arXiv:2305.02802v1 [math.NA] 4 Apr 2023

对偶四元数傅里叶变换

Benjamin Kenwright

摘要——傅里叶变换（FT）在广泛的应用领域中发挥着至关重要的作用，从增强、复原和分析，到安全、压缩和处理。傅里叶变换（FT）是一种将函数转换为能够描述其频率的形式的过程。这一过程已扩展至许多领域和数值表示（包括四元数）。然而，本文提出了一种使用双四元数的新方法。双四元数具有独特的数学性质，可提供高效且紧凑的符号形式。双四元数已在科学和计算的许多领域中成为一种高效的数学模型，能够以明确、简洁且计算高效的方式表示多分量数据，但将其与傅里叶变换结合的研究并不多。双四元数本质上是对偶数理论与超复数的统一；这一数学概念能够以统一的非线性方式对多变量数据集进行变换、组合、操作和插值。我们为定义在双四元数域上的双四元数值数据定义了对偶四元数傅里叶变换（DQFT）。这为新型分析、操作和滤波技术开辟了道路。我们还提出了逆对偶四元数傅里叶变换（IDQFT）。DQFT 发挥了高维超复代数的潜力，可用于求解双四元数偏微分方程或函数方程（例如，用于多分量数据分析）。

索引词—对偶四元数；信号；傅里叶；对偶四元数傅里叶变换；分析；四元数；对偶数

1 引言

傅里叶变换（FT）是用于分析信号数据的强大数学工具，广泛应用于众多领域[9]。事实上，傅里叶变换可能是整个信号分析领域最重要的发现之一。然而，尽管傅里叶变换是一项改变游戏规则的技术，革新了科学与工程领域，但其发展和应用仍在不断演进。将傅里叶变换应用于对偶四元数，可以为机器人学、计算机图形学和信号处理开启此前无法实现的各种可能性（对复杂的多分量数据进行插值、分析并提取新的含义）。这种方法可应用于信号处理，例如滤波、分析、重建和压缩[20], [13], [18]。对偶四元数已被用于表示各种多分量数据类型（刚体变换、运动、音频信号和图像数据）。

计算多分量信号的傅里叶变换这一思路此前已有实现。然而，尚未有人以**整体**方式定义适用于对偶四元数信号的傅里叶变换。本文提出一种方法，用于计算对偶四元数多分量数据的统一、整体傅里叶变换。我们将该变换应用于运动滤波，例如低通平滑或高通滤波。四元数傅里叶变换（QFT）在信号中的应用，基于使用 Hamilton 在 1843 [19]中发现的四元数来表示欧拉关节变化。Ell [6] 给出了四元数傅里叶变换的首个定义；而首次报告四元数傅里叶变换的应用是在 1996年，当时使用 QFT 的离散版本进行图像处理 [7], [16]。

虽然 **四元数傅里叶变换已获得广泛认可，但这一概念尚未应用于对偶-**

• *Benjamin Kenwright* 高级会员，*IEEE*，
bkenwright@ieee.org 初稿：*2020*年*7*月／更新：*2023*年*3*月

四元数分析与适配。我们着重展示使用对偶四元数傅里叶变换（双四元数傅里叶变换）分析多分量数据所带来的巨大收益（例如，应用于提取和滤波信号分量）。

本文的主要贡献包括：(1) 将对偶四元数傅里叶变换应用于多分量数据信号分析；(2) 采用整体方法，将复数数据的傅里叶变换作为基于对偶四元数的频域表示。

2 相关工作

关于对偶四元数傅里叶变换（DQFT）的初步研究由 Ding 等人提出 [4]。Ding 等人围绕 DQFT 在图像处理技术中的应用提出了许多令人振奋的见解。本文讨论的许多关于使用双四元数的概念都受到基于四元数的创新研究的启发。例如，Kenwright [9], 关于四元数和连接信号的研究被用于将四元数信号扩展为对偶四元数信号。随后，可以使用对偶四元数傅里叶变换对这些对偶四元数信号进行变换（本文对此进行了讨论）。通过滤波信号来增强最终模式的思想并非新概念 [2], [20], [13], ，然而，我们的工作将这些技术扩展到对偶四元数傅里叶变换，并利用其整体性方法。

尽管傅里叶变换已在许多工程和计算领域证明了自身的价值，能够以一种简便高效的方式在频域中表示信号或函数信息，但我们希望以对偶四元数傅里叶变换的形式拓展这些概念，将其应用于需要把各个组成部分整合为统一形式的系统，例如运动分析系统。

在动画领域，傅里叶级数曾被单独用于分类和滤波。例如，Unuma 等人 [20]通过傅里叶级数展开对运动序列进行插值和过渡

。类似地，四元数是高效表示明确无歧义方向的事实标准方法，可快速、可靠地进行插值[19]。Wang 等人 [21] 使用运动滤波技术，为运动添加原始运动数据中没有的特征，例如预备动作、跟随动作、夸张以及挤压与拉伸。该滤波器会将信号的“二阶导数”进行平滑、反转或时间偏移后，再叠加回原始信号。

用于图像处理的四元数傅里叶变换[1], [16], 可以扩展到对偶四元数 [4]或声音应用 [11]。有关双四元数及其应用的综述，请参阅 Kenwright[12]。

我们的方法结合了使用对偶四元数表示耦合数据的类比，这些数据可通过对偶四元数傅里叶变换转换到频域。

3 背景

3.1 四元数代数

四元数的概念由威廉·Hamilton 爵士于 1843 [19] 提出。四元数是复数的推广形式。复数由两个部分组成：实部和虚部。然而，四元数由四个部分组成，即一个实部和三个虚部。四元数可以用笛卡尔形式表示为：

$$q = w + xi + yj + zk \tag{1}$$

其中，w、x、y 和 z 为实数，i、j 和 k 为复算子，它们满足以下规则：

$$\begin{aligned} ij = k \quad & jk = i \quad & ki = j \\ ji = -k \quad & kj = -i \quad & ik = -j \\ i^2 = j^2 = k^2 \quad & = \quad & ijk = -1 \end{aligned} \tag{2}$$

方程2中的基本规则强调，四元数的乘法「不」满足交换律。其他运算包括四元数共轭（q^*）：

$$q^* = w - xi - yj - zk \tag{3}$$

这是通过对向量分量求逆来实现的。四元数的长度（或模）为：

$$|q| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \tag{4}$$

实部为零的四元数称为“纯四元数”，而长度为单位长度（或模等于一）的四元数称为“单位四元数”：

$$q = \frac{i + j + k}{\sqrt{3}} \tag{5}$$

四元数的虚部包含三个分量，可以与三维空间向量相关联。因此，有时将四元数组合表示为标量部分和向量部会很有用，具体如下：

$$\begin{aligned} q &= w + xi + yj + zk \\ &= s(q) + v(q) \end{aligned} \tag{6}$$

其中，$s(q)$ 是实部（即 w），而 $v(q)$ 是向量部（即 $xi + yj + zk$）。

$$\begin{aligned} s(q) &= w \\ v(q) &= xi + yj + zk \end{aligned} \tag{7}$$

一个具有三个自由度的三维关节有三个欧拉角（即三个分量，x、y 和 z），我们使用“纯四元数”来表示它们。对于 xyz 局部空间中的关节信号，纯四元数的三个虚部可用于表示旋转轴的 x、y 和 z 分量。在时间 t 的动画中的一个关节可表示为：

$$f(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \tag{8}$$

其中，$x(t)$、$y(t)$ 和 $z(t)$ 分别是时间 t 的 x、y 和 z 欧拉角位移。使用四元数表示 xyz 关节空间变换时，三个通道分量在乘法等运算中得到同等处理。使用基于四元数的运算来处理关节的角度信息，其优势在于我们不再分别处理每个轴，而是将每个关节视为一个统一单元。我们相信，将四元数作为统一单元可以提高运动信息精度，因为关节是作为一个实体来处理的。

3.2 四元数指数与对数

四元数 (q) 的指数定义为：

$$e^q = cos(|q|) + sin(|q|)\frac{q}{|q|} \tag{9}$$

所有非零四元数都有对数和极形式值。对于 q 在公式9中，$q^2 = -|q|^2$，这表示$q/|q|$ 的行为类似复数 i。如果 $q = 0$，则该方程右侧理解为1。

双四元数代数

为求完整起见，我们列出基本对偶四元数运算的数学细节。

双四元数算术运算 使用对偶四元数所需的基本算术运算如下：

- **对偶四元数**: $\zeta = q_r + q_d\varepsilon$
- **标量乘法**: $s\zeta = sq_r + sq_d\varepsilon$
- **加法**: $\zeta_1 + \zeta_2 = q_{r1} + q_{r2} + (q_{d1} + q_{d2})\varepsilon$
- **乘法**: $\zeta_1\zeta_2 = q_{r1}q_{r2} + (q_{r1}q_{d2} + q_{d1}q_{r2})\varepsilon$
- **共轭**: $\zeta^* = q_r^* + q_d^*\varepsilon$
- **模**: $||\zeta|| = \zeta\zeta^*$

其中，q_r 和 q_d 分别表示对偶四元数的实部和对偶部（我们使用“q”来强调它们是四元数）。

3.3 对偶四元数指数与对数

对偶四元数指数函数是一种数学函数，它以一个对偶四元数作为输入，并返回另一个双四元数作为输出。对偶四元数指数的形式已得到充分确立 [17], [10],，已有其他变体被提出 [3] ，以解决对偶四元数指数函数和对数中的零角奇异性（这是实际应用中的必要条件，如果双四元数

是用于傅里叶变换）。

关于对偶四元数的入门介绍、与其他方法（例如矩阵和欧拉角）的比较，以及如何着手实现一个简洁易用的库，读者可参阅 Kenwright 的论文[8]。

双四元数向量变换双四元数能够按照方程10所示变换三维向量坐标。注意，对于单位双四元数，其逆元与其共轭相同 [1]。

$$p' = \hat{\zeta} p \hat{\zeta}^{-1} \tag{10}$$

ˆ其中，ζ 是表示该变换的单位双四元数，ˆζ^{-1} 是该单位双四元数变换的逆元。p 和 p' 是用于表示变换前后 3D 向量坐标的双四元数（即，$p = (1, 0, 0, 0) + \epsilon(0, v_x, v_y, v_z)$）。

普拉¨克坐标 普¨克坐标用于创建螺旋坐标，螺旋坐标是表示直线的一项重要技术。我们需要螺旋坐标，以便以更优雅的形式重新表示双四元数，从而帮助我们**制定一种更简洁且复杂度更低的插值方法**，该方法可与经典四元数的球面线性插值相媲美。

普吕克坐标的定义：

- $\vec{p}$ 是给定直线 $\rightarrow$ 上的任意一点
- l 是方向向量$\rightarrow$
- $\vec{m} = \vec{p} \times l$ 是力矩向量
- $(\vec{l}, \vec{m})$ 是六个 Plu¨cker 坐标

我们可以将八个对偶四元数参数转换为一组等价的八个螺旋坐标，反之亦然。这些参数的定义如下方程 11：

$$\begin{aligned} \text{screw parameters} &= (\theta, d, \vec{l}, \vec{m}) \\ \text{dual-quaternion} &= q_r + \epsilon q_d \\ &= (w_r + \vec{v}_r) + \epsilon(w_d + \vec{v}_d) \end{aligned} \tag{11}$$

¯其中，除 l 表示向量直线方向、$\vec{m}$ 表示直线矩外，还有 d 表示沿轴的平移（即螺距），以及旋转角 θ。

3.4 离散对偶四元数傅里叶变换（DQFT）

第 3.1 节介绍的数学原理定义了离散四元数傅里叶变换（DQFT）中使用的基本概念，例如乘法和指数（参见 Sangwine [5], [15]）。使用 DQFT 时的一个关键因素是，对偶四元数乘法不满足交换律，因此 DQFT 运算有两种不同类型，分别定义为右侧 DQFT 和左侧 DQFT。两种 DQFT 类型如下所示

1. 请注意，双四元数的共轭有三种定义：1：$\zeta^* = q_r^* + q_d^* \varepsilon$，2：$\zeta^* = q_r - q_d \varepsilon$，以及 3：$\zeta^* = q_r^* - q_d^* \varepsilon$。使用公式 10变换一个点时，应使用第二种共轭形式。

在公式 12 和 13中：

右侧 DQFT：

$$F_R(t) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{-\mu 2\pi \left(\frac{xt}{M}\right)} \tag{12}$$

左侧 DQFT：

$$F_L(t) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} e^{-\mu 2\pi \left(\frac{xt}{M}\right)} f(x) \tag{13}$$

同样，我们能够分别为两种类型的双四元数傅里叶变换（DQFT）定义其“逆”双四元数傅里叶变换（IDQFT），如下列方程所示 14 和 15：

右侧 IDQFT：

$$f_R(t) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{\mu 2\pi \left(\frac{xt}{M}\right)} \tag{14}$$

左侧 IDQFT：

$$f_L(t) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} e^{\mu 2\pi \left(\frac{xt}{M}\right)} f(x) \tag{15}$$

4 对偶四元数傅里叶变换的应用

对偶四元数傅里叶变换有广泛的应用，包括：

1) **信号处理**：对偶四元数傅里叶变换用于分析和处理音频与视频处理、图像处理以及电信等领域中的信号。它用于将时域信号转换为频域信号，从而使分析和处理变得更加容易。2) **数据压缩**：对偶四元数傅里叶变换应用于 JPEG 和 MPEG 等数据压缩技术，通过消除人眼无法感知的高频分量，减少表示图像或视频所需的数据量。3) **光学**：它用于光学研究，包括衍射图样分析，以及透镜和望远镜等光学系统的设计。4) **量子力学**：对偶四元数傅里叶变换用于量子力学中描述粒子的波函数，从而使我们能够计算在特定位置发现某个粒子的概率。5) **医学成像**：对偶四元数傅里叶变换应用于磁共振成像（MRI）和 CT 扫描等医学成像技术，通过重建扫描过程中产生的信号，获得人体图像。

6）语音识别：对偶四元数傅里叶变换用于语音识别系统，将语音信号从时域转换到频域，从而更容易识别语音模式和词语。

7) 气候分析：对偶四元数傅里叶变换用于气候分析，以分析温度和其他气候数据随时间的变化，这有助于解-

理解气候模式并预测未来气候趋势。

以下只是对偶四元数傅里叶变换在各个领域广泛应用的几个例子。不过，鉴于围绕空间变换信号（例如动画以及旋转和平移运动）已有大量研究[12]，我们将进一步介绍如何使用 DQFT 进行「滤波」。

4.1 DQFT 滤波

对偶四元数傅里叶变换（DQFT）以时间 (t) 的信号变量为输入，在频域中执行滤波操作。重要的是，空间域中的对偶四元数卷积运算对应于频域中的乘积运算 [14]。在频域中对数据进行滤波后，我们可以通过对偶四元数傅里叶逆变换恢复修改后的信号。

DQFT 低通与 DQFT 高通低通滤波器会衰减对偶四元数傅里叶变换信号中指定范围的高频分量。DQFT 低通滤波器是一种极其强大的数学工具，可用于分离信号中的不同分量。将信号分量分解并滤波后，问题就会更容易分析。高通滤波器会衰减低频分量，同时不影响对偶四元数傅里叶变换中的高频信息。高通滤波器本质上是低通滤波器的逆，我们将其取逆以实现所需的操作。

双四元数傅里叶变换带通结合高通和低通滤波器，我们能够在对偶四元数傅里叶变换中对“目标”信号进行滤波，以实现信号衰减或提取。这可能包括我们希望收集的节律性噪声，并将其重新注入其他信号源，以便通过识别构成特定模式的关键频率来进行数据分类。同样，通过比较信号并利用对偶四元数傅里叶变换识别相似性，我们能够提取并区分信号共有的特征和独有的特征。这项研究成果可应用于多个重要领域，例如医学分析、声音处理、程序化动画和机器人学。

对偶四元数与傅里叶变换的优势

- 有助于降低对噪声的敏感度。通常，傅里叶变换对噪声较为敏感，这意味着即使少量噪声也会扭曲信号的频谱内容。这种敏感性会使低信噪比信号难以准确分析。由于双四元数具有耦合的多分量数据结构，因此对噪声的敏感度会降低。

- 提升时频分辨率——傅里叶变换默认假设信号是平稳的，即信号不会随时间变化。这一假设限制了傅里叶变换捕捉非平稳信号的能力，例如频率分量随时间变化或具有瞬态特征的信号。对偶四元数耦合的多分量数据有助于提高对事件发生时间的判定分辨率，也能更清晰地解析频谱分量间隔较近的信号的频率内容。

- 提升空间分辨率。例如，在图像分析及其他应用中，傅里叶变换常用于分析图像的频率内容。然而，傅里叶变换本身的空间分辨率有限，这意味着它无法在空间中精确定位频率分量。这一局限会使分析包含多个特征或感兴趣区域的复杂图像变得困难。

- 数据的双四元数表示有助于关联相关信息，从而提升可解释性。例如，基本的傅里叶变换提供了信号频率内容的数学表示，但无法直接解释信号。要解释傅里叶变换，需要了解信号及其属性；在某些情况下，使用其他方法也很难获得这些知识。

5 讨论

双四元数已成为处理多分量数据的常用数学工具，能够以高效、紧凑且统一的方式操纵、拼接和插值数据。然而，正如本文所述，将双四元数表示与傅里叶变换结合起来，还能带来更多机遇。例如，将双四元数与傅里叶变换结合，可解决若干局限（包括对噪声的敏感性，并提升可解释性）。滤波器本质上是线性的，但双四元数能够涵盖高度非线性的形式，从而构造出更为适用的滤波器。

6 结论

本文表明，双四元数傅里叶变换（DQFT）非常适用于多个领域，包括信号数据频谱内容的调整和滤波。例如，以双四元数表示的六维关节运动可以高效地转换到频域（表示为双四元数频率信号），以便采用滤波等处理技术。在双四元数频域中进行滤波的优势在于，可以将运动数据作为一个整体进行处理，而无需分别处理各个通道。我们认为，这种方式能够保留更准确的信号信息，因为信号通道是作为一个整体进行处理的。本文还介绍了滤波之外的其他应用和研究。综上所述，我们想指出，双四元数傅里叶变换并不局限于变换数据（例如旋转和平移），还可以应用于其他形式和过程，例如模式识别和数据压缩。我们的工作旨在补充现有的众多交互式工具，这些工具以双四元数为基础格式，用于信号的编辑和构建。

参考文献

[1] Patrick Bas、Nicolas Le Bihan 和 Jean-Marc Chassery。使用四元数傅里叶变换进行彩色图像水印处理。载于 *声学、语音与信号处理，2003*年。会议论文集（*ICASSP'03*）。*2003*年*IEEE*声学、语音与信号处理国际会议，第3卷，第III–521页。IEEE，2003年。 2

[2] Armin Bruderlin 和 Lance Williams。运动信号处理。载于《第 22 届计算机图形学与交互技术年度会议论文集》，第 97–104 页。ACM，1995 年。1[3] Neil T Dantam。使用双四元数实现稳健高效的正向、微分和逆运动学。《国际机器人研究期刊》，40(10-11):1087–1105，2021 年。2[4] Zhenghu Ding、Ying Yu、Bin Wang 和 Liming Zhang。一种基于双四元数的视觉注意力方法及其在多光谱图像船舶检测中的应用。《神经计算》，76(1):9–17，2012 年。1, 2[5] Todd A Ell、Nicolas Le Bihan 和 Stephen J Sangwine。《用于信号和图像处理的四元数傅里叶变换》。John Wiley & Sons，2014 年。3[6] Todd Anthony Ell。用于分析二维线性时不变偏微分系统的四元数傅里叶变换。载于《决策与控制，1993：第 32 届 IEEE 会议论文集》，第 1830–1841 页。IEEE，1993 年。1[7] Chenlei Guo、Qi Ma 和 Liming Zhang。利用四元数傅里叶变换的相位谱进行时空显著性检测。载于《计算机视觉与模式识别，2008：IEEE 2008 年计算机视觉与模式识别会议论文集》，第 1–8 页。IEEE，2008 年。1[8] Ben Kenwright。双四元数入门指南：它们是什么、如何工作，以及如何用于 3D 角色层级结构。第 20 届 WSCG 计算机图形学、可视化与计算机视觉国际会议，Plzen，2012 年。3[9] Ben Kenwright。用于角色运动的四元数傅里叶变换。虚拟现实交互与物理仿真研讨会，2015 年。1[10] Ben Kenwright。使用双四元数、指数映射和关节限制的逆运动学。arXiv 预印本 arXiv:2211.01466，2022 年。2[11] Benjamin Kenwright。双四元数：理论及其在声音领域的应用。arXiv 预印本 arXiv:2303.12692，2023 年。2[12] Benjamin Kenwright。双四元数综述。arXiv 预印本 arXiv:2303.14765，2023 年。2, 4[13] Hui Lou 和 Jinxiang Chai。基于示例的人体运动去噪。《IEEE 可视化与计算机图形学汇刊》，16(5):870–879，2010 年。1[14] Soo-Chang Pei、Jian-Jiun Ding 和 Ja-Han Chang。通过二维复数快速傅里叶变换高效实现四元数傅里叶变换、卷积和相关。《IEEE 信号处理汇刊》，49(11):2783–2797，2001 年。4[15] Salem Said、Nicolas Le Bihan 和 Stephen J Sangwine。快速复化四元数傅里叶变换。《IEEE 信号处理汇刊》，56(4):1522–1531，2008 年。3[16] Stephen John Sangwine。使用四元数或超复数对彩色图像进行傅里叶变换。《电子快报》，32(21):1979–1980，1996年。1, 2[17] Jon M Selig。对偶四元数的指数映射和 Cayley 映射。《应用克利福德代数进展》，20:923–936，2010 年。2[18] Mikio Shinya、Takeaki Mori 和 Noriyoshi Osumi。周期运动合成与傅里叶压缩。《可视化与计算机动画期刊》，9(2):95–107，1998 年。1[19] Ken Shoemake。使用四元数曲线制作旋转动画。载于《ACM 计算机图形学》，第 19 卷，第 245–254 页。ACM，1985 年。1, 2[20] Munetoshi Unuma、Ken Anjyo 和 Ryozo Takeuchi。基于傅里叶原理的情感驱动人体动画。载于《第 22 届计算机图形学与交互技术年度会议论文集》，第 91–96 页。ACM，1995 年。1[21] Jue Wang、Steven M Drucker、Maneesh Agrawala 和 Michael F Cohen。卡通动画滤镜。载于《ACM 图形学汇刊（TOG）》，第 25 卷，第 1169–1173 页。ACM，2006 年。2