x_n\to x$ 且 $y_n\to y$。由于 (Ω,d) 是长度空间，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们可以找到一条曲线 $\gamma^n\in\mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$，使得

$$L_{\mathsf{d}}(\gamma^n)\leqslant\mathsf{d}(x_n,y_n)+\frac{1}{n},\quad \gamma^n_0=x_n,\quad \gamma^n_1=y_n.$$

不妨假设每条曲线 γ^n 相对于$\bar{\ }$距离 d 都具有恒定速度，因此 γ^n的利普希茨常数至多为 $\mathsf{d}(x_n,y_n)+1$。由于当 $n\to\infty$时，$\mathsf{d}(x_n,y_n)\to\mathsf{d}(x,y)$，我们推得 $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个等利普希茨曲线族，因此应用 Arzel`a–Ascoli 定理可知，对某个子序列 $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 以及某条$\bar{\ }$曲线 $\gamma\in\mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$，有 $\gamma^{n_i}\to\gamma$ 一致收敛。注意，$\gamma_0=\lim_{i\to\infty}\gamma^{n_i}_0=\lim_{i\to\infty}x_{n_i}=x$，类似地还有 $\gamma_1=y$。于是，长度泛函 $L_{\bar{\mathsf{d}}}$ 的下半连续性（回顾注 2.3）蕴含

$$L_{\bar{\mathsf{d}}}(\gamma)\leqslant\liminf_{i\to\infty}L_{\bar{\mathsf{d}}}(\gamma^{n_i})=\liminf_{i\to\infty}L_{\mathsf{d}}(\gamma^{n_i})\leqslant\lim_{i\to\infty}\mathsf{d}(x_{n_i},y_{n_i})+\frac{1}{n_i}=\bar{\mathsf{d}}(x,y).$$

$\bar{\ }$由于不等式 $\mathsf{d}(x,y)\leqslant L_{\bar{\mathsf{d}}}(\gamma)$ 的反向不等式也得到了验证，我们得出 $L_{\bar{\mathsf{d}}}(\gamma)=\mathsf{d}(x,y)$。$\bar{\ }$因此，$\gamma$ 的恒速重参数化是一条测地线，从而 (Ω,d) 是一个测地空间。□

引理 2.8. 设 (X, D) 是一个局部紧的完备度量空间，并设 $\alpha>1$。设 $\Omega\subseteq\mathrm{X}$ 是一个开集。设 $(\mathsf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Ω 上的距离，满足 $\alpha^{-1}\mathsf{D}\leqslant\mathsf{d}_n\leqslant\alpha\mathsf{D}$ 在 $\Omega\times\Omega$ 上成立，并且对于某个 Ω 上的距离 d，$\mathsf{d}_n\to\mathsf{d}$ 在紧集上一致$\bar{\ }$。则 $\mathsf{d}_n\to\mathsf{d}$ 在 $\Omega\times\Omega$ 的紧子集上一致。

证明。首先注意到，Ω 是局部紧的（因为它是 X 的闭子集）。此外，由于$\bar{\ }$我们假设 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$ 非空，根据引理 2.7，我们知道 Ω 是道路连通的，$\bar{\ }$因而特别是连通的。因此，引理 2.2 保证 Ω 是半紧的，所以$\bar{\ }$引理 2.5 表明，$(\mathsf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的任意子序列都存在一个子序列 $(\mathsf{d}_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$，使得对于 Ω 上的某个距离 d，$\mathsf{d}_{n_i}\to\mathsf{d}$ $\bar{\ }$在 $\Omega\times\Omega$ 的紧子集上一致。注意到 $\mathsf{d}|_{\Omega\times\Omega}=\mathsf{d}$，因此$\bar{\ }$我们得出 $\tilde{\mathsf{d}}=\mathsf{d}$，并相应地，$\mathsf{d}_n\to\mathsf{d}$ 在 $\Omega\times\Omega$ 的紧子集上一致。□

泛函 J_{d}。设 (X, D) 是一个局部紧的完备度量空间，并设 $\alpha>1$。设 $\Omega\subseteq\mathrm{X}$ 为一个开集。我们将 $\mathfrak{M}(\Omega\times\Omega)$ 记为 $\Omega\times\Omega$ 上所有有限有符号博雷尔测度构成的巴拿赫空间，并赋予全变差范数。然后，我们定义空间 $\mathcal{B}(\Omega)$ 如下

$$\mathcal{B}(\Omega):=\big\{\mu\in\mathfrak{M}(\Omega\times\Omega)\;\big|\;\mu\geqslant 0\big\}.$$

由于 $\Omega\times\Omega$ 是一个局部紧的豪斯多夫拓扑空间，我们知道 $\mathfrak{M}(\Omega\times\Omega)$ 是 $C_0(\Omega\times\Omega)$ 的对偶巴拿赫空间。回顾一下，$C_0(\Omega\times\Omega)$ 定义为 $C(\Omega\times\Omega)$ 中以下空间的闭包

$C_c(\Omega\times\Omega)$ 中 $\Omega\times\Omega$ 上紧支撑实值连续函数构成的空间。随后，我们赋予空间 $\mathcal{B}(\Omega)$ 由 $\mathfrak{M}(\Omega\times\Omega)\cong C_0(\Omega\times\Omega)^*$ 的弱拓扑* 诱导的拓扑。

给定任意距离 $\mathsf{d}\in\mathscr{D}_\alpha(\Omega)$，定义泛函 $J_{\mathsf{d}}\colon\ \mathcal{B}(\Omega)\to[0,+\infty]$ 为

$$J_{\mathsf{d}}(\mu)\coloneqq\int \mathsf{d}(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x,y)\quad\text{for every }\mu\in\mathcal{B}(\Omega). \tag{2.2}$$

泛函 F_{d}。设 (X,D) 为度量空间，并设 $\alpha>1$。设 $\Omega\subseteq X$ 为开集。给定任意距离 $\mathsf{d}\in\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$，定义泛函 $F_{\mathsf{d}}\colon\ \mathrm{Lip}(\Omega)\to[0,+\infty]$ 为

$$F_{\mathsf{d}}(u)\coloneqq\begin{cases}0 & \text{if }\mathrm{Lip}_{\mathsf{d}}(u)\leqslant 1,\\ +\infty & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{2.3}$$

3. 主要结果

本节专门阐述本文的主要结果。关于 Γ-收敛理论（我们将在下述论述中用到该理论），参见专著 [7]。

定理 3.1。设 (X,D) 为局部紧的完备度量空间，并设 $\alpha>1$。设 $\Omega\subseteq X$ 为满足 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)\neq\varnothing$ 的开集。给定距离 $(\mathsf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$ 和 $\mathsf{d}\in\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$。则以下条件等价：

(i) $\mathsf{d}_n\to\mathsf{d}$ 属于 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$。
(ii) $J_{\mathsf{d}_n}\xrightarrow{\Gamma}J_{\mathsf{d}}$ 属于 $\mathcal{B}(\Omega)$。(iii) $L_{\bar{\mathsf{d}}_n}\xrightarrow{\Gamma}L_{\bar{\mathsf{d}}}$ 属于 $\mathrm{Lip}([0,1];\bar{\ }\Omega)$。
(iv) $F_{\mathsf{d}_n}\xrightarrow{\Gamma}F_{\mathsf{d}}$ 属于 $\mathrm{Lip}(\Omega)$。

证明。
(i) $\Longrightarrow$ (ii)。这一蕴含的证明可完全仿照 [10, 定理 4.4] 中相应蕴含的论证。事实上，其中的论证纯粹是度量性的，并不依赖环境空间的额外结构。只需注意，在我们的框架下，可以利用 Ω 的半紧性来论证截断函数 $(\eta_k)_k$ 的存在性。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)。假设 $J_{\mathsf{d}_n}\xrightarrow{\Gamma}J_{\mathsf{d}}$ in $\mathcal{B}(\Omega)$，我们旨在证明 $\mathsf{d}_n\to\mathsf{d}$ in $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$。感谢˜引理 2.5，$(\mathsf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的任意子序列都存在一个子序列 $(\mathsf{d}_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $\mathsf{d}_{n_i}\to\mathsf{d}$ 在紧集上一致，其中 $\tilde{\ }\mathsf{d}$ 是 Ω 上某个距离，并且在 $\Omega\times\Omega$ 上有 $\alpha^{-1}D\leqslant\tilde{\ }\mathsf{d}\leqslant\alpha D$。注意到˜如果我们证明 $\mathsf{d}=\mathsf{d}$，那么就可以得出 $\mathsf{d}_n\to\mathsf{d}$ in $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$。固定 $\bar{x},\bar{y}\in\Omega$。一方面，

$$\mathsf{d}(\bar{x},\bar{y})=J_{\mathsf{d}}(\delta_{(\bar{x},\bar{y})})\leqslant\liminf_{n\to\infty}J_{\mathsf{d}_n}(\delta_{(\bar{x},\bar{y})})\leqslant\lim_{i\to\infty}J_{\mathsf{d}_{n_i}}(\delta_{(\bar{x},\bar{y})})=\lim_{i\to\infty}\mathsf{d}_{n_i}(\bar{x},\bar{y})=\tilde{\mathsf{d}}(\bar{x},\bar{y})$$

根据 Γ-下极限不等式，其中 $\delta_{(\bar{x},\bar{y})}$ 表示位于 $(\bar{x},\bar{y})$ 处的狄拉克 δ 测度。另一方面，根据 Γ-上极限不等式，我们可以找到一个序列 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{B}(\Omega)$，它弱* 收敛到 $\delta_{(\bar{x},\bar{y})}$，并满足 $J_{\mathsf{d}}(\delta_{(\bar{x},\bar{y})})=\lim_{n\to\infty}J_{\mathsf{d}_n}(\mu_n)$。给定 $\varepsilon>0$，选取 $i_0\in\mathbb{N}$ 使得

$$\left|\tilde{\mathsf{d}}(\bar{x},\bar{y})-\mathsf{d}_{n_i}(\bar{x},\bar{y})\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{for every }i\geqslant i_0.$$

由 (X,D) 的局部紧致性可知，存在一个半径 $r\in(0,\frac{\varepsilon}{4\alpha})$，使得

$$K\coloneqq\left\{(x,y)\in X\times X\;\middle|\;D(x,\bar{x}),D(y,\bar{y})\leqslant r\right\}$$

是紧致的，且包含于 $\Omega\times\Omega$ 中。任取 $\eta\colon\Omega\times\Omega\to[0,1]$ 连续，满足 $\eta=0$ in $(\Omega\times\Omega)\setminus K$ and $\eta(\bar{x},\bar{y})=1$。截断函数 η 属于 $C_c(\Omega\times\Omega)$，因此 $\lambda_i\coloneqq\int\eta\mathsf{d}\mu_{n_i}\to\int\eta\mathsf{d}\delta_{(\bar{x},\bar{y})}=1$。

现在定义 $\Omega\times\Omega$ 上的 Borel 概率测度 ν_i，定义为 $\nu_i := \lambda_i^{-1}\eta\mu_{n_i}$。对于 $i \geqslant i_0$，我们可以估计

$$\begin{aligned}\left|\int \mathsf{d}_{n_i}(x,y)\,\mathrm{d}\nu_i(x,y) - \tilde{\mathsf{d}}(\bar{x},\bar{y})\right| &\leqslant \left|\int \mathsf{d}_{n_i}(x,y)\,\mathrm{d}\nu_i(x,y) - \mathsf{d}_{n_i}(\bar{x},\bar{y})\right| + \left|\mathsf{d}_{n_i}(\bar{x},\bar{y}) - \tilde{\mathsf{d}}(\bar{x},\bar{y})\right| \\ &\leqslant \int \left|\mathsf{d}_{n_i}(x,y) - \mathsf{d}_{n_i}(\bar{x},\bar{y})\right|\mathrm{d}\nu_i(x,y) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \int \big(\mathsf{d}_{n_i}(x,\bar{x}) + \mathsf{d}_{n_i}(y,\bar{y})\big)\,\mathrm{d}\nu_i(x,y) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \alpha\int_K \big(\mathsf{D}(x,\bar{x}) + \mathsf{D}(y,\bar{y})\big)\,\mathrm{d}\nu_i(x,y) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant 2\alpha r + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

因此，回想起 $\eta \leqslant 1$，从而 $\nu_i \leqslant \lambda_i^{-1}\mu_{n_i}$，我们最终得出结论：

$$\tilde{\mathsf{d}}(\bar{x},\bar{y}) \leqslant \varepsilon + \liminf_{i\to\infty}\int \mathsf{d}_{n_i}(x,y)\,\mathrm{d}\nu_i(x,y) \leqslant \varepsilon + \lim_{i\to\infty}\frac{1}{\lambda_i}J_{\mathsf{d}_{n_i}}(\mu_{n_i}) = \varepsilon + J_{\mathsf{d}}(\delta_{(\bar{x},\bar{y})}) = \varepsilon + \mathsf{d}(\bar{x},\bar{y}).$$

令 $\varepsilon \to 0$，我们推导出 $\mathsf{d}(\bar{x},\bar{y}) \leqslant \mathsf{d}(\bar{x},\bar{y})$，从而 $\mathsf{d} = \mathsf{d}$。因此，命题 (i) 得证。

(i) $\Longrightarrow$ (iii). 假设 $\mathsf{d}_n \to \mathsf{d}$ 属于 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$，我们旨在证明 $L_{\bar{\mathsf{d}}_n} \xrightarrow{\Gamma} L_{\bar{\mathsf{d}}}$ 属于 $\mathrm{Lip}([0,1];\bar{\Omega})$。为了验证 Γ-liminf 不等式，固定一个任意的收敛序列 $\gamma^n \to \gamma$ 属于 $\mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$。由于 γ 的像是 Ω 的一个紧子集，且序列 $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛于 γ，因此我们可以找到 $\bar{n}\in\mathbb{N}$ 和一个紧集 $K\subseteq\Omega$，使得对于每个 $n\geqslant\bar{n}$ 和 $t\in[0,1]$，都有 $\gamma_t^n \in K$。根据引理 2.8，我们知道 $\mathsf{d}_n \to \mathsf{d}$ 在 $K\times K$ 上一致收敛。给定 $[0,1]$,的一个分割 $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$，因此对于每个 $i = 1, \ldots..., k$，当 $n\to\infty$ 时，我们有 $\mathsf{d}_n(\gamma_{t_i}^n, \gamma_{t_{i-1}}^n) \to \mathsf{d}(\gamma_{t_i}, \gamma_{t_{i-1}})$，从而得到

$$\sum_{i=1}^k \bar{\mathsf{d}}(\gamma_{t_i},\gamma_{t_{i-1}}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^k \bar{\mathsf{d}}_n(\gamma_{t_i}^n,\gamma_{t_{i-1}}^n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} L_{\bar{\mathsf{d}}_n}(\gamma^n).$$

由 $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ 的任意性，我们推得 $L_{\bar{\mathsf{d}}}(\gamma) \leqslant \liminf_{n\to\infty} L_{\bar{\mathsf{d}}_n}(\gamma^n)$。

接下来验证 Γ-limsup 不等式。任取曲线 $\gamma\in\mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$。由于其像 K 是 Ω 的紧子集，我们有 $\sup_{K\times K}|\mathsf{d}_n - \mathsf{d}| \to 0$ as $n\to\infty$。取一个序列 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$，使得 $r_n\to\infty$ 并且

$$r_n \sup_{K\times K}|\bar{\mathsf{d}}_n - \bar{\mathsf{d}}| \to 0 \quad \text{as } n\to\infty.$$

由引理 2.7 可知 (Ω, d_n) 是测地空间，因此，对任意 $n\in\mathbb{N}$，我们可以找到 $\gamma^n \in \mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$，使得 $\gamma^n|_{[(i-1)/r_n, i/r_n]}$ 是 (Ω,d_n) 中的一条测地曲线，并且对每个 $i = 1, \ldots, r_n$，都有 $(\gamma^n_{(i-1)/r_n}, \gamma^n_{i/r_n}) = (\gamma_{(i-1)/r_n}, \gamma_{i/r_n})$。特别地，$\gamma^n$ 是一条从 $[0,1]$ 到 (Ω,D) 的利普希茨曲线，其利普希茨常数不超过 $\alpha L_{\mathsf{D}}(\gamma)$。此外，令 $\lambda\geqslant 0$ 为 γ 作为一条从 $[0,1]$ 到 $(\bar{\Omega},\mathsf{D})$ 的曲线时的利普希茨常数，则 $\sup^{t\in[0,1]}\mathsf{D}(\gamma_t^n,\gamma_t) \leqslant {}^{\lambda+\alpha L_{\mathsf{D}}(\gamma)r_n}$，因此 $\gamma^n\to\gamma$ 一致收敛。最后，

$$\begin{aligned}L_{\bar{\mathsf{d}}}(\gamma) &\geqslant \sum_{i=1}^{r_n}\bar{\mathsf{d}}(\gamma_{(i-1)/r_n},\gamma_{i/r_n}) \geqslant \sum_{i=1}^{r_n}\bar{\mathsf{d}}_n(\gamma^n_{(i-1)/r_n},\gamma^n_{i/r_n}) - r_n\sup_{K\times K}|\bar{\mathsf{d}}_n - \bar{\mathsf{d}}| \\ &= \sum_{i=1}^{r_n} L_{\bar{\mathsf{d}}_n}(\gamma^n|_{[(i-1)/r_n,i/r_n]}) - r_n\sup_{K\times K}|\bar{\mathsf{d}}_n - \bar{\mathsf{d}}| = L_{\bar{\mathsf{d}}_n}(\gamma^n) - r_n\sup_{K\times K}|\bar{\mathsf{d}}_n - \bar{\mathsf{d}}|,\end{aligned}$$

由此 $L_{\bar{\mathsf{d}}}(\gamma) \geqslant$ 上极限$_{n\to\infty} L_{\bar{\mathsf{d}}_n}(\gamma^n)$ 可通过令 $n\to\infty$ 得出。因此，(iii) 项得证。

(iii) $\Longrightarrow$ (i)。假设 $L_{\bar{\mathsf{d}}_n} \xrightarrow{\Gamma} L_{\bar{\mathsf{d}}}$ 属于 $\mathrm{Lip}([0,1];\bar{\Omega})$，我们旨在证明 $\mathsf{d}_n\to\mathsf{d}$ 属于 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$。如前所述，只需证明：若 $\mathsf{d}_n\to\mathsf{d}$ 在紧集上一致地收敛于 Ω 上的某个距离 d，则 $\mathsf{d} = \mathsf{d}$。固定 $x、y\in\Omega$。一方面，引理 2.7 保证 (Ω,d) 是一个测地空间，因此存在一条测地线 $\gamma\colon[0,1]\to(\Omega,\mathsf{d})$，满足 $\gamma_0 = x$ 和 $\gamma_1 = y$。取序列 $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$，使得 $\gamma^n\to\gamma$ 且 $L_{\bar{\mathsf{d}}_n}(\gamma^n)\to L_{\bar{\mathsf{d}}}(\gamma)$，则有 $(\gamma_0^n,\gamma_1^n)\to(x,y)$，并且

$$\tilde{\mathsf{d}}(x,y) = \lim_{n\to\infty}\bar{\mathsf{d}}_n(\gamma_0^n,\gamma_1^n) \leqslant \lim_{n\to\infty} L_{\bar{\mathsf{d}}_n}(\gamma^n) = L_{\bar{\mathsf{d}}}(\gamma) = \bar{\mathsf{d}}(x,y) = \mathsf{d}(x,y).$$

另一方面，由引理 2.7 可知，每个 (Ω,d_n) 仍然是一个测地空间，因此对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们可以找到一条测地线 $\gamma^n\colon [0,1]\to(\Omega,\mathsf{d}_n)$，满足 $\gamma_0^n=x$ 和 $\gamma_1^n=y$。注意到 γ^n 关于距离 D 的利普希茨常数不超过 $\alpha^2\mathsf{D}(x,y)$，因此相应地应用 Arzel`a–Ascoli 定理，可得到一个子序列 $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}$ 和一条曲线 $\gamma\in\mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$，使得 $\gamma^{n_i}\to\gamma$ 一致收敛。注意到 $\gamma_0=x$ 和 $\gamma_1=y$。因此，我们有

$$\mathsf{d}(x,y)\leqslant L_{\bar{\mathsf{d}}}(\gamma)\leqslant\liminf_{i\to\infty}L_{\bar{\mathsf{d}}_{n_i}}(\gamma^{n_i})=\lim_{i\to\infty}\mathsf{d}_{n_i}(x,y)=\tilde{\mathsf{d}}(x,y)$$

由于 the Γ-liminf 不等式。总之，恒等式 $\mathsf{d}=\tilde{\mathsf{d}}$ 得证，因此结论 (i) 成立。

(i) $\Longrightarrow$ (iv)。假设在 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$ 中有 $\mathsf{d}_n\to\mathsf{d}$，我们的目标是证明 $F_{\mathsf{d}_n}\xrightarrow{\Gamma}F_{\mathsf{d}}$ 属于 $\mathrm{Lip}(\Omega)$。为验证 Γ-liminf 不等式，固定一个收敛序列 $u_n\to u$ 属于 $\mathrm{Lip}(\Omega)$。若 $F_{\mathsf{d}}(u)=0$，则无需证明。若 $F_{\mathsf{d}}(u)=+\infty$，则可找到 $x,y\in\Omega$，使得 $u(x)-u(y)>\mathsf{d}(x,y)$。由此可知，存在 $\bar{n}\in\mathbb{N}$，使得对于每个 $n\geqslant\bar{n}$，都有 $u_n(x)-u_n(y)>\mathsf{d}_n(x,y)$，因此特别地，对于每个 $n\geqslant\bar{n}$，都有 $\mathrm{Lip}_{\mathsf{d}_n}(u_n)>1$，进而 $F_{\mathsf{d}}(u)=+\infty=\liminf_{n\to\infty}F_{\mathsf{d}_n}(u_n)$。

现在来验证 Γ-上极限不等式。任取 $u\in\mathrm{Lip}(\Omega)$。若 $F_{\mathsf{d}}(u)=+\infty$，则无需证明（因为恒等于 u 的序列就是一个恢复序列）。接下来考虑 $F_{\mathsf{d}}(u)=0$ 的情形。由于 Ω 是半紧的，我们可以找到一个递增序列 $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$，其元素是 Ω 的紧子集，并且 Ω 的每个紧子集都包含于某个 $i\in\mathbb{N}$ 中。对于任意 $i,n\in\mathbb{N}$，我们通过下确界卷积定义 $u_{n,\,i}\colon\Omega\to\mathbb{R}$，如下：

$$u_{n,i}(x):=\inf_{y\in K_i}\big(u(y)+\mathsf{d}_n(x,y)\big)\qquad\text{for every } x\in\Omega.$$

由于对每个 $y\in K_i$ 都有 $\mathrm{Lip}_{\mathsf{d}_n}(u(y)+\mathsf{d}_n(\cdot,y))\leqslant 1$，我们推得 $u_{n,i}\in\mathrm{Lip}(\Omega)$，且 $\mathrm{Lip}_{\mathsf{d}_n}(u_{n,i})\leqslant 1$，因此 $F_{\mathsf{d}_n}(u_{n,i})=0$。任取 $x\in K_i$，我们有 $u_{n,i}(x)=u(y_{n,i}(x))+\mathsf{d}_n(x,y_{n,i}(x))$，其中某点 $y_{n,i}(x)\in K_i$，因此我们可以估计

$$\begin{aligned}u(x)\geqslant u_{n,i}(x)&=u(y_{n,i}(x))+\mathsf{d}_n(x,y_{n,i}(x))\geqslant u(x)-\mathsf{d}(x,y_{n,i}(x))+\mathsf{d}_n(x,y_{n,i}(x))\\&\geqslant u(x)-\sup_{K_i\times K_i}|\mathsf{d}_n-\mathsf{d}|.\end{aligned}$$

鉴于对于任意 $i\in\mathbb{N}$，都有 $\sup_{K_i\times K_i}|\mathsf{d}_n-\mathsf{d}|\to 0$ as $n\to\infty$，我们可以提取一个子序列 $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $\sup_{K_i}|u-u_{n,\,i}|\leqslant\frac{1}{i}$ 对每个 $i\in\mathbb{N}$ 和 $n\geqslant n_i$ 都成立。定义 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为

$$u_n:=\begin{cases}u & \text{if } n<n_1,\\ u_{n,i} & \text{if } n_i\leqslant n<n_{i+1}\text{ for some } i\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

给定任意紧集 Ω $K\subseteq$ 和 $\varepsilon>0$，我们可以找到 $j\in\mathbb{N}$，使得 $K\subseteq K_i$ 和 $\frac{1}{i}\leqslant\varepsilon$ 对每个 $i\geqslant j$ 都成立，因此 $\sup_K|u-u_n|\leqslant\varepsilon$ 对每个 $n\geqslant n_j$ 都成立。于是 $u_n\to u$ 在紧集上一致。由于 $F_{\mathsf{d}}(u)=0=\limsup_{n\to\infty}F_{\mathsf{d}_n}(u_n)$，我们证明了 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 u 的恢复序列。

(iv) $\Longrightarrow$ (i)。假设 $F_{\mathsf{d}_n}\xrightarrow{\Gamma}F_{\mathsf{d}}$ 属于 $\mathrm{Lip}(\Omega)$，我们旨在证明 $\mathsf{d}_n\to\mathsf{d}$ 属于 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$。与前面一样，只需证明：若某个 Ω 上的距离 d 满足 $\mathsf{d}_n\to\mathsf{d}$ 在紧集上一致，则 $\mathsf{d}=\tilde{\mathsf{d}}$。现在固定 x、$y\in\Omega$。一方面，Γ-limsup 不等式表明，对于任意 $u\in\mathrm{Lip}(\Omega)$，若 $\mathrm{Lip}_{\mathsf{d}}(u)\leqslant 1$，则我们可以找到 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathrm{Lip}(\Omega)$，使其收敛到 u，且 $\mathrm{Lip}_{\mathsf{d}_n}(u_n)\leqslant 1$，因此

$$u(x)-u(y)=\lim_{n\to\infty}\big(u_n(x)-u_n(y)\big)\leqslant\lim_{n\to\infty}\mathsf{d}_n(x,y)=\tilde{\mathsf{d}}(x,y),$$

由此（回顾注记 2.1）可得

$$\mathsf{d}(x,y)=\sup\left\{u(x)-u(y)\;\middle|\;u\in\mathrm{Lip}(\Omega),\,\mathrm{Lip}_{\mathsf{d}}(u)\leqslant 1\right\}\leqslant\tilde{\mathsf{d}}(x,y).$$

另一方面，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们有 $\mathsf{d}(x,\cdot)$、$\mathsf{d}_n(x,\cdot)\in\mathrm{Lip}(\Omega)$，且 $\mathrm{Lip}_{\mathsf{d}_n}(\mathsf{d}_n(x,\cdot))\leqslant 1$，因此 Γ-liminf 不等式保证 $F_{\mathsf{d}}(\mathsf{d}(x,\cdot))\leqslant\liminf_{n\to\infty}F_{\mathsf{d}_n}(\mathsf{d}_n(x,\cdot))=0$，由此可得 $\mathrm{Lip}_{\mathsf{d}}(\mathsf{d}(x,\cdot))\leqslant 1$，进而 $\mathsf{d}(x,y)\leqslant\mathsf{d}(x,y)$。总之，我们证明了 $\mathsf{d}=\tilde{\mathsf{d}}$。□

4. Some counterexamples

我们定义记 $\mathsf{d}_{\mathrm{Eucl}}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的欧几里得距离，即对每个 x、$y\in\mathbb{R}^n$，$\mathsf{d}_{\mathrm{Eucl}}(x,y):=|x-y|$.

引理 4.1. 设开正方形 $\Omega:=(0,1)^2\subseteq\mathbb{R}^2$ 以及 $\mathsf{d}:=2\mathsf{d}_{\mathrm{Eucl}}|_{\Omega\times\Omega}\in\mathcal{D}_2(\Omega,\mathsf{d}_{\mathrm{Eucl}})$.˜ ˜那么存在递增序列 $(\mathsf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{D}_2(\Omega,\mathsf{d}_{\mathrm{Eucl}})$ 和 Ω 上的一个距离 d，使得 $\mathsf{d}\neq\mathsf{d}$，且 $L_{\mathsf{d}_n}\xrightarrow{\Gamma}L_{\mathsf{d}}$ 属于 $\mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$，并且 $\mathsf{d}_n\to$ ˜在 Ω 的紧子集上一致收敛于 $\times\Omega$。

证明. 给定任意 $n\in\mathbb{N}$，取一个光滑函数 $\phi_n\colon\Omega\to[1,2]$，使其满足

$$\phi_n=2\ \text{ on }(0,1)\times[2^{-n},1),\quad \phi_n=1\ \text{ on }(0,1)\times(0,2^{-(n+1)}].$$

于是我们将光滑黎曼度量 $\varphi_n\colon\Omega\times\mathbb{R}^2\to[0,+\infty)$ 定义为 $\varphi_n(x,v):=\phi_n(x)|v|$，对每个 $x\in\Omega$ 和 $v\in\mathbb{R}^2$均成立。我们用 $\mathsf{d}_n\colon\Omega\times\Omega\to[0,+\infty)$ 表示由 φ_n诱导的距离，即

$$\mathsf{d}_n(x,y):=\inf\left\{\int_0^1\varphi_n(\gamma_t,\dot\gamma_t)\,\mathrm{d}t\;\middle|\;\gamma\in\mathrm{Lip}([0,1];\Omega),\,\gamma_0=x,\,\gamma_1=y\right\}\quad\text{for every }x,y\in\Omega.$$

已知 $1\leqslant\phi_n\leqslant2$，我们有 $\mathsf{d}_{\mathrm{Eucl}}\leqslant\mathsf{d}_n\leqslant\mathsf{d}$ 在 $\Omega\times\Omega$ 中。由于 ϕ_n 连续，根据 [9, 定理 2.5]，我们还知道 $L_{\mathsf{d}_n}(\gamma)=\int_0^1\varphi_n(\gamma_t,\dot\gamma_t)\,\mathrm{d}t$ 对每个 $\gamma\in\mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$ 都成立，因此 (Ω,d_n) 是一个长度空间。特别地，$\mathsf{d}_n\in\mathcal{D}_2(\Omega)$ 成立。由于 $(\mathsf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 按构造是非递减的˜，我们有极限 $\mathsf{d}(x,y):=\lim_{n\to\infty}\mathsf{d}_n(x,y)$ 对每个 $x,y\in\Omega$ 都存在。可以直接验证，d 是一个距离，并满足 $\mathsf{d}_{\mathrm{Eucl}}\leqslant\mathsf{d}\leqslant\mathsf{d}$ 在 $\Omega\times\Omega$ 中。特别地，d 是一个˜连续函数，因此 $\mathsf{d}_n\to\mathsf{d}$ 在 $\Omega\times\Omega$ 的紧子集上一致收敛。我们声称

$$L_{\mathsf{d}_n}\xrightarrow{\Gamma}L_{\mathsf{d}}\quad\text{ in }\mathrm{Lip}([0,1];\Omega).$$

为证明这一点，任取收敛序列 $\gamma^n\to\gamma$ in $\mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$。$\gamma$的像是 Ω 的一个紧子集，包含于 $(0,1)\times(2\delta,1)$ 中，其中 $\delta\in\left(0,\frac12\right)$ 满足某些条件。因此，我们可以找到 $\bar n\in\mathbb{N}$，使得 $\sup_{t\in[0,1]}|\gamma^n_t-\gamma_t|\leqslant\delta$，且 $2^{-n}\leqslant\delta$ 对每个 $n\geqslant\bar n$ 都成立。特别地，对每个 $n\geqslant\bar n$，γ^n 的像都包含于 $\{\phi_n=2\}$，于是对每个 $n\geqslant\bar n$，$L_{\mathsf{d}_n}(\gamma^n)=L_{2\mathsf{d}_{\mathrm{Eucl}}}(\gamma^n)=L_{\mathsf{d}}(\gamma^n)$。回想一下，$L_{\mathsf{d}}$ 是下半连续的（见注 2.3），我们推知

$$L_{\mathsf{d}}(\gamma)\leqslant\liminf_{n\to\infty}L_{\mathsf{d}}(\gamma^n)=\liminf_{n\to\infty}L_{\mathsf{d}_n}(\gamma^n),$$

从而证明了 Γ-下极限不等式。为证明 Γ-上极限不等式，设给定 $\gamma\in\mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$。如前所述，我们可以找到 $\bar n\in\mathbb{N}$ 使得对每个 $n\geqslant\bar n$，都有 $L_{\mathsf{d}_n}(\gamma)=L_{\mathsf{d}}(\gamma)$，特别是 $L_{\mathsf{d}}(\gamma)=\lim_{n\to\infty}L_{\mathsf{d}_n}(\gamma)$，这表明恒等于 γ 的序列是一个恢复序列。总之，我们证明了 $L_{\mathsf{d}_n}\xrightarrow{\Gamma}L_{\mathsf{d}}$ in $\mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$，正如上文所述。

$\mathsf{d}\neq\mathsf{d}$。记 $a:=\left(\frac{1}{16},\frac18\right)\in\Omega$ 和 $b:=\left(\frac{15}{16},\frac18\right)\in\Omega$。给定任意满足 $n\geqslant2$ 的 $n\in\mathbb{N}$，我们固定一条曲线 $\sigma^n\in\mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$，使得

$$\begin{aligned}
\sigma^n|_{[0,\frac13]}&\quad\text{is a parameterisation of the interval }\left[a,\left(\tfrac{1}{16},\tfrac{1}{2^{n+1}}\right)\right],\\
\sigma^n|_{[\frac13,\frac23]}&\quad\text{is a parameterisation of the interval }\left[\left(\tfrac{1}{16},\tfrac{1}{2^{n+1}}\right),\left(\tfrac{15}{16},\tfrac{1}{2^{n+1}}\right)\right],\\
\sigma^n|_{[\frac23,1]}&\quad\text{is a parameterisation of the interval }\left[\left(\tfrac{15}{16},\tfrac{1}{2^{n+1}}\right),b\right].
\end{aligned}$$

为得到该结论，只需验证

利用 $\phi_n=1$ 在 $\sigma^n|_{[\frac13,\frac23]}$ 的像上这一事实，并且仅采用 $\phi_n\leqslant2$ 在 $\sigma^n|_{[0,\frac13]}$ 和 $\sigma^n|_{[\frac23,1]}$ 的像上的上界，对于每个 $n\geqslant2$，我们可以估计

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}_n(a,b)&\leqslant L_{\mathsf{d}_n}(\sigma^n)=L_{\mathsf{d}_n}(\sigma^n|_{[0,\frac13]})+L_{\mathsf{d}_n}(\sigma^n|_{[\frac13,\frac23]})+L_{\mathsf{d}_n}(\sigma^n|_{[\frac23,1]})\\
&\leqslant2\left(\frac18-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\frac78+2\left(\frac18-\frac{1}{2^{n+1}}\right)<\frac{11}{8}.
\end{aligned}$$

由此可得 $\mathsf{d}(a,b)=\lim_{n\to\infty}\mathsf{d}_n(a,b)\leqslant\frac{11}{8}<\frac74=\mathsf{d}(a,b)$，这表明 $\mathsf{d}\neq\mathsf{d}$。˜ □

推论 4.2. 存在一个开集 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$，使得空间 $\mathcal{D}_2(\Omega)\neq\varnothing$ 不是紧的 .

证明。设 Ω、$(\mathsf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 d 与引理 4.1 中的定义相同。我们断言，$(\mathsf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{D}_2(\Omega,\mathsf{d}_{\mathrm{Eucl}})$ 中不存在任何收敛子序列，由此可得 $\mathcal{D}_2(\Omega,\mathsf{d}_{\mathrm{Eucl}})$ 的非紧性。我们用反证法：假设对于某个子序列 $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$，在 $\mathcal{D}_2(\Omega,\mathsf{d}_{\mathrm{Eucl}})$ 中有 $\mathsf{d}_{n_i}\to\mathsf{d}$，且

ˆ ˆ 某个极限距离 $\mathsf{d} \in \mathcal{D}_2(\Omega, \mathsf{d}_{\mathrm{Eucl}})$。由于 $\mathsf{d}_{n_i} \to \mathsf{d}$ 在 Ω 的紧子集上均匀 $\times \Omega$,ˆ ˆ 我们得出 $\mathsf{d} = \mathsf{d}$。这导致矛盾，因为我们有 $\mathsf{d} \notin \mathcal{D}_2(\Omega, \mathsf{d}_{\mathrm{Eucl}})$。□

注 4.3. 更一般地，通过适当调整引理 4.1 中的构造，可以证明，只要 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$ 不紧， $n \geqslant 2$， $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开集， $\alpha > 1$，且 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega) \neq \varnothing$。 ■

命题 4.4. 设 (X,D) 是局部紧的完备度量空间，并设 $\alpha > 1$。令 $\Omega \subseteq X$ 为开集，满足 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega) \neq \varnothing$。则蕴含关系

$$\mathsf{d}_n \to \mathsf{d} \ \ in\ \mathcal{D}_\alpha(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad L_{\mathsf{d}_n} \xrightarrow{\Gamma} L_{\mathsf{d}} \ \ in\ \mathrm{Lip}([0,1];\Omega)$$

成立，而存在一些例子使得逆向蕴含关系不成立。

证明。设 $\mathsf{d}_n \to \mathsf{d}$ 属于 $\mathcal{D}_\alpha(\Omega)$。因此，根据定理 3.1 的蕴含关系 (i) $\Longrightarrow$(iii)，我们知道 $L_{\bar{\mathsf{d}}_n} \xrightarrow{\Gamma} L_{\bar{\mathsf{d}}}$ 属于 $\mathrm{Lip}([0,1]; \bar{}\Omega)$。接着，只需¯注意到：若 $\gamma^n \to \gamma$ 属于 $\mathrm{Lip}([0,1]; \Omega)$ 且 $\gamma \in \mathrm{Lip}([0,1]; \Omega)$，则对于˜某个 $\bar{n} \in \mathbb{N}$，有 $(\gamma^n)_{n \geqslant \bar{n}} \subseteq$ 属于 $\mathrm{Lip}([0,1]; \Omega)$，即可得出 $L_{\mathsf{d}_n} \xrightarrow{\Gamma} L_{\mathsf{d}}$ 在 $\mathrm{Lip}([0,1]; \Omega)$ 中 Γ-收敛。反过来，现在考虑引理 4.1 中的 Ω、$(\mathsf{d}_n)_{n \in \mathbb{N}}$、$\mathsf{d}$ 和 d_∞。此时我们有 $L_{\mathsf{d}_n} \xrightarrow{\Gamma} L_{\mathsf{d}}$ 属于 $\mathrm{Lip}([0,1]; \Omega)$，但 d_n 不能在 $\mathcal{D}_2(\Omega, \mathsf{d}_{\mathrm{Eucl}})$ 中收敛到 d，因为 $\mathsf{d} \neq \tilde{}\mathsf{d}$。□

References

[1] E. Acerbi and G. Buttazzo, *On the limits of periodic Riemannian metrics*,《数学分析杂志》43卷（1984年），第183–201页。[2] M. Amar and E. Vitali, *Homogenization of Periodic Finsler metrics*,《凸分析杂志》5卷（1998年），第171–186页。[3] A. Braides, G. Buttazzo, and I. Fragalà, *Riemannian approximation of Finsler metrics*,《渐近分析》31卷第2期（2022年），第177–187页。[4] A. Briani and A. Davini, *Monge solutions for discontinuous Hamiltonians*,《ESAIM：控制、优化与变分法》11卷（2005年），第229–251页。[5] G. Buttazzo, L. De Pascale, and I. Fragalà, *Topological equivalence of some variational problems involving distances* 7 2001 247 258 ,《离散与连续动力系统》（），第–页。[6] G. Buttazzo, L. De Pascale, and I. Fragalà, *Erratum*,《离散与连续动力系统》18卷（2007年），第219–220页。[7] G. Dal Maso, *An introduction to Γ-convergence*,Springer Science+Business Media，纽约，1993年。[8] A. Davini, *Smooth approximation of weak Finsler metrics*,《微分与积分方程》18卷第5期（2005年），第509–530页。[9] G. De Cecco and G. Palmieri, *LIP manifolds: from metric to Finslerian structure*,《数学杂志》207卷（1991年），第223–243页。[10] F. Essebei and E. Pasqualetto, *Variational problems concerning sub-Finsler metrics in Carnot groups*,《ESAIM：控制、优化与变分法》29卷（2023年），doi:10.1051/cocv/2023006。[11] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, volume 1*,Publish or Perish, Incorporated，1999年。[12] A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces*,《美国数学会通报》54卷（1948年），第977–982页。

(F. Essebei) Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche Università Politecnica delle Marche Via Brecce Bianche 60131 Ancona (Italy). , , *Email address*: f.essebei@staff.univpm.it

(E. Pasqualetto) Department of Mathematics and Statistics FI-40014 University of Jyvaskyla (Finland). P.O. Box 35 (MaD), ,*Email address*: enrico.e.pasqualetto@jyu.fi