CAR代数上费米子激发态的相对熵

Stefano Galanda[1, a], Albert Much[2, b], Rainer Verch[2, c]

[1] 热那亚大学数学系，意大利热那亚 Via Dodecaneso 35 号，I-16146。[2] 莱比锡大学理论物理研究所，德国莱比锡 D-04009。电子邮件：[a]stefano.galanda@dima.unige.it, [b]much@itp.uni-leipzig.de, [c]rainer.verch@uni-leipzig.de

arXiv:2305.02788v1 [math-ph] 4 May 2023

摘要 本文研究正则反对易关系（CAR）代数上若干态的相对熵。CAR代数用于描述量子力学和量子场论中的费米子自由度。本文考察的态是相对于KMS态的多激发态（类似于多粒子态）；这些KMS态是相对于由CAR代数单粒子希尔伯特空间上的幺正动力学群所诱导的时间演化定义的。若KMS态是准自由态，则多激发态的相对熵可以用二点函数显式计算，而这些二点函数完全由定义CAR代数的单粒子希尔伯特空间以及该动力学群在单粒子希尔伯特空间上的哈密顿算子决定。即使单粒子希尔伯特空间的哈密顿算子具有连续谱，因而多激发态的相对熵无法用冯·诺伊曼熵来定义，这一结论仍然成立。本文关于CAR代数上多激发态相对熵的结果，可视为近期关于正则对易关系（CCR）代数上相干态相对熵结果的对应版本。研究发现，采用Araki引入的自对偶CAR代数框架颇为有用。

1 引言

近年来，用于表征熵或熵变的量在量子场论中日益受到关注，尤其是与黑洞及其视界的时空几何相关的研究。我们不打算回顾这一主题的丰富文献，仅选择性地提及文献 [1–3]；其中还列有更多参考文献。Araki 和 Uhlmann [4, 5], 提出的量子化线性玻色场相干态之间相对熵的概念，自发现它是一种可显式计算的量 [6–9]以来，便引起了特别关注。在与时空视界相关的实例中，这一点尤为明显 [8, 10–13]。迄今为止，文献中似乎尚无针对量子化费米场的类似考察，因此我们着手在本工作中填补这一空白

在本研究中。

我们简要介绍在 [6–9] 中得到的量子化玻色场情形的显式表达式结果（采用了略有不同的记号）。该结果尤其适用于实线性辛空间 (L,σ)（其中 L 是实线性向量空间，σ 是定义在 L 上的辛形式）的 Weyl 代数 $\mathcal{W}(L,\sigma)$ 上的相干态。关于 Weyl 代数、准自由态等的标准性质，可参阅 [14, 15]；我们随后将对其作简要总结。Weyl 代数 $\mathcal{W}(L,\sigma)$ 是由酉元 $W(\ell)$（$\ell \in L$）生成的含单位元 $\mathbf{1}$ 的 C^* 代数，且在 C^*- 等价意义下唯一，并假定这些酉元满足以下关系

$$W(\ell)W(\ell') = \mathrm{e}^{-i\sigma(\ell,\ell')/2}W(\ell+\ell')\,, \quad W(\ell)^* = W(-\ell) \quad \text{and} \quad W(0) = \mathbf{1}\,. \tag{1}$$

我们回顾一下，$\mathcal{W}(L,\sigma)$ 上的态 ω 是一个正且幺正的正线性泛函。

S从态 ω 出发，相对于 ω 的相干态是具有以下形式的任意态

$$\omega_\ell(A) = \omega(W(\ell)AW(\ell)^*) \quad (A \in \mathcal{W}(L,\sigma)) \tag{2}$$

其中 $\ell \in L$ 是任意的。

现在还假设存在一个（光滑的）辛同胚一参数群$\{\Lambda_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，其在 L 上诱导出一个自同构一参数群 $\{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，该群作用于 $\mathcal{W}(L,\sigma)$，由$\lambda_t(W(\ell)) = W(\Lambda_t\ell)$给出，并且准自由态 ω是自同构群 $\{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{R}}$在逆温度$\beta = 1$ 下的KMS态。在这种情况下，上述所引用文献中的结果表明，相干态 ω_ℓ 相对于态 ω 的Araki-Uhlmann相对熵 $S(\omega_\ell\|\omega)$为

$$S(\omega_\ell\|\omega) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sigma(\Lambda_t\ell,\ell)\,, \quad \ell \in L\,. \tag{3}$$

如前所述，在量子场论的许多情形中，尤其是在存在时空视界时，右侧的量可以显式计算，并且已在该背景下显示出其效用 [8, 10–13]。这种显式计算的可能性使相对熵成为量子场论中一个颇具吸引力的量。乍看之下，这或许出人意料，因为算子代数中态之间的相对熵的一般定义较为抽象，依赖于Tomita-Takesaki模对象，正如我们将在下一节中进一步说明的那样。

如上所述，文献中似乎尚未出现费米情形下相对熵的类似公式，即正则反对易关系的CAR代数上诸态的相对熵公式。原因可能包括：相干态这一概念不像用于Weyl 代数那样，自然地适用于CAR代数。不过，正如我们将要展示的，利用Araki的CAR代数自对偶方法 [16]，可以非常自然地定义相对于某个KMS态的（多）激发态；如果KMS流由生成该CAR代数的单粒子希尔伯特空间上的一个单参数酉群诱导，那么同样可以得到一个非常简洁的公式，用以计算激发态相对于该KMS态的相对熵。此外，CAR代数上（多）激发态的相对熵，也可以与Weyl 代数情形非常类似地计算。更具体地说（完整细节将在正文中给出），Araki的自对偶CAR代数，记为 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$，定义为

相对于复希尔伯特空间 $\mathcal{K}$（称为单粒子希尔伯特空间），并配备复共轭 Γ，其定义为由单位元 $\mathbf{1}$ 和元素 $B(\mathsf{f})$（$\mathsf{f} \in \mathcal{K}$）生成的（唯一的） C^*-代数。假设生成元关于 f 是线性的，并满足以下关系。

$$B(\mathsf{f})^* = B(\Gamma\mathsf{f}) \quad \text{and} \quad B(\mathsf{f})^* B(\mathsf{g}) + B(\mathsf{g}) B(\mathsf{f})^* = \langle \mathsf{f} | \mathsf{g} \rangle_{\mathcal{K}} \, \mathbf{1}, \tag{4}$$

其中，括号表示复希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 上的标量积。有趣的是，因此，若 $\Gamma\mathsf{f} = \mathsf{f}$ 且 $\langle \mathsf{f} | \mathsf{f} \rangle_{\mathcal{K}} = 2$，则 $B(\mathsf{f})$ 是酉的（同时也是厄米的）。这意味着，若 ω 是 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma)$ 上的标准态，即它在其 GNS表示中延拓为所诱导冯·诺依曼代数上的忠实态，那么对于态 $\omega_{\mathsf{f}}(\,.\,) = \omega(B(\mathsf{f})^* \,.\, B(\mathsf{f}))$，可以按照 Araki [4] 给出的定义来定义相对熵 $S(\omega_{\mathsf{f}} \| \omega)$。正如我们在定理 2.1 中所示，若存在 $\mathcal{K}$ 上的连续幺正群 $\{u_t\}_{t \in \mathbb{R}}$，它在 GNS表示中诱导出 ω 对应的所诱导冯 · 诺依曼代数的模群，那么相对熵由下式给出。

$$S(\omega_{\mathsf{f}} \| \omega) = \left\langle \mathsf{f} \middle| Q_{(1)} \boldsymbol{h} \mathsf{f} \right\rangle_{\mathcal{K}} \tag{5}$$

其中， $\boldsymbol{h}$ 是 $\{u_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 的自伴生成元，而 $Q_{(1)} = (\mathbf{1} + \mathrm{e}^{-\boldsymbol{h}})^{-1}$ 由 $\boldsymbol{h}$通过谱演算定义。这些结果在很大程度上依赖于 Araki 关于自对偶CAR代数 [16]上的态所取得的成果。

此外，也可以以具有前述性质的态 ω 为基准，以类似方式定义多激发态，只需将 $B(\mathsf{f})$ 替换为乘积 $B(\mathsf{f}_1) \cdots B(\mathsf{f}_n)$。如果 ω 是准自由的，即由其二点函数确定，那么便可得到多激发态相对于 ω 的相对熵的紧凑公式。因此，在研究相对熵时，CAR代数的（多）激发态发挥着类似于CCR代数的相干态的作用。在这一背景下，Araki 的 CAR 代数自对偶方法也展现出其效用。

本文安排如下。第2节中，我们根据 Araki [16], 概述自对偶 CAR 代数的定义，以及一般冯·诺依曼代数框架下相对熵的定义。同一节中，我们引入相对于某个态 ω 的单激发态和多激发态，其中该态是相对于由单粒子空间上的酉群诱导的动力学而言的 KMS态，并给出关于这些态的相对熵的一些结果。第3节中，我们着重讨论 ω 为准自由态的情形，并进一步得到关于多激发态相对熵的结果。第4节表明，只要相关的密度矩阵存在，迄今研究的多激发态的相对熵就与用冯·诺伊曼熵表示的相对熵一致。第5节中，我们简要总结并给出结论。附录中，我们简要回顾 CAR 代数上基态和 KMS态的定义。

本文部分内容取自（并加以推广）第一作者的硕士论文 [17] ，其中还介绍了一些应用。

2 自对偶 CAR 代数与相对熵

2.1 自对偶CAR代数：一般性介绍

设 $\mathcal{K}$ 为复希尔伯特空间，其标量积为 $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$，并配有反线性算子 $\Gamma:\mathcal{K}\to\mathcal{K}$，该算子为反酉算子，因此

$$\Gamma^2=\mathbf{1}\quad\text{and}\quad\langle\Gamma\mathsf{f}|\Gamma\mathsf{g}\rangle_{\mathcal{K}}=\langle\mathsf{g}|\mathsf{f}\rangle_{\mathcal{K}}\qquad(\mathsf{f},\mathsf{g}\in\mathcal{K})\tag{6}$$

定义 2.1. [16] $\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$，即相对于 $(\mathcal{K},\Gamma)$ 的自对偶正则反对易关系的 C^*-代数，定义为由单位元 $\mathbf{1}$ 及元素 $B(\mathsf{f})$（$\mathsf{f}\in\mathcal{K}$）生成的含幺 C^*-代数（在 C^*-等价意义下唯一），并满足以下条件

$$\mathsf{f}\mapsto B(\mathsf{f})\ \ \textit{is complex linear},\quad B(\mathsf{f})^*=B(\Gamma\mathsf{f})\,,\quad\textit{and}\tag{7}$$
$$[B(\mathsf{f})^*,B(\mathsf{g})]_+=\langle\mathsf{f}|\mathsf{g}\rangle_{\mathcal{K}}\,\mathbf{1}\tag{8}$$

对于所有 f、$\mathsf{g}\in\mathcal{K}$，其中 $[X,Y]_+=XY+YX$ 表示代数反对易括号。

关于 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$ 确实构成一个 C^*-代数这一隐含陈述及其唯一性（在 C^*-等价意义下），请参见 [16]。我们通常称 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$ 的单粒子空间为 $\mathcal{K}$。
值得关注的情形是，单粒子空间上的酉算子在 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$ 上诱导 C^*-自同构，我们将其表述如下：

命题 2.1. [16] 设 $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是定义在 $\mathcal{K}$ 上的一参数连续酉群，并满足以下性质：

$$\Gamma u_t=u_t\Gamma\qquad(t\in\mathbb{R})\,.\tag{9}$$

那么，存在一参数连续群 $\{\mathtt{T}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，它由 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$ 的含单位元自同构构成，并定义为

$$\mathtt{T}_t(B(\mathsf{f}))=B(u_t\mathsf{f})\qquad(\mathsf{f}\in\mathcal{K}\,,\ t\in\mathbb{R})\,.\tag{10}$$

此时，我们称自同构群 $\{\mathtt{T}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 由单粒子空间流 $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 诱导，简而言之，也称其由单粒子流诱导。
我们需要回顾 C^*-代数中的一些标准术语；更多细节以及下文将重述的命题的证明，参见例如 [18]。设 $\mathcal{C}$ 是一个带单位元 $\mathbf{1}$ 的C^*-代数（特别地，我们可以考虑 $\mathcal{C}=\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$）。$\mathcal{C}$ 上的态ω 是一个线性泛函 $\omega:\mathcal{C}\to\mathbb{C}$，它是正的，即对所有 $C\in\mathcal{C}$，都有 $\omega(C^*C)\geq 0$；并且是归一化的，即 $\omega(\mathbf{1})=1$。对于 $\mathcal{C}$上的任意给定态 ω，都存在一个相应的希尔伯特空间表示以及一个指定的（除相位外唯一的）单位向量，记作 $(\mathcal{H}_\omega,\pi_\omega,\Omega_\omega)$，其中 $\mathcal{H}_\omega$ 是表示希尔伯特空间，π_ω是含单位元的
$*$-表示是指通过 $\mathcal{H}_\omega$上的有界线性算子对 $\mathcal{C}$ 进行表示，而Ω_ω 是上述特定的单位向量。它由以下性质所确定：(I) 对所有 $C\in\mathbb{C}$，$\omega(C)=(\Omega_\omega,\pi_\omega(C)\Omega_\omega)$，其中圆括号表示 $\mathcal{H}_\omega$的标量积。(II) Ω_ω 对于所表示的 C^*-代数 $\pi_\omega(C)$是循环的，即由所有 $\pi_\omega(C)\Omega_\omega$构成的向量空间，

其中，C遍历 $\mathcal{C}$中的所有元素，在 $\mathcal{H}_\omega$中稠密。三元组（$\mathcal{H}_\omega$，π_ω，Ω_ω）称为 ω的 GNS 表示。

在 ω 的 GNS表示中，可以对表示后的 C^*-代数取弱闭包，从而在希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\omega$ 上得到诱导的冯·诺依曼代数$\mathcal{N}_\omega = \pi_\omega(\mathcal{C})^{\text{weak}}$ 。相对熵的一般概念指的就是这种冯·诺依曼代数情形。此外，值得注意的是，$\mathcal{C}$ 上的态 ω 自然延拓为诱导的冯·诺依曼代数 $\mathcal{N}_\omega$ 上的一个态，该态由态向量 Ω_ω 诱导；因此，对 ω 的这一延拓（仍用同一符号表示）为

$$\omega(A) = (\Omega_\omega, A\Omega_\omega) \qquad (A \in \mathcal{N}_\omega)\,. \tag{11}$$

显然，Ω_ω 对 $\mathcal{N}_\omega$是循环的，因此 $\mathcal{N}_\omega\Omega_\omega$ 是 $\mathcal{H}_\omega$ 的稠密子空间。那么，等价地，Ω_ω 对交换子冯·诺依曼代数 $\mathcal{N}'_\omega = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ 是分离的：$AN = NA$ 对所有 $N \in \mathcal{N}_\omega\}$ 均成立；这意味着，对于任意 $A \in \mathcal{N}'_\omega$，只有当 $A = 0$ 时，$A\Omega_\omega = 0$ 才可能成立。

2.2 相对熵：一般定义

设 $\mathcal{H}$ 为一个希尔伯特空间，且设 $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为一个冯·诺依曼代数。我们假设 $\mathcal{H}$ 中存在两个单位向量 Ω 和 Ψ，它们对于 $\mathcal{N}$ 都是循环的且可分离的。于是，存在相对 Tomita 算子 $S_{\Psi,\,\Omega}$：$A\Omega \mapsto A^*\Psi$, $A \in \mathcal{N}$。该算子定义在稠密定义域 $\mathcal{N}\Omega$ 上；它是共轭线性的且可闭的，并且其闭包（仍记为 $S_{\Psi,\,\Omega}$）具有一个（唯一的）极分解 $S_{\Psi,\,\Omega} = J_{\Psi,\,\Omega}\Delta_{\Psi}^{1/2}{}_{,\,\Omega}$，其中 $J_{\Psi,\,\Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的反线性共轭（称为相对模共轭），而 $\Delta_{\Psi}^{1/2}{}_{,\,\Omega}$ 是一个闭的正算子（其平方 $\Delta_{\Psi,\,\Omega}$ 称为相对模算子）。两个单位向量 Ω 和 Ψ 在 $\mathcal{N}$ 上诱导出忠实、正规态：

$$\omega_\Omega(A) = (\Omega, A\Omega)\,, \quad \omega_\Psi(A) = (\Psi, A\Psi) \qquad (A \in \mathcal{N})\,, \tag{12}$$

其中成对的圆括号表示 $\mathcal{H}$ 的标量积。遵循 Araki 的定义（Uhlmann 也独立地提出了这一做法），[4, 5], 态 ω_Ψ 相对于态 ω_Ω 的相对熵定义为

$$S(\omega_\Psi\|\omega_\Omega) = -(\Omega, \log(\Delta_{\Psi,\Omega})\Omega) = i\,\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\Omega, \Delta_{\Psi,\Omega}^{it}\Omega)\,, \tag{13}$$

前提是右侧的导数存在；此时它是一个有限的非负数。通常，在右侧的导数不存在时，将 $S(\omega_\Psi\|\omega_\Omega) = +\infty$ 形式化定义为。此定义更一般地适用于 $\mathcal{N}$ 上任意一对忠实正规态 $\omega = \omega_\Omega$ 和 $\tilde{\omega} = \omega_\Psi$，且与其实现单位向量的选择无关（此处为 Ω 和 Ψ）。关于如此定义的相对熵的性质、其诠释及推广，进一步讨论请参阅参考文献 [4, 5, 19]。

我们记录一些关于相对熵性质的已知结果，以备后用；回顾一下，对于 $\mathcal{H}$ 中任意一个关于 $\mathcal{N}$ 循环分离的单位向量 Ω，以及任意一个酉算子 $U \in \mathcal{N}$，向量 $U\Omega$ 仍然是关于 $\mathcal{N}$ 的循环分离单位向量。

命题 2.2. (1) 设 $\alpha: \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 是一个冯·诺依曼代数自同构。那么，

$$S(\omega_\Psi \circ \alpha \| \omega_\Omega \circ \alpha) = S(\omega_\Psi \| \omega_\Omega)\,. \tag{14}$$

同样，这一结论也可以推广到以忠实正规态 ω 和 $\tilde{\omega}$ 分别代替 ω_Ω 和 ω_Ψ 的情形。

(2) 设 $U \in \mathcal{N}$ 为酉，且 $\Psi = U\Omega$。于是

$$S(\omega_\Psi \| \omega_\Omega) = S(\omega_{U\Omega} \| \omega_\Omega) = i \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (U^*\Omega, \Delta_{\Omega,\Omega}^{it} U^*\Omega)\,, \tag{15}$$

因此，若 $U^*\Omega$ 属于 $|\log(\Delta_{\Omega,\ \Omega})|^{1/2}$ 的定义域，则 $S(\omega_\Psi \| \omega_\Omega)$ 是有限的。

证明。关于陈述（1）的证明，见 [4, 公式（6.6）]；关于陈述（2）的证明，见 [8, 引理57]。 □

2.3 关于正则反对易关系代数上相对于标准态的激发态的相对熵

设 ω 是 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma)$上的一个态。若 GNS表示 $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$的 GNS向量 Ω_ω 对于诱导的冯·诺依曼代数 $\mathcal{N}_\omega = \pi_\omega(\mathtt{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma))^{\text{weak}}$是循环且分离的，则称该态为标准态。因此，可以将 Tomita-Takesaki 模对象与这对 $(\mathcal{N}_\omega, \Omega_\omega)$关联起来，特别是模算子 Δ 和模群 $\{\Delta^{it}\}_{t\in\mathbb{R}}$。注意，在我们之前使用的记号中，$\Delta = \Delta_{\Omega_\omega,\Omega_\omega}$，但带下标的记号较为繁琐，而且不太可能引起混淆，因此我们省略下标。

我们注意到，对于满足 $\Gamma \mathsf{f} = \mathsf{f}$ 和 $\langle \mathsf{f} | \mathsf{f} \rangle_{\mathcal{K}} = 2$ 的 f，CAR 生成元 $B(\mathsf{f})$ 是酉的，因为根据 CAR 生成元的定义关系，对于具有上述性质的 f，有如下结论:

$$B(\mathsf{f})^* = B(\Gamma \mathsf{f}) = B(\mathsf{f})\,, \quad \text{implying} \quad 2B(\mathsf{f})B(\mathsf{f}) = \langle \mathsf{f} | \mathsf{f} \rangle_{\mathcal{K}} \mathbf{1} = 2 \cdot \mathbf{1} \tag{16}$$

由此可得 $B(\mathsf{f})^* B(\mathsf{f}) = B(\mathsf{f}) B(\mathsf{f})^* = \mathbf{1}$。因此，对于任意这样的 f，其 GNS 表示对应物 $F = \pi_\omega(B(\mathsf{f}))$ 是包含于 $\mathcal{N}_\omega$ 中的酉算子。

定义 2.2. 设 ω 是 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma)$ 上的一个标准态。

(a) 对于任意满足 $\Gamma \mathsf{f} = \mathsf{f}$ 和 $\langle \mathsf{f} | \mathsf{f} \rangle_{\mathcal{K}} = 2$ 的 f，我们将由态向量 $F\Omega_\omega$ 在 $\mathcal{N}_\omega$ 上诱导的态（其中 $F = \pi_\omega(B(\mathsf{f}))$）称为相对于 ω 的单激发态，并将其记为 ω_f。

(b) 令 $\mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_n$ 为 $\mathcal{K}$ 中有限多个元素，满足 $\Gamma \mathsf{f}_j = \mathsf{f}_j$ 和 $\langle \mathsf{f}_j | \mathsf{f}_j \rangle_{\mathcal{K}} = 2 (j = 1, \ldots, n)$，从而在 ω 的 GNS 表示中，算子 $F_j = \pi_\omega(B(\mathsf{f}_j))$ 是酉的。于是，我们将 $\mathcal{N}_\omega$ 上由下式给出的标准态 $\omega_{\mathsf{f}_1 \cdots \mathsf{f}_n}$ 称为】【。

$$\omega_{\mathsf{f}_1 \cdots \mathsf{f}_n}(A) = (F_1 \cdots F_n \Omega_\omega, A F_1 \cdots F_n \Omega_\omega) \qquad (A \in \mathcal{N}_\omega) \tag{17}$$

相对于 ω 的多激发态。

(c) 如果存在一个 ω 标准单粒子流态（S1PFS），我们称标准态 ω 为标准单粒子流态（S1PFS）。

单粒子流 $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 在 $(\mathcal{K},\Gamma)$ 上（即具有性质 (9) 的单参数酉群），使得

$$\Delta^{it}\pi_\omega(B(\mathsf{f}))\Delta^{-it}=\pi_\omega(B(u_t\mathsf{f})) \tag{18}$$

对所有 $\mathsf{f}\in\mathcal{K}$ 和所有 $t\in\mathbb{R}$ 均成立。

我们注意到，标准单粒子流态等价于关于由单粒子空间流 $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 诱导的自同构群 $\{\mathtt{T}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$、在 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$ 上、逆温度为 $\beta=1$ 的 KMS态，如命题 2.1 所述。（KMS态的定义见附录。）这就是 Takesaki定理的陈述，参见 [20]中的定理 5.3.10。此外，如果 ω 是一个标准态，那么它的任意单激发态或多激发态 ω_{f}也都是标准态。

在陈述本节的主要结果之前，按照 [16] 的做法，在很大程度上引入一些术语是有益的。

对于 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$ 上的任意态 ω，我们定义其二点函数

$$W_\omega^{(2)}(\mathsf{f},\mathsf{g})=\omega(B(\mathsf{f})B(\mathsf{g}))\qquad(\mathsf{f},\mathsf{g}\in\mathcal{K})\,. \tag{19}$$

由态的性质可知，$\mathsf{f},\mathsf{g}\mapsto W_\omega^{(2)}(\Gamma\mathsf{f},\mathsf{g})$ 是定义在 $\mathcal{K}$ 上且受标量积 $\langle\,.\,|\,.\,\rangle_{\mathcal{K}}$ 控制的半双线性形式。由此可以得出（参见 [16]），对于 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$ 上的任意态 ω，存在一个线性算子 $Q_\omega:\ \mathcal{K}\to\mathcal{K}$，称为 ω 的基极化，其特征性质如下：

$$0\le Q_\omega=Q_\omega^*\le\mathbf{1}\,,\quad Q_\omega+\Gamma Q_\omega\Gamma=\mathbf{1}\,,\quad\text{and} \tag{20}$$

$$W_\omega^{(2)}(\Gamma\mathsf{f},\mathsf{g})=\langle\mathsf{f}|Q_\omega\mathsf{g}\rangle_{\mathcal{K}}\,. \tag{21}$$

若 ω 是标准态，则 $W_\omega^{(2)}$非退化，且它所诱导的半双线性形式是 $\mathcal{K}$上的标量积。对于 S1PFS ω，可以具体给出 Q_ω的形式。为此，我们假设给定了 $\mathcal{K}$ 上的单粒子空间流 $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$。于是 $u_t=\mathrm{e}^{-it\boldsymbol{h}}$，其中自伴算子 $\boldsymbol{h}$ 定义在 $\mathcal{K}$中稠密定义域 $\mathsf{dom}(\boldsymbol{h})$ 上。由于 Γ 是反酉的，Γ 与 u_t 的可交换性意味着 $\Gamma\boldsymbol{h}=-\boldsymbol{h}\Gamma$。进而，这意味着 $\mathsf{spec}(\boldsymbol{h})$（即 $\boldsymbol{h}$的谱）关于实轴上的反射 $\lambda\mapsto-\lambda$ 保持不变。现在，对于 $\beta>0$，我们定义

$$Q_{(\beta)}=(\mathbf{1}+\mathrm{e}^{-\beta\boldsymbol{h}})^{-1} \tag{22}$$

通过谱演算定义。引用以下结果时，见 [16],；请注意，陈述中出现的 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$ 上的准自由态的定义将在下一节给出。

命题 2.3. 假设 $\{\mathtt{T}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 上的 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$ 自同构群由式 (10) 中的单粒子流 $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 所诱导。

(A) 如果 ω 是 $\{\mathtt{T}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 在逆温度为 $\beta>0$ 时的 KMS态，则 ω 的二点函数由下式给出。

$$W_\omega^{(2)}(\mathsf{f},\mathsf{g})=\big\langle\Gamma\mathsf{f}\big|Q_{(\beta)}\mathsf{g}\big\rangle_{\mathcal{K}}\qquad(\mathsf{f},\mathsf{g}\in\mathcal{K}) \tag{23}$$

(B) 反之，对于任意逆温度 $\beta > 0$ ，存在一个关于$\{\mathtt{T}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的准自由KMS态 ω ，它由公式 (23) 给出的二点函数定义，并通过在下文出现的准自由态定义中按照 (43) 和 (44) 定义相应态的 n点函数。

(C) 如果 ω 是 $\{\mathtt{T}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 在逆温度 $\beta > 0$ 下的 KMS 态，且其在 ω 的 GNS表示中诱导出的冯·诺依曼代数 $\mathcal{N}_\omega$ 是因子，即 $\mathcal{N}_\omega \cap \mathcal{N}_\omega' = \mathbb{C}1$，那么 ω 与由二点函数 (23) 确定的准自由态一致。

以下条件意味着 $\mathcal{N}_\omega$ 是一个因子：(1) $1/2$ 不是 $Q_{(\beta)}$的特征值，或(2) $1/2$ 是 $Q_{(\beta)}$ 的特征值，且具有有限的偶数重数，或(3) $1/2$ 是 $Q_{(\beta)}$ 的特征值，且具有无限重数。

推论 2.1。（i）如果 ω 是一个 S1PFS，则其二点函数具有以下形式

$$W_\omega^{(2)}(\mathsf{f},\mathsf{g}) = \big\langle \Gamma\mathsf{f} \big| Q_{(1)}\mathsf{g}\big\rangle_{\mathcal{K}} \qquad (\mathsf{f},\mathsf{g}\in\mathcal{K}) \quad where \tag{24}$$

$$Q_{(1)} = (\mathbf{1} + \mathrm{e}^{-\boldsymbol{h}})^{-1} \tag{25}$$

(ii) $1/2$ 不是 $Q_{(1)}$ 的特征值这一条件，等价于0不是 $\boldsymbol{h}$的特征值。后者通常称为“ $\boldsymbol{h}$不存在零模”的条件。因此，若“ $\boldsymbol{h}$不存在零模”的条件成立，则S1PFS是唯一的：它是由二点函数(24)定义的准自由态，或者等价地说，是由基底极化子 $Q_{(1)}$定义的准自由态。

完成这些准备工作后，我们可以陈述我们的核心结果之一。

定理 2.1.

(A) 设 ω 是 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$ 上的一个 S1PFS，其中 $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 与 $u_t = \mathrm{e}^{-it\boldsymbol{h}}$ 表示相应的单粒子流。那么，对于相对于 ω 的任意单激发态 ω_f，其相对熵为

$$S(\omega_\mathsf{f}\|\omega) = i\,\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} W_\omega^{(2)}(\mathsf{f}, u_t\mathsf{f}) \tag{26}$$

$$= \big\langle \mathsf{f}\big| Q_{(1)}\boldsymbol{h}\mathsf{f}\big\rangle_{\mathcal{K}} \tag{27}$$

其中， $Q_{(1)}$ 由（25）给出。因此，当 \(f\) 属于 $|\boldsymbol{h}|^{1/2}$ 的定义域时，相对熵 $S(\omega_\mathsf{f}\|\omega)$ 是有限的。

(B) 设 $\omega_{\mathsf{f}_1\cdots\mathsf{f}_n}$ 和 $\omega_{\mathsf{g}_1\cdots\mathsf{g}_m}$ 为相对于 ω 在 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$ 上的多激发态。那么，

$$S(\omega_{\mathsf{f}_1\cdots\mathsf{f}_n}\|\omega_{\mathsf{g}_1\cdots\mathsf{g}_m}) = S(\omega_{\mathsf{g}_m\cdots\mathsf{g}_1\mathsf{f}_1\cdots\mathsf{f}_n}\|\omega). \tag{28}$$

证明。（A）采用定义 2.2 中的记号，由式（15）可得相对熵乱子伦

$$S(\omega_\mathsf{f}\|\omega) = i\,\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\Omega_\omega, F\Delta^{it}F\Omega_\omega) \tag{29}$$

定理陈述中的方程右端表达式，只是对式（29）右端的改写。

（B）我们令 $F_j = \pi_\omega(B(\mathsf{f}_j))$ 和 $G_k = \pi_\omega(B(\mathsf{g}_k))$，其中 $j = 1, \ldots, n$ 和 $k = 1, \ldots, m$。对任意酉 $W \in \mathcal{N}_\omega$，定义 $\alpha_W(A) = W^* A W (A \in \mathcal{N}_\omega)$ 为 $\mathcal{N}_\omega$ 的自同构。于是，对于酉 $U = F_1 \cdots F_n$ 和 $V = G_1 \cdots G_m$，我们得到：

$$\omega_{\mathsf{f}_1 \cdots \mathsf{f}_n} = \omega \circ \alpha_U \quad \text{and} \quad \omega_{\mathsf{g}_1 \cdots \mathsf{g}_m} = \omega \circ \alpha_V \,. \tag{30}$$

利用关系式（14），有 $S(\omega \circ \alpha_U \| \omega \circ \alpha_V) = S(\omega \circ \alpha_U \circ \alpha_V^{-1} \| \omega)$。我们观察到 $\alpha_U \circ \alpha_V^{-1} = \alpha_{V^* U}$，由此得到

$$\begin{aligned} S(\omega_{\mathsf{f}_1 \cdots \mathsf{f}_n} \| \omega_{\mathsf{g}_1 \cdots \mathsf{g}_m}) &= S(\omega \circ \alpha_U \| \omega \circ \alpha_V) && (31) \\ &= S(\omega \circ \alpha_{V^* U} \| \omega) = S(\omega_{\mathsf{g}_m \cdots \mathsf{g}_1 \mathsf{f}_1 \cdots \mathsf{f}_n} \| \omega) \,. && (32) \end{aligned}$$

□

我们指出，公式（29）给出了单激发态ω_f 与 ω 之间的相对熵，一般而言并不要求（$\mathcal{N}_\omega$,Ω_ω）的模群 $\{\Delta^{it}\}_{t \in \mathbb{R}}$ 由方程（18）中的单粒子流诱导。

2.4 酉指数激发态的相对熵

对于满足 $\Gamma \mathsf{f} = \mathsf{f}$ 和 $\langle \mathsf{f} | \mathsf{f} \rangle_\mathcal{K} = 2$ 的单粒子向量 $\mathsf{f} \in \mathcal{K}$，有$B(\mathsf{f}) = B(\mathsf{f})^*$，这意味着指数级数 $\mathrm{e}^{iB(\mathsf{f})} = \sum_{n=0}^\infty i^n B(\mathsf{f})^n / n!$ 是 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma)$ 中的酉元。利用 $B(\mathsf{f})^2 = \mathbf{1}$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{iB(\mathsf{f})} &= \mathbf{1} + iB(\mathsf{f}) + \frac{(i)^2}{2!} B(\mathsf{f})^2 + \frac{(i)^3}{3!} B(\mathsf{f})^3 + \ldots && (33) \\ &= \mathbf{1} + iB(\mathsf{f}) + \frac{(i)^2}{2!} \mathbf{1} + \frac{(i)^3}{3!} B(\mathsf{f}) + \ldots && (34) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \ldots\right) \mathbf{1} + i \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \ldots\right) B(\mathsf{f}) && (35) \\ &= \text{余弦}(1)\mathbf{1} + i \text{正弦}(1) B(\mathsf{f}) \,。 && (36) \end{aligned}$$

因此，若 ω 是 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma)$ 上的一个标准态，其 GNS表示为之前所述的 $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$，那么 GNS表示中的指数化酉算符 $E_\mathsf{f} = \pi_\omega(\mathrm{e}^{iB(\mathsf{f})})$ 具有如下形式

$$E_\mathsf{f} = \cos(1)\mathbf{1} + i \sin(1) F \,, \quad F = \pi_\omega(B(\mathsf{f})) \,. \tag{37}$$

在如前所定义的冯·诺依曼代数 $\mathcal{N}_\omega$ 上，我们可以定义该态

$$\omega_{E_\mathsf{f} \Omega_\omega}(A) = (E_\mathsf{f} \Omega_\omega, A E_\mathsf{f} \Omega_\omega) \qquad (A \in \mathcal{N}_\omega) \,. \tag{38}$$

注意到 $E_\mathsf{f} \Omega_\omega$ 是 $\mathcal{N}_\omega$ 的循环分离单位向量，由此可根据前述关系得出结论：

$$\begin{aligned} S(\omega_{E_\mathsf{f} \Omega_\omega} \| \omega) &= i \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (E_\mathsf{f}^* \Omega_\omega, \Delta^{it} E_\mathsf{f}^* \Omega_\omega) && (39) \\ &= i \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\cos(1)\mathbf{1} - i \sin(1) F) \Omega_\omega, \Delta^{it} (\cos(1)\mathbf{1} - i \sin(1) F) \Omega_\omega) && (40) \\ &= i \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sin^2(1) (F \Omega_\omega, \Delta^{it} F \Omega_\omega) = \sin^2(1) S(\omega_\mathsf{f} \| \omega) && (41) \end{aligned}$$

其中我们用到了 $\Delta^{it}\Omega_\omega = \Omega_\omega$。
相比之下，态 $\omega_{E_\mathsf{f}\Omega_\omega}$ 似乎是相对于 CAR($\mathcal{K}, \Gamma$) 上某个标准态 ω 而言的对应物，正如引言中简要讨论的正则对易关系的 Weyl 代数上的相干态。然而，正如刚才的论述所示，它们相对于所选标准态 ω 的相对熵 $S(\omega_{E_\mathsf{f}\Omega_\omega}\|\omega)$ 与单激发态ω_f 的相对熵 $S(\omega_\mathsf{f}\|\omega)$ 仅相差普适数值因子 $\sin^2(1)$。换言之，在讨论相对熵时，同样可以将单激发态 ω_f 视为 CAR($\mathcal{K}, \Gamma$) 上相干态的对应物。

3 关于准自由 S1PFS 的相对熵

ω 在 CAR($\mathcal{K}, \Gamma$) 上的任意态都由其 n 遍历 N 时的 n 点函数集合完全确定，

$$W_\omega^{(n)}(\mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_n) = \omega(B(\mathsf{f}_1)\cdots B(\mathsf{f}_n))\,. \tag{42}$$

CAR($\mathcal{K}, \Gamma$) 上的准自由态完全由其二点函数决定，见[16], 。

定义 3.1. 若态 ω on CAR($\mathcal{K}, \Gamma$) 对任意 $n \in \mathbb{N}$，均称为准自由。

$$W_\omega^{(n)}(\mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_n) = 0 \quad \text{if } n \text{ is odd}\,, \quad \text{and} \tag{43}$$

$$W_\omega^{(n)}(\mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_n) = (-1)^{m(m-1)/2} \sum_{p\in\mathcal{P}_{\widehat{2m}}} \operatorname{sgn}(p) \prod_{j=1}^{m} W_\omega^{(2)}(\mathsf{f}_{p(j)}, \mathsf{f}_{p(j+m)}) \quad \text{if } n = 2m \text{ is even} \tag{44}$$

其中 $\mathcal{P}_{\widehat{2m}}$ 表示满足条件 $p(1) < \cdots < p(m)$ 和 $p(j) < p(j+m)$ $(j = 1, \ldots, m)$ 的集合 $\{1, 2, \ldots, 2m\}$ 的所有排列 p。

根据 [21], ，值得注意的是，因此，对于准自由态 ω， $2m$ 点函数等于反对称 $2m \times 2m$ 矩阵 $\mathsf{A} = (a_{j,\,k})_{j,\,k=1}^{2m}$ 的 Pfaff 行列式，或者简称为 Pfaffian Pf(A)，其上对角线元素由以下方式给出

$$a_{j,k} = W_\omega^{(2)}(\mathsf{f}_j, \mathsf{f}_k) \qquad (1 \le j < k \le 2m)\,. \tag{45}$$

换句话说，用 [22], 的记号表示，

$$W_\omega^{(2m)}(\mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_{2m}) = \mathrm{Pf}(\mathsf{A}) \tag{46}$$

$$= \begin{vmatrix} W_\omega^{(2)}(\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2) & W_\omega^{(2)}(\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_3) & \ldots & W_\omega^{(2)}(\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_{2m}) \\ & W_\omega^{(2)}(\mathsf{f}_2, \mathsf{f}_3) & \ldots & W_\omega^{(2)}(\mathsf{f}_2, \mathsf{f}_{2m}) \\ & & & \vdots \\ & & & W_\omega^{(2)}(\mathsf{f}_{2m-1}, \mathsf{f}_{2m}) \end{vmatrix}$$

对于准自由态 ω。[1]

值得一提的是 Pfaffian 的以下性质:

$$\mathrm{Pf}(\mathbf{A})^2 = \det(\mathbf{A}) \tag{47}$$

对于所有（复值）反对称 $2m \times 2m$ 矩阵 $\mathbf{A}$ [22]。利用这一点，很容易证明，对于任何取值于反对称可逆 $2m \times 2m$ 矩阵的可微函数 $t \mapsto \mathbf{A}(t)$ $(t \in \mathbb{R})$，可得到

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Pf}(\mathbf{A}(t)) = \frac{1}{2}\mathrm{Pf}(\mathbf{A}(t))\,\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}(t)^{-1}\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)\right) \tag{48}$$

其中 Tr 表示迹。

我们可以利用这些性质得到下一个结果。考虑 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma)$ 上的准自由 S1PFSω ，其中 $\mathcal{K}$ 上的单粒子酉群为 $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ ，且 $u_t = \mathrm{e}^{-it\boldsymbol{h}}$。再次采用前面的记号，对于 $\mathcal{K}$ 中满足 $\Gamma \mathrm{f}_j = \mathrm{f}_j$ 和 $\langle \mathrm{f} | \mathrm{f} \rangle_{\mathcal{K}} = 2$ 的 $\mathrm{f}_j\,(j = 1, \ldots, m)$，我们在 GNS表示 $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ 中写作 $F_j = \pi_\omega(B(\mathrm{f}_j))$。我们还将写作 $\mathrm{f}_j(t) = u_t \mathrm{f}_j$，并注意到因此，令 $F_j(t) = \pi_\omega(B(\mathrm{f}_j(t)))$，便有 $F_j(t) = \Delta^{it} F_j \Delta^{-it}$。

我们的目标是为.....找到一个简洁的表达式

$$S(\omega_{\mathrm{f}_1 \cdots \mathrm{f}_m} \| \omega) = i \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\Omega_\omega, F_1 \cdots F_m \Delta^{it} F_m \cdots F_1 \Omega_\omega) \tag{49}$$

$$= i \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\Omega_\omega, F_1 \cdots F_m F_m(t) \cdots F_1(t) \Omega_\omega)\,. \tag{50}$$

由于 ω 是准自由的，我们可以看到

$$(\Omega_\omega, F_1 \cdots F_m F_m(t) \cdots F_1(t) \Omega_\omega) = W_\omega^{(2m)}(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_m, \mathrm{f}_m(t), \ldots, \mathrm{f}_1(t)) \tag{51}$$

$$= \mathrm{Pf}(\mathbf{A}(t)) \tag{52}$$

$$= \begin{vmatrix} W_\omega^{(2)}(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2) & W_\omega^{(2)}(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_3) & \ldots & W_\omega^{(2)}(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_m) & W_\omega^{(2)}(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_m(t)) & \ldots & W_\omega^{(2)}(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_1(t)) \\ & W_\omega^{(2)}(\mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3) & \ldots & W_\omega^{(2)}(\mathrm{f}_2, \mathrm{f}_m) & W_\omega^{(2)}(\mathrm{f}_2, \mathrm{f}_m(t)) & \ldots & W_\omega^{(2)}(\mathrm{f}_2, \mathrm{f}_1(t)) \\ & & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & & & W_\omega^{(2)}(\mathrm{f}_2(t), \mathrm{f}_1(t)) \end{vmatrix}$$

显然，条目 $\mathrm{f}_m(t) \ldots, \mathrm{f}_1(t)$ 起到 $2m$ 点函数中下标从 $m+1$ 到 $2m$ 的条目的作用，在 Pfaffian 中也相应如此。注意，在公式（52）中，矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 指的是反对称

[1]对于非自对偶CAR代数上的准自由态，偶数 n 的 n点函数可以表示为一个行列式，例如见 [23]

$2m \times 2m$矩阵，其上对角线条目如显示数组所示。由于 $W_{(2)\omega}(\mathsf{f}_j(t), \mathsf{f}_k(t)) = W_{(2)\omega}(\mathsf{f}_j, \mathsf{f}_k) = \langle \mathsf{f}_j | Q_{(1)} \mathsf{f}_k \rangle_{\mathcal{K}}$，因此有

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{a} \\ -\mathbf{a}^T & 0 \end{pmatrix} \tag{53}$$

其中矩阵 a 由下式给出：

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \langle \mathsf{f}_1 | Q_{(1)} \boldsymbol{h} \mathsf{f}_m \rangle_{\mathcal{K}} & \dots & \langle \mathsf{f}_1 | Q_{(1)} \boldsymbol{h} \mathsf{f}_1 \rangle_{\mathcal{K}} \\ & \vdots & \\ \langle \mathsf{f}_m | Q_{(1)} \boldsymbol{h} \mathsf{f}_m \rangle_{\mathcal{K}} & \dots & \langle \mathsf{f}_m | Q_{(1)} \boldsymbol{h} \mathsf{f}_1 \rangle_{\mathcal{K}} \end{pmatrix} \tag{54}$$

采用与（25）相同的记号。令 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t = 0)$，并注意到 $\mathrm{Pf}(\mathbf{A}) = 1$，因为 $\mathrm{Pf}(\mathbf{A}) = (\Omega_\omega, F_1 \cdots F_m F_m \cdots F_1 \Omega_\omega)$，其中 F_j 是对称且酉的，我们得到以下结果。

定理 3.1. 假设 ω 是一个准自由 S1PFS，并用 $\boldsymbol{h}$ 表示单粒子流 $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$的自伴生成元。多激发态 $\omega_{\mathsf{f}_1 \cdots \mathsf{f}_m}$相对于 ω 的熵为

$$S(\omega_{\mathsf{f}_1 \cdots \mathsf{f}_m} \| \omega) = i \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{Pf}(\mathbf{A}(t)) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left(\mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & 0 \end{pmatrix} \right) \tag{55}$$

其中，矩阵 $m \times m$ a 在方程（54）中定义，而矩阵 A 是反对称矩阵，其上对角部分在方案（52）中表示为 $t = 0$。此外，若每个 f_j 都属于 $|\boldsymbol{h}|^{1/2}$ 的定义域，则 $S(\omega_{\mathsf{f}_1 \cdots \mathsf{f}_m} \| \omega)$ 有限。

在对 f_1、.....、f_m 施加额外假设后，多重激发态相对于准自由态的相对熵表达式仍可化为简洁得多的形式。

命题 3.1. 假设 ω 是一个准自由 S1PFS，并且我们有一个多重激发态 $\omega_{\mathsf{f}_1 \cdots \mathsf{f}_m}$，其中 f_j 关于二点函数构成一个标准正交族，即

$$W_\omega^{(2)}(\mathsf{f}_j, \mathsf{f}_k) = \delta_{jk}\,, \qquad (j, k = 1, \dots, m)\,. \tag{56}$$

那么，

$$S(\omega_{\mathsf{f}_1 \cdots \mathsf{f}_m} \| \omega) = \sum_{j=1}^{m} S(\omega_{\mathsf{f}_j} \| \omega)\,. \tag{57}$$

证明。在给定假设下，我们观察到

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \check{\mathbf{I}} \\ -\check{\mathbf{I}} & 0 \end{pmatrix} \tag{58}$$

ˇ其中 I 是 $m\times m$ 矩阵，其反对角线上的元素为 1，其余元素为 0：

$$\check{\mathbf{I}}=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&1\\0&0&\dots&1&0\\\cdot&&&&\cdot\\\cdot&&&&\cdot\\1&0&\dots&0&0\end{pmatrix} \tag{59}$$

ˇI 随后与其逆矩阵重合，因此我们有

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-\check{\mathbf{I}}\\\check{\mathbf{I}}&0\end{pmatrix}=-\mathbf{A}\,. \tag{60}$$

因此，

$$S(\omega_{\mathsf{f}_1\cdots\mathsf{f}_m}\|\omega)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}-\check{\mathbf{I}}\mathbf{a}^T&0\\0&-\check{\mathbf{I}}\mathbf{a}\end{pmatrix}. \tag{61}$$

我们看到，a 在其反对角线上有 $\langle\mathsf{f}_1|Q_{(1)}\boldsymbol{h}\mathsf{f}_1\rangle_{\mathcal{K}}$、. . .、$\langle\mathsf{f}_m|Q_{(1)}\boldsymbol{h}\mathsf{f}_m\rangle_{\mathcal{K}}$ 这些元素，因此 ˇIa 在其对角线上有这些元素。将 $\check{\mathbf{I}}\mathbf{a}^T$ 替换 ˇIa，结论也相同。由此可知，(61) 右边的表达式等于 $\sum_{j=1}^m\langle\mathsf{f}_j|Q_{(1)}\boldsymbol{h}\mathsf{f}_j\rangle_{\mathcal{K}}$。根据定理 2.1 的 (A) 部分，这与 $\sum_{j=1}^m S(\omega_{\mathsf{f}_j}\|\omega)$ 相同，从而证明了该结论。2

鉴于 $\mathsf{f}_j(j=1,\dots,m)$ 还必须满足条件$\Gamma\mathsf{f}_j=\mathsf{f}_j$ 和 $\langle\mathsf{f}_j|\mathsf{f}_j\rangle_{\mathcal{K}}=2$，才能诱导出相对于 ω 的多激发态，因此问题在于，是否确实存在一些集合 f_1、. . .、f_m，其中 $m>1$ 满足刚才所述命题的假设。接下来我们将证明确实如此（除去 $\mathcal{K}$ 为一维的平凡情形）。

命题 3.2. 设单粒子流 $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 在 CAR($\mathcal{K},\Gamma$) 上诱导一个单参数自同构群，其自伴生成元为 $\boldsymbol{h}$，相应的投影值谱测度为 $J\mapsto E(J)$。设 $\{\mathsf{e}_j\}_{j\in M}$，其中 $M\subset\mathbb{N}$，是 $E(J_j)\mathcal{K}$ 中一列有限或无限的单位向量，其中 $J_j\subset(0,\infty)$ 是两两不相交的开区间，$J_j\cap J_i=\emptyset$ for $j\neq i$。

然后，$\mathsf{f}_j=\mathsf{e}_j+\Gamma\mathsf{e}_j\,(j\in M)$ 的集合具有以下性质：

(1) $\Gamma\mathsf{f}_j=\mathsf{f}_j$ 和 $\langle\mathsf{f}_j|\mathsf{f}_j\rangle_{\mathcal{K}}=2\,(j\in M)$

(2) $\langle\mathsf{f}_j|Q_{(\beta)}\mathsf{f}_k\rangle_{\mathcal{K}}=\delta_{jk}\qquad(j,k\in M)\qquad whenever\ \beta>0.$

证明。由 f_j 的定义，性质 $\Gamma\mathsf{f}_j=\mathsf{f}_j$ 显而易见。由于区间 J_j 两两不相交，且假设 e_j 是 $E(J_j)\mathcal{K}$ 中的单位向量，因此集合 $\{\mathsf{e}_j\}_{j\in M}$ 构成一个正交归一系，$\langle\mathsf{e}_j|\mathsf{e}_k\rangle_{\mathcal{K}}=\delta_{jk}$。这是因为谱测度的性质保证，当 $j\neq k$ 时，$E(J_j)\mathcal{K}$ 和 $E(J_k)\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{K}$ 的正交子空间。显然，$\{\Gamma\mathsf{e}_j\}_{j\in M}$ 也构成一个正交归一系；又由于 $\Gamma E(J_j)\Gamma=E(-J_j)$，可得对所有 j、$k\in M$，$\langle\Gamma\mathsf{e}_j|\mathsf{e}_k\rangle_{\mathcal{K}}=0$。因此，

$$\langle\mathsf{f}_j|\mathsf{f}_j\rangle_{\mathcal{K}}=\langle\mathsf{e}_j+\Gamma\mathsf{e}_j|\mathsf{e}_j+\Gamma\mathsf{e}_j\rangle_{\mathcal{K}}=\langle\mathsf{e}_j|\mathsf{e}_j\rangle_{\mathcal{K}}+\langle\Gamma\mathsf{e}_j|\Gamma\mathsf{e}_j\rangle_{\mathcal{K}}=2 \tag{62}$$

S类似地，利用谱投影 $E(J_j)$ 与 $Q_{(\beta)}$ 对易，可得

$$\langle\mathsf{f}_j|Q_{(\beta)}\mathsf{f}_k\rangle_{\mathcal{K}}=\langle\mathsf{e}_j+\Gamma\mathsf{e}_j|Q_{(\beta)}(\mathsf{e}_k+\Gamma\mathsf{e}_k)\rangle_{\mathcal{K}}=\langle\mathsf{e}_j|Q_{(\beta)}\mathsf{e}_k\rangle_{\mathcal{K}}+\langle\Gamma\mathsf{e}_j|Q_{(\beta)}\Gamma\mathsf{e}_k\rangle_{\mathcal{K}}=\delta_{jk} \tag{63}$$

回想起 $Q_{(\beta)}+\Gamma Q_{(\beta)}\Gamma=\mathbf{1}$。证明至此完成。 □

4 与使用冯·诺依曼熵定义的相对熵的比较

本节将明确证明，多激发态 $\tilde{\omega} = \omega_{\mathsf{f}_1 \cdots \mathsf{f}_n}$ 相对于 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma)$ 上的准自由 S1PFS ω 的相对熵，与在给定的不可约希尔伯特空间表示下将这些态表示为密度矩阵 $\varrho_{\tilde{\omega}}$ 和 ϱ_{ω}时得到的相对熵一致，其表达式就是熟知的公式，

$$S(\tilde{\omega} \| \omega) = \mathrm{Tr}(\varrho_{\omega}(\log(\varrho_{\omega}) - \log(\varrho_{\tilde{\omega}}))) \,. \tag{64}$$

在本例中，给定的希尔伯特空间表示是一个准自由基态。虽然在 $\mathcal{K}$ 为有限维的情况下，这一结果已广为人知（例如，参见 [19]），但我们认为，介绍这一结果也具有启发意义，因为这有助于阐明以抽象方式描述的准自由 S1PFS 与其更为熟悉的描述方式之间的联系，即在基态希尔伯特空间表示中将其描述为密度矩阵态——前提是准自由标准态确实以这种方式产生。

我们首先讨论施加“ $\boldsymbol{h}$不存在零模”这一条件的情形，其中 $\boldsymbol{h}$ 是 $(\mathcal{K}, \Gamma)$ 上单粒子流的自伴生成元。因此，正实轴的谱投影 $P = E((0, \infty))$ 是一个基底极化子，并且它定义了由单粒子流[16]诱导的自同构群 $\{\mathtt{T}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 的准自由基态。（我们将在附录中概述基态的定义。）准自由基态 ω^P 由二点函数定义。

$$W_P^{(2)}(\mathsf{f}, \mathsf{g}) = \langle \Gamma \mathsf{f} | P \mathsf{g} \rangle_{\mathcal{K}} \tag{65}$$

单粒子流 $\{u_t\}_{t \in \mathbb{R}}$与 Γ 以及 P对易，这意味着对于所有实数 t 以及 $\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathcal{K}$， $W_P^{(2)}(u_t \mathsf{f} \; u_t \mathsf{g}) = W^{(2)P}(\mathsf{f}, \mathsf{g})$，进而意味着 $\omega^P(\mathtt{T}_t(A)) = \omega^P A$ $(A \in \mathtt{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma))$，即在由单粒子流诱导的自同构下， ω^P 保持不变。

我们将 ω^P的 GNS表示记为 $(\mathcal{H}^P, \pi^P, \Omega^P)$。该 GNS表示是不可约的，即所诱导的冯·诺依曼代数 $\mathcal{N}_{\omega^P}$ 与 $\mathcal{B}(\mathcal{H}^P)$ [16]重合。根据一般性论证，由于 ω^P 在 $\{\mathtt{T}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$下保持不变，存在作用于 $\mathcal{H}^P$ 上的连续幺正群$\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ，使得

$$U_t \pi^P(B(\mathsf{f})) U_t^* = \pi^P(B(u_t \mathsf{f})) \quad \text{and} \quad U_t \Omega^P = \Omega^P \qquad (\mathsf{f} \in \mathcal{K} \,,\; t \in \mathbb{R}) \tag{66}$$

我们将该酉群的自伴生成元记为 $\boldsymbol{H}$, $U_t = \mathrm{e}^{-it\boldsymbol{H}}$。

命题 4.1. 假设对于任意 $\beta > 0$， $\mathrm{e}^{-\beta \boldsymbol{H}}$ 是 $\mathcal{H}^P$ 上的迹类算子，并定义密度矩阵

$$\varrho_{\beta} = \frac{1}{\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta \boldsymbol{H}})} \mathrm{e}^{-\beta \boldsymbol{H}} \tag{67}$$

（A）由下式给出的 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma)$ 上的态

$$\omega^{(\beta)}(A) = \mathrm{Tr}(\varrho_{\beta} \pi^P(A)) \qquad (A \in \mathtt{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma)) \tag{68}$$

是关于 $\{\mathtt{T}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$、逆温度为 β 的KMS态。由于已施加“ $\boldsymbol{h}$不存在零模”的条件， $\omega^{(\beta)}$ 与方程（22）中由极化算子 $Q_{(\beta)}$ 定义的准自由KMS态一致。

(B) 设 $\mathfrak{f}_j$, $j=1,\ldots,n$ 属于 $\mathcal{K}$，且 $\Gamma\mathfrak{f}_j=\mathfrak{f}_j$ 和 $\langle\mathfrak{f}_j|\mathfrak{f}_j\rangle_{\mathcal{K}}=2$。那么， $\mathcal{H}^P$ 上的算子 $F=\pi^P(B(\mathfrak{f}_1)\cdots B(\mathfrak{f}_n))$ 是酉的。定义密度矩阵 $\varrho=\varrho_{(1)}$ 和 $\tilde{\varrho}=F\varrho_{(1)}F^*$，以及相应的态

$$\omega(A)=\mathrm{Tr}(\varrho\pi^P(A))\quad and\quad \tilde{\omega}(A)=\mathrm{Tr}(\tilde{\varrho}\pi^P(A))\qquad (A\in\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma))\,, \tag{69}$$

成立的是

$$S(\omega_{\mathfrak{f}_1\cdots\mathfrak{f}_n}\|\omega)=S(\tilde{\omega}\|\omega)=\mathrm{Tr}(\varrho(\log(\varrho)-\log(\tilde{\varrho}))) \tag{70}$$

证明。(A) 这是一个众所周知的事实，参见例如 [16, 20]。

(B) 令 $B=B(\mathfrak{f}_1)\cdots B(\mathfrak{f}_n)$。于是

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(A)&=\mathrm{Tr}(F\varrho F^*\pi^P(A))=\mathrm{Tr}(\varrho F^*\pi^P(A)F) &(71)\\ &=\mathrm{Tr}(\varrho\pi^P(B^*AB))=\omega(B^*AB)\qquad (A\in\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)) &(72)\end{aligned}$$

因此，用 GNS表示 $(\mathcal{H}_\omega,\pi_\omega,\Omega_\omega)$ 表示时，

$$\tilde{\omega}(A)=(F_\omega\Omega,\pi_\omega(A)F_\omega\Omega_\omega)\qquad (A\in\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)) \tag{73}$$

其中 $F_\omega=\pi_\omega(B)$，因此，

$$\begin{aligned}S(\omega_{\mathfrak{f}_1\cdots\mathfrak{f}_n}\|\omega)=S(\tilde{\omega}\|\omega)&=i\,\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\Omega_\omega,F_\omega\Delta^{it}F_\omega^*\Omega_\omega) &(74)\\ &=i\,\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\omega(B\mathtt{T}_t(B^*))=i\,\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Tr}(\varrho FU_tF^*U_t^*) &(75)\\ &=\mathrm{Tr}(\varrho F[\boldsymbol{H},F^*]) &(76)\end{aligned}$$

另一方面，可以得到

$$\mathrm{Tr}(\varrho(\log(\varrho)-\log(\tilde{\varrho})))=\mathrm{Tr}(\varrho((-\boldsymbol{H})-F(-\boldsymbol{H})F^*)=\mathrm{Tr}(\varrho F[\boldsymbol{H},F^*]) \tag{77}$$

从而证明关系式 (70) 中的所有项均相等。 □

5 结论

我们研究了自对偶CAR代数上多激发态相对于 S1PFS 的相对熵。对于 CAR 单粒子空间上的酉动力学，S1PFS ω（它等于逆温度为 $\beta=1$ 时的 KMS态）在非常一般的情形下是唯一的，且为准自由态，其二点函数由式 (24) 给出。这个二点函数完全由单粒子希尔伯特空间以及单粒子空间上酉动力学的自伴生成元 $\boldsymbol{h}$ 决定；同样，任意单激发态或多激发态的相对熵表达式也由此决定，分别如式 (26) 和 (55) 所述。这与相干态的相对熵表达式非常相似。

CCR代数上的态（3）。在两种情况下，都有一个首选的“参考”态 ω ——对于 CAR代数，即准自由 S1PFS——因此，从这一角度看，相对熵不依赖于对 ω 的任何潜在选择。对于准自由 S1PFS ω， $2m$点函数由 Pfaff 行列式给出，而其元素由二点函数构成；这一事实使得我们能够推导出多激发态相对熵的紧凑公式（55）。

因此可以得出结论：在讨论相对熵时，自对偶CAR代数上相对于S1PFS的多激发态，与CCR-Weyl代数上的相干态发挥着非常相似的作用：它们的相对熵可以明确计算，并且能够完全用单粒子希尔伯特空间以及单粒子动力学的自伴生成元 $\boldsymbol{h}$表示。

一些应用见 [17]。值得一提的是，我们也可以考虑自对偶CAR代数上态的其他相对熵定义，例如在“玻色化”框架下将它们与相干态联系起来 [24]。若能由此得到相对熵方面相应的结果，将会很有意思。

致谢：S.G.感谢莱比锡的ITP在二月期间给予的热情接待，感谢国家数学物理组（GNFM-INdAM）的支持，并感谢Simone Murro和Nicola Pinamonti的讨论。A. M.感谢Markus Fr¨ob和Felix Finster进行的多次讨论。

附录

我们总结相对于 [16]中的 $\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$上的自同构群 $\{\mathtt{T}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的基态和KMS态的定义；进一步讨论另见 [20] 。自同构群不必由单粒子流诱导。事实上，这些定义更一般地适用于定义在任意 C^*-代数上的连续单参数自同构群。

$\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$上的态 ω 称为 $\{\mathtt{T}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的基态，如果

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(t)\omega(A_1\mathtt{T}_t(A_2))\,dt = 0 \qquad (A_1, A_2 \in \mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)) \tag{78}$$

对于所有施瓦茨型测试函数 χ，若 $\mathrm{supp}(\hat{\chi}) \subset (-\infty, 0)$，其中$\hat{\chi}$表示傅里叶变换，

$$\hat{\chi}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \chi(t)\mathrm{e}^{-ist}\,dt \qquad (s \in \mathbb{R})\,. \tag{79}$$

$\mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)$上的态 ω 称为 $\{\mathtt{T}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 在逆温度 $\beta > 0$ 下的KMS态，如果

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(t)\omega(A_1\mathtt{T}_t(A_2))\,dt = \int_{\mathbb{R}} \chi(t+i\beta)\omega(\mathtt{T}_t(A_2)A_1)\,dt \qquad (A_1, A_2 \in \mathtt{CAR}(\mathcal{K},\Gamma)) \tag{80}$$

对所有满足 χ 且其傅里叶变换$\hat{\chi} \in C_0^\infty$(R) 的测试函数。回想一下，若 $\chi \in C_0^\infty$(R)，则根据 Paley-Wiener 定理， χ 是一个 Schwartz 型测试函数，并具有到复平面的解析延拓。

参考文献

[1] S. Hollands 和 K. Sanders。《量子场论中的纠缠度量及其性质》。Springer 数学物理简明丛书。Springer-Verlag，2018年。[2] R. B. Mann。《黑洞：热力学、信息与防火墙》。Springer 数学物理简明丛书。Springer，2015年。 DOI: 10.1007/978-3-319-14496-2。[3] S. N. Solodukhin。“黑洞的纠缠熵”。载于：《Living Rev. Rel.》14（2011年），8。 DOI： 10.12942/lrr-2011-8。arXiv：1104.3712。[4] H. Araki。“冯·诺依曼代数上态的相对熵”。载于：《Publ. Res. Inst. Math. Sci.》11（1976年），809–833。[5] A. Uhlmann。“相对熵与插值理论中的 Wigner-Yanase-Dyson-Lieb 凹性”。载于：《数学物理通讯》54（1977年），21–32。 DOI： cmp/1103900757。[6] S. Hollands。“手征共形场论中相干态的相对熵”。载于：《Lett. Math. Phys.》110（2020年），713–733。 DOI： 10.1007/s11005-019-01238-z。arXiv：1903.07508。[7] R. Longo。“相干激发的熵”。载于：《Lett. Math. Phys.》109（2019年），2587–2600。 DOI： 10.1007/s11005-019-01196-6。arXiv：1901.02366。[8] H. Casini、S. Grillo 和 D. Pontello。“由 Araki 公式求相干态的相对熵”。载于：《Phys. Rev. D》99（2019年6月）。 DOI： 10.1103/physrevd.99.125020。[9] H. Bostelmann、D. Cadamuro 和 S. Del Vecchio。“一般 CCR代数上相干态的相对熵”。载于：《数学物理通讯》389（2022年），661–691。DOI： 10.1007/s00220-021-04249-x。arXiv：2012.14401。[10] F. Ciolli、R. Longo、A. Ranallo 和 G. Ruzzi。“相对熵与弯曲时空”。载于：《J. Geom. Phys.》172（2022年），104416。 DOI: 10.1016/j.geomphys.2021.104416。arXiv：2107.06787。[11] S. Hollands 和 A. Ishibashi。“新闻与信息”。载于：《Class. Quant. Grav.》36（2019年），195001。 DOI: 10.1088/1361-6382/ab3c1e。arXiv：1904.00007。[12] F. Kurpicz、N. Pinamonti 和 R. Verch。“球对称外俘获视界附近量子物质的温度与熵—面积关系”。载于：《Lett. Math. Phys.》111（2021年），110。 DOI： 10.1007/s11005-021-01445-7。arXiv：2102.11547。[13] E. D’Angelo。“从标量量子场相干态之间的相对熵研究球对称动力学黑洞的熵”。载于：《Class. Quant. Grav.》38（2021年），175001。 DOI: 10.1088/1361-6382/ac13b8。arXiv：2105.04303。[14] D. Petz。《正则对易关系代数导论》。A2卷。鲁汶数学与理论物理讲义。比利时鲁汶：Leuven Univ. Pr.，1990年。[15] B. S. Kay 和 R. M. Wald。“关于具有双分叉 Killing 视界的时空上平稳、无奇异准自由态的唯一性及热性质的定理”。载于：《Phys. Rept.》207（1991年），49–136。 DOI: 10.1016/0370-1573(91)90015-E。[16] H. Araki。“关于正则反对易关系的准自由态与 Bogoliubov 自同构”。载于：《Publ. Res. Inst. Math. Sci.》6（1970年），385–442。

[17] S. Galanda.《费米子量子场论的相对熵》，硕士论文，国际数理物理硕士项目，莱比锡大学。载于：（2022年10月）。arXiv：2210.10746。[18] O. Bratteli 和 D. W. Robinson。《算子代数与量子统计力学》 I。Springer-Verlag，柏林、海德堡，1996年。[19] M. Ohya 和 D. Petz。《量子熵及其应用》。Springer-Verlag，2004年。[20] O. Bratteli 和 D. W. Robinson。《算子代数与量子统计力学》 II。Springer-Verlag，柏林、海德堡，1996年。[21] S. Koshida。“由自由费米子代数导出的 Pfaffian 点过程：完美性与条件测度”。载于：SIGMA 17（2021年），008。arXiv：2005.02837。[22] R. Vein 和 P. Dale。《行列式及其在数理物理中的应用》。Springer-Verlag，1999年。[23] R. T. Powers 和 E. Størmer。“正则反对易关系的自由态”。载于：《数学物理通讯》16（1970年），1–33。[24] M. Combescure 和 D. Robert。《相干态及其在数理物理中的应用》。Springer-Verlag，2012年。