ZMP-HH/23-7 汉堡数学论文集第
941期 2023年5月

arXiv:2305.02773v1 [math.QA] 4 May 2023

二维共形场论中的代数结构

Jürgen Fuchs [a]、Christoph Schweigert [b]、Simon Wood [c, b] 和 Yang Yang [d]

[a] 理论物理，卡尔斯塔德大学，
Universitetsgatan 21，S –65188 卡尔斯塔德

[b] 汉堡大学数学系 代数与数论领域
Bundesstraße 55, D – 20 146 Hamburg

[c] 卡迪夫大学数学学院，*Abacws*，*Senghennydd Road*，卡迪夫，*CF24 4AG*，英国

[d] 埃尔温·薛定谔国际数学与物理研究所，*Boltzmanngasse 9*，*A – 1090* 维也纳

摘要
本文受邀为《数学物理百科全书》第二版撰稿。我们综述了以下出现在二维共形场论（共形场论）中的代数结构：

共形场论的对称性可以形式化为手征代数、顶点算子代数或可观测代数网。它们的表示范畴是具有额外结构的阿贝尔范畴，这些结构由共形块的性质所诱导；共形块即带有标记点的曲线模空间上的向量丛，可由对称结构构造而成。

这些数学概念用于描述手征共形场论。在完整局域共形场论中，还要处理关联函数，它们是共形块空间中的特定元素。事实上，完整共形场论等同于一个相容的关联函数系统，该系统适用于任意共形曲面，其中体内、边界上以及拓扑缺陷线上均可有任意数量和类型的场插入。我们将介绍能够构造此类关联函数系统的代数结构。

关键词 CFT 关联函数，手征代数，共形场论，共形块，相容的关联函数系统，幺半范畴，弦网，顶点算子代数

要点

- 描述二维共形场论中手征对称性的代数结构：顶点算子代数及其表示。
- 良好顶点代数的表示范畴上的结构：具有格罗滕迪克–韦迪耶对偶性的编织幺半群张量范畴。
- 作为带有平坦联络的向量丛的共形块；其单值化由源自模融合范畴的模函子来编码。
- 以带边三维流形和弦网描述一致的关联函数集合，适用于任意亏格的世界面、任意共形边界条件，以及插入所有类型的场（包括广义缺陷场）的情形。

导论

二维共形场论，简称共形场论，是数学与物理之间富有成效的相互交融的典范。在数学方面，它结合了代数几何、高阶结构、模形式、量子拓扑和表示论中的概念与工具。对于物理应用而言，至关重要的是要认识到，共形场论实际上并没有单一的定义；不同的应用需要不同的理论框架。例如，共形场论可以定义在带有欧几里得型或洛伦兹型度规的二维流形上。共形这一限定词表明，相关几何是共形流形的几何，也就是说，这些流形配备了度规关于局部缩放的一个等价类。采用洛伦兹型度规的优点在于，可以利用局域量子场论中熟悉的结构 [FrRS, BKLR]。另一方面，定义在欧几里得流形上的共形场论具有更广泛的应用范围，并且能够运用复几何中的强大工具。因此，我们将重点放在紧致欧几里得二维流形上的共形场论。欧几里得方法与洛伦兹方法之间的关系仍有待全面理解；不过，值得注意的是，这两种框架中都会出现相似的数学结构。

另一个极其重要、无论如何强调都不为过的区分，是手征与完整共形场论之间的区分。同样地，它们分别定义在两种不同类型的二维流形上：

- 结合定向，二维流形上的欧几里得共形结构等同于一个复结构。手征共形场论定义在复曲线上。从数学上说，手征共形场论由顶点算子代数、它们的表示及其共形块理论构成。
- 相比之下，完整局域共形场论 定义在共形实二维流形上。这种流形尤其可以具有非空边界。事实上，也允许使用分层流形，

其中带边流形只是特殊情况。分层共形二维流形的一维分层被解释为拓扑线缺陷，它们将给定共形场论的不同相区分开来。这类缺陷的特定类型编码了共形场论的对称性和对偶性 [FrFRS]。

给定一个手征共形场论（CFT），与之对应的完整共形场论是一个相容的关联函数系统，即手征理论的共形块空间中的一组特定元素。手征共形场论和完整共形场论都出现在物理学的应用中：手征理论与分数量子霍尔效应有关；在这种情况下，取向具有非常直接的物理意义，即外磁场的方向。完整共形场论则作为弦理论的世界面理论出现，也应用于统计力学中的二维临界现象，以及凝聚态物理中的有效一维系统。在上述大多数应用中，研究的都是有向完整共形场论，即在二维流形上选定一种取向。然而，完整共形场论也可以定义在无向、甚至不可定向的二维流形上。无向完整共形场论尤其作为 I 型弦理论的世界面理论出现。

在所有共形场论模型中，理解得最透彻的是有理共形场论这一类，其中手征对称性的表示构成一个半单模张量范畴，也称为模融合范畴；历史回顾请参见 [FuRS2]。近年来，研究重点转向了非有理理论，尤其是对数共形场论；这类理论的共形块可能具有对数奇点，且尤其是非幺正的；相关综述可参见文集 [GRR] 中的文章。借助强大的代数结构，共形场论无需诉诸经典拉格朗日或任何形式的微扰理论即可建立。然而，确实存在以拉格朗日为基础的（完整）共形场论模型，尤其是带有拓扑项的 σ 模型。这类拓扑项与丛 gerbe 及其他高阶几何结构密切相关，例如可参见 [GR]。

本文的结构如下。我们首先回顾用于形式化描述共形场论手征对称性的代数结构。可观测量代数的共形网 [BKLR] 为此提供了一种概念框架；在这一框架中，幺正性是其内在组成部分。鉴于非幺正共形场论在弦理论、统计力学以及作为超对称量子场论的对偶理论中的重要性，我们将注意力限制在顶点算子代数[FrB] ——简称顶点算子代数——它们不对幺正性作任何假设。

随后我们回顾共形块的若干方面。共形块可以由顶点算子代数构造而成，是完整局域共形场论中关联函数的基本构件。它们构成带有射影平坦联络的向量丛，这些向量丛定义在复曲线模空间上。这些向量丛的单值化可以用模函子来描述。这些数据足以表述一组一致的关联函数这一概念。最后，我们展示如何构造这类一致的关联函数集合，其中包括一种近期提出的、基于模函子的弦网表述的方法。

手征共形场论

顶点算子代数

顶点算子代数的基本数据包括一个复向量空间 $\mathfrak{V}$ 和一个线性映射 $Y\colon \mathfrak{V}\otimes\mathfrak{V}\to\mathfrak{V}((z))$，称为场映射。这里的 z 是一个形式变量；在下文对共形块的描述中，它将被解释为复曲线上的形式局部坐标。 $\mathfrak{V}((z))$表示以 $\mathfrak{V}$为取值、关于 z 和 z^{-1} 的指数有下界的幂级数。场映射在向量 $a\otimes b\in\mathfrak{V}\otimes\mathfrak{V}$ 处的取值记作

$$Y(a,z)\,b=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n b\,z^{-n-1}. \tag{1}$$

将 b 视为一个自由变量，可将其改写为

$$Y(a,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\,z^{-n-1}\ \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})[[z,z^{-1}]]\,,\quad a_n\in\mathrm{End}(\mathfrak{V})\,. \tag{2}$$

因此，顶点算子代数的公理意味着 $(\mathfrak{V},Y)$ 本质上是一个含有导子和额外共形结构的含幺交换结合复代数。特别地，带有导子的含幺交换结合复代数是顶点算子代数的例子，但不一定具有共形结构。然而，由于形式变量的存在，一般而言，交换性和结合性比标准交换代数中的情况更为复杂。 $\mathfrak{V}$的单位元称为真空向量，通常记为 $|0\rangle$；它满足

$$Y(|0\rangle,z)\,a=a\qquad\text{and}\qquad Y(a,z)|0\rangle\in a+z\,\mathfrak{V}[[z]]\quad\text{for all } a\in\mathfrak{V}\,, \tag{3}$$

其中， $z\,\mathfrak{V}[[z]]$ 是 $\mathfrak{V}((z))$ 的子空间，由所有仅含 z正幂的 $\mathfrak{V}$值幂级数组成。共形结构要求存在一个向量 $\omega\in V$，使得展开式中的系数 L_n

$$Y(\omega,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L_n\,z^{-n-2} \tag{4}$$

满足以下关系

$$[L_m,L_n]=(m-n)\,L_{m+n}+\frac{1}{12}\,(m^3-m)\,\delta_{m+n,0}\,C \tag{5}$$

Virasoro李代数的。这里 C 是一个中心元；它在 $\mathfrak{V}$ （以及下文将介绍的其模）上的作用是乘以一个复数，这个复数称为（共形）中心荷 ，记作 c。共形结构赋予 $\mathfrak{V}$ 一个整数分次（通常要求为非负）：

$$\mathfrak{V}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathfrak{V}_n\qquad\text{with}\qquad\mathfrak{V}_n=\{v\in\mathfrak{V}\,|\,L_0v=nv\}\,. \tag{6}$$

对于齐次向量 $b\in\mathfrak{V}_h$，物理学文献中通常会对级数展开（2）的指标作适当平移，使得

$$Y(b,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_{(n)}\, z^{-n-h}. \tag{7}$$

The 由此得到的系数 $b_{(n)}$ 是次数为 $-n$ 的映射，即 $b_{(n)}\mathfrak{V}_m\subset\mathfrak{V}_{m-n}$.

顶点算子代数分别借助形式变量和形式局部坐标来表述。以与坐标无关的方式刻画光滑代数曲线上手征共形场论对称性的代数结构，称为手征代数 [BeD]。这种结构借助 D-模的概念来表述。仿射直线 $\mathbb{A}^1$上的手征代数若关于平移具有等变性，则与顶点算子代数一一对应。对手征代数的研究推动了进一步的发展，尤其是引出了因子化代数的概念。详细信息请参阅 [BeD, FrB]。

在物理学文献中，“手征代数”一词常以不同的方式使用，泛指任何类型的手征对称结构，有时也用作顶点算子代数的同义词。

表示范畴

作为结合代数的推广，顶点算子代数自然地具有模。顶点算子代数 $(\mathfrak{V},Y)$ 上的一个模由复向量空间 M 和线性映射 $Y^M\colon V\otimes M\to M((z))$ 构成，使得 Y^M 表示 M 上的场映射 Y（即 $\mathfrak{V}$ 上的乘法）。V-模的分类通常是一个极其困难的问题。不过，对于一些有趣的顶点算子代数类，通过将所考虑的模限制为朱代数形式体系所能识别的模，这个问题便可以变得可处理；更多信息请参见 [Ga]。

延续与交换代数的类比，研究 $\mathfrak{V}$-多重线性映射是很自然的，尤其是双线性映射。这类映射是构造共形块的关键要素，因此对手征共形场论至关重要，见下文。从一对顶点算子代数模 $\mathfrak{V}$（M_1 和 M_2）到第三个模 M_3 的 $\mathfrak{V}$-双线性映射是一个线性映射

$$\mathcal{Y}\colon\quad M_1\otimes M_2\to M_3\{z\}[\log(z)] \tag{8}$$

也就是说，它与 $\mathfrak{V}$ 在这三个模中每一个上的作用相容。这里，log(z)是一个形式变量，满足 $\partial_z\log(z)=z^{-1}$，而 $M_3\{z\}[\log\ z]$ 表示关于log(z)的多项式，其系数是 M_3值幂级数，变量为 z，其中指数可以是任意复数。

双线性映射的存在使我们能够定义 $\mathfrak{V}$-张量积，也称为融合积（[CKM] 对其作了概述，[HLZ1, HLZ2] 则进行了详尽讨论）。这个积由环上张量积泛性质的直接推广来刻画：对于任意一对模 M_1 和 M_2，融合积是一个模$M_1\otimes_{\mathfrak{V}}M_2$，并配有一个交织算子 $\mathcal{Y}^{M_1,\ M_2}$：$M_1\otimes M_2\to M_1\otimes_{\mathfrak{V}}M_2\{z\}[\log(z)]$，使得对于任意模 X和交织算子 $\mathcal{I}\colon M_1\otimes M_2\to X\{z\}[\log(z)]$，都存在

唯一的模态射 ϕ: $M_1 \otimes_{\mathfrak{V}} M_2 \to X$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} M_1 \otimes M_2 & \xrightarrow{\mathcal{Y}^{M_1,M_2}} & M_1 \otimes_{\mathfrak{V}} M_2\{z\}[\log(z)] \\ & \searrow^{\mathcal{I}} & \downarrow{\scriptstyle \exists!\phi} \\ & & X\{z\}[\log(z)] \end{array} \tag{9}$$

交换图成立。由于融合积是通过泛性质定义的，因此如果融合积存在，那么它就是唯一的。因此，适当选取的模范畴（特别是，对于每一对对象，都必须存在一个使（9）成立的态射 ϕ）具有幺半范畴的结构，甚至具有平衡辫幺半范畴的结构。这种结构可以通过以下方式刻画：

- 张量单位元由顶点算子代数 $\mathfrak{V}$ 给出。左单位约束 ℓ将交织算子 $\mathcal{Y}^{\mathfrak{V},M}$与 $\mathfrak{V}$ 在 M 上的作用 Y^M 相识别，即，

$$\ell_M(\mathcal{Y}^{\mathfrak{V},M}(a,z)\,m) = Y^M(a,z)m \qquad \text{for } \ a\in\mathfrak{V}\,,\ m\in M\,. \tag{10}$$

- 结合约束 A对应于交织算子复合的识别：

$$\begin{aligned} A_{M_1,M_2,M_3}(\mathcal{Y}^{M_1,M_2\otimes_{\mathfrak{V}}M_3}(m_1,z_1)\mathcal{Y}^{M_2,M_3}(m_2,z_2)m_3) \\ = \mathcal{Y}^{M_1\otimes_{\mathfrak{V}}M_2,M_3}(\mathcal{Y}^{M_1,M_2}(m_1,z_1-z_2)m_2,z_2)m_3\,. \end{aligned} \tag{11}$$

从几何上看，将变量 z_i 视为复坐标，左边在一个区域内展开，其中 M_2 的插入点 z_2 靠近 M_3 的插入点，即 0；而右边则在一个区域内展开，其中（插入于 z_1 的）M_1 靠近 M_2。满足五边形方程的结合子同构是否存在，是选定的 $\mathfrak{V}$-模范畴能否成为幺半范畴的主要障碍。（映射 A_{M_1,M_2,M_3} 取决于插入点 z_1 和 z_2。实际的范畴结合子是某个极限；详情参见 [CKM，第 3.3] 节。为简化记号，我们省略这一问题。）

- 辫同构 c 对应于将交织算子 $\mathcal{Y}^{M_1,\ M_2}$在 z 处与传输到 $-z$ 的交织算子 $\mathcal{Y}^{M_2,\ M_1}$ 对应起来，也就是说，

$$c_{M_2,M_1}(\mathcal{Y}^{M_2,M_1}(m_2,z)\,m_1) = \mathrm{e}^{zL_{-1}}\mathcal{Y}^{M_1,M_2}(m_1,-z)\,m_2\,. \tag{12}$$

这些同构的几何直观是交换模 M_1 和 M_2 的位置：将 z 乘以 -1，相当于将 z（M_1 所在的位置）绕 0（M_2 所在的位置）旋转 π 角；而 L_{-1}-指数则是将两个点都平移 $-z$，因此最终交换了两个点的位置。（需要为 -1 选定一个对数，以区分顺时针旋转和逆时针旋转。）

- 存在一个扭结同构 θ，由 $\theta_M = \exp(2\pi i L_0)|_M$ 给出，它相对于编织是平衡的，即，

$$\theta_{M_1 \otimes_{\mathfrak{V}} M_2} = c_{M_2,M_1} \circ c_{M_1,M_2} \circ (\theta_{M_1} \otimes_{\mathfrak{V}} \theta_{M_2}) \,. \tag{13}$$

因此，扭结在该范畴上定义了一个平衡结构。特别是，如果该范畴还具有刚性，那么扭结就定义了一个带状结构。

此外，$\mathfrak{V}$ 或其选定的模范畴还可能满足若干条件，从而产生额外的结构。例如，如果该范畴在取分次对偶（也称为对偶模）时封闭，那么它就是一个带状格罗滕迪克–韦尔迪耶范畴（一种具有对偶性概念的幺半范畴，其中的对偶性可以弱于刚性）。如果 $\mathfrak{V}$ 满足一项称为 C_2-有限性的技术条件，那么就有一个自然选取的范畴（称为容许模），它是有限的，即它只有有限多个简单对象，每个对象都有有限长度，且所有态射空间都是有限维的。最后，如果 $\mathfrak{V}$ 是 C_2-有限的，且容许模的范畴 Rep($\mathfrak{V}$) 是半单的，那么它就是一个模融合范畴 [Hu]。具有这一性质的顶点算子代数称为有理顶点算子代数。在可观测量网的框架下 [KLM]，也可以得到类似的结果，从而得到模融合范畴。

有理 VOA 的一个显著特征是，其模的特征标在模变换下的行为。$\mathfrak{V}$-模 M 的特征标 是幂级数

$$\chi_M(\tau) = \mathrm{tr}_M q^{L_0 - c/24} \quad \text{with} \quad q = \exp(2\pi i \tau) \,,\ \tau \in \mathbb{H} \,, \tag{14}$$

它定义在复上半平面 $\mathbb{H}$ 上。对于有理 $\mathfrak{V}$，这些规定

$$S(\chi_M(\tau)) = \chi_M(-\frac{1}{\tau}) \quad \text{and} \quad T(\chi_M(\tau)) = \chi_M(\tau+1) \,, \tag{15}$$

分别称为模 S-变换和 T-变换，甚至会（必要时，通过考察特征标对更多变量的依赖关系来细化其中的信息）导出群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \cong \langle S, T \,|\, S^4 = 1\,(ST)^3 = S^2 \rangle$ 在特征标上的作用；该群即单穿孔环面的模群。更具体地，选取一个有限集合 $\mathrm{I} = \{M_i\}_i$，其中包含简单模各同构类的代表元，并满足 $M_0 = \mathfrak{V}$，则模变换 (15) 可由数值方阵表示为

$$S(\chi_{M_i}) = \sum_{j \in \mathrm{I}} S_{i,j}\, \chi_{M_j} \quad \text{and} \quad T(\chi_{M_i}) = T_{i,i}\, \chi_{M_i} \tag{16}$$

对于 $i \in$I. 另一方面，由于有理顶点算子代数 $\mathfrak{V}$ 的范畴 Rep($\mathfrak{V}$) 是一个模融合范畴，因此可以通过双重编织的迹以及带状扭结的特征值来定义范畴的 S 矩阵和 T 矩阵，它们同样生成模群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$。经过规范重标度后，这些矩阵等于式 (16) 中定义的特征标的模变换矩阵。因此，Rep($\mathfrak{V}$) 中的张量积可以通过 Verlinde 公式表示，该公式仅取决于模 S 矩阵 [Hu] 的各项。由此，在有理情形下，可以根据特征标的模变换行为计算融合积的分解规则。确定特征标的模变换，比直接计算融合积容易得多。

特征标是环面手征单点关联函数的特例（参见共形块一节）。因此，它们的模变换行为是其定义所在曲线的几何性质的结果。因此，人们认为构成有理性的有限性条件并非必要条件；不过，有理情形是目前唯一得到全面理解的情形。尽管如此，仍有人提出了超越有理情形的各种 Verlinde 类公式，例如参见[RW]及其中引用的文献。

模融合范畴 Rep($\mathfrak{V}$) 中编码的信息通常称为共形场论 [MS] 的手征数据，也称为 Moore-Seiberg 数据。共形场论的模数据 由手征数据的一个子集给出，该子集包含矩阵 S 和 T 以及中心荷 c。

共形块

Ward 恒等式与共形块

量子场论中的一个常见主题，是努力建立态与场之间的对应关系。此外，人们还希望在一整类适当的流形上构建理论。在当前语境下，这意味着要将适当的“场” $\Phi_\lambda(v,p)$ 关联到顶点算子代数模 $\mathcal{H}_\lambda$ 中的每个向量$v\in\mathcal{H}_\lambda$，该场依赖于复曲线X上的一个点 p；并且，给定亏格为 g 的任意复曲线 X 以及其上 X处任意一组 m 两两不同的点 p_i，将这些场的 m 重乘积赋予一个“关联函数” $\langle\Phi_{\lambda_1}(v_1,p_1)\cdots\Phi_{\lambda_m}(v_m,p_m)\rangle$。如下文所见，将这一物理学思想形式化，自然会导出一些量，而这些量并不具备局域量子场论的关联函数通常应有的全部性质。因此，我们将“场”和“关联函数”一词加上引号。

由顶点算子代数 $\mathfrak{V}$ 编码的共形场论的全局手征对称性蕴含着‘关联函数’必须满足的线性关系。这些关系称为手征 *Ward* 恒等式；其解构成向量空间 $B_{\vec\lambda}(X,\vec p)$，称为共形块空间。为了以紧凑的形式写出 Ward 恒等式，我们将共形块视为定义在以下向量空间张量积上的线性形式

$$\vec{\mathcal{H}}_{\vec\lambda}:=\mathcal{H}_{\lambda_1}\otimes_{\mathbb{C}}\cdots\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_{\lambda_m} \tag{17}$$

$\mathfrak{V}$-模构成的向量空间张量积，它取决于曲线 X 的复结构以及场插入的位置$\vec p$=($p_1,p_2,\ldots,p_m$)；也就是说，它是

$$\beta_{X,\vec p,\vec\lambda}\in\vec{\mathcal{H}}^*_{\vec\lambda} \tag{18}$$

张量积的（代数）对偶中的一个特定向量。于是，‘关联函数’就是标量

$$\langle\Phi_{\lambda_1}(v_1,p_1)\cdots\Phi_{\lambda_m}(v_m,p_m)\rangle=\beta_{X,\vec p,\vec\lambda}(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)\,. \tag{19}$$

作为不变量的 WZW 共形块

构造共形块的一个关键步骤，是为给定曲线 X 获得 VOA 的一种“整体”变体。对于一般的顶点算子代数，这一问题已在第六章的顶点算子代数丛框架下进行了分析 [FrB], ，也已在“手征李代数”的框架下进行了分析 [NT, DGT]。就目前而言，我们只需以或许最简单的一类 CFT——手征*WZW*模型——为例，按照 [Be]中的阐述说明这一思想。对于这些

VOA $\mathfrak{V}$由流 $J^a(z)$生成，其零模 J_0^a张成一个有限维复单李代数 $\bar{\mathfrak{g}}$，而一个 $\mathfrak{V}$-模 $\mathcal{H}_\lambda$ 承载着与 $\bar{\mathfrak{g}}$相关联的非扭仿射李代数 $\mathfrak{g}=\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}$ 的作用。

在这种情况下，我们可以将李代数 $\bar{\mathfrak{g}}$ 与全纯函数的交换结合代数$\mathcal{F}_{X,\vec{p}}$ 结合起来；这些函数定义在 $X\setminus\vec{p}$ 上，并且在每个点 p_i 处至多有有限阶极点，由此得到一个取值于 $\bar{\mathfrak{g}}$的李代数 $\bar{\mathfrak{g}}\otimes\mathcal{F}_{X,\vec{p}}$。这个 整体李代数 体现了顶点算子代数的整体性质。（关于一般顶点算子代数对应的类似整体李代数，参见 [FrB, Ch. 19.4] 和 [DGT, Sect. 3]。）对张量积 $\vec{\mathcal{H}}_{\vec{\lambda}}$的 $\bar{\mathfrak{g}}\otimes\mathcal{F}_{X,\vec{p}}$作用如下得到：对每个 i，选取插入点 p_i 附近的局部全纯坐标 ξ_i，并将 $f\in\mathcal{F}_{X,\vec{p}}$ 展开为洛朗级数

$$f^{(i)}(\xi_i)=\sum_{n\gg-\infty}a_n^{(i)}\,\xi_i^n. \tag{20}$$

然后，将元素 $J_0^a\otimes f$与$\bar{\mathfrak{g}}\otimes\mathcal{F}_{X,\vec{p}}$关联起来，得到仿射李$_{n\gg-\infty}$代数 $\mathfrak{g}^{(1)}$中的元素$\sum\ a_n^{(i)}J_n^a$，它作用于 $\mathfrak{V}$-模 $\mathcal{H}_{\lambda_i}$。于是， $J_0^a\otimes f$对$\vec{\mathcal{H}}_{\vec{\lambda}}$的作用定义为总和

$$\sum_{i=1}^{m}\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\Big(\sum_{n\gg-\infty}a_n^{(i)}J_n^a\Big)\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\,, \tag{21}$$

其中，第 i 个直和项中的非平凡张量因子位于第 i 个位置。现在可以将共形块空间定义为在诱导作用$\vec{}$下的不变量向量空间，其中作用于对偶空间 $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}^*$:

$$B_{\vec{\lambda}}(X,\vec{p}):=(\vec{\mathcal{H}}_{\vec{\lambda}}^*)_0\,. \tag{22}$$

作用 $\bar{\mathfrak{g}}\otimes\mathcal{F}_{X,\vec{p}}$取决于局部坐标 ξ_i 的选择，因此共形块空间$B_{\vec{\lambda}}(X,\vec{p})$ 也取决于这一选择。然而，对于 WZW模型，以及更一般地，对于 C_2-余有限有理 VOA，顶点算子代数的共形结构所导出的维拉索罗代数，在顶点算子代数模上赋予局部坐标变换群一种自然作用，使共形块在这些选择下协变地变换。

共形块丛

接下来，我们描述复曲线 X 的形状以及插入点 $\vec{p}$的位置发生变化时的情形；到目前为止，这些数据一直保持不变。它们确定了模空间 $\mathcal{M}_{g,m}$ 中的一个点，该模空间参数化亏格为 g、具有 m 个不同标记点的曲线；再加上$\widetilde{\ }$局部坐标的选择，便得到更大模空间 $\mathcal{M}_{g,m}$中的一个点。向量空间 $B_{\vec{\lambda}}(X,\vec{p})\widetilde{\ }$在 $\mathcal{M}_{g,m}$上定义了一个拟凝聚层。如果该顶点算子代数是有理的并且满足 C_2-余有限条件，那么 [DGT，第 8 节。7] 该层是凝聚层，并下降到模空间 $\mathcal{M}_{g,m}$，从而使空间$B_{\vec{\lambda}}(X,\vec{p})$拼接成模空间 $\mathcal{M}_{g,m}$上的一个向量丛 $\mathcal{B}_{g,\vec{\lambda}}$ 的总空间；特别地，这消除了对局部坐标选择的依赖。此外，向量丛 $\mathcal{B}_{g,\vec{\lambda}}$ 还带有一种额外结构，即具有正则奇点的射影平坦联络，该联络称为*Knizhnik-Zamolodchikov*联络。这可以

追溯到这样的事实：对于任意顶点算子代数模 $\mathcal{H}_\lambda$，向量丛 $\mathcal{H}_\lambda$ 上存在一个平坦联络 $\nabla = \mathrm{d} + L_{-1} \otimes \mathrm{d}\tilde{z}$，其基底为 $\mathcal{M}_{g,m}$，纤维由 $\mathcal{H}_\lambda$给出。Knizhnik-Zamolodchikov联络的存在，意味着 $\mathcal{M}_{g,m}$的基本群，即 m-重曲线 X的映射类群 $\mathrm{Map}_{g,m}$ 在每个纤维上具有一个射影作用，也就是说，在向量空间 $B_{\vec{\lambda}}(X,\vec{p})$上具有一个射影作用。

“共形块”一词也常用于指向量丛 $\mathcal{B}_{g,\vec{\lambda}}$ 中局部水平截面的层。由于向量丛 $\mathcal{B}_{g,\vec{\lambda}}$ 通常是非平凡的，这些截面是插入点的多值函数。因此，正如前面所指出的，与局域量子场论的关联函数——也称为关联函数 ——不同，它们并非普通函数。通过 Knizhnik-Za molodchikov联络，截面的水平性转化为共形块必须满足的一个一阶微分方程，称为 *Knizhnik-Zamolodchikov*方程。

上述共形块空间的导出过程还有一种逆过程：从一套共形块出发，可以将插入限制为那些只会使球面关联函数产生亚纯依赖的向量，由此构造出一个顶点算子代数。随后，可以从关联函数所需满足的性质中提取出顶点算子代数及其模的公理，以及其他结构。事实上，正如 [GG], 为此所展示的，只需知道线性形式 (22) 在某些有限维向量空间上的取值，就足以实现这一点，而这些向量空间随后会被识别为顶点算子的特定子空间。

因子化

在上述讨论中，我们一直隐含地假设曲线 X 是光滑的。不过，如果允许 X 为稳定曲线，因而可以具有一种称为普通双点的轻微奇点，那么许多论证仍然成立。 X 上的一个这样的双点 p 可以被“吹起”，从而得到一条光滑曲线 X'，并带有到 X 的投影；在该投影下， p 有两个原像 $p'_\pm$。共形块的另一个关键方面是因子化，它描述了共形块在这种情形下的行为。目前，只有对于 C_2-余有限的有理顶点算子代数 $\mathfrak{V}$，这一点才得到了透彻理解。在这种情况下，共形块甚至构成稳定带标记曲线的模空间 $\overline{\mathcal{M}}_{g,\ m}$ 上的向量丛；共形块的向量空间是有限维的，并且存在典范同构 [DGT, Thm. 8.4.1]

$$g_{X,X'}\colon \quad B_{\vec{\lambda}}(X,\vec{p}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\mu\in I} B_{\vec{\lambda}\cup\{\mu,\mu^\vee\}}(X',\vec{p}\cup\{p'_+,p'_-\}) \tag{23}$$

在 X 和 X' 上的共形块空间之间，其中（有限）求和遍历 Rep($\mathfrak{V}$) 中简单对象的同构类。这一结构将向量丛系统 $\mathcal{B}_{g,\ \vec{\lambda}}$ 与模空间 $\overline{\mathcal{M}}_{g,\ m}$ 紧密联系起来，涵盖亏格 g 和插入点数量 m 的所有可能取值。

向量空间 $B_{\vec{\lambda}}(X,\vec{p})$，以及向量丛 $\mathcal{B}_{g,\ \vec{\lambda}}$ 的水平截层，都以函子方式依赖于插入点处的 VOA-模，即依赖于范畴 Rep($\mathfrak{V}$) 的对象 λ_i。从范畴论视角来看，自然可以预期，因子分解同构 (23) 能够推广到某些非有理顶点算子代数，并以范畴论意义上的余端 $coend$ 取代直和（与下文公式 (40) 中的情况类似）。

因子化的一个重要结果是针对有理 VOA 的 *Verlinde* 公式，该公式通过矩阵的各个元素来表示向量丛 $\mathcal{B}_{g,\vec{\lambda}}$ 的秩，其中 g 和 m 可取任意值。

S 根据（15），这描述了模变换 $\tau \mapsto -1/\tau$ 对顶点算子代数模 $\mathcal{H}_\mu$ 的特征标所产生的作用。关于 Verlinde 公式的详细内容，请参阅 [Hu]；对于 WZW模型的情形，请参阅 [Be, So]。在特殊情形 $g=0$ 和 $m=3$ 下，可以得到如下结论：矩阵 S 将 CFT 的融合规则 对角化，即将张量积 $\lambda_i \otimes \lambda_j$ 分解为简单对象时所对应的重数矩阵对角化。（矩阵 S 也与基于模张量范畴 Rep($\mathfrak{V}$) 的三维手术拓扑场论中得到的 Hopf链环不变量矩阵一致；后一个矩阵能够对角化融合规则，这一点可以直接由 [Tu, 第 IV 章.12], 得出，而无需考虑其与模变换之间的联系。）

与模函子的关系

对于有理共形场论，还存在一种相关的、更具代数性的结构，也称为共形块。在这种结构中，共形块空间仅被视为有限维向量空间，并且这些空间带有映射类群的表示，遵循因子化规则，并以函子方式依赖于插入点处的表示论数据。这些数据由模函子的概念所刻画。文献中已经研究了这一概念的各种版本；粗略地说，模函子是一种三维拓扑场论，但仅定义在三维流形的某个特定子类上。就我们的目的而言，特别是对于下文中 CFT 关联函数的构造，我们采用以下变体：一个（无反常的）开闭模函子 是一个对称幺半伪函子

$$\mathrm{Bl}\colon \quad \mathrm{Bord}^{\mathrm{or}}_{2,\mathrm{o/c}} \to \mathrm{Prof}_{\mathbb{C}} \tag{24}$$

从对称幺半双范畴 $\mathbf{Bord}^{\mathrm{or}}_{2,\mathrm{o/c}}$ 到对称幺半双范畴 $\mathbf{Prof}_{\mathbb{C}}$。双范畴 $\mathbf{Bord}^{\mathrm{or}}_{2,\mathrm{o/c}}$ 的对象是紧致定向一维流形，1-态射是开闭定向二维配边，2-态射是同胚（相对于边界参数化）的同痕类；而 $\mathbf{Prof}_{\mathbb{C}}$ 的对象是（小） $\mathbb{C}$-线性范畴，1-态射是 $\mathbb{C}$-线性预函子，2-态射是 $\mathbb{C}$-线性自然变换（线性范畴 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$之间的线性预函子是一个线性函子 $P\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{B} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$）。$\mathbf{Prof}_{\mathbb{C}}$ 中的水平复合由余端给出。

人们普遍认为，任何具有相关模融合范畴$\mathcal{C}$的有理手性共形场论，都会产生一个模函子 $\mathrm{Bl} = \mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}$，使得映射类群表示通过黎曼–希尔伯特对应，与向量丛 $\mathcal{B}_{g,\vec{\lambda}}$上射影平坦联络所产生的共形块的单值化相关联。因此，“共形块”一词的另一种用法，是指由模函子赋予的向量空间。

完整共形场论

如前所述，完整的局域共形场论是一个相容的关联函数系统——更准确地说，是针对所考虑的那一类世界面的关联函数系统。世界面的共形结构依赖性已经包含在模函子 (24) 中。因此，从现在起，我们所说的世界面是指一个拓扑世界面 $\mathcal{S}$，它具有

一个底层紧致定向拓扑 2-流形 $\Sigma_{\mathcal{S}}$，边界可以为空。在手征共形场论中，对称性由顶点算子代数 $\mathfrak{V}$ 编码；而在完整共形场论中，我们处理两个顶点算子代数 $\mathfrak{V}_L$ 和 $\mathfrak{V}_R$ 的联合作用，它们分别编码全纯和反全纯的手征对称性。因此，相关的表示范畴为 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{V}_L \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{V}_R)$；在满足适当的有限性条件时，它等价于德利涅积 $\mathcal{C}_L \boxtimes \mathcal{C}_R$。这称为左右运动者的组合，或称全纯分解。下文我们将注意力限制在有理共形场论上，其中左右运动者由相同的顶点算子代数支配，因此 $\mathcal{C}_L = \mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}_R = \mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$，其中 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 作为幺半范畴等于 $\mathcal{C}$，但编织方向相反。对于模张量范畴，存在一个典范等价关系。

$$\Xi\colon \quad \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathrm{rev}} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \tag{25}$$

介于 Deligne 张量积 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 与 $\mathcal{C}$的 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 之间的辫带范畴。（这种关系可推广到异手征理论，此时 $\mathcal{C}_L$ 和 $\mathcal{C}_R^{\mathrm{rev}}$是不同的[DMNO，推论 3.30]。）

然后我们可以定 义完整共形场论为相容的关联函数系统，也就是说，将其定义为一种赋值 t

$$\mathcal{S} \longmapsto \mathrm{Cor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) \in \mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) \tag{26}$$

它为每个世界面 $\mathcal{S}$ 指定一个关联函数 $\mathrm{Cor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$，作为相应向量空间 $\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ 中的一个元素，其中该空间由共形块构成。系统的相容性意味着，$\mathrm{Cor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ 必须在世界面映射类群 $\mathrm{Map}(\mathcal{S})$ 的作用下保持不变，并且该赋值与世界面的缝合相容。（存在缺陷时，$\mathrm{Map}(\mathcal{S})$ 通常是有向拓扑曲面 $\Sigma_{\mathcal{S}}$ 的映射类群 $\mathrm{Map}(\Sigma_{\mathcal{S}})$ 的一个子群。）给定手征数据范畴 $\mathcal{C}$，构造完整共形场论的问题本质上是代数问题。

对于允许存在物理边界但不存在缺陷的定向世界面，一个相容的关联函数系统（还需满足球面和圆盘二点关联函数非退化，以及闭态真空唯一等额外要求）由 [FjFRS1, FjFRS2] 一个内含于模融合范畴中的简单特殊对称 *Frobenius* 代数 A $\mathcal{C}$唯一确定；也就是说，它由 $\mathcal{C}$ 中的一个带单位代数对象确定，该对象具有非零量子维数，作为自身上的双模是简单的，并且带有余单位煤代数结构，使得余乘法是双模态射，且为乘法的右逆。（对于无定向世界面，代数 A 还必须配备所谓的 Jandl 结构。）范畴 mod-A 中的 A-模为此类共形场论提供共形边界条件，而代数 A 则描述了在 Morita 等价意义下不改变边界条件的边界场的算子乘积展开。等价地，这样的开闭全理论对应于一个由边界条件组成的不可约半单 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$。关联函数的映射类群不变性反映了这样一个事实：相应的关联函数是相关共形块丛的整体截面。

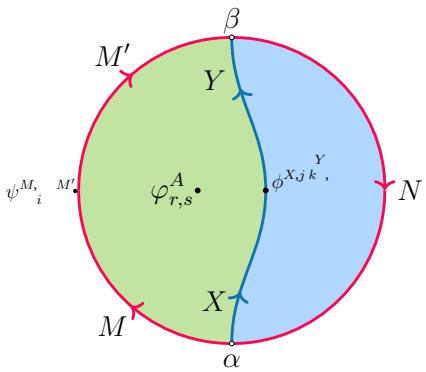
允许引入拓扑缺陷后，便可得到一类更广泛的世界面。任意余维数的拓扑缺陷的缺陷条件构成一个枢轴双范畴 $\mathcal{F}r(\mathcal{C})$。$\mathcal{F}r(\mathcal{C})$ 的对象是简单对称特殊Frobenius代数；它们用作标签，标记世界面

二维分层上完整共形场论的相。 $\mathcal{F}r(\mathcal{C})$ 的 1-态射和 2-态射分别是双模和双模态射，它们分别给出线缺陷和点缺陷的缺陷条件。缺陷的枢轴双范畴也可以等价地实现为双范畴 $\mathcal{C}$-$\mathcal{M}$od$^{\mathrm{tr}}$ ，其对象为允许模迹的不可分解半单 $\mathcal{C}$-模范畴，其态射为模函子和模自然变换。

来自 RT 拓扑场论和三维流形的关联函数

构造有理共形场论的相容的关联函数系统 [FuRS1, FjFRS1] 的一种方法，是利用它与 Reshetikhin-Turaev（RT）型三维拓扑场论（TFT）的联系，该拓扑场论与模融合范畴 $\mathcal{C}$ 相关联。在这种联系中，TFT 函子 $\mathrm{RT}_{\mathcal{C}}$ 的态空间提供了共形场论的共形块空间：这是量子场论全息原理的一个实例，并将 Chern-Simons 拓扑场论与 Wess-Zumino-Witten 模型之间的对偶性涵盖为一个特例。

在这种方法中，称为拓扑场论构造，我们考虑带有场插入的世界面 $\mathfrak{S}$。这类世界面的一个示例是

$\mathfrak{S}_0 :=$ 

(27)

该世界面 $\mathfrak{S}_0$ 具有以下属性：两个相，分别由 Frobenius代数 A和 B标记，我们也用两种不同的颜色表示它们；三个物理边界，其边界条件由右 A-模 M和 M'以及右 B-模 N给出；两个线缺陷，其缺陷条件由 A-B-双模 X 和 Y给出；还有两个点缺陷，其缺陷条件分别为 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\text{mod-}B}(N, M \otimes_A X)$ 和 $\beta \in \mathrm{Hom}_{\text{mod-}B}(M' \otimes_A Y, N)$。最后， $\mathfrak{S}_0$有三个场插入：

(1) 一个边界场 $\psi^{M}{}_{,i}{}^{M'}$ ，它将由 M 和 M'标记的两个物理边界分隔开。它有一个手征标签 $i \in \mathrm{I}(\mathcal{C})$，由 $\mathcal{C}$ 中的一个简单对象以及简并空间中的一个元素给出

$$\mathrm{Hom}_{\text{mod-}A}(i \otimes M, M') \,. \tag{28}$$

(2) 一个缺陷场 $\phi^{X}{}_{,j\,k}{}^{Y}$ ，它将由 X 和 Y标记的两个线缺陷分隔开。它有手征标签$j, k \in \mathrm{I}(\mathcal{C})$，由 $\mathcal{C}$中的两个简单对象以及简并空间中的一个元素组合而成

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-mod-}B}(j \otimes^{-} X \otimes^{+} k, Y) \,. \tag{29}$$

（ A-B-双模结构定义在 $j \otimes^{-} X \otimes^{+} k$ 上，其构造借助了 $\mathcal{C}$ 的编织；详情参见例如 [FuRS1]。）

（3）在相位为 A 的区域中插入的体场 $\varphi^{A}_{r,\,s}$。它带有两个手征标签 $r,s\in\mathrm{I}(\mathcal{C})$，以及简并空间 $\mathrm{Hom}_{A\text{-mod-}A}(r\otimes^{-}A\otimes^{+}s,A)$ 的一个元素。

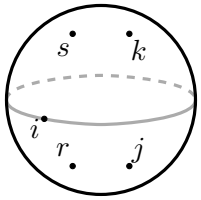
正如其简并空间的形式所表明的，体场是缺陷场的一种特殊情形：它分隔两个不可见缺陷，即由 Frobenius代数标记的缺陷线（作为其自身上的双模）。作为附加数据，任意场的插入点 p 携带一个弧芽，即经过 p 的曲线的一个等价类（如果两条曲线在包含 p 的某个开邻域内重合，则它们等价）。弧芽是原始共形世界面上局部坐标的芽在拓扑世界面上所留下的部分。

在拓扑场论构造中，全纯分解通过世界面 $\mathfrak{S}$ 的$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$双层 $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ 概念以拓扑方式实现： $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ 是一个带有标记点（以及弧芽）的紧致定向拓扑曲面，它是对曲面 $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ 上的定向丛取商得到的：

$$\widehat{\Sigma}_{\mathfrak{S}}:=\mathrm{Or}(\Sigma)/\!\sim\qquad\text{with}\quad(p,\mathrm{or})\sim(p,-\mathrm{or})\quad\text{for }p\in\partial\Sigma_{\mathfrak{S}}. \tag{30}$$

例如， 世界面 (27) 的双层是一个带有五个标记点的球面 s:

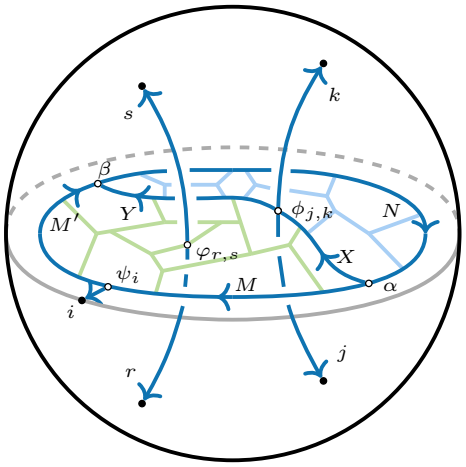
$$\widehat{\Sigma}_{\mathfrak{S}_0}\;=\tag{31}$$



标记 点的标签来自场插入的手征标签。

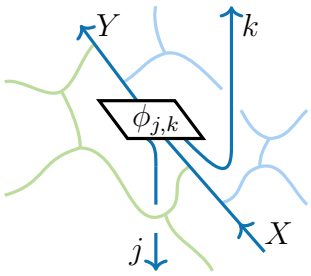
带有场插入的世界面 $\mathfrak{S}$ 的共形块空间，通过在其双层 $\mathfrak{S}$ 上计算 $\widehat{\ }$拓扑场论函子而得到，即 $\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S})=\mathrm{RT}_{\mathcal{C}}(\Sigma_{\mathfrak{S}})$。在拓扑场论构造中，关联函数 $\mathrm{Cor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S})$ 是通过计算 $\mathrm{RT}_{\mathcal{C}}$ 在特定三维边界 $M_{\mathfrak{S}}$ 上的值而得到的： $\emptyset\to\Sigma_{\mathfrak{S}}$ 其中嵌入了一个带有 $\mathcal{C}$ 色带状链环；$\mathrm{Cor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S})$ 是线性映射 $\widehat{\ }\mathrm{RT}_{\mathcal{C}}(M_{\mathfrak{S}}):\ \mathbb{C}\to\mathrm{RT}_{\mathcal{C}}(\Sigma_{\mathfrak{S}})$ 在 $1\in\mathbb{C}=\mathrm{RT}_{\mathcal{C}}(\emptyset)$ 处的取值。作为示例，世界面 (27) 的关联函数由以下三维边界得到

$$M_{\mathfrak{S}_0}\;=\tag{32}$$



世界面 $\mathfrak{S}$ 是 $M_{\mathfrak{S}}$ 的变形收缩；它可以看作位于实心球内部。它的每个二维区域都被替换为沿着一条带状网络

该区域足够精细的对偶三角剖分，其三价顶点由相应 Frobenius代数的结构态射标记。每个场插入都由其对应的（双）模态射取代，伸出的支腿以相应的手征标记着色，并连接到 $\partial M_{\mathfrak{S}} = \Sigma_{\mathfrak{S}}$ 上的标记点。例如，放大观察缺陷场插入 $\phi_{j,k} \equiv \phi^{X}{}_{,j\,k}{}^{Y}$，可以看到带状网络



(33)

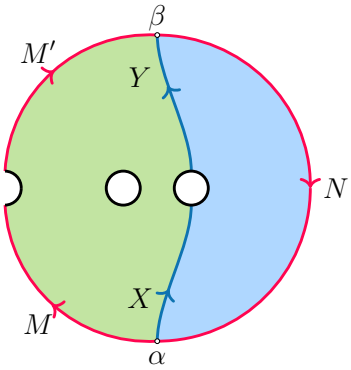
（这解释了式 (29) 中出现的特定编织方式。）

利用双范畴 $\mathcal{F}r(\mathcal{C})$ 的定义性质，可以证明关联函数 $\mathrm{Cor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}) = \mathrm{RT}_{\mathcal{C}}(M_{\mathfrak{S}})(1) \in \mathrm{RT}_{\mathcal{C}}(\Sigma_{\mathfrak{S}})$ 与所选三角剖分无关，并且在世界面映射类群 $\mathrm{Map}(\mathfrak{S})$ 的作用下保持不变。该映射类群是 $\mathrm{Map}(\Sigma_{\mathfrak{S}})$ 的子群，包含所有在同伦变形意义下固定物理边界、缺陷和场插入的元素。

TFT-构造带来的一个洞见是，在不存在场插入时，有理共形场论的关联函数可以用分隔 Reshetikhin-Turaev 型拓扑场论的曲面缺陷来表示 [KaS, FSV]。当存在场插入时，此外还有携带手征标签的带状物，在插入点处连接到曲面缺陷上。另外，与其处理世界面的双层，全纯分解也可以通过使用 Drinfeld 中心$\mathcal{Z}(\mathcal{C})$的 Reshetikhin-Turaev 拓扑场论来实现。

缝合边界与场内容

在函子场论框架下研究模函子时，与其通过携带弧芽的插入点来描述一个场，不如通过一个缝合边界来描述。这样一来，我们处理的就不再是 $\mathfrak{S}$ 带有场插入的世界面，而是 $\mathcal{S}$带有缝合边界的世界面。例如，(27) 中的世界面 $\mathfrak{S}_0$ 被替换为世界面

$\mathcal{S}_0 =$ 

(34)

$\mathcal{S}_0$ 有一个缝合区间，它将两个物理边界与两个缝合圆分隔开来；后者是通过在缺陷和体场插入周围切除圆盘而得到的。世界面可以沿着具有匹配边界数据的缝合边界进行缝合。每个缝合边界都有相应的场内容，即与之关联的场空间。例如，世界面（34）的缝合边界对应的场内容为：
(1) 边界场内容 $\mathbb{B}^{M}{}_{,M'} := \bigoplus \mathrm{Hom}_{\text{mod-}A}(i \otimes M, M') \otimes_{\mathbb{C}} i$,$i\in \mathrm{I}(\mathcal{C})$ (2) 缺陷场内容 $\mathbb{D}^{X}{}_{,Y} := \bigoplus \mathrm{Hom}_{A\text{-mod-}B}(i \otimes^{-} X \otimes^{+} j, Y) \otimes_{\mathbb{C}} \Xi(i \boxtimes j)$,$i,j\in \mathrm{I}(\mathcal{C})$ (3) 体场内容 $\mathbb{D}^{A}{}_{,A} := \bigoplus \mathrm{Hom}_{A\text{-mod-}A}(i \otimes^{-} A \otimes^{+} j, A) \otimes_{\mathbb{C}} \Xi(i \boxtimes j)$,$i,j\in \mathrm{I}(\mathcal{C})$

这里，Ξ 是 $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 与 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$之间的带状等价 (25)。边界场内容是 $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}(\mathfrak{V})$中的一个对象，因为我们要求边界条件保持手征顶点算子代数 $\mathfrak{V}$。相比之下，虽然缺陷场和体场的空间自然是 $\mathfrak{V}\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{V}$上的模，因此它们的场内容是 $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$中的对象。

场内容也可以表示为内 Hom。对于幺半范畴 $\mathcal{A}$ 上的左模范畴 $\mathcal{M}$ 和一对对象 m、$n\in\mathcal{M}$，内 Hom $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(m,n)$（如果存在；尤其当 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{A}$ 有限半单时，内 Hom 必定存在）是 $\mathcal{A}$ 中的一个对象，由伴随 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(c\triangleright m, n) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(c, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(m,n))$ 唯一确定到同构为止。由于 mod-A 是融合范畴 $\mathcal{C}$ 上的有限半单左模范畴，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{B}^{M,M'} &= \bigoplus_{i\in \mathrm{I}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\text{mod-}A}(i\otimes M, M')\otimes_{\mathbb{C}} i = \int^{c\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\text{mod-}A}(c\triangleright M, M')\otimes_{\mathbb{C}} c \\ &\cong \int^{c\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{mod-}A}(M,M'))\otimes_{\mathbb{C}} c = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{mod-}A}(M,M') \in \mathcal{C}\,.\end{aligned} \tag{35}$$

这里的积分号表示范畴余端。如果 $M = M'$ 和 M 作为 $\mathcal{C}$ 中的对象时的量子维数 $\dim(M)$ 非零，那么 $\mathbb{B}^{M,M} = \mathrm{Hom}_{\text{mod-}A}(M,M)$ 是一个简单特殊对称 Frobenius 代数，与 A Morita 等价。通过对有限左 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$-模范畴 $\mathcal{F}un_{A,B}$ 中从 mod-A 到 mod-B 的 $\mathcal{C}$-模函子采用类似但不那么直接的过程，可得 [FS] 缺陷场内容是内自然变换

$$\mathbb{D}^{X,Y} = \underline{\mathrm{Nat}}(-\otimes_A X, -\otimes_A Y) := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}un_{A,B}}(-\otimes_A X, -\otimes_A Y) \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})\,. \tag{36}$$

体场内容 $\mathbb{D}^{A,A} = \mathrm{Nat}(\mathrm{id}_{\text{mod-}A}, \mathrm{id}_{\underline{\text{mod-}A}}) =: Z(A) \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$，称为简单特殊对称 Frobenius 代数 $A\in\mathcal{C}$ 的全中心，是 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中的交换对称 Frobenius 代数；$Z(A)$ 按照 [DMNO，定义 4.6] 的意义是拉格朗日 的。

模函子、场映射与关联函数

现在，我们借助开闭模函子 $\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}$（定义见（24）），来表述具有给定手征数据融合范畴 $\mathcal{C}$ 的完整局域有理共形场论。$\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}$ 提供了该共形场论的共形块。为获得关联函数，$\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}$ 还必须满足以下要求：

- 赋予区间 $I=[0,1]\subset\mathbb{R}$ 和圆 $S^1=\{|z|=1\}\subset\mathbb{C}$的范畴配备了等价关系

$$\Phi_I\colon\quad \mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(I)\xrightarrow{\simeq}\mathcal{C}\qquad\text{and}\qquad \Phi_{S^1}\colon\quad \mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(S^1)\xrightarrow{\simeq}\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \tag{37}$$

  关于 $\mathbb{C}$-线性范畴。

- 模函子 $\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}$ 的闭扇区与 Reshetikhin-Turaev 模函子 $\mathrm{RT}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$ 在规范意义下等价。

等价关系 (37) 唯一地扩展为等价关系 $\Phi_\ell\colon \mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\ell)\xrightarrow{\simeq}\mathcal{C}^{\times p}\times\mathcal{Z}(\mathcal{C})^{\times q}$，适用于所有一维流形 $\ell=(I)^{\sqcup p}\sqcup(S^1)^{\sqcup q}$。

构造关联函数所需的第二个要素是一组场映射，它们编码了所有类型场的场内容，包括传统上未予考虑的缺陷场的多分支推广。为了描述这些场，我们需要引入定义在紧致定向一维流形 ℓ 上的一个$\mathcal{F}r(\mathcal{C})$-边界数据 b 的概念；它由 ℓ 内部的一个有限点集 $O\subset\mathrm{int}(\ell)$ 以及对补集 $\ell\setminus O$ 的连通分支的标记组成，其中各连通分支由 $\mathcal{F}r(\mathcal{C})$ 中的对象标记，即由简单特殊对称 Frobenius 代数标记，而 O 的元素则由 $\mathcal{F}r(\mathcal{C})$ 中的 1-态射标记，即由双模标记。将 ℓ 上的 $\mathcal{F}r(\mathcal{C})$-边界数据集合记为 $\mathcal{F}r(\mathcal{C})_\ell$。给定一个世界面 $\mathcal{S}$，其底层曲面上的开闭二维配边结构 $\Sigma_{\mathcal{S}}\colon \ell_{\mathrm{in}}\to\ell_{\mathrm{out}}$ 唯一确定 $\mathcal{F}r(\mathcal{C})$-边界数据 $\mathsf{b}_{\mathrm{in}}\in\mathcal{F}r(\mathcal{C})_{\ell_{\mathrm{in}}}$ 和 $\mathsf{b}_{\mathrm{out}}\in\mathcal{F}r(\mathcal{C})_{\ell_{\mathrm{out}}}$。场映射是一组映射 $\{\mathbb{F}_\ell\colon \mathcal{F}r(\mathcal{C})_\ell\to\mathrm{obj}(\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\ell))\}_\ell$，它们定义在每一个紧致定向一维流形 ℓ 上，其中区间和圆分别具有任意数量的连通分支；并且对于任意一个世界面 $\mathcal{S}$，将其底层曲面视为一个开闭配边时，对任意 $\varepsilon\in\{\in\mathrm{in},\mathrm{out}\}$，对象 $\Phi_{\ell_\varepsilon}\circ\mathbb{F}_{\ell_\varepsilon}(\mathsf{b}_\varepsilon)\in\mathcal{C}^{\times p_\varepsilon}\times\mathcal{Z}(\mathcal{C})^{\times q_\varepsilon}$ 均由相应的场内容给出。

给定开闭模函子 $\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}$ 和场映射 $\{\mathbb{F}_\ell\}$，我们如下得到共形块的向量空间。对于具有底层配边 $\Sigma_{\mathcal{S}}\colon \ell_{\mathrm{in}}\to\ell_{\mathrm{out}}$ 的世界面$\mathcal{S}$，其共形块空间 $\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ 是向量空间

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}):=\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\Sigma_{\mathcal{S}};\mathbb{F}_{\ell_{\mathrm{in}}}(\mathsf{b}_{\mathrm{in}}),\mathbb{F}_{\ell_{\mathrm{out}}}(\mathsf{b}_{\mathrm{out}}))\,, \tag{38}$$

其中，$\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\Sigma_{\mathcal{S}},-;\sim)\colon\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\ell_{\mathrm{in}})^{\mathrm{op}}\times\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\ell_{\mathrm{out}})\to\mathsf{Vect}_{\mathbb{C}}$ 是通过在 $\Sigma_{\mathcal{S}}$ 上取值模函子所得到的预函子。根据函子性，向量空间 $\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ 带有映射类群 $\mathrm{Map}(\Sigma_{\mathcal{S}})=\mathrm{End}^{\mathrm{Bord}_2^{\mathrm{or}},\,\circ/\mathrm{c}}(\Sigma_{\mathcal{S}})$ 的作用。同样根据函子性，对于沿着缝合边界 ℓ 缝合的任意两个世界面 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$，我们得到一个 缝合映射

$$s\colon\quad \mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}')\to\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}\cup_\ell\mathcal{S}') \tag{39}$$

共形块的。这些映射赋予 $\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}\cup_\ell\mathcal{S}')$ 余端的结构，

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}\cup_\ell\mathcal{S}')=\int^{\mathsf{b}\in\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\ell)}\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\Sigma_{\mathcal{S}};\mathbb{F}_{\ell_{\mathrm{in}}}(\mathsf{b}_{\mathrm{in}}),\mathsf{b})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\Sigma_{\mathcal{S}};\mathsf{b},\mathbb{F}_{\ell'_{\mathrm{out}}}(\mathsf{b}'_{\mathrm{out}}))\,. \tag{40}$$

因此，相容的关联函数系统是一个如式 (26) 所示的赋值 $\mathcal{S}\mapsto\mathrm{Cor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})\in\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$，其中 $\mathrm{Cor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ 在 $\mathrm{Map}(\mathcal{S})\subset\mathrm{Map}(\Sigma_{\mathcal{S}})$ 的作用下保持不变，并且缝合映射 (39) 将关联函数映射为关联函数。

弦网中的关联函数

另一种构造关联函数的方法称为弦网构造 [FSY1]，它通过弦网实现开闭模函子 $\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}$ 。弦网模型最初源于对物质的拓扑序相 [LeW] 的研究，随后被表述为二维纽结理论 [Ki]。

弦网模型的基本输入数据是一个球融合范畴。在我们的语境中，这是手征数据的模融合范畴 $\mathcal{C}$ 。对于任意紧致定向曲面 Σ 以及其上的 $\mathcal{C}$-边界数据 B° （定义方式与 $\mathcal{C}$ 视为单对象双范畴时的 $\mathcal{F}r(\mathcal{C})$-边界数据相同）， $\mathcal{C}$ 的弦网模型定义一个有限维向量空间 $\mathrm{SN}^\circ_{\mathcal{C}}(\Sigma, \mathrm{B}^\circ)$，称为与 $(\Sigma, \mathrm{B}^\circ)$ 关联的裸弦网空间。它是由画在曲面 Σ 上且带有边界数据 B° 的 $\mathcal{C}$-着色弦图生成的自由向量空间，模去一个编码了 $\mathcal{C}$ 的局部图形演算的子空间所得。因此，一个弦网，即 $\mathrm{SN}^\circ_{\mathcal{C}}(\Sigma, \mathrm{B}^\circ)$ 的一个元素，是 Σ 上弦图等价类的线性组合；若两个弦图可通过在圆盘形区域内应用 $\mathcal{C}$ 的图形演算相互变换，则称它们等价。

对于每个紧致定向一维流形 ℓ ，都可以定义一个线性范畴 $\mathrm{Cyl}^\circ(\mathcal{C}, \ell)$，称为 ℓ 上的裸圆柱范畴，其对象是 ℓ 上的 $\mathcal{C}$ 边界数据，态射则是圆柱 $\ell \times I$ 上的弦网。$\mathrm{Cyl}^\circ(\mathcal{C}, \ell)$ 中的复合由缝合圆柱并连接弦图给出。 ℓ 上的圆柱范畴 $\mathrm{Cyl}(\mathcal{C}, \ell)$是 $\mathrm{Cyl}^\circ(\mathcal{C}, \ell)$ 的幂等完备化，其对象是 $\mathrm{Cyl}^\circ(\mathcal{C}, \ell)$ 中的幂等元。我们有线性范畴的典范等价 $\mathrm{Cyl}(\mathcal{C}, \ell) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}$ 和 $\mathrm{Cyl}(\mathcal{C}, S^1) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}(\mathcal{C})$。相应地，可以定义弦网空间 $\mathrm{SN}_{\mathcal{C}}(\Sigma, \mathrm{B})$：它以 $\mathrm{Cyl}(\mathcal{C}, \ell)$ 中的对象 B 作为边界数据，是裸弦网空间的子空间，由那些在与由 B 给出的圆柱上的弦网进行缝合下保持不变的元素组成。如此定义的弦网空间带有通过推前获得的映射类群作用。当 Σ 被赋予开闭配边的结构时，便得到一个预函子

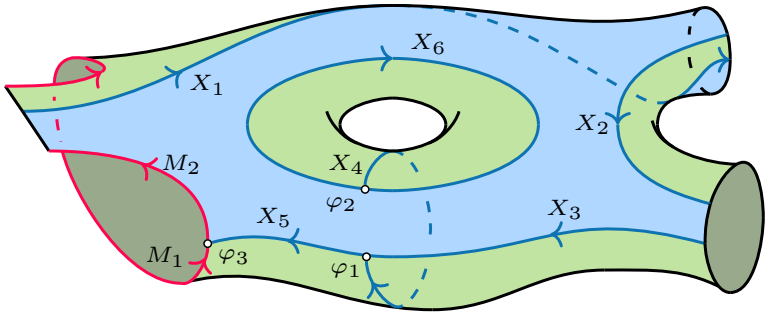
$$\mathrm{SN}_{\mathcal{C}}(\Sigma)\colon \quad \mathrm{Cyl}(\mathcal{C}, \ell_{\mathrm{in}})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Cyl}(\mathcal{C}, \ell_{\mathrm{out}}) \to \mathrm{Vect}\,. \tag{41}$$

赋值 $\ell \mapsto \mathrm{Cyl}(\mathcal{C}, \ell)$ 和 $\Sigma \mapsto \mathrm{SN}_{\mathcal{C}}(\Sigma)$ 定义了一个开闭模函子 $\mathrm{SN}_{\mathcal{C}}$。此外，$\mathrm{SN}_{\mathcal{C}}$ 的闭扇区可扩张为一次扩张的三维拓扑场论，它等价于 Turaev-Viro 拓扑场论 $\mathrm{TV}_{\mathcal{C}}$ ，而后者又等价于 $\mathrm{RT}^{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$。因此，可以将弦网模函子 $\mathrm{SN}_{\mathcal{C}}$ 用作共形块的模型。

在弦网方法中，关联函数的构造相当直接。关联函数 $\mathrm{Cor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ 是一个 $\mathcal{C}$ 着色的弦网，由弦图 $\Gamma_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ 表示。该弦图的构造方法是：根据细三角剖分，用由相应 Frobenius 代数标记的弦网络替换 $\mathcal{S}$ 的每个二维层；此外，当 $\mathcal{S}$ 具有物理边界时，还需添加由平凡 Frobenius代数 1 标记的二维层，从而将物理边界（一个右 A-模）转化为一条缺陷线（一个 1-A-双模）。作为

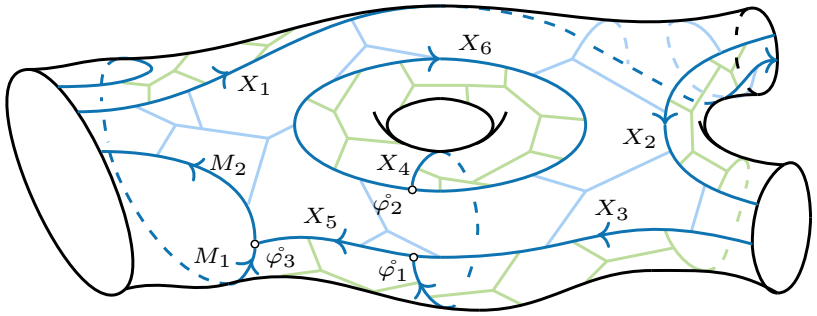
一个示意图，用于世界面的弦图

$$\mathcal{S}_1 \quad = \tag{42}$$



由下式给出

$$\Gamma_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}_1) \quad = \tag{43}$$



由于底层代数结构的定义性质，如此得到的弦网是良定义的，并且在 Map($\mathcal{S}$) 的作用下保持不变。此外，它属于弦网空间 $\mathrm{SN}_{\mathcal{C}}(\Sigma_{\mathcal{S}}, \mathbb{F}_{\partial\Sigma_{\mathcal{S}}}(\mathrm{b}_{\mathcal{S}}))$，该空间被视为共形块空间 $\mathrm{Bl}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$；其中，边界数据 $\mathbb{F}_{\partial\Sigma_{\mathcal{S}}}(\mathrm{b}_{\mathcal{S}}) \in \mathrm{Cyl}(\mathcal{C}, \partial\Sigma_{\mathcal{S}}) \simeq \mathcal{C}^{\times p} \times \mathcal{Z}(\mathcal{C})^{\times q}$ 产生了正确的场内容。

为曲面选定一个无切口的标记（按 [BaK] 的含义）后，关联函数可以转化为 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中的一个态射。对于特别值得关注的世界面（例如对应于算子乘积的世界面），弦网描述给出了与文献中提出的结果相符的显式表达式。例如，缺陷场的算子乘积对应于内自然变换的垂直与水平复合；在体场这一特殊情形下，它们则化为全中心的交换乘积。此外，环面配分函数 $\mathrm{Cor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}_A) \in \mathrm{SN}_{\mathcal{C}}(\mathrm{T})$——其中世界面 $\mathcal{T}_A$ 是一个没有缺陷线的环面 T，其相由 Frobenius代数 $A \in \mathcal{F}r(\mathcal{C})$ 给出——可分解为 $\mathrm{Cor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}_A) = \sum_{i,j\in \mathrm{I}(\mathcal{C})} Z_{i,\,j}(A)\, e_{i,\,j}$，其中整数

$$Z_{i,j}(A) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{A\text{-mod-}A}(i \otimes^{-} A \otimes^{+} j, A)) \tag{44}$$

即体场简并空间的维数（比较（29））。其中 $\{e_{i,j}\}_{i,\,j\in \mathrm{I}(\mathcal{C})}$ 是 $\mathrm{SN}_{\mathcal{C}}(\mathrm{T})$ 的一个特选基，它对应于 VOA-模的特征标（14），并通过 $\mathcal{C}$ 的模 S-矩阵和T-矩阵的共轭作用，在模群 $\mathrm{Map(T)} = SL(2,\mathbb{Z})$ 下变换。弦网 $\mathrm{Cor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}_A)$ 的映射类群不变性立即推出众所周知的模不变性关系 $[Z(A)\ S] = 0 = [Z(A)\ T]$。

对于通过拓扑缺陷 [FrFRS, FMT] 实现范畴对称性而言，关联函数系统的一个理想性质是能够修改缺陷网络

按照范畴 $\mathcal{C}$ 的局部图形演算，在不改变其关联函数的情况下，对任何世界面进行变换。弦网关联函数确实具有这一性质；借助广义弦网模型可以证明这一点。这类模型以枢轴双范畴作为输入数据，而非球形融合范畴 [FSY2]。将输入双范畴取为 $\mathcal{F}r(\mathcal{C})$，便可为任意紧致定向曲面 Σ 和 $\mathcal{F}r(\mathcal{C})$-边界数据 b 定义一个向量空间 $\mathrm{SN}^{\circ}_{\mathcal{F}r}(c)(\Sigma, \mathsf{b})$，其元素为 $\mathcal{F}r(\mathcal{C})$-着色弦网，位于 Σ 上。弦网空间 $\mathrm{SN}^{\circ}_{\mathcal{F}r}(c)(\Sigma, \mathsf{b})$ 可以解释为底层曲面为 Σ 、边界数据为 b 的世界面的等价类空间，其等价关系由枢轴双范畴 $\mathcal{F}r(\mathcal{C})$ 的局部图形演算给出。因此，将空间 $\mathrm{SN}^{\circ}_{\mathcal{F}r(\mathcal{C})}(\Sigma, \mathsf{b})$ 中的元素称为量子世界面是恰当的。关联函数的赋值给出一个线性映射 $\mathrm{Cor}_{\mathcal{C}}(\Sigma, \mathsf{b}) : \mathbb{C}\mathrm{G}^{\mathcal{F}r(\mathcal{C})}(\Sigma, \mathsf{b}) \to \mathrm{SN}_{\mathcal{C}}(\Sigma, \mathbb{F}_{\partial\Sigma}(\mathsf{b}))$，其中 $\mathbb{C}\mathrm{G}^{\mathcal{F}r(\mathcal{C})}(\Sigma, \mathsf{b})$ 是由 Σ 上的 $\mathcal{F}r(\mathcal{C})$-着色弦图所生成的向量空间。此映射可分解为规范商映射 $\mathsf{q}(\Sigma, \mathsf{b}) : \mathbb{C}\mathrm{G}^{\mathcal{F}r(\mathcal{C})}(\Sigma, \mathsf{b}) \twoheadrightarrow \mathrm{SN}^{\circ}_{\mathcal{F}r(\mathcal{C})}(\Sigma, \mathsf{b})$，即存在唯一的线性映射

$$\mathrm{U}(\Sigma, \mathsf{b}): \quad \mathrm{SN}^{\circ}_{\mathcal{F}r(\mathcal{C})}(\Sigma, \mathsf{b}) \to \mathrm{SN}_{\mathcal{C}}(\Sigma, \mathbb{F}_{\partial\Sigma}(\mathsf{b})) \tag{45}$$

使得 $\mathrm{Cor}_{\mathcal{C}}(\Sigma, \mathsf{b}) = \mathrm{U}(\Sigma, \mathsf{b}) \circ \mathsf{q}(\Sigma, \mathsf{b})$。因此，世界面的关联函数只取决于它所表示的量子世界面，所以在通过局部图形演算进行变换时保持不变。映射 $\mathrm{U}(\Sigma, \mathsf{b})$ 称为普适关联函数。它与映射类群的作用相交织。

结论

我们介绍了共形场论中发挥作用的各种代数结构，涵盖手征共形场论和完整局域共形场论。值得指出的是，这些都是十分常见的数学结构，可以用标准的数学工具进行分析。

毋庸置疑，我们的阐述深受作者个人喜好和有限知识的影响。由于篇幅和作者专业知识所限，许多有趣的方面、重要的进展，以及相当一部分相关文献都未能纳入。

致谢：
我们感谢 Chiara Damiolini 对本文早期版本提出的宝贵意见。JF 获得 VR 项目（编号：2022-02931）的资助。CS 获得德国研究联合会（DFG）项目 SCHW1162/6-1 以及德国卓越战略项目 EXC 2121“量子宇宙”（项目编号：390833306）的资助。SW 获得工程与物理科学研究委员会（EPSRC）项目 EP/V053787/1 以及亚历山大·冯·洪堡基金会的资助。YY 获得埃尔温·薛定谔国际数学与物理研究所（ESI）初级研究员奖学金的资助。

参考文献

[BaK] B. Bakalov 和 A.N. Kirillov，《乐高-泰希米勒游戏》，《变换群》5 (2000) 207–244 [math.GT/9809057][Be] A. Beauville，《共形块、融合规则与 Verlinde 公式》，载于：Hirzebruch 65代数几何会议，M. Teicher 编（巴伊兰大学，拉马特甘，1996），第 75–98 [alg-geom/9405001][BeD] A.A. Beilinson 和 V.G. Drinfeld，《手征代数》（美国数学会，普罗维登斯，2004）[BKLR] M. Bischoff、Y. Kawahigashi、R. Longo 和 K.-H. Rehren，《张量范畴与冯·诺伊曼代数的自同态》（施普林格出版社，海德堡，2015）[CKM] T. Creutzig、S. Kanade 和 R. McRae，《顶点算子超代数扩张的张量范畴》，预印本 1705.05017[DGT] C. Damiolini、A. Gibney 和 N. Tarasca，《关于顶点代数的共形块的因子化与向量丛》，预印本 1909.04683v4[DMNO] A.A. Davydov、M. Müger、D. Nikshych 和 V. Ostrik，《非退化编织融合范畴的 Witt群》，《纯粹与应用数学杂志》677 (2013) 135–177[1009.2117][FjFRS1] J. Fjelstad、J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert，《RCFT关联函数的TFT构造 V：模不变性与因子化的证明》，《范畴论：理论与应用》16 (2006) 342–433 [hep-th/0503194][FjFRS2] J. Fjelstad、J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert，《具有给定开态代数的开/闭有理共形场论的唯一性》，《理论与数学物理进展》12 (2008) 1283–1375[hep-th/0612306][FrRS] K. Fredenhagen、K.-H. Rehren 和 B. Schroer，《具有辫群统计与交换代数的超选扇区，II：几何方面与共形协变性》，《数学物理评论》 [特刊] (1992) 111–157[FMT] D.S. Freed、G.W. Moore 和 C. Teleman，《量子场论中的拓扑对称性》，预印本 2209.07471[FrB] E. Frenkel 和 D. Ben-Zvi，《顶点代数与代数曲线》，第二版（美国数学会，普罗维登斯，2004）[FrFRS] J. Fröhlich、J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert，《有理共形场论中的对偶性与缺陷》，《核物理B辑》763 (2007) 354–430 [hep-th/0607247][FuRS1] J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert，《RCFT关联函数的TFT构造 I：配分函数》，《核物理B辑》646 (2002) 353–497 [hep-th/0204148]

[FuRS2] J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert，《二维有理共形场论二十五年》，《数学物理杂志》51 (2010) 015210_1–19 [hep-th/0910.3145][FS] J. Fuchs 和 C. Schweigert，《Drinfeld 中心中的内自然变换与 Frobenius代数》，《变换群》(2021) – [2008.04199][FSV] J. Fuchs、C. Schweigert 和 A. Valentino，《三维拓扑场论中边界条件与曲面缺陷的双范畴》，《数学物理通讯》321 (2013) 543–575[1203.4568][FSY1] J. Fuchs、C. Schweigert 和 Y. Yang，《有理共形场论关联函数的弦网构造》（施普林格·自然瑞士，Cham，2022）[FSY2] J. Fuchs、C. Schweigert 和 Y. Yang，《幺半双范畴的弦网模型》，预印本 2302.01468[Ga] M.R. Gaberdiel，《二维共形场论与顶点算子代数》，载于：《数学物理百科全书》，J.P. Françoise、G.L. Naber 和 T.S. Tsun 编（爱思唯尔，阿姆斯特丹，2006），第 – 页 [hep-th/0509027][GG] M.R. Gaberdiel 和 P. Goddard，《公理化共形场论》，《数学物理通讯》209 (2000) 549–594 [hep-th/9810019][GR] K. Gawędzki 和 N. Reis，《WZW 膜与 gerbe》，《数学物理评论》14 (2002) 1281–1334 [hep-th/0205233][GRR] A.M. Gainutdinov、D. Ridout 和 I. Runkel（编），《对数共形场论》（《物理学杂志 A》46 (2013) 第 49 期，专刊）[Hu] Y.-Z. Huang，《顶点算子代数、Verlinde 猜想与模张量范畴》，《美国国家科学院院刊》102 (2005) 5352–5356 [math.QA/0412261][HLZ1] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang，《共形顶点代数广义模的对数张量积理论 I》，载于：《共形场论与张量范畴》，C.M. Bai 等编（施普林格出版社，柏林，2014），第 169–248 [1012页。4193][HLZ2] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang，《对数张量积理论 II–VIII》，预印本 1012.4196、1012.4197、1012.4198、1012.4199、1012.4202、1110.1929、1110.1931[KaS] A. Kapustin 和 N. Saulina，《三维拓扑场论与二维有理共形场论中的曲面算子》，《纯数学研讨会论文集》83 (2011) 175–198[1012.0911][KLM] Y. Kawahigashi、R. Longo 和 M. Müger，《共形场论中的多区间子因子与表示的模性》，《数学物理通讯》219 (2001) 631–669 [math.OA/9903104]

[*Ki*] *A.A. Kirillov*，《*Turaev-Viro* 不变量的弦网模型》，预印本 *1106.6033*[*LeW*] *M.A. Levin* 和 *X.G. Wen*，《弦网凝聚：拓扑相的一种物理机制》，*Phys.Rev. B 71 (2005)* 045110_1–21 [*cond-mat/*0404617][*MS*] *G. Moore* 和 *N. Seiberg*，《经典与量子共形场论》，《数学物理通讯》*123 (1989) 177–254*[*NT*] *K. Nagatomo* 和 *A. Tsuchiya*，《与正则手征顶点算子代数相关的共形场论 *I*：射影直线上的理论》，*Duke Math. J. 128 (2005) 393*–471 [*math.QA/*0206223][*RW*] *D. Ridout* 和 *S. Wood*，《对数共形场论中的 *Verlinde* 公式》，*J. Phys. Conf. Ser. 597 (2015)* 012065_1–11 [1409.0670][*So*] *Ch. Sorger*，《*Verlinde* 公式》，*Astérisque 237 (1996) 87–114*[*Tu*] *V.G. Turaev*，《结与三维流形的量子不变量》（*de Gruyter*，纽约，*1994*）