arXiv:2305.02806v1 [cs.LG] 3 May 2023

存在偏差时用于推荐的次模函数最大化

AnayMehrotra NisheethK.Vishnoi 耶鲁大学
耶鲁大学

2023年5月5日

摘要

子集选择任务出现在推荐系统和搜索引擎中，要求选择一个项目子集，使其价值对用户最大化。子集的价值通常呈现边际收益递减，因此人们一直使用次模函数对其建模。如果定义次模函数的输入已知，则可以使用现有算法。然而，在许多应用中，人们发现输入存在社会偏见，从而降低了输出子集的效用。因此，人们希望通过干预措施提升效用。以往研究聚焦于最大化线性函数——次模函数的一种特殊情况——并表明，基于公平性约束的干预措施不仅可以确保比例代表性，还能在存在偏差时实现近乎最优的效用。我们研究了一类次模函数的最大化问题，这类函数刻画了上述应用中出现的函数。我们的第一个结果表明，与线性函数不同，基于约束的干预措施无法保证这类次模函数达到最优效用的任何常数比例。我们的第二个结果是一个用于次模最大化的算法。在温和假设下，该算法可证明能够输出效用近乎最优的子集，并使每个群体中的项目都得到比例代表。通过使用合成数据和真实世界数据进行实证评估，我们观察到，与基线方法相比，该算法能够提升这类次模函数所对应输出子集的效用。

目录

1 引言 2 其他相关工作 **3**

6

3 模型 **7**

4 理论结果 **8**

4.1 公平性约束并不能保证潜在效用较高.8 4.2 一种可恢复近乎最优潜在效用的算法.9 4.3 理论结果的证明概述.11

5 实证结果 **12**

5.1 基线方法和设置.13 5.2 使用合成数据集进行模拟.13 5.3 使用真实世界数据进行模拟.14

6 证明 **16**

6.1 定理 4.1的证明.16 6.2 定理 4.3的证明.23

7 局限性与结论 37

A 子模最大化及相关工作的进一步讨论 43

A.1 以往工作中使用的子模函数的补充示例.43 A.2 关于公平性约束对效用益处的相关工作的进一步讨论.43 A.3 子模最大化的标准算法.44

B 实现 详情和附加图 45

B.1 实现细节.45 B.2 第 5 节模拟的补充图表.46 B.3 合成数据 1 模拟的附加图.47 B.4 合成数据 2 模拟的附加图.48 B.5 使用 MovieLens 20M 数据进行模拟的附加图.49

1 引言

子集选择广泛应用于许多基于网络的应用中，包括不同类型的内容推荐系统 [14, 23, 57, 66] 和搜索引擎 [2]。一般来说，在所有这些应用中，给定一组 n 项目（例如帖子、产品、视频或网站），任务是选出一个大小为 k 、对用户最有价值的子集 S。次模函数常用于刻画项目子集的效用，因为上述应用中存在边际收益递减性质 [44, 2, 25]。边际收益递减源于这样一个事实：某个项目对用户的价值取决于向用户展示的其他项目 [13, 47, 2, 23, 66]。例如，在推荐系统中，项目属于不同类别（如类型或产品类别），同一类别中的每个额外项目给用户带来的价值都会递减 [23, 57, 66]。类似地，在网络搜索中，结果属于不同类别（例如根据与技术、新闻、地点等的相关性划分），同一类别中的每个额外结果带来的价值都会递减 [2]。在涉及多个利益相关方（例如多个用户、内容创作者和平台）的场景中，若将项目 i 添加到一个已包含另一项目的子集中，且该项目与 i所对应的利益相关方相同，那么其带来的效用增量会小于将 i 添加到一个不包含此类项目的子集中时的增量 [25]。次模函数刻画了这种边际收益递减。形式上，如果对于任意两个子集 $S \subseteq T$ 以及项目 $i \notin T$，将 i 添加到 S 所带来的值增量至少与将 i添加到 T所带来的增量一样大，则称集合函数 F 为次模函数，即：

$$F(S \cup \{i\}) - F(S) \geq F(T \cup \{i\}) - F(T).$$

在上述应用中，给定 n 个项目以及所选项目最大数量的上限 $1 \leq k \leq n$，从高层次来看，目标是针对合适的次模函数 F 求解以下最大化问题： $2^{[n]} \to \mathbb{R}$

$$\max_{S \subseteq [n]:|S| \leq k} F(S). \tag{1}$$

一类次模函数。关于最大化次模函数 [58, 27, 26, 44, 54, 31]，已有大量研究。这些研究探讨了各种类型的次模函数。我们关注一类能够刻画推荐和网络搜索中许多函数的次模函数。在这些应用中，每个项目具有 m 属性，而项目 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 会为正在寻找具有第 j 个属性的项目的用户（或利益相关者）产生价值或效用 $W_{ij} \geq 0$ 。例如，在 Amazon Music 上， [57] 选择 W_{ij} 来表示歌曲 i 对于喜欢某种类型 j歌曲的用户所产生的效用。他们使用次模函数 $F(S) = \sum_{j=1}^{m} \log\left(1 + \sum_{i \in S} W_{ij}\right)$ 来刻画一组 S 歌曲推荐的价值。另一个例子是 [14]，粗略地说，他们设置 W_{ij} 来表示歌曲 i 对利益相关者 j 的效用。他们使用 $F(S) = \sum_{i \in S} W_{i1} + \sum_{j=2}^{m} \sqrt{\sum_{i \in S} W_{ij}}$ 来刻画 Spotify 上播放列表 S 的价值。将这些例子推广后，我们考虑以下这类次模函数：给定与每个属性对应的 m 个递增凹函数 g_1， g_2、..... g_m：$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，以及效用 W，次模函数 F 为

$$\forall S \subseteq [n], \quad F(S) \coloneqq \sum_{j=1}^{m} g_j\left(\sum_{i \in S} W_{ij}\right). \tag{2}$$

这里， W描述了项目在“孤立状态”下的效用，而 g_1、 g_2、.....、 g_m的凹性确保项目集合的效用呈现边际收益递减。[1] 我们将上述函数族记为$\mathscr{F}$。当对所有 x 和 j， $g_j(x) = \log(1 + x)$时， $\mathscr{F}$ 涵盖了 [57] 中的函数。它还涵盖了

[1]为此，假设我们有多个项目 $i \in \{1, 2, \ldots\}$，且每个项目 i 在第一个属性上的效用为$W_{i1} = 1$。设 $g(x)$ 为每个 x 对应的 $\sqrt{x}$，它是递增的凹函数。选择第一个项目会提高选择的效用 $g(1) - g(0) = 1$。进一步选择第二个项目时，效用增幅较小，为 $g(2) - g(1) \approx 0.414$；再选择第三个项目时，效用增幅则更小，为 $g(3) - g(2) \approx 0.318$。

当对所有 x， $g_1(x) = x$ 且 $g_2(x) = \cdots = g_m(x) = \sqrt{x}$ 时， [14] 所考虑的函数。此外，在 A.1 节中，我们证明 $\mathscr{F}$ 涵盖了 [2, 66]所用的函数。

如果效用 W 已准确获知，则可以使用标准算法近似求解程序（1）（参见第 2 节）。然而，在上述应用中，效用通常来源于用户；要么直接来自用户的反馈，要么间接来自基于用户数据训练的学习算法所作出的预测。因此，社会偏见可能会渗入这些观测到的 效用中。因此，相对于由真实或潜在的 效用所定义的目标函数 F，使基于这些观测效用定义的目标函数达到最大值的子集，其取值可能并非最优。

输入偏差。 观测效用中可能因各种机制而产生偏差。如果某些社会群体在数据中的占比高于其在用户群体中的占比，那么从这些数据中得出的效用就会偏向这些群体的观点。例如，2016年《捉鬼敢死队》重拍版的 IMDb 评分“遭到了一群粉丝的蓄意破坏，他们似乎对其全女性阵容感到不满” [7, 51]。除了这类显性偏差，人类还存在无意识的隐性偏见 [69, 8, 46, 29, 12]。人类的隐性偏见会体现在数据中，进而导致效用出现偏差 [12, 22]。具有社会显著性的群体之间的用户特征差异也可能造成偏差。例如， [41] 观察到，最先进的文本摘要算法生成的摘要对英语少数族裔方言的呈现不足。 [41]推测，这是由不同方言之间的“结构性差异”（例如句子或推文的长度差异）造成的。当算法用于估算效用时，这类算法偏差可能导致估算效用出现偏差。

偏差模型。 为捕捉此类偏差，我们考虑一个扩展了 [43]中的模型的模型。在此模型中，项目属于 p 个不相交群体 G_1， G_2，……， G_p中的一个。每个群体 G_ℓ 都有一个未知且递增的偏差函数 ϕ_ℓ: $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。群体 G_ℓ 中的项目 i 的观测效用定义如下

$$\forall\, 1 \leq j \leq m, \quad \widehat{W}_{ij} \coloneqq \phi_\ell\left(W_{ij}\right). \tag{3}$$

在上述示例中，群体 G_1、G_2、……、G_p可以分别对应主角为男性（分别为非男性）的电影集合，以及使用标准英语（分别为非裔美国人英语）撰写的推文集合。为了获得一些直观认识，考虑 [43]中研究的特殊情形：对于每个 ℓ 和 x， $\phi_\ell(x) = \beta_\ell \cdot x$，其中参数为 $0 < \beta_\ell < 1$。在这种情况下，群体 G_ℓ 中项目的观测效用比其潜在效用小 β_ℓ 倍。

为了具体说明与上述示例的联系，考虑用于推荐的用户评分：假设有 x 比例的用户存在明确的偏差，并将由女性担任主角的电影评分为 1（最低分）。这会使一部女性主角电影的评分从其真实值（例如 v）降至$v(1-x) + x$。可以通过设置 G_ℓ 为女性主角电影的集合，并为每个 z设定$\phi_\ell(z) = z \cdot (1-x) + x$，来对此类偏差进行建模。上述设置也可用于对算法偏差建模。例如，考虑一种（假设的）算法，其对推文的评分与推文文本的 TF-IDF 分数成正比。由于已知包含更多“常见词” [47], 的文本 TF-IDF 分数较低，因此使用较高比例（例如 x_D）常见词的方言 D 推文会得到较低的评分。可以用 $\phi_\ell(z) = z \cdot h(x_D)$来建模，其中 h是一个递减函数，而群体 G_ℓ由方言 D中的所有推文组成。

由于平台无法观测到潜在效用 W，因此自然会输出子集 $\widehat{S}$。该函数 F 由观测效用 W定义，并使其最大化：

$$\widehat{S} \coloneqq \operatorname*{argmax}_{T \subseteq [n]\colon |T| \leq k} \widehat{F}(T), \quad \text{where,} \quad \text{for all } T \subseteq [n], \quad \widehat{F}(T) \coloneqq \sum_{j=1}^{m} g_j\left(\sum\nolimits_{i \in S} \widehat{W}_{ij}\right).$$

由于 S 优化的是与 F 不同的目标函数，因此 S 的潜在效用 $F(S)$ 可能低于最优潜在效用 $\mathrm{OPT} := \max_{S\subseteq[n]:|S|\le k} F(S)$。

> 给定 W，我们能否找到一个集合 S，使得 $F(S)$ 接近 OPT?

相关工作。近期研究 [43, 18, 48] 探讨了上述模型的一个特殊情形，其中目标函数 F 是线性函数——$\mathscr{F}$ 中的一种特定函数类型——而对于每个 ℓ，偏差函数为 $\phi_\ell(x) = \beta_\ell \cdot x$，其中参数为 $0 < \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p < 1$。这些研究探讨了要求输出 S 满足公平性约束能否提高其潜在效用 $F(S)$。实践中已考虑多种公平性约束 [67, 6]：平等代表性要求 S 来自每个群体 G_ℓ 的项目数量至多为 k/p；比例代表性要求 S 来自每个群体 G_ℓ 的项目数量至多为 $k \cdot |G_\ell|/n$。人们也考虑了这些约束的推广形式：给定数值 u_ℓ，推广形式分别要求每个 ℓ 满足 $|S \cap G_\ell| \le u_\ell \cdot k$。采用公平性约束有诸多原因，包括伦理和法律方面的原因 [74, 61, 62, 6]。[43, 18, 48] 表明，公平性约束的另一项好处是能够提高输出的潜在效用。给定 $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$，令 S_u 为满足 u 所指定约束、且观测效用 $\sim F(S_u)$ 最大的子集。在特殊情况下，如果 F 是线性的（例如，$F(S) := \sum_{i\in S} W_{i1}$），且潜在效用 W 是从某个分布中独立同分布抽取的，[18, 48] 证明，如果 u 体现比例代表性，那么 $F(S_u) \ge (1 - o_k(1)) \cdot \mathrm{OPT}$。因此，一个自然的问题是：对于子模函数 F 所属的函数族 $\mathscr{F}$，是否存在某个 u，使得 $F(S_u)$ 接近 OPT。

群体中的随机性。[43, 18, 48] 假设 W 中的条目是从某个分布中独立同分布地抽取的。我们将这一假设放宽：令 W 任意，并假设群体 G_1、G_2、……、G_p 是随机生成的，且与 W 独立。具体做法是，先从项目中均匀抽取 $|G_1|$ 个不同项目并分配给 G_1，然后从剩余项目中抽取 $|G_2|$ 个不同项目并分配给 G_2，依此类推。这反映了一种看法：不同群体中项目的潜在效用不存在系统性差异。此外，如果 W 中的条目也以独立同分布的方式抽取，那么这就等同于 [43, 18, 48] 的模型。关于该模型及其结果的进一步讨论见 A.2 节 [43, 18, 48]。

我们的贡献。我们首先研究公平性约束在实现较高潜在效用方面的效果。我们的第一个结果表明，对于任意 $\varepsilon > 0$ 和上界参数 u，都存在一个定义在 $\mathscr{F}$ 上的次模函数 F、潜在效用 W 以及函数 ϕ_1、ϕ_2、……、ϕ_p，使得以高概率，S_u 的潜在效用至多为 $\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}$（定理 4.1）。因此，无论如何选择 u，都无法确保 $F(S_u)$ 接近 OPT。对于 [43, 18, 48] 中研究的“乘法型”偏差函数 ϕ_1、ϕ_2、……、ϕ_p，这一结果同样成立。因此，这与 [43, 18, 48] 的结果形成对比：对于任意线性 F，总存在一个 u 来规定公平性约束，使得 $F(S_u) \ge (1 - o_k(1)) \cdot \mathrm{OPT}$。这表明，与次模函数相比，公平性约束在线性目标函数下的效果有所不同。

在积极的一面，我们提出了一种在存在偏差时进行子模最大化的算法（算法 1）。算法 1 可与族 $\mathscr{F}$ 中的任意次模函数 F 配合使用。如果每个项目 i 对至多一个属性具有非零效用（假设 1），那么该算法可保证输出一个潜在效用近乎最优的子集（定理 4.3）。在某些情境下，假设 1 很自然：例如，[2] 在网络搜索中就使用了这一假设。此外，我们第一个结果中的构造也满足该假设。具体而言，我们证明，在假设 1 下，给定观测效用 W，算法 1 输出的子集 S 的潜在效用至少为

$\left(1 - O(\tau^{-1}m^2k^{-1/4})\right) \cdot \mathrm{OPT}$，其中 $\tau > 0$ 是使得 W 的所有非零项都介于 τ 和 τ^{-1} 之间的最小值（定理 4.3）。

算法 1 与用于约束单调子模最大化的标准贪心算法不同 [58, 27, 55]：粗略地说，在给定约束的情况下，贪心算法会迭代选择边际效用最高的项目（或边际效用的近似值）。另一方面，算法 1 会先根据给定数据计算“恰当的”约束，然后在所计算的约束下执行子模最大化。

在实证方面，当假设 1 不成立时，我们评估算法 1 的性能。我们在 MovieLens 20M [33] 和两个合成数据集上运行模拟，并与基线方法 Uncons 和 ProportionalRepr 进行比较；其中，前者输出使观测效用最大化的子集，后者输出在满足比例代表性的条件下使观测效用最大化的子集。对于每个 $\ell \neq 1$，我们固定 $\phi_1(x) = x$ 和 $\phi_\ell(x) = \beta \cdot x$。在合成数据集上的模拟中，我们观察到，即使 β ($\beta \leq 0.01$) 较小，算法 1 所达到的潜在效用仍高于 $\beta = 1$ 时（即不存在偏差）所达到潜在效用的 0.95 倍。相比之下，Uncons 输出的子集的潜在效用会随着 β 而下降；对于 $\beta < 0.1$，其潜在效用最多比 OPT 小 12%。在 MovieLens 20M [33], 上，我们观察到，在与男性刻板印象相关的类型中，由男性演员主演的电影，其数据中的预测相关性得分明显高于由非男性演员主演的电影，最高可达 3 倍。相比之下，在所有类型中，这两类电影的用户评分相差均不超过 6%。我们使用这些（有偏差的）相关性分数，从男性刻板印象类型的集合中推荐电影，并使用用户评分评估推荐电影的性能。在 31 个类型集合中的 14 个集合上，算法 1 的表现至少比 Uncons 和 ProportionalRepr 高 3%；在超过 87% 的男性刻板印象类型集合上，其表现与 Uncons 和 ProportionalRepr 相近（差异在 1% 以内）或更好。

2 其他相关工作

信息检索与推荐中的公平性。信息检索与推荐系统（例如个性化信息流生成器、新闻推荐系统和搜索引擎）具有显著的社会影响 [59]。它们是个体获取信息的主要来源之一 [47, 59, 21, 62], ，而这些个体反过来又对这些系统给予了高度信任——倾向于认同其输出结果 [20] 并遵循其建议 [30]。如果不考虑公平性，已有研究发现，现有系统的输出会编码各种社会偏见 [60], 从而导致某些社会群体 [39], 代表性不足、用户观点两极分化 [52], ，以及剥夺个体获得经济机会的权利 [32]。因此，越来越多的研究开始设计干预措施，以减轻偏差带来的不利影响 [47, 21, 62]。这些研究大致可分为三类：减轻对用户不利影响的研究 [72, 38, 1], 、减轻对项目（指新闻推荐中的记者、歌曲推荐中的艺术家以及在线招聘平台中的个体等提供者）不利影响的研究 [64, 73, 71, 70, 28, 9], ，以及同时考虑这两方面的研究 [49, 50]。这些类别中的研究采用了多种不同的方法：从修改相关性估计流程以满足公平性标准 [73, 71, 72], ，到要求输出结果满足公平性约束 [64, 70, 28, 9], ，再到修改系统的目标函数以纳入公平性指标 [50, 1, 38, 49]。我们重点关注输入数据中的偏差对项目或提供者造成的损害，并研究当输出效用由次模函数表示时，公平性约束在减轻这些损害方面的有效性。与本研究不同，以往的大多数研究都假设输入数据是准确的且不存在偏差。

子模最大化。 关于在不同类型的约束条件下最大化次模函数的研究成果十分丰富 [58, 27, 26, 44, 54, 31]。其中，基数约束尤其值得关注。这类约束的形式为 $|S| \leq k$，其中 k 为某个固定值。给定一个基数约束以及针对 F 的评估预言机， [58] 的标准贪心算法会选出大小为 k 的子集 S，使得 $F(S) \geq (1 - e^{-1}) \cdot \mathrm{OPT}$，同时对 F 至多进行 nk 次评估，并至多执行 $O(nk)$ 次额外算术运算 [58],，其中 $\mathrm{OPT} = \max_{|S| \leq k} F(S)$。人们还设计了该算法的若干变体。这些变体将常数因子近似保证推广至其他类型的约束（包括第 1 节中所述的上界），提高了算法的运行速度，并设计了该算法的分布式变体 [53, 55, 15, 56]。最后，受特定情境下的公平性要求启发，近期一些研究 [17, 4, 3, 11, 10, 68] 还探讨了在超出第 1 节所引入的约束族的约束条件下进行子模最大化。然而，与本研究不同的是，这些研究假定可以评估真实函数 F；但在存在偏差的情况下，这可能无法实现。

3 模型

设有 n 个项目，索引由取值集合 $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$给出。集合函数 $F\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}$ 称为次模函数，如果对于每一对子集 $T \subseteq S \subseteq [n]$ 和项目 $i \in [n]$， $F(S \cup \{i\}) - F(S) \geq F(T \cup \{i\}) - F(T)$。我们考虑以下一类次模函数，它们在内容推荐 [14, 23, 57, 66]和网络搜索 [2]的场景中得到研究。

定义 3.1 (**一类次模函数**)。 $\mathscr{F}$ 是所有次模函数F构成的函数族，这些函数由一个数 m、递增凹函数 $g_1, g_2, \ldots, g_m\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$以及矩阵 $W \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times m}$作为参数，定义如下： $F(S) := \sum_{j=1}^{m} g_j \left(\sum_{i \in S} W_{ij} \right)$.

在上述定义中，为所有 x 和 j 设置 $g_j(x) = \log(1 + x)$，我们得到 [57] 在 Amazon Music 上测试的次模函数。对于所有 x 和 $j \neq 1$，令 $g_1(x) = x$ 且 $g_j(x) = \sqrt{x}$，我们得到 [14] 用于衡量歌曲播放列表质量的次模函数。更多示例见 A.1 节。

给定合适的 $F \in \mathscr{F}$ 和一个数字 k，我们在动机应用中的目标是求解以下程序：

$$\max_{S \subseteq [n] : |S| \leq k} F(S).$$

如果已知 W，因此也已知 F，那么可以希望找到一个子集 S，使得 $F(S)$ 接近该程序的最优值 OPT。然而，如前所述，在许多情境中，平台 W 观察到的效用 $\widehat{\ }$ 可能会编码社会偏见，因此不同于真实的或潜在的效用 W。这里，我们考虑一种基于 [43, 18] 构建的偏差模型。在该模型中，项目属于 p 个不相交群体 G_1， G_2， $\ldots$， G_p 之一。我们弱化 [43, 18] 中的假设（以及 [48] 中相关模型的假设），允许 W 为任意值，并要求 G_1， G_2， $\ldots$， G_p 以随机方式生成。具体而言，给定大小 $|G_1|$， $|G_2|$， $\ldots$， $|G_p|$， G_1 通过从中均匀随机且不放回地选取 $|G_1|$ 个项目构造， G_2 通过从剩余项目中均匀随机地选取 $|G_2|$ 个项目构造，依此类推。我们将 $\gamma > 0$ 定义为一个常数，使得对于每个 $1 \leq \ell \leq p$

$$|G_\ell| \geq \gamma n.$$

偏差模型如下。

定义 3.2 (**偏差模型**)。 对于每个 ℓ，存在一个未知且递增的偏差函数$\widehat{\phi}_\ell\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得项目 $i \in G_\ell$ 的第 j 个属性的观测效用为 $W_{ij} := \phi_\ell(W_{ij})$。

A.2 节将其扩展到重叠群体。具体群体因应用场景而异，例如可以根据与每个 $\widehat{}$项目相关的社会显著属性（如性别、种族或年龄）来定义（参见第 1 节中的示例）。对于任意 $F \in \mathscr{F}$（由 W 参数化），令 F 为相应的 $\widehat{}$ 函数（由 W 参数化）。本文研究以下问题。

$\widehat{}$问题 1。给定 m 函数 g_1、g_2、……、g_m 以及一个 $n \times m$ 矩阵 W，对一个单调$\widehat{}$次模函数 F进行参数化，在不了解具体偏差函数 ϕ_1、ϕ_2、……、ϕ_p的情况下，找出一个大小至多为 k 的子集S，使得 $F(S) \approx \mathrm{OPT}$。

注意，对于线性函数（它们也属于函数族 $\mathscr{F}$），如果偏差函数是"乘性的"，那么 [43, 18] 已经表明，在满足比例代表性约束的条件下，使观测效用最大化的集合 S_u 满足 $F(S_u) \approx \mathrm{OPT}$。由于当 F 是线性的时，可以高效地找到 S_u，因此，这为线性 F 和乘性偏差函数的情况解决了问题 1。本文研究了将这一结果推广到其他偏差函数和子模 F 的情形。

4 理论结果

4.1 公平性约束并不能保证较高的潜在效用

在本节中，我们考虑一类公平性约束，并证明该类公平性约束都无法保证达到最优潜在效用的一个常数比例。

对于每个 $1 \le \ell \le p$，令 γ_ℓ 为属于 G_ℓ的所有项目所占比例，即 $\gamma_\ell := \frac{|G_\ell|}{n}$。对于任意向量 u 和 v，由 u 和 v 指定的约束要求输出子集 S 满足

$$1 \le \ell \le p, \quad |S \cap G_\ell| \le (u_\ell + v_\ell \gamma_\ell) \cdot k.$$

这一类公平性约束推广了第 1 节中引入的约束族（该约束族对应于上述约束族中 $v = 0$ 所构成的子集）。具体而言，对于每个 ℓ，当 $u_\ell = \frac{1}{p}$ 和 $v_\ell = 0$ 时，上述约束族刻画了平等代表性；当 $u_\ell = 0$ 和 $v_\ell = 1$ 时，则刻画了比例代表性。给定 (u, v)，令 S_{uv} 为满足 u 和 v 所指定约束、且使观测效用 F 最大化的子集。我们的第一个结果研究了 S_{uv} 在乘性偏差下的效用，这种偏差由 [43, 18] 研究。

定理 4.1（公平性约束不保证 OPT 的任何比例）。定义 $\phi_1(x) = \beta_1 \cdot x$ 以及 $\phi_2(x) = \beta_2 \cdot x$ 对所有 x。对于任意 $0 < \varepsilon < 1$，$u = (u_1, u_2)$，以及 $v = (v_1, v_2)$ 存在

- 一个次模函数 $F \in \mathscr{F}$，
- 数字 $0 \le \gamma_1, \gamma_2 \le 1$ 用于指定群体规模，
- 数字 $0 < \beta_1, \beta_2 \le 1$ 分别指定 ϕ_1 和 ϕ_2，以及
- 由 n参数化的 $n \times m$ 矩阵族 $\mathcal{W}$，

使得，对于任意 $k \ge$ 多项式(ε^{-1})、$n \ge k \cdot$多项式(ε^{-1}) 以及 $W \in \mathcal{W}(n)$，

$$\Pr\left[F(S_{uv}) \le \varepsilon \cdot \mathrm{OPT}\right] \ge 1 - \varepsilon,$$

其中，概率取自 G_1 和 G_2中的随机性。

因此，对于上述类别中的任意公平性约束以及任意 $\varepsilon > 0$，在函数族 $\mathscr{F}$ 和效用函数族中，都存在一个次模函数，使得在满足公平性约束的条件下最大化观测效用的子集，其效用至多为最优值的 ε 倍（以高概率成立）。

通过添加空群体，定理 4.1 可以直接推广到 $p > 2$ 个群体。将效用固定为使得每个项目 i 均有 $W_{ij} = 0$，且 $j \in [m]\backslash[3]$，也可以将其推广到 $m > 3$ 个属性。请注意，在上述结果中，偏差函数 ϕ_1 和 ϕ_2 是乘法形式的，且乘法常数为正数 β_1，$\beta_2 > 0$。这确保了群体内项目的效用顺序得以保留（无论 β_1 和 β_2 离 0 有多近）。在这一性质下，[18] 表明，比例代表性约束通过线性函数 F 可以恢复近乎最优的潜在效用。相比之下，定理 4.1 表明，当 F 为次模函数时，这一结论并不成立（即使偏差函数满足相同的乘法性质）。事实上，定理 4.1 表明，如果 F 是次模函数，那么在满足比例代表性（或上述类别中的任何其他公平性约束）的条件下最大化观测效用的子集，其潜在效用可能远低于最优值。定理 4.1 的证明见第 6.1 节。

4.2 一种恢复近似最优潜在效用的算法

在本节中，我们介绍我们的主要算法——算法 1，以及其性能的理论保证（定理 4.3）。算法 1 可用于族 $\mathscr{F}$ 中的任意函数。它输出一个子集，该子集按比例代表来自每个群体的项目，并且对于满足可通过算法验证的“不相交”假设（假设 1）的 $\mathscr{F}$ 中的函数，具有近似最优的潜在效用。

不相交性假设。对于每个 j，令 C_j 为对第 j 个属性具有正效用的项目集合 i，即，

$$C_j \coloneqq \{i \in [n] : W_{ij} > 0\}.$$

直观而言，C_j 是与“第 j 个属性”相关的项目集合。更具体地说，在我们的许多动机场景中，属性对应于不同类别的项目，例如类型、主题或零售类型 [57, 2, 42]。这里，C_j 是第 j 个类别中的项目集合。

假设 1 (不相交的类别)。矩阵 $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 满足 C_1、……、C_m 互不相交。

假设 1 在相关项目类别互不相交的任何情境下都成立。在网络搜索的情境中，[2] 已识别并研究了上述假设。偏离假设 1 可能会降低算法 1 的性能。在第5节中，我们评估算法 1 在不满足假设 1 的 MovieLens 20M 数据 [33] 上的性能（图 2）。[2] 我们还评估算法 1 在违反假设 1 的合成数据上的性能，该数据受到 [14] 部署基于子模最大化的算法的启发（图 1(b)）。

我们的算法。算法 1 输出一个满足比例代表性约束的子集。然而，关键在于，其输出未必是在满足比例代表性约束的前提下使观测效用最大化的结果。相反，其输出满足依赖数据的公平性约束（尤其是，这些约束保证输出按比例代表每个群体G_1，G_2，……，G_p）。具体而言，算法 1 的约束由 m 个值 k_1，k_2，……，k_m指定，使得 $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = k$：对于每个 j，输出子集从第 j 类别C_j中选取 k_j 个项目，以按比例代表受保护群体 G_1，G_2，……，G_p。请注意，这尤其保证了对于任何 k_1，k_2，……，k_m，输出子集中来自每个群体 G_1，G_2，……，G_p 的项目数量均符合比例。

该算法分为两部分。第一部分根据给定数据计算“恰当”的约束。由此确定参数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$，并在第二部分中使用这些参数。第二

[2]在 MovieLens 20M 数据中，集合 $C_1, \ldots, C_m$ 表示电影的类型；当一部电影属于多种类型时，这些集合可能不相交。

部分在计算得到的约束下执行子模最大化：对于每个 j，算法都会选择一个大小为 k_j 的子集 S_j，使观测效用 $g_j\left(\sum_{i\in S} W_{ij}\right)$ 最大化，同时从每个群体 $G_1, G_2, \ldots, G_p$中按比例选择项目。算法 1 输出子集$S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$。

主要理论结果。关于算法 1 性能的理论结果假设存在一个群体，例如 G_1，其中项目 G_1 的效用不存在"偏差"，即对应于 G_1 的偏差函数 ϕ_1 是恒等函数。当效用反映项目的相对"质量"或"相关性"时，这一假设意味着，群体 G_1 中项目的观测效用可作为"参照"，其他所有群体的偏差函数都以此为基准定义。例如，考虑满足以下形式的乘性偏差函数：对于每个 x 和 $1 \le \ell \le p$，$\phi_\ell(x) = \beta_\ell \cdot x$。假设 ϕ_1 是恒等函数，相当于将其他偏差函数重新缩放 β_1，即对于每个 x 和 ℓ，令 $\phi_\ell(x) = \frac{\beta_\ell}{\beta_1} \cdot x$。

算法 1 的性能取决于 W 非零元素的取值范围。我们定义参数 τ 来刻画这一范围。

定义 4.2. 令 $\tau > 0$ 为最小常数，使得对于每个项目 $i \in [n]$ 和属性$j \in [m]$，要么 $W_{ij} = 0$，要么 $\tau < W_{ij} < 1/\tau$。

算法 1 的性能取决于 τ，这是由于某个集中不等式所致，该不等式涉及形如 $\sum_{i\in S\cap G_\ell} W_{ij}$ 的和，而这取决于 τ（第 6.2 节中的引理 6.4）。

定理 4.3 (**算法 1 的潜在效用保证**)。假设 ϕ_1 是恒等函数。存在一种算法（算法 *1*），给定观测效用 $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 以及针对 g_1、g_2、……、g_m：$\mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 的评估预言机，输出一个大小为 k 的集合 S，并具有以下性质（在假设 *1* 下）：对于任意 ε、τ、$\gamma > 0$，以及任意递增函数 ϕ_2、ϕ_3、……、ϕ_p：$\mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，存在足够大的 k_0（取决于 ε、γ、m 和 τ），使得对于任意 $k \ge k_0$，其概率至少为$1-\varepsilon$

$$F(S) \ge \mathrm{OPT} \cdot (1-\varepsilon).$$

其中，概率是针对选择 G_1、$\ldots G_p$ 时的随机性而言的。该算法对每个 g_1、g_2、……、g_m 进行 $O(nk)$ 次评估，并执行 $O(nk\log n)$ 次额外的算术运算。

如果已知潜在效用，那么在不相交性假设（假设 1）下，可以利用标准子模最大化算法 [2] 高效地找到一个具有最优潜在效用的集合 S。挑战在于，当潜在效用未知时，如何输出一个具有较高潜在效用的子集，而现有的子模最大化算法（无论是否具有公平性约束）都可能产生较低的潜在效用（定理 4.1）。定理 4.3 表明，对于 k 足够大的情况，算法 1 无需知道潜在效用即可输出一个具有近似最优潜在效用的集合，而无需知道潜在效用。

定理 4.3 可以（通过相同的证明）推广到偏差模型的一个更一般形式：对应于 W_{ij} 的偏差参数不仅取决于 i 所属的受保护群体，还取决于索引 j：对于每个 $1 \le \ell \le p$ 和第 j 个属性，都存在一个递增函数 $\phi_{\ell j}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得项目 $i \in G_t$ 的观测效用为

$$(\widehat{W}_{i1}, \widehat{W}_{i2}, \ldots, \widehat{W}_{im}) = (\phi_{t1}(W_{i1}), \phi_{t2}(W_{i2}), \ldots, \phi_{tm}(W_{im})). \tag{4}$$

当 $\phi_{t\ell} = \phi_\ell$ 对每个 $1 \le t \le m$成立时，这就归结为定义 3.2 中的偏差模型。定理 4.3 中的参数k_0 取决于 ε，γ、m 和 τ，其关系为 $\widetilde{O}\left(\varepsilon^{-4}\tau^{-4}\gamma^{-10}m^8\right)$。对于一般的次模函数，输出一个满足 $F(S) \ge (1-e^{-1}) \cdot \mathrm{OPT}$ [26] 的集合 S 是**NP**难问题。算法 1 给出一个

算法 1

输入： 一个矩阵 $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$、一个数 $k \in \mathbb{N}$、群体 G_1，G_2、……、G_p，以及集合 C_1、……、C_m**输出：** 一个大小为 k 的子集 S

▷第 *1* 部分：计算数据依赖约束~1: 初始化 $S = \emptyset$ 并定义以下函数

$$\forall T \subseteq [n], \quad \widetilde{F}(T) \coloneqq \sum_{j=1}^{m} g_j\left(\frac{n}{|G_1|} \cdot \sum\nolimits_{i\in T\cap G_1} \widehat{W}_{ij}\right). \tag{5}$$

2: **对于** $1 \le j \le m$，**执行**

3: 按 $\widetilde{F}(i) - \widetilde{F}(\emptyset)$ 的降序对 i 中的项目 $C_j \cap G_1$ 排序，添加前 $\min\{\sqrt{k}, |C_j \cap G_1|\}$ ~ 中的项目 S

4: **结束循环**5: **当** $|\widetilde{S}| < k \cdot \frac{|G_1|}{n}$ **时**~ ~6: 设置 $S \coloneqq S \cup \{i\}$ 其中 i 为……中的项目 G_1，该项目能使观测到的边际增量最大化 ~ ~ ~ ~ 效用：$F(S \cup \{i\}) - F(S)$

7: **结束循环**

~8: 对每个 $1 \le j \le m$，令 $k_j \coloneqq |S \cap C_j|$

▷ 第 *2* 部分：对于每个 j，选择一个大小为 k_j 的集合 $S_j \subseteq C_j$，使其在满足比例代表性的同时最大化观测效用

9: 初始化 $S_j \coloneqq \emptyset$，对每个 $1 \le j \le m$

10: **对于** $1 \le j \le m$ 和 $1 \le t \le k_j$，**执行**

11: 将 $\mathcal{C}$ 定义为 C_j 中可添加到 S_j 且不会违反比例的项目集合

代表性约束

12: 设 $S_j \coloneqq S_j \cup \{i\}$，其中 i 是 $\mathcal{C}$ 中边际效用最高的项目：

$$g_j\left(W_{ij} + \sum\nolimits_{t\in S_j} W_{tj}\right) - g_j\left(\sum\nolimits_{t\in S_j} W_{tj}\right).$$

13: **结束循环**

14: **返回** $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$

更强的保证（当 k 较大时），因为这一困难性结果在假设 1 下并不成立：如果已知 ϕ_1，ϕ_2，……，ϕ_p，且假设 1 成立，那么就存在一种高效算法，能够找到一个子集 S，使其具有最优潜在效用 [2]。最后，我们指出，在陈述结果时，我们尽可能清晰地体现了各个参数的影响，而没有尝试优化常数。定理 4.3 的证明见第 6.2 节。

4.3 理论结果的证明概述

4.3.1 将线性 F方法扩展时的技术挑战

考虑线性函数 $F(S) = \sum_{i\in S} W_{i1}$ 以及子集 S_u：该子集在满足比例代表性约束的条件下，使 F 的观测效用最大化。[18, 48] 证明了 S_u 的潜在效用 $F(S_u)$ 至少为 $(1 - o_k(1)) \cdot \mathrm{OPT}$。该结果依赖于任意线性函数 F 的两个性质：

1. 对于任意子集 S， $F(S) = \sum_{\ell \in [p]} F(S \cap G_\ell)$

2. 对于任意递增函数 ϕ_1、ϕ_2、.....、ϕ_p、 $\ell \in [p]$ 和 $R \subseteq [n]$,

$$\operatorname{argmax}_{S \subseteq R \cap G_\ell : |S| \leq k} \widehat{F}(S) = \operatorname{argmax}_{S \subseteq R \cap G_\ell : |S| \leq k} F(S).$$

假设 S_{OPT} 满足比例代表性。利用性质 1，可以证明 $S_u = \bigcup_{\ell=1}^{p} \widehat{T}_\ell$ 和 $S_{\mathrm{OPT}} = \bigcup_{\ell=1}^{p} T_\ell$，其中

$$\widehat{T}_\ell \coloneqq \operatorname*{argmax}_{T \subseteq G_\ell, |T| \leq k|G_\ell|/n} \widehat{F}(T) \text{ and } T_\ell \coloneqq \operatorname*{argmax}_{T \subseteq G_\ell, |T| \leq k|G_\ell|/n} F(T).$$

此外，由于性质 2（取 $R = [n]$），可知对于任意 $\ell \in [p]$， $T_\ell = T_\ell$，因此 $S_u = S_{\mathrm{OPT}}$。这依赖于假设 S_{OPT} 满足比例代表性。这一点未必总是成立，但可以证明，以高概率而言， S_{OPT} 近似满足比例代表性。利用这一点，并考虑上述论证中的近似误差，可以证明 $F(S_u) \approx F(S_{\mathrm{OPT}})$。然而，遗憾的是，简单的例子表明，上述两个性质对于 $\mathscr{F}$ 中的次模函数都不成立。

4.3.2 定理4.3的证明概述

在 A 下 假设 1 下，我们证明上述性质 1 和性质 2 的以下变体。 :
对于任意子集 S， $F(S) = \sum_{j \in [m]} \sum_{\ell \in [p]} F(S \cap G_\ell \cap C_j)$。

- 对于任意递增函数 ϕ_1， ϕ_2，.....， ϕ_p， $\ell \in [p]$，以及 $j \in [m]$

$$\operatorname{argmax}_{S \subseteq C_j \cap G_\ell : |S| \leq k} \widehat{F}(S) = \operatorname{argmax}_{S \subseteq C_j \cap G_\ell : |S| \leq k} F(S).$$

观察。设 S_{OPT} 是具有最优潜在效用的任意子集。假设对于所有 $1 \leq j \leq m$，我们都知道 $k_j \coloneqq |S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j|$。如果对于所有 j， $k_j \geq \sqrt{k}$，那么利用上述性质（并调整 [48]的分析），我们可以证明，以高概率， $S \coloneqq \bigcup_{j=1}^{m} S_j(k_j)$ 的潜在效用至少为 $(1 - o_k(1)) \cdot F(S_{\mathrm{OPT}})$。其中，对于每个 $1 \leq j \leq m$， $S_j(k_j) \subseteq C_j$ 是满足比例代表性约束且至多选择 k_j 个项目时，使观测效用最大化的子集。

算法 1 的第 1 部分计算估计值 k_1、k_2、.....、k_j，对应于 k_1、k_2、.....、k_j。为此，它利用了这样一个事实： ϕ_ℓ 对于某个（已知的） ℓ 是恒等函数，并且群体 G_1、G_2、.....、G_p 是以随机方式构造的。估计值 k_1、.....、k_j 规定了第 2 部分的约束。算法 1 的第 2 部分输出集合 $S \coloneqq \bigcup_{j=1}^{m} S_j(\tilde{k}_j)$。对于某些 j，可能会出现 $|S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j| < \sqrt{k}$，因此上述论证并不适用。算法 1 通过高估 k_j 来避免这一问题，以确保对于所有 $1 \leq j \leq m$，都有 $\tilde{k}_j \geq \sqrt{k}$。概括而言，这保证了输出集合 S以高概率包含 $|S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j|$ 中任何具有“高效用”的项目。

5 实证结果

我们在合成数据和真实世界数据上评估算法 1 的性能。[3]

[3]我们的模拟代码可在 https://github.com/AnayMehrotra/ 偏差存在下的子模最大化 获取

5.1 基线方法与设置

我们将算法 1 的表现与两种基线方法进行比较：Uncons 和 ProportionalRepr。Uncons 在给定 k 和观测效用 W 的情况下，运行 [58] 的标准贪心算法，以找到大小为 k 的子集，使观测效用近似最大化（附录 A.3 中的算法 3）。ProportionalRepr 在给定 k 和观测效用 W 的情况下，采用一种满足比例代表性约束的贪心算法变体（附录 A.3 中的算法 4）。ProportionalRepr 输出大小为 k 的子集，在从每个群体中选取比例适当数量项目的约束下，使观测效用近似最大化。

在所有模拟中，我们生成潜在效用和观测效用 W and $\widehat{W}$（如后续章节所述），并使用以下输入运行算法：对于算法 1，给定 W、k 和 $\widehat{\ }$ 受保护群体；对于 Uncons，给定 W 和 k。

5.2 使用合成数据集进行模拟

在此模拟中，我们展示了即使在某些不满足假设 1 的情况下，算法 1 也能实现较高的潜在效用。我们考虑了两个受 Spotify [14] 上使用的推荐算法启发、并在 Amazon music [57] 上进行测试的合成数据集。其中，第一个数据集及其对应的函数不满足假设 1。

设置。在两项模拟中，任务都是向当前用户推荐一组 $k := 50$ 歌曲。我们设置 $n := 250$, $m := 3$, 并考虑两个不相交群体。[4]

在第一个模拟中，我们将目标函数固定为

$$F(S) := \sum_{i \in S} W_{i1} + \lambda \sum_{j=2}^{3} \sqrt{\sum_{i \in S} W_{ij}}$$

其中 $\lambda = \frac{1}{20}$.[5]。这里，$W_{i1} \geq 0$、$W_{i2} \in \{0,1\}$ 和 $W_{i3} \in \{0,1\}$ 分别表示歌曲的某种流行度衡量指标 i、i 是否来自一位“新兴艺术家”，以及当前用户是否尚未听过该歌曲。直观而言，在流行度（即相似的W_{i1}）相近的歌曲 i 中，来自新兴艺术家的歌曲以及当前用户尚未听过的歌曲具有更高的边际效用。我们从可能出现在这些情境中的自然分布中独立同分布地抽取 W 的各个条目（详情请参见 B 节）。我们将项目划分为两个群体 G_1 和 G_2；并在 $\left\{\frac{n}{4}, \frac{n}{2}, \frac{3n}{4}\right\}$范围内改变$G_1$的规模。这里，$G_2$可以表示用户希望收听、但由于推荐流程中的偏差而未得到充分推荐的艺术家所创作的歌曲，例如，近期在 Spotify 印度地区音乐中观察到的情况 [63]。给定 G_1，G_2 和一个参数 $\beta \in [0,1]$，我们按如下方式生成观测效用 W：

$$\widehat{W}_{i1} = \begin{cases} W_{i1}, & \text{if } i \in G_1 \\ \beta \cdot W_{i1} & \text{if } i \in G_2. \end{cases}, \qquad \widehat{W}_{i2} = W_{i2}, \quad \text{and} \quad \widehat{W}_{i3} = W_{i3}.$$

对于第一个属性，这对应于对所有 x 使用 $\phi_1(x) = x$ 和 $\phi_2(x) = \beta \cdot x$。对于最后两个属性，我们不应用偏差，因为它们编码的是平台可能已知的值。这

[4]我们的参数选择取自 [14]的场景（Spotify 上的推荐）：Spotify 的算法策划播放列表包含 50 首歌曲，因此，$k = 50$。m 在 [14]中数值较小且未明确说明。我们使用合成数据设置 $m = 3$，以简化相应场景。对于真实世界数据，我们尝试了 m 的所有取值（针对选定的类型）。[14] 没有说明n。我们在 $\{100, 250, 500\}$范围内改变了 n，观察到结果相似，并任意选择了 $n = 250$。[5]这与 Spotify 上推荐算法 Mostra 所使用的目标函数相同 [14]。不同之处在于，Mostra 考虑的属性多于 $m = 3$，并且它不对歌曲播放次数进行编码，而是对学习算法预测的“相关性评分”进行编码。

违反了定义 3.2 中的模型，即同一个偏差函数作用于所有属性，因此这是算法 1 的一个难点。（它属于方程 (4) 中讨论的该模型的扩展。）

在第二个模拟中，我们固定目标函数：[6]

$$F(S) \coloneqq \sum_{j=1}^{3} \log\left(1 + \sum_{i \in S} W_{ij}\right).$$

这里，属性表示类型，集合 C_1, C_2, C_3 互不相交。对于类型 $h(i)$ 中的任意项目 i，$W_{ih(i)}$ 是用户播放歌曲 i 和 $W_{ij} = 0$（对应 $j \neq h(i)$）的次数。从总体上看，这鼓励内容在不同类型之间保持多样性：对于用户播放次数相近的两个项目 i 和 j，如果 $\sum_{r \in S} W_{rh(i)} < \sum_{r \in S} W_{rh(j)}$，那么 i 的边际效用就更高。与前一个模拟类似，我们从可能出现在这些场景中的自然分布中独立同分布地抽取 W 的取值。我们将项目划分为两个受保护群体 G_1 和 G_2，并在 $\left\{\frac{n}{4}, \frac{n}{2}, \frac{3n}{4}\right\}$ 中改变 G_1 的大小。这些模拟的完整实现细节见 B 节。

结果与讨论。我们改变 $\beta \in [0, 1]$ 和 $|G_1| \in \left\{\frac{n}{4}, \frac{n}{2}, \frac{3n}{4}\right\}$，并报告不同算法的归一化潜在效用。图1展示了 $\frac{|G_1|}{n} = 0.5$的结果。$|G_1| \in \left\{\frac{n}{4}, \frac{3n}{4}\right\}$ 的结果见 B.2节中的图3和图4。在所有图和两组合成数据集中，即使 β 的值接近 0，算法 1 输出的子集也具有 > 0.95 NLU。相比之下，当 β 接近 0 且 $|G_1| = \frac{n}{2}$ 时，Uncons 达到的 NLU 为 ≤ 0.85。随着 β 接近 1（即偏差减小），Uncons 达到的效用会增加，并接近 ≈ 1 NLU（这是最优值，且与算法 1 的表现相符）。

因此，我们观察到算法 1 能够实现较高的潜在效用。这一观察结果在第一个合成数据集上同样成立，尽管假设 1 不成立。因此，在某些违反假设 1 的情况下，算法 1 也能够实现较高的潜在效用。

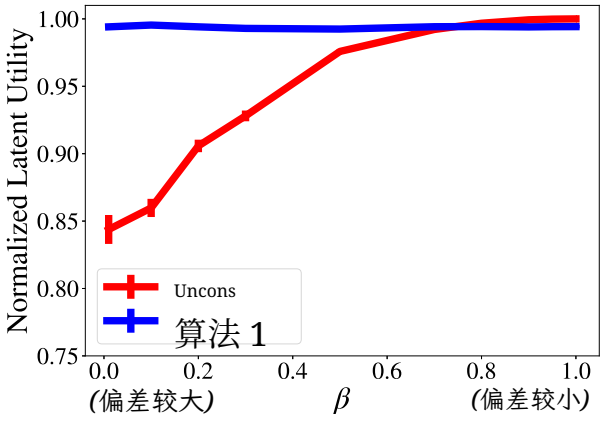
5.3 使用真实世界数据进行模拟

在本次模拟中，我们在具有既有偏差的真实世界数据上评估算法 1（如下所述），并表明即使数据不满足假设 1，该算法也能优于 ProportionalRepr 和 Uncons。

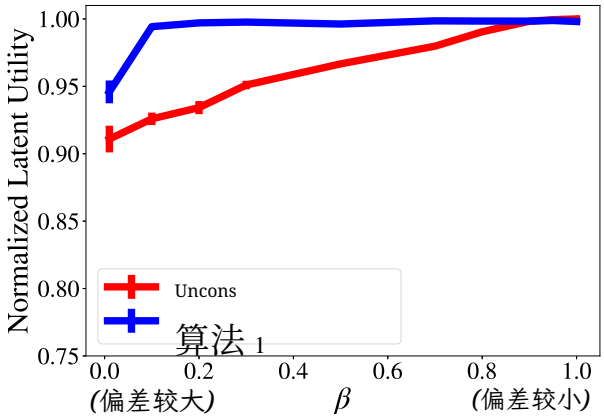
数据。MovieLens 20M [33] 包含由 movielens.org 的 138,000 名用户提交的、针对 27,000 部电影的 2,000 万条用户评分（评分范围为 0 至 5）。对于每部电影 i，除用户评分外，数据还包含一组类型 i 以及各类型 g 的相关性分数 $r_{ig} \in [0, 1]$，用于表示“ [电影i] 体现由 [类型 g]所代表的特定属性的程度”。此外，我们还从 movielens.org 收集了每部电影的主演（演员名单中列出的第一位演员）信息。

预处理。对于每部电影 i，我们使用 Genderize API（gender-api.com）预测其主演的（可能）性别，并移除所有预测置信度低于 0.9 的电影；最终，男性演员和非男性演员主演的电影分别剩下 6612 部和 1990 部。[7] 在剩余的电影中，与非男性演员主演的电影相比，男性演员主演的电影在刻板印象中与男性相关联的类型（例如“动作片”或“战争片”）上的相关性分数明显更高（最高相差 300%；见 B.2节中的表1）。与相关性分数不同，在所有类型中，男性演员和非男性演员主演的电影的用户评分相对均衡

[6]这与 [57] 使用的函数相同，只是他们允许 $m \geq 3$。[7]我们选择 0.9 这一较高阈值，以确保剩余电影中的性别预测错误率较低。我们使用 0.7 和 0.8 的阈值重复了模拟，观察到的结果相似。



(a) $\phi_1(x) = x$, $\phi_2(x) = \beta \cdot x$, $\frac{|G_1|}{n} = 0.5$, 以及 $\delta = 2.0$



(b) $\phi_1(x) = x$, $\phi_2(x) = \beta \cdot x$, $\frac{|G_1|}{n} = 0.5$, 以及 $\delta = 2.0$

图1：合成数据上的模拟：我们在合成数据上运行算法 1 和 Uncons（图1(a) 和图1(b)），并报告它们的归一化潜在效用（误差棒表示均值标准误）。结果表明，在存在偏差的情况下，Uncons 可能损失最优潜在效用中相当大的比例（对于 $\beta < 0.1$，最高可达 15%），而算法 1 的归一化潜在效用高于 0.99。

（所有类型中的差异至多为 6%，见 B.2节中的表2）。（如果考虑全部 27,000 部电影，这一观察结果同样成立；见 B.2节中的表3。）因此，与用户评分相比，在许多类型中，由刻板印象性别为非典型的演员主演的电影，其相关性分数系统性地偏低。

设置。 给定一个类型 T 子集，任务是向用户推荐来自类型 T 的 k 部电影。对于每种类型 g，设 R_g 为该类型中由男性演员和非男性演员主演的电影的平均相关性评分之比。我们选择所有满足 $R_g \geq 2$的类型 g，即 $B = \{$动作、冒险、犯罪、西部片和战争片$\}$。给定一组 M 电影和所选类型的一个子集$T \subseteq B$，我们推荐一个电影子集 S，使以下“观测效用”最大化：

$$\widehat{F}(S) := \sum_{g \in T} \sqrt{\sum_{i \in S} r_{ig}}.$$

该函数体现了推荐与所选类型T相关的电影所带来的收益，而 $\sqrt{\cdot}$ 体现了从同一类型中推荐多部电影时收益递减的情况$g \in T$。我们使用用户评分来评估所推荐电影的质量（或其"潜在效用"）：给定一组电影 S，我们称其潜在效用为

$$F(S) \coloneqq \frac{1}{|S|} \sum\nolimits_{i \in S} \mathrm{rat}_i,$$

其中，rat_i 表示用户对电影 i 的平均评分。

在模拟中，我们改变 $k \in \{50, 100, 150, 200\}$ 并选择不同的非空子集 $T \subseteq B$（共 31 个这样的子集）。对于每个 k 和 T，我们重复模拟 100 次。每次迭代中，我们从至少评价过 200 部电影的用户集合（占用户总数的 19%）中均匀随机抽取一名用户 u。我们将 M 设为用户 u评价过的电影集合；直观来说，这可以确保 M包含平台上的用户观看过的电影。假设 1 要求每部电影都有唯一的类型。虽然这一条件并不成立，我们仍使用算法 1（不作修改）。

结果。我们在图 2 中报告了 Uncons、ProportionalRepr 和算法 1 的归一化潜在效用（针对所有大小为 4 的子集 T）。其余 T 选择的结果见 B.2节中的图 5 至图 9。对于所有 T 选择，我们观察到，对于 31 个典型类型子集中的 14 个（$>45\%$），算法 1 的质量比 Uncons 和 ProportionalRepr 高 3%；对于 31 个典型类型子集中的 13 个（42%），其质量与 Uncons 或 ProportionalRepr 相近（差异在 1% 以内）；对于 4 个类型选择（13%），其质量比 Uncons 低最多 2%。

6 证明

6.1 定理4.1的证明

在本节中，我们将证明，一类公平性约束不足以保证获得最优潜在效用的任何恒定比例。这类公平性约束由$2p$个参数 $u_1, u_2, \ldots, u_p \geq 0$和 $v_1, v_2, \ldots, v_p \geq 0$进行参数化。给定 $u_1, \ldots, u_p$和 $v_1, v_2, \ldots, v_p$，这些约束要求任意输出子集 S 满足以下条件。

$$\forall \ell \in [p], \quad |S \cap G_\ell| \leq (u_\ell + v_\ell \gamma_\ell) \cdot k. \tag{6}$$

其中，对于每个 $\ell \in [p]$

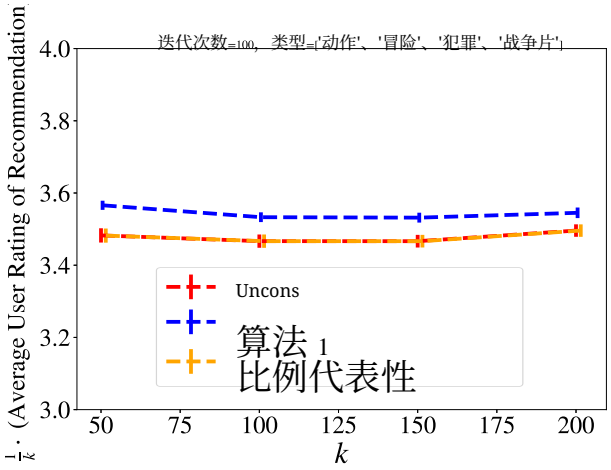
$$\gamma_\ell \coloneqq \frac{|G_\ell|}{n}.$$

当 $u_\ell = \frac{1}{p}$ 和 $v_\ell = 0$（对于每个 $\ell \in [p]$）时，该族实现平等代表性；当 $u_\ell = 0$ 和 $v_\ell = 1$（对于每个 $\ell \in [p]$）时，实现比例代表性；并且当 $u_\ell = 0$ 和 $\min_\ell \frac{v_\ell}{v_\ell} \geq \frac{4}{5} \max$ 时，确保每个输出子集都满足五分之四规则。给定 $U \coloneqq (u_1, \ldots, u_p)$和 $V \coloneqq (v_1, \ldots, v_p)$，令 $S_{UV} \subseteq [n]$ 为满足由 (U, V) 指定的约束条件且使观测效用最大化的、大小至多为 k 的集合，即，

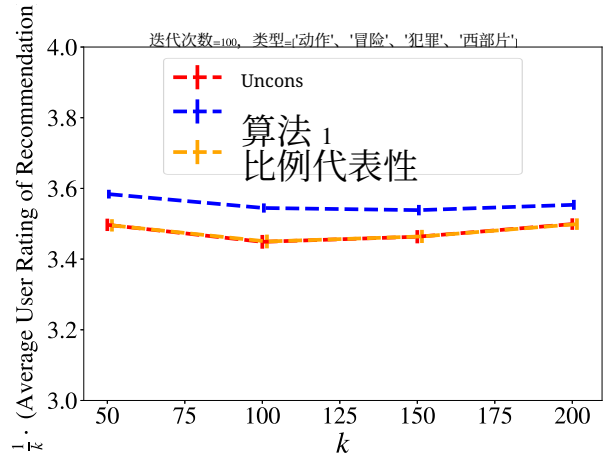
$$S_{UV} \coloneqq \operatorname*{argmax}_{|S| \leq k:\ S \text{ satisfies Equation (6)}} \widehat{F}(S).$$

在本节中，我们证明以下定理。

定理 6.1。对于任意 $0 < \varepsilon < 1$, $U = (u_1, u_2)$，以及 $V = (v_1, v_2)$，存在



(a) 动作、冒险、犯罪、战争片



(b) 动作、冒险、犯罪、西部片

图 2：基于 *MovieLens 20M* 数据的模拟：在男性刻板印象类型中，由男性演员担任主角的电影，其相关性分数远高于（最高达 3 倍）由非男性演员担任主角的电影。相比之下，各类型中这两组电影的用户评分相差不超过 6%。我们使用相关性分数，从男性刻板印象类型的不同子集中推荐 $k \in \{50,100,150,200\}$ 部电影，并使用用户评分估计推荐电影的潜在效用。图 2(a) 和图 2(b) 展示了两个大小为 4 的子集的结果——我们观察到，对于所有 k，算法 1 的归一化潜在效用比 Uncons 和 ProportionalRepr 分别高出 1.40% 和 0.28%。（其他大小的其他类型子集的结果见 B.2节中的图 5 至图 9。）

- 一个次模函数 $F \in \mathscr{F}$,
- 表示群体规模的数字 $0 \leq \gamma_1$、 $\gamma_2 \leq 1$，
- 表示偏差参数的数字 $0 < \beta_1$、 $\beta_2 \leq 1$，
- 由 n 参数化的 $n \times 3$ 矩阵族 $\mathcal{W}$，以及
- 一个依赖于 $\{u_1, u_2\}$ 中最小非零值的常数 m_0，

使得对于任意 $k \geq m_0 \cdot$多项式 $\left(\varepsilon^{-1}\right)$、 $n \geq m_0 \cdot$多项式 $\left(k、\ \varepsilon^{-1}\right)$和 $W = \mathcal{W}(n)$，均有以下结论：

$$\Pr\left[F(S_{UV}) \leq \varepsilon \cdot \mathrm{OPT}\right] \geq 1 - \varepsilon,$$

其中，概率取决于 G_1 和 G_2中的随机性。

通过添加空群体，上述定理可直接扩展到 $p > 2$ 个群体。它也可扩展到 $m > 2$ 个属性，只需固定效用，使得对于每个项目 i，都有 $W_{ij} = 0$和 $j \in [m] \backslash \{1, 2\}$。

我们声称， k 和 n 的以下下界足以满足要求

$$k \geq m_0 \cdot \frac{1}{\varepsilon^{30}} \log \frac{e}{\varepsilon} \quad \text{and} \quad n \geq m_0 \cdot \frac{4k}{\varepsilon^4} \log \frac{e}{\varepsilon}.$$

我们固定 $m_0 = 1$，并假设 ε 小于 $\{u_1, u_2\}$ 中的最小非零值（如果存在）。因此，我们可以保证：**(1)** 如果 $u_1 \neq 0$，那么 $u_1 \geq \varepsilon$；同样地，**(2)** 如果 $u_2 \neq 0$，那么$u_2 \geq \varepsilon$。显然，只需选择一个依赖于 $\{u_1, u_2\}$ 中最小非零值（如果存在）的适当 m_0，就可以允许任意的 $0 < \varepsilon < 1$。

我们根据 u_1 和 v_1的取值将证明分为几种情形。

6.1.1 情形 A：($v_1 > \varepsilon^{-1}$ 和 $u_1 = 0$)

设定以下参数。

- 对于任意子集 S，定义 $F(S) = \sum_{i \in S} W_{i1}$。
- 设 $\gamma_1 = \varepsilon$ 和 $\gamma_2 = 1 - \varepsilon$。
- 设 $\beta_1 = 1$ 和 $\beta_2 = \varepsilon^2$。
- 给定 n，令 $W = \mathcal{W}(n)$ 为以下矩阵： $W_{i1} = 1$ 对于每个 $1 \leq i \leq k$，否则为 $W_{i1} = \varepsilon$。（对于任意 $j \neq 1$，均有 $i \in [n]$。）$W_{ij} = 0$

令 $\mathscr{E}$ 表示事件 $|G_1 \cap [k]| \leq 2k\varepsilon$。根据 G_1 的构造， $|G_1 \cap [k]|$ 是一个超几何随机变量。利用超几何随机变量的标准集中不等式（[36, 定理 1]），可得

$$\Pr\left[\left||G_1 \cap [k]| - \gamma_1 k\right| \geq \sqrt{\frac{k}{2} \log \frac{1}{\varepsilon}}\right] \leq \varepsilon \quad \overset{k\varepsilon \geq \sqrt{\frac{k}{2}\log 1/\varepsilon}}{\Longrightarrow} \quad \Pr\left[|G_1 \cap [k]| \geq 2k\varepsilon\right] \geq 1 - \varepsilon.$$

因此，$\mathbf{Pr}[\mathscr{E}] \geq 1 - \varepsilon.$。根据 W、 β_1 和 β_2 的构造，以下结论成立

$$\forall i \in [G_1], \forall j \in [G_2], \quad \widehat{W}_{i1} \geq \widehat{W}_{j1}.$$

这意味着 $|S_{UV} \cap G_1| = k$ 且 $|S_{UV} \cap G_2| = 0$。否则，我们可以将 $S_{UV} \cap G_2$ 中的任意项目与 $G_1 \backslash S_{UV}$ 中的一个项目交换，从而提高 S_{UV} 的观测效用。由于$|G_1| = n\varepsilon > k \geq |S_{UV}|$， $G_1 \backslash S_{UV}$ 非空。所得集合满足约束，因为在此情况下 $u_1 + v_1\gamma_1 \geq k$。在给定 $\mathscr{E}$ 的条件下，我们有

$$\begin{aligned}
F(S_{UV}) &= \sum\nolimits_{i \in S_{UV} \cap G_1} W_{i1} && (\text{Since } |S_{UV} \cap G_2| = 0) \\
&\leq \sum\nolimits_{i \in G_1 \cap [k]} W_{i1} + \sum\nolimits_{i \in (S_{UV} \cap G_1) \backslash [k]} W_{i1} \\
&\leq 2k\varepsilon + k\varepsilon \\
&\text{（利用在给定 } \mathscr{E}、\ |G_1 \cap [k]| \leq 2k\varepsilon、\ |S_{UV}| \leq k \text{ 和 } W \text{ 的值的条件下} \quad) \\
&\leq 3k\varepsilon.
\end{aligned}$$

根据构造，$\mathrm{OPT} = k$。因此，有

$$\begin{aligned}\Pr\left[F(S_{UV}) \le 3\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}\right] &\ge \Pr\left[F(S_{UV}) \le 3\varepsilon \cdot \mathrm{OPT} \mid \mathscr{E}\right] \Pr[\mathscr{E}] \\ &\ge (1-\varepsilon).\end{aligned}$$

该结论可通过在构造中将 ε 缩小为原来的 1/3 得出。

6.1.2 情形 B：($v_1 < \varepsilon$ 和 $u_1 = 0$)

设定以下参数。

- 对于任意子集 S，定义 $F(S) = \sum_{i \in S} W_{i1}$。
- 设 $\gamma_1 = 1 - \varepsilon$ 和 $\gamma_2 = \varepsilon$。
- 设 $\beta_1 = 1$ 和 $\beta_2 = \varepsilon^2$。
- 给定 n，令 $W = \mathcal{W}(n)$ 为以下矩阵：$W_{i1} = 1$ 对于每个 $1 \le i \le k$，否则为 $W_{i1} = \varepsilon$。（对于任意 $j \ne 1$，$W_{ij} = 0$ 和 $i \in [n]$。）

令 $\mathscr{E}$ 为 $|G_2 \cap [k]| \le 2k\varepsilon$ 的事件。通过在情形 A 中计算 $\Pr[\mathscr{E}]$ 时将 G_1 和 γ_1 替换为 G_2 和 γ_2，可得 $\Pr[\mathscr{E}] \ge 1 - \varepsilon$。由于在此情形下 $u_1 + v_1\gamma_1 < \varepsilon$，因此有 $|S_{UV} \cap G_1| \le k\varepsilon$。在以 $\mathscr{E}$ 为条件的情况下，我们有

$$\begin{aligned}F(S_{UV}) &= \sum\nolimits_{i \in S_{UV} \cap G_1} W_{i1} + \sum\nolimits_{i \in S_{UV} \cap G_2 \cap [k]} W_{i1} + \sum\nolimits_{i \in (S_{UV} \cap G_2) \setminus [k]} W_{i1} \\ &\le k\varepsilon + \sum\nolimits_{i \in S_{UV} \cap G_2 \cap [k]} W_{i1} + \sum\nolimits_{i \in (S_{UV} \cap G_2) \setminus [k]} W_{i1} \\ &\qquad\qquad \text{(Using that } W_{ij} \le 1 \text{ and } |S_{UV} \cap G_1| \le k\varepsilon\text{)} \\ &\le 3k\varepsilon + \sum\nolimits_{i \in (S_{UV} \cap G_2) \setminus [k]} W_{i1} \\ &\qquad\qquad \text{(Using that conditioned on } \mathscr{E}\text{, } |G_2 \cap [k]| \le 2k\varepsilon \text{ and } W_{ij} \le 1\text{)} \\ &\le 4k\varepsilon. \qquad\qquad \text{(Using that for any } i \notin [k]\text{, } W_{i1} = \varepsilon \text{ and } |S_{UV}| \le k\text{)}\end{aligned}$$

根据构造，$\mathrm{OPT} = k$。因此，有

$$\begin{aligned}\Pr\left[F(S_{UV}) \le 4\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}\right] &\ge \Pr\left[F(S_{UV}) \le 4\varepsilon \cdot \mathrm{OPT} \mid \mathscr{E}\right] \cdot \Pr[\mathscr{E}] \\ &\ge (1-\varepsilon).\end{aligned}$$

该结论可通过在构造中将 ε 缩小为原来的四分之一得到。

6.1.3 情形 C：($\varepsilon < v_1 < \varepsilon^{-1}$ 和 $u_1 = 0$)

设置以下参数。

- 对于任意子集 S 定义

$$F(S) = \left(\sum\nolimits_{i \in S} W_{i1}\right)^{1/3} + \varepsilon\sqrt{\sum\nolimits_{i \in S} W_{i2}}. \tag{7}$$

- 令 $\gamma_1 = \varepsilon^4$ 和 $\gamma_2 = 1 - \varepsilon^4$。
- 令 $\beta_1 = 1$ 和 $\beta_2 = \beta$（对于任意 $\beta > 0$）。

• 我们将项目分为两种类型。令 $A := [n/2]$ 为类型 A 项目的集合， $B := [n]\backslash A$ 为类型 B 项目的集合。给定 n，令 $W = \mathcal{W}(n)$ 为如下矩阵：

– 对于每种类型的 A 项目 $i \in A$, $W_i = (1,0)$，以

及– 对于每种类型的 B 项目 $i \in B$, $W_i = (0,1)$。

令 $\mathscr{E}$ 表示以下事件：(1) A 从 G_1 和 G_2 中各至少包含 k 个项目；(2) B 从 G_1 和 G_2中各至少包含k 个项目。根据 G_1 和 G_2的构造， $|A \cap G_\ell|$ 和 $|B \cap G_\ell|$ 是超几何随机变量（对每个 $\ell \in [2]$）。利用超几何随机变量的标准集中不等式（[36, 定理 1]），可得对每个 $\ell \in [p]$

$$\Pr\left[\left||A \cap G_\ell| - \gamma_1 |A|\right| \geq \sqrt{\frac{|A|}{2}\log\frac{1}{\varepsilon}}\right] \leq \varepsilon$$

$$\xRightarrow{\gamma_1,\gamma_2 \geq \varepsilon^4,\ |A| = \frac{n}{2}} \Pr\left[|A \cap G_1| \geq \frac{\varepsilon^4 n}{2} - \sqrt{\frac{n}{4}\log\frac{1}{\varepsilon}}\right] \geq 1 - \varepsilon. \tag{8}$$

利用 $\frac{\varepsilon^4 n}{2} - \sqrt{\frac{n}{4}\log\frac{1}{\varepsilon}}$ 是关于 n 的递增函数（当 $n \geq \frac{1}{4\varepsilon^8}\log\frac{1}{\varepsilon}$ 时），并结合构造可知$n \geq \frac{1}{\varepsilon^8}\log\frac{1}{\varepsilon}$，因此

$$\frac{\varepsilon^4 n}{2} - \sqrt{\frac{n}{4}\log\frac{1}{\varepsilon}} \overset{n \geq \frac{4k}{\varepsilon^4}\log\frac{e}{\varepsilon}}{\geq} \left(2k - \varepsilon^{-2}\sqrt{k}\right)\cdot\log\frac{1}{\varepsilon} \geq k \cdot \log\frac{1}{\varepsilon}.$$

(Using that $k \geq \varepsilon^{-4}$ by construction)

将其代入公式 (8)，可得对于每个 $\ell \in [p]$, $\Pr\left[|A \cap G_\ell| \geq k\right] \geq 1 - \varepsilon$。在上述论证中用 B 替换 A，可得 $\Pr\left[|B \cap G_\ell| \geq k\right] \geq 1 - \varepsilon$。因此，根据并集界，$\Pr[\mathscr{E}] \geq 1 - 4\varepsilon$。

我们声称，在给定 $\mathscr{E}$ 的条件下

$$|S_{UV} \cap G_2 \cap A| \leq \varepsilon^3 k. \tag{9}$$

假设上述断言成立。在给定 $\mathscr{E}$ 的条件下，我们有

$$F(S_{UV}) = \left(|S_{UV} \cap G_1 \cap A| + |S_{UV} \cap G_2 \cap A|\right)^{1/3} + \varepsilon\sqrt{|S_{UV} \cap G_1 \cap B| + |S_{UV} \cap G_1 \cap B|}$$

(Using Equation (7) and construction of W)

$$= \left(|S_{UV} \cap G_1 \cap A| + \varepsilon^3 k\right)^{1/3} + \varepsilon\sqrt{|S_{UV} \cap G_1 \cap B| + |S_{UV} \cap G_1 \cap B|}$$

(Using Equation (9))

$$= \left(2\varepsilon^3 k\right)^{1/3} + \varepsilon\sqrt{k}$$

（利用 S_{UV} 满足约束这一点，因此， $|S_{UV} \cap G_1 \cap A| \leq (u_1 + \gamma_1 v_1)k = \varepsilon^3 k$ 且 $|S_{UV}| \leq k$）

$$\leq 3\varepsilon k.$$

(Using Equation (7))

根据构造，$\mathrm{OPT} \geq \sqrt{k}$。因此，

$$\Pr\left[F(S_{UV}) \leq 3\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}\right] \geq \Pr\left[F(S_{UV}) \leq 3\varepsilon \cdot \mathrm{OPT} \mid \mathscr{E}\right] \cdot \Pr[\mathscr{E}]$$
$$\geq (1 - 4\varepsilon).$$

通过在构造中将 ε 缩小 4 倍，即可得出该定理的结论。

还剩下 证明上述命题（公式 (9)）。反设 t

$$|S_{UV} \cap G_2 \cap A| > \varepsilon^3 k. \tag{10}$$

考虑一个子集 S，它与 S_{UV} 相同，但相较于 S_{UV}，它从 $G_2 \cap A$ 中少选了一个项目，并从 $G_2 \cap B$中多选了一个项目。由于在给定 $\mathscr{E}$的条件下，$|G_2 \cap B| \geq k$，因此存在 S。对于每个 $\ell \in [2]$，S 都满足 (U, V) 所规定的约束，而 $|S \cap G_\ell| = |S_{UV} \cap G_\ell|$ 满足 (U, V) 所规定的约束。因此

$$\begin{aligned}\widehat{F}(S) - \widehat{F}(S_{UV}) = (|S_{UV} \cap A \cap G_1| + \beta|S_{UV} \cap A \cap G_2| - \beta)^{1/3} + \varepsilon\sqrt{|S_{UV} \cap B \cap G_1| + \beta|S_{UV} \cap B \cap G_2| + \beta} \\ - \left((|S_{UV} \cap A \cap G_1| + \beta|S_{UV} \cap A \cap G_2|)^{1/3} + \varepsilon \cdot \sqrt{|S_{UV} \cap B \cap G_1| + \beta|S_{UV} \cap B \cap G_2|}\right).\end{aligned}$$

上述等式右侧是关于 $|S_{UV} \cap B \cap G_1| + \beta|S_{UV} \cap B \cap G_2|$ 的递减函数。由于 S_{UV} 满足 $(U,\ V)$ 指定的约束，$|S_{UV} \cap B \cap G_1| + \beta|S_{UV} \cap B \cap G_2| \leq (\varepsilon^3 + \beta)k = 2\beta k$。因此

$$\begin{aligned}\widehat{F}(S) - \widehat{F}(S_{UV}) \geq (|S_{UV} \cap A \cap G_1| + \beta|S_{UV} \cap A \cap G_2| - \beta)^{1/3} + \varepsilon\left(\sqrt{2\beta k + \beta} - \sqrt{2\beta k}\right) \\ - (|S_{UV} \cap A \cap G_1| + \beta|S_{UV} \cap A \cap G_2|)^{1/3}.\end{aligned}$$

上述不等式右侧是关于 $|S_{UV} \cap A \cap G_2|$ 的递增函数，并且根据方程 (10)，$|S_{UV} \cap A \cap G_2| > \varepsilon^3 k$。因此，

$$\begin{aligned}\widehat{F}(S) - \widehat{F}(S_{UV}) \geq \left(|S_{UV} \cap A \cap G_1| + \beta\varepsilon^3 k - \beta\right)^{1/3} + \varepsilon\left(\sqrt{2\beta k + \beta} - \sqrt{2\beta k}\right) \\ - \left(|S_{UV} \cap A \cap G_1| + \beta\varepsilon^3 k\right)^{1/3}.\end{aligned}$$

上述不等式右侧是关于 $|S_{UV} \cap A \cap G_1|$ 的递增函数。在这种情况下，$(u_1 + v_1\gamma_1) \geq \varepsilon\gamma_1 k = \varepsilon^5 k$。我们声称这意味着 $|S_{UV} \cap A \cap G_1| \geq \varepsilon^5 k$。如果这不成立，则可以通过从 $A \cap G_2$ 中移除 S_{UV} 里的一个项目，并从 $A \cap G_1$ 中添加 S_{UV} 里的一个项目，来提高 S_{UV} 的观测效用。这是可行的，因为 (1) 在这种情况下，$|S_{UV} \cap A \cap G_2| > 0$；并且 (2) 在以 $\mathscr{E}$ 为条件时，$|A \cap G_1| \geq k$。结合 $|S_{UV} \cap A \cap G_1| \geq \varepsilon^5 k$ 与先前的观察，可得

$$\begin{aligned}\widehat{F}(S) - \widehat{F}(S_{UV}) &= \left((\varepsilon^5 + \beta\varepsilon^3)k - \beta\right)^{1/3} - \left((\varepsilon^5 + \beta\varepsilon^3)k\right)^{1/3} + \varepsilon\left(\sqrt{2\beta k + \beta} - \sqrt{2\beta k}\right) \\ &\geq -\frac{\beta}{(\varepsilon^3\beta k)^{2/3}} + \varepsilon\left(\sqrt{2\beta k + \beta} - \sqrt{2\beta k}\right) \\ &\qquad \text{(Using that for all } 0 \leq x \leq 1,\ (1-x)^{1/3} \geq 1 - x \text{ and } \tfrac{\beta}{\varepsilon^5 k + \beta\varepsilon^3 k} \leq 1) \\ &\geq -\frac{\beta}{(\varepsilon^3\beta k)^{2/3}} + \varepsilon\frac{\beta}{\sqrt{6\beta k}} \\ &\qquad \text{(Using that for all } 0 \leq x \leq 3,\ \sqrt{1+x} \geq 1 + \tfrac{x}{3} \text{ and } k \geq 1) \\ &= \frac{\beta}{\sqrt{k}}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{6}} - \frac{1}{\varepsilon^{5/3}k^{1/6}}\right) \qquad \text{(Using Equation (7) and that } \beta = \varepsilon) \\ &> 0. \qquad \text{(Using that } k > 216\varepsilon^{-13},\ \beta > 0, \text{ and } k \geq 1)\end{aligned}$$

6.1.4 情况 D：($u_1 \geq \varepsilon$)

设置以下参数。

- 对于任意子集 S 定义

$$F(S) = \left(\sum_{i \in S} W_{i1}\right)^{1/3} + \varepsilon^3\sqrt{\sum_{i \in S} W_{i2}}. \tag{11}$$

- 令 $\gamma_1 = \varepsilon^3$ 和 $\gamma_2 = 1 - \varepsilon^3$。
- 令 $\beta_1 = 1$ 和 $\beta_2 = \beta$（对于任意 $\beta > 0$）。
- 我们将项目分为两种类型。令 $A := [k]$ 为类型 A 项目的集合，$B := [n] \backslash A$ 为类型 B 项目的集合。给定 n，令 $W = \mathcal{W}(n)$ 为以下矩阵：
  - 对于每种类型的 A 项目 $i \in A$, $W_i = (1,0)$，以及
  - 对于每种类型的 B 项目 $i \in B$, $W_i = (0,1)$。

令 $\mathscr{E}$ 表示以下事件：（1）A 至少包含来自 G_1 的 $\frac{1}{2}\varepsilon^3 k$ 个项目，（2）A 至多包含来自 G_1 的 $2\varepsilon^3 k$ 个项目，以及（3）B 至少包含来自 G_2 的 k 个项目。根据 G_1 和 G_2 的构造，$|A \cap G_\ell|$ 和 $|B \cap G_\ell|$ 是超几何随机变量（对于每个 $\ell \in [2]$）。利用超几何随机变量的标准集中不等式（[36, 定理 1]），可得对于每个 $\ell \in [p]$

$$\Pr\left[\left||A \cap G_1| - \gamma_1 |A|\right| \geq \sqrt{\frac{|A|}{2}\log\frac{1}{\varepsilon}}\right] \leq \varepsilon \overset{\gamma_1,\gamma_2 \geq \varepsilon^3,\ |A|=k}{\Longrightarrow} \Pr\left[|A \cap G_1| \geq \varepsilon^3 k - \sqrt{\frac{k}{2}\log\frac{1}{\varepsilon}}\right] \geq 1 - \varepsilon. \tag{12}$$

由于 $k \geq \frac{2}{\varepsilon^6}\log\frac{1}{\varepsilon}$，因此 $\sqrt{\frac{k}{2}\log\frac{1}{\varepsilon}} \leq \frac{\varepsilon^3 k}{2}$，进而 $\varepsilon^3 k - \sqrt{\frac{k}{2}\log\frac{1}{\varepsilon}} \geq \frac{\varepsilon^3 k}{2}$。这意味着

$$\Pr\left[|A \cap G_1| \geq \frac{\varepsilon^3 k}{2} \text{ and } |A \cap G_1| \leq \frac{3\varepsilon^3 k}{2}\right] \geq 1 - 2\varepsilon.$$

类似的计算表明，$\Pr[|B \cap G_2| \geq k] \geq 1 - \varepsilon$。因此，根据并集界，$\Pr[\mathscr{E}] \geq 1 - 3\varepsilon$。我们声称，在给定 $\mathscr{E}$ 的条件下

$$|S_{UV} \cap G_2 \cap A| = 0. \tag{13}$$

假设上述结论成立。在给定 $\mathscr{E}$ 的条件下，我们有

$$\begin{aligned}
F(S_{UV}) &= \left(|S_{UV} \cap G_1 \cap A| + |S_{UV} \cap G_2 \cap A|\right)^{1/3} + \varepsilon^3\sqrt{|S_{UV} \cap G_1 \cap B| + |S_{UV} \cap G_1 \cap B|} \\
&\qquad \text{(Using Equation (11) and construction of } W\text{)} \\
&= \left(0 + |S_{UV} \cap G_2 \cap A|\right)^{1/3} + \varepsilon^3\sqrt{|S_{UV} \cap G_1 \cap B| + |S_{UV} \cap G_1 \cap B|} \\
&\qquad \text{(Using Equation (13))} \\
&\leq \left(\frac{3}{2}\varepsilon^3 k\right)^{1/3} + \varepsilon^3\sqrt{k} \quad \text{(Using that conditioned on } \mathscr{E},\ |A \cap G_2| \leq \tfrac{3}{2}\varepsilon^3 k \text{ and } |S_{UV}| \leq k\text{)} \\
&\leq 3\varepsilon k.
\end{aligned}$$

根据构造，$\mathrm{OPT} \geq \sqrt{k}$。因此，

$$\begin{aligned}
\Pr\left[F(S_{UV}) \leq 3\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}\right] &\geq \Pr\left[F(S_{UV}) \leq 3\varepsilon \cdot \mathrm{OPT} \mid \mathscr{E}\right] \cdot \Pr[\mathscr{E}] \\
&\geq (1 - 3\varepsilon).
\end{aligned}$$

通过在构造中将 ε 缩小为原来的三分之一，即可得出定理的结论。

还剩下 以证明上述命题（公式 (13)）。反设 at

$$|S_{UV} \cap G_2 \cap A| \geq 1. \tag{14}$$

在这种情况下，有 $|S_{UV} \cap G_1 \cap A| \geq \frac{\varepsilon^3 k}{2}$。（这是因为，如果 $|S_{UV} \cap G_1 \cap A| < \frac{\varepsilon^3 k}{2}$，那么可以从 $G_1 \cap A$ 中再添加一个项目，并从 $G_2 \cap A$ 中移除一个项目，这样既能提高观测效用，又能满足约束；这与 S_{UV} 在满足约束的条件下使观测效用最大化这一事实相矛盾。）

考虑一个子集 S，它与 S_{UV} 相同，只是相比 S_{UV}，它从 $G_2 \cap A$ 中少选择了一个项目，并从 $G_2 \cap B$ 中多选择了一个项目。可以验证，在给定 $\mathscr{E}$ 的条件下，存在 S 且其满足公平性约束。成立：

$$\begin{aligned}\widehat{F}(S) - \widehat{F}(S_{UV}) = (|S_{UV} \cap A \cap G_1| + \beta|S_{UV} \cap A \cap G_2| - \beta)^{1/3} + \varepsilon^3\sqrt{|S_{UV} \cap B \cap G_1| + \beta|S_{UV} \cap B \cap G_2| + \beta} \\ -(|S_{UV} \cap A \cap G_1| + \beta|S_{UV} \cap A \cap G_2|)^{1/3} - \varepsilon^3\sqrt{|S_{UV} \cap B \cap G_1| + \beta|S_{UV} \cap B \cap G_2|}.\end{aligned}$$

上述方程的右侧是 $|S_{UV} \cap A \cap G_1|$ 和 $|S_{UV} \cap A \cap G_1| \geq \frac{\varepsilon^3 k}{2}$ 的递增函数，因此，

$$\begin{aligned}\widehat{F}(S) - \widehat{F}(S_{UV}) \geq \left(\frac{\varepsilon^3 k}{2} + \beta|S_{UV} \cap A \cap G_2| - \beta\right)^{1/3} + \varepsilon^3\sqrt{|S_{UV} \cap B \cap G_1| + \beta|S_{UV} \cap B \cap G_2| + \beta} \\ -\left(\frac{\varepsilon^3 k}{2} + \beta|S_{UV} \cap A \cap G_2|\right)^{1/3} + \varepsilon^3\sqrt{|S_{UV} \cap B \cap G_1| + \beta|S_{UV} \cap B \cap G_2|}.\end{aligned}$$

上述不等式的右侧是 $|S_{UV} \cap B \cap G_1| + \beta \cdot |S_{UV} \cap B \cap G_2|$ 和
$|S_{UV} \cap B \cap G_1| + \beta \cdot |S_{UV} \cap B \cap G_2| \leq k$ 的递减函数。因此，

$$\widehat{F}(S) - \widehat{F}(S_{UV}) \geq \left(\frac{\varepsilon^3 k}{2} + \beta|S_{UV} \cap A \cap G_2| - \beta\right)^{1/3} + \varepsilon^3\sqrt{k+\beta} - \left(\frac{\varepsilon^3 k}{2} + \beta|S_{UV} \cap A \cap G_2|\right)^{1/3} + \varepsilon^3\sqrt{k}.$$

上述不等式的右侧是 $|S_{UV} \cap A \cap G_2|$ 和 $|S_{UV} \cap A \cap G_1| \geq 1$ 的递增函数。因此，

$$\begin{aligned}\widehat{F}(S) - \widehat{F}(S_{UV}) &= \left(\frac{\varepsilon^3 k}{2}\right)^{1/3} + \varepsilon^3\sqrt{k+\beta} - \left(\frac{\varepsilon^3 k}{2} + \beta\right)^{1/3} + \varepsilon^3\sqrt{k} \\ &\geq -\varepsilon\left(\frac{k}{2}\right)^{1/3}\frac{2\beta}{\varepsilon^3 k} + \frac{\varepsilon^3\sqrt{k}\beta}{4k} \\ &\geq \frac{\beta}{k}\left(\varepsilon^3\sqrt{k} - \frac{k^{1/3}}{2^{1/3}\varepsilon^2}\right) \\ &= \frac{\beta k^{1/3}}{k} \cdot \left(\varepsilon^3 k^{1/6} - \frac{1}{2^{1/3}\varepsilon^2}\right) \\ &> 0. \qquad \text{(Using that } k > \varepsilon^{-30}, \beta > 0, \text{ and } k \geq 1)\end{aligned}$$

6.2 定理4.3的证明

在本节中，我们证明定理 4.3。为方便读者，下面重述定理 4.3 以及定理 4.3 中使用的假设。

假设 2(　　属性不相交)。 矩阵 $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 满足 C_1、.....、C_m 两两不相交　　$t.$

定理 6.2. 假设 $\phi_1(x) = x$ 对每个 x均成立。存在一种算法（算法 *1*），给定⌒观测效用 $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 以及针对 $g_1, g_2, \ldots, g_m \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$的评估预言机后，将输出一个大小为 k 的集合 S，并满足以下性质（在假设 *1* 下）：对于任意 $\varepsilon, \tau, \gamma > 0$ 以及任意递增

函数 $\phi_2, \phi_3, \ldots, \phi_p \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，存在一个足够大的 k_0，使得对于任意 $k \geq k_0$，其概率至少为 $1-\varepsilon$

$$F(S) \geq \mathrm{OPT} \cdot (1-\varepsilon).$$

其中，概率取自选择 G_1、G_2、…、G_p时的随机性。该算法对每个 g_1、g_2、…、g_m 进行 $O(nk)$ 次评估，并执行 $O(nk \log n)$ 次额外的算术运算。

6.2.1 定理 4.3 证明概述

~我们需要证明，在假设 1 成立的条件下，算法 1 输出的子集 S 的潜在效用至少为 $\mathrm{OPT} \cdot \left(1 - \widetilde{O}\left(k^{-1/4}\right)\right)$，且该结论以高概率成立。可以证明，由于假设 1，$S_{\mathrm{OPT}} \coloneqq \operatorname{argmax}_{S \subseteq [n] : |S| \leq k} F(S)$ 具有如下形式：

$$S_{\mathrm{OPT}} \coloneqq \bigcup_{j=1}^{m} S_j^\star,$$

其中，对于每个 j,

$$S_j^\star \coloneqq \operatorname*{argmax}_{S \subseteq C_j : |S| \leq |S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j|} g_j\left(\sum\nolimits_{i \in S} W_{ij}\right).$$

这里，RHS 中的函数 $H(T) \coloneqq g_j\left(\sum_{i \in T} W_{ij}\right)$ 是关于 $\mathscr{F}$ 的单属性函数。对于此类函数，存在一种算法，以观测到的效用作为输入，输出一个子集 S，其潜在效用 $F(S)$ 至少为 $\mathrm{OPT} \cdot \left(1 - k^{-1/2}\right)$，且该结论以高概率成立（引理 6.7）。因此，我们可以使用引理 6.7 来计算 $S_j^\star$ 的（近似值），进而计算 S_{OPT} 的（近似值）。关键问题在于，$S_j^\star$ 的定义本身依赖于 S_{OPT}，因为其定义中包含 $|S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j|$ 项。

我们的核心思路是在不实际计算 S_{OPT} 的情况下估计 $|S_{\mathrm{OPT}} \cap G_j|$。这利用了受保护群体 $G_1, G_2, \ldots, G_p$ 中的随机性，以及对所有 x，$\phi_1(x) = x$。具体而言，给定函数 $F \in \mathscr{F}$，我们定义 F 的以下替代版本 $F(T) \coloneqq \sum_{j=1}^{m} g_j\left(\sum_{i \in S} W_{ij}\right)$:

$$\forall T \subseteq [n], \quad \widetilde{F}(T) \coloneqq \sum\nolimits_{j=1}^{m} g_j\left(\frac{n}{|G_1|} \cdot \sum\nolimits_{i \in T \cap G_1} W_{ij}\right). \tag{15}$$

~ ~F 和 F之间有两处不同：首先，给定一个集合 T 作为输入，F 只对 $T \cap G_1$上的效用求和。其次，它会将计算出的和乘以一个 $\frac{n}{|G_1|}$的因子。从直觉上看，由于 G_1 是通过无放回均匀随机抽取元素构造的，对于任何独立于 G_1的子集 T，这两处变化会相互抵消：对于任何独立于 G_1 的子集 T，在对 T作出一些温和假设的情况下，我们证明 $F(T) \in \widetilde{F}(T) \cdot \left(1 \pm k^{-1/4}\right)$（引理 6.4）。

算法 1 计算子集 $\widetilde{S}$，该子集从 $|G_1|$ 中选取 $k \cdot \frac{|G_1|}{n}$ 个项目，并使 $\widetilde{F}$ 最大化。由于假设 1，算法 1 能够找到这样的子集（见引理 6.3）。对于每个 $j \in [m]$，我们使用 $\sim k_j \coloneqq \frac{n}{|G_1|} \cdot |S \cap C_j|$ 作为 $|S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j|$ 的近似。最后，利用引理 6.4 和一些额外的分析（引理 6.5），我们证明如下定义的子集 S，

$$S \coloneqq \bigcup_{j=1}^{m} S_j, \qquad \text{where} \qquad \forall j, \quad S_j \coloneqq \operatorname*{argmax}_{T \subseteq C_j : |T| \leq k_j} g_j\left(\sum\nolimits_{i \in S} W_{ij}\right), \tag{16}$$

具有至少 $\mathrm{OPT} \cdot (1 - \widetilde{O}(k^{-1/8}))$ 的潜在效用（引理 6.6）。该分析必须谨慎，以确保所有考虑的子集都满足引理 6.4 所需的假设。例如，S_{OPT} 可能不满足这些假设，因此我们构造了一个“相似”的子集 S_{OPT}

~到 S_{OPT} 并且满足这些假设（引理 6.5 S G_1 ）。此外，不满足引理 6.4 所要求的独立性。为绕过这一~点，我们证明 S 始终属于一个至多包含k^m 个子集的集合族；并证明引理 6.4 以高概率对 $(k+1)^m$ 中的所有子集成立，因此，~特别地，它对 S成立。

6.2.2 定理 4.3 的证明

引理 6.3。 假设假设 *1* 成立，并且对所有 x， $\phi_1(x) = x$ 。对于任意 $W \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m\times n}$、 $F \in \widetilde{\mathscr{F}}$ 及其对应的函数 F（定义于公式 (15)），递增函数 ϕ_2、ϕ_3、.....、ϕ_p、~$k \geq 1$ 以及受保护群体 G_1、G_2、.....、G_p，由算法 *1* 计算得到的子集 S 是一个最优解

$$\begin{aligned} \max_{S\subseteq G_1} \quad & \widetilde{F}(S), \\ \text{s.t.,} \quad & 1 \leq j \leq m, \quad |S\cap C_j| \geq \min\{\sqrt{k}, |C_j|\}, \\ & |S| \leq k\cdot\frac{|G_1|}{n}. \end{aligned} \tag{17}$$

证明。 在此证明中，我们只考虑 G_1 的子集。为简化记号，对每个 $1 \leq j \leq m$，我们用 C_j 表示 $C_j \cap G_1$ 。根据假设 1，对于每个项目 i，存在唯一的 $1 \leq j(i) \leq m$，使得 $W_{ij} \neq 0$。对每个 $1 \leq i \leq n$，定义 w_i: $= W_{ij(i)}$。对于每个 j，令 $i(1,\ j)\ i(2,\ j)$ ....., $i(|C_j|,\ j)$ 为 C_j 中按 w_i 非递增顺序排列的项目。

局部最优性。 若子集 S 具有以下性质，则称其为局部最优： 对于每个 j，如果 S 从 C_j 中选取 r 个元素，那么这些元素就是 C_j中效用最高的 r 个元素，即:

$$S\cap C_j = \{i(r,j) \mid 1 \leq r \leq |S\cap C_j|\}.$$

令 $S^\star$ 为一个最优解 公式 (17) 的最优解。不失一般性， $S^\star$ 是局部最优的 1.

不失一般性 $S^\star$ 是局部最优的。 如果 $S^\star$ 不是局部最优的，则构造另一个集合 S，使得 $|S\cap C_j| = |S^\star \cap C_j|$ 且 S 是局部最优的。因此，对于每个 $1 \leq j \leq m$，都有 $\sum_{i\in S\cap C_j} w_i \geq \sum_{i\in S^\star\cap C_j} w_i$。因此，由于 g_1、g_2、.....、g_m 递增， $F(S) \geq F(S^\star)$。由于对于每个 j，都有 $|S\cap C_j| = |S^\star \cap C_j|$，因此 S 也满足公式 (17) 的可行性。由于 $S^\star$ 是公式 (17) 的最优解，必有 $F(S) = F(S^\star)$。因此， S是公式 (17) 的最优解，且为局部最优解。

可以验证，算法 1 按照 w_i 递减的~顺序选择项目，因此~是局部最优的。假设 $F(S) < F(S^\star)$，因此 $S \neq S^\star$。由于 S和 $S^\star$不相等于 ~，且 S 和 $S^\star$ 都局部最优，因此存在两个属性 $j(1)$ 和 $j(2)$，使得 ~ ~$|S\cap C_{j(1)}| > |S^\star \cap C_{j(1)}|$ 且 $|S\cap C_{j(2)}| < |S^\star \cap C_{j(2)}|$。不失一般性，假设$j(1) = 1$ 且 $j(2) = 2$。令

$$x \coloneqq |S^\star \cap C_1| \quad \text{and} \quad y \coloneqq |S^\star \cap C_2|.$$

由于 $S^\star$ 对于公式 (17) 是可行的，因此 $x,\ y \geq \sqrt{k}$。考虑 while~循环（算法 1 的 ~步骤7）中的这样一次迭代： S 从 C_1 中选择第（$x+1$）个项目，即 $i(x+1,\ 1)$。（该迭代确实存在，因为 $x > \sqrt{k}$，因此第（$x+1$）个项目未在算法 1 的步骤5中被选中，并且 ~ ~ ~ $|S\cap C_1| > x$，所以第（$x+1$）个项目会在算法 1 的步骤7的某次迭代中被选中。）令 S

~ – ~表示在这次迭代中 S 的值，并且 z :
$= |S \cap C_2| \leq |S \cap C_2| < y$。由于算法 1 选择了 $i^\star := i(x+1,\ 1)$，而不是 $i(z+1,\ 2)$，因此必有

$$\widetilde{F}_{i(x+1,1)}(\bar{S}) \geq F_{i(z,2)}(\bar{S}).$$

等价地，

$$g_1\left(w_{i(x+1,1)} + \sum_{h=1}^{x} w_{i(h,1)}\right) - g_1\left(\sum_{h=1}^{x} w_{i(h,1)}\right) \geq g_2\left(w_{i(z+1,1)} + \sum_{h=1}^{z} w_{i(h,2)}\right) - g_2\left(\sum_{h=1}^{z} w_{i(h,2)}\right). \quad (18)$$

如果上述等式成立，那么在本次迭代中，算法 1 本可以选择 $i(z+1,\ 2)$，而不是 $i(x+1,\ 1)$。如果等式 (18) 成立，假设算法 1 在本次迭代中选择 $i(z+1,\ 2)$，而不是 $i(x+1,\ 1)$，并找出算法 1 下一次选择不属于 $S^\star$ 的项目的迭代。（这只会重复有限次，因为算法 1 的第 2 部分仅持续有限次 ~ 次迭代。）如果不存在这样的迭代，我们便证明了 $F(S) = F(S^\star)$。

它重新仍需考虑公式 (18) 严格不等式成立的情况，即 ，

$$g_1\left(w_{i(x+1,1)} + \sum_{h=1}^{x} w_{i(h,1)}\right) - g_1\left(\sum_{h=1}^{x} w_{i(h,1)}\right) > g_2\left(w_{i(z+1,1)} + \sum_{h=1}^{z} w_{i(h,2)}\right) - g_2\left(\sum_{h=1}^{z} w_{i(h,2)}\right). \quad (19)$$

考虑子集 $S' := S^\star \cup i(x+1,\ 2) \backslash i(y+1,\ 1)$。我们可以如下对 $F(S')$ 给出一个下界。

$$\begin{aligned}
F(S') - F(S^\star) &= \left(g_1\left(w_{i(x+1,1)} + \sum_{h=1}^{x} w_{i(h,1)}\right) - g_1\left(\sum_{h=1}^{x} w_{i(h,1)}\right)\right) \\
&\quad - \left(g_2\left(w_{i(y+1,1)} + \sum\nolimits_{h=1}^{y} w_{i(h,2)}\right) - g_2\left(\sum_{h=1}^{y} w_{i(h,2)}\right)\right) \\
&\geq \left(g_1\left(w_{i(x+1,1)} + \sum_{h=1}^{x} w_{i(h,1)}\right) - g_1\left(\sum_{h=1}^{x} w_{i(h,1)}\right)\right) \\
&\quad - \left(g_2\left(w_{i(z+1,1)} + \sum_{h=1}^{z} w_{i(h,2)}\right) - g_2\left(\sum_{h=1}^{z} w_{i(h,2)}\right)\right) \\
&\qquad\qquad \text{(Using that } z \leq y \text{ and the } g_2 \text{ 是凹函数)} \\
&> 0. \qquad\qquad \text{(Using Equation (19))} \quad (20)
\end{aligned}$$

此外， S' 对于公式 (17)是可行的。我们只需验证 S' 满足关于~前两个属性的约束即可。这是因为 $|S' \cap C_1| \geq |S \cap C_1| \geq L_1$ 和 $|S' \cap C_2| \geq |S^\star \cap C_2| \geq L_2$。由于 $S^\star$ 是公式 (17)的最优解， S' 是可行的，并且 $F(S') \geq F(S^\star)$，因此必有~$F(S') \leq F(S^\star)$。但公式 (20)与此矛盾。因此， $F(S) = F(S^\star)$，并且由于我们已经~ ~证明 S 对于公式 (17)是可行的， S 是公式 (17)的最优解，引理得证。

□

~接下来，引理 6.4 表明，在对子集 $T \subseteq [n]$（公式（21））的一些假设下， $F(T)$ 是 $F(T)$ 的良好近似。

引理 6.4。 对于大小为 k 的任意子集 S （独立于 G_1），数值 x、$\delta > 0$、属性 $1 \leq j \leq m$，以及递增凹函数 g_j: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，如果

$$\sum\nolimits_{i \in S \cap C_j} W_{ij} \geq xk, \quad (21)$$

那么对于任意 $\delta \geq \exp\left(-\tau\gamma^6 xk\right)$，以至少 $1-\delta$ 的概率，有：

$$\left|g_j\left(\frac{n}{|G_1|}\cdot\sum\nolimits_{i\in S\cap G_1\cap C_j} W_{ij}\right) - g_j\left(\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} W_{ij}\right)\right| \leq \sqrt{\frac{1}{\tau\gamma^6 xk}\log\frac{1}{\delta}}\cdot g_j\left(\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} W_{ij}\right).$$

其中，概率是针对选择 G_1 时的随机性而言的。

~对 $1\leq j\leq m$ 应用并集界，并利用 F 的定义（公式 (15)），可得：以至少 $1-m\delta$ 的概率（对任意 $\delta\geq e^{-\tau\gamma^6 xk}$），有

$$\left|\widetilde{F}(S)-F(S)\right| \leq \sqrt{\frac{1}{\tau\gamma^6 xk}\log\frac{1}{\delta}}\cdot F(S).$$

引理 *6.4* 的证明。固定任意一个 $j\in[m]$。对于每个 $i\in[n]$，令 Z_i 为一个离散随机变量：若 $i\in G_1$，则取值为 W_{ij}，否则取值为 0。我们有 $\Pr[Z_i]=\frac{|G_1|}{n}$，且 $\sum_{i\in S\cap C_j} Z_i=\sum_{i\in S\cap C_j\cap G_1} W_{ij}$.。根据期望的线性性，可得

$$\mu \coloneqq \mathbb{E}\left[\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} Z_i\right] = \frac{|G_1|}{n}\cdot\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} W_{ij}.$$

利用适用于无放回抽样的霍夫丁不等式的一个变体 [5,命题 1。2],，可得对任意 $\delta>0$

$$\Pr\left[\left|\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} Z_i-\mu\right| > \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} W_{ij}^2\right)\cdot\log\frac{1}{\delta}}\right] \leq \delta. \tag{22}$$

令 $\mathscr{E}$ 为事件，即

$$\left|\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} Z_i-\mu\right| \leq \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} W_{ij}^2\right)\cdot\log\frac{1}{\delta}}.$$

由于 $0\leq W_{ij}\leq\tau^{-1}$，因此有 $W_{ij}^2\leq W_{ij}/\tau$。将其代入上述不等式可得，在以 $\mathscr{E}$ 为条件时

$$\left|\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} Z_i-\mu\right| \leq \sqrt{\frac{1}{2\tau}\cdot\left(\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} W_{ij}\right)\cdot\log\frac{1}{\delta}}.$$

接下来，利用 $\sum_{i\in S\cap C_j} W_{ij}\geq xk$，可得在以 $\mathscr{E}$ 为条件时

$$\frac{\left|\sum_{i\in S\cap C_j} Z_i-\mu\right|}{\mu} \leq \frac{n}{|G_1|}\sqrt{(2\tau xk)^{-1}\cdot\log\frac{1}{\delta}} \leq \sqrt{(2\tau\gamma^2 xk)^{-1}\cdot\log\frac{1}{\delta}}. \qquad \text{(Using that } |G_1|\geq\gamma n\text{)}$$

由于 g_j 是一个 递增函数和 $\frac{|G_1|}{n}\geq\gamma$，上述等式意味着：在给定 $\mathscr{E}$

$$g_j\left(\frac{n\mu}{|G_1|}-\sqrt{\frac{1}{2\tau\gamma^4 xk}\log\frac{1}{\delta}}\right) \leq g_j\left(\frac{n}{|G_1|}\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} Z_i\right) \leq g_j\left(\frac{n\mu}{|G_1|}+\sqrt{\frac{1}{2\tau\gamma^4 xk}\log\frac{1}{\delta}}\right). \tag{23}$$

Let

$$\alpha \coloneqq g_j'\left(\frac{n\mu}{|G_1|}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2\tau\gamma^4 xk}\log\frac{1}{\delta}}\right)\right). \tag{24}$$

由于 g_j 是凹函数 $g'(y) \le g'_j(z)$，对任意 $y \ge z$ 均成立。因此，根据等式 (23)，我们得到，在给定 $\mathscr{E}$ 的条件下

$$\left| g_j\left(\frac{n}{|G_1|}\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} Z_i\right) - g_j\left(\frac{n\mu}{|G_1|}\right)\right| \le \alpha\frac{n\mu}{|G_1|}\sqrt{\frac{1}{2\tau\gamma^4 xk}\log\frac{1}{\delta}}. \tag{25}$$

Let

$$\zeta := \sqrt{\frac{1}{2\tau\gamma^6 xk}\log\frac{1}{\delta}}. \tag{26}$$

注意到

$$\begin{aligned}
g_j\left(\frac{n\mu}{|G_1|}\right) &\ge g_j(\mu) && \text{(Using that } n \ge |G_1| \text{ and that } g_j \text{ is an increasing function)}\\
&= \int_0^{\mu} g'_j(z)dz\\
&\ge \int_0^{\mu(1-\zeta)} g'_j(z)dz && \text{(Using that } \zeta \ge 0 \text{ and } g'(z) \ge 0 \text{ for all } z \ge 0)\\
&\ge g'_j(\mu(1-\zeta))\cdot\mu(1-\zeta) && \text{(Using that } g'_j \text{ is a decreasing function, as } g_j \text{ is concave)}\\
&= \alpha\mu(1-\zeta) && \text{(Using Equations (24) and (26))}\\
&\ge \alpha\gamma(1-\zeta)\frac{\mu n}{|G_1|}.
\end{aligned}$$

将其代入公式 (25)，可得在给定 $\mathscr{E}$ 的条件下

$$\left| g_j\left(\frac{n}{|G_1|}\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} Z_i\right) - g_j\left(\frac{n\mu}{|G_1|}\right)\right| \le \frac{\zeta}{(1-\zeta)} g\left(\frac{n\mu}{|G_1|}\right) \le 2\zeta g\left(\frac{n\mu}{|G_1|}\right).$$

(Using that $\zeta \le \frac{1}{2}$ as $\delta \ge e^{-\tau\gamma^6 xk}$, $\mu \ge x$, and Equation (26))

代入 μ 和 ζ 的值，可得在给定 $\mathscr{E}$ 的条件下

$$\left| g_j\left(\frac{n}{|G_1|}\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} Z_i\right) - g_j\left(\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} W_{ij}\right)\right| \le g_j\left(\sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} W_{ij}\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{\tau xk\gamma^6}\cdot\log\frac{1}{\delta}}.$$

由公式 (22) 可知 $\Pr[\mathscr{E}] \ge 1-\delta$，因此引理得证。 □

接下来，引理 6.5 给出了 $\widetilde{F}(\widetilde{S})$ 的下界 $\mathrm{OPT}\cdot\left(1-O(k^{-1/4})\right)$。

引理 6.5。假设假设 *1* 成立，且对所有 x，$\phi_1(x) = x$。考虑算法 *1* 第 *1* 部分中计算得到的 S。对于任意 $\delta \ge me^{-8\tau\gamma k}$，以概率 $1-\delta$，有

$$\widetilde{F}(\widetilde{S}) \ge \mathrm{OPT}\cdot\left(1 - O\left(\sqrt{\frac{m^4}{\tau^2\gamma^5 k^{1/2}}\log\frac{m}{\delta}}\right)\right).$$

其中，概率是针对受保护群体 G_1、G_2、.....、G_p 的选择随机性而言的。

由于 S 是公式 (17) 的一个最优解，因此对于公式 (17) 的任意其他可行子集 T，都有 $F(S) \ge F(T)$。特别地，如果 S_{OPT} 是公式 (17) 的可行解，那么 $F(S) \ge F(S_{\mathrm{OPT}})$。如果 S_{OPT} 对于任意常数 $x > 0$ 都满足公式（21）中的条件，那么根据引理 6.4，我们可以得到 $\widetilde{F}(S_{\mathrm{OPT}}) \ge \mathrm{OPT}\left(1-O(k^{-3/2})\right)$。于是，证明可由此得出。

串联最后两个不等式。然而， S_{OPT} 可能不满足公式 (17) 的可行性要求或公式（21），因此我们无法使用引理 6.4。

相反，我们从 OPT 构造一个子集 S_{OPT}，并证明 S_{OPT} 对于 $x = \Omega(k^{-1/2})$ 和 $F(S_{\mathrm{OPT}}) \geq F(\mathrm{OPT})$ 满足公式（21）。我们（为了进行分析）按如下方式从 OPT 构造一个子集 S_{OPT}：

用于构造 S_{OPT} 的算法（在引理 6.5 的证明中使用）

- **输入：** S_{OPT}、潜在效用 W 和 $\delta > 0$
- **输出：** S_{OPT}

---

1. 初始化 $S_{\mathrm{OPT}} = S_{\mathrm{OPT}}$
2. **对于** $j \in [m]$，**执行**
   - **If** $\left|S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j\right| \leq 2\gamma^{-1}k^{1/2}$ **then**
     - Add any $2\gamma^{-1}k^{1/2}$ elements from $C_j \backslash S_{\mathrm{OPT}}$ to S_{OPT}
3. 集合 $j^\star := \operatorname{argmax}_j \left|S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j\right|$ ▷ 根据鸽巢原理，$\left|S_{\mathrm{OPT}} \cap C_{j^\star}\right| \geq \frac{k}{m} \geq \Omega((m+1)k^{1/2})$
4. 从 $S_{\mathrm{OPT}} \cap C_{j^\star}$ 中移除 $\left|S_{\mathrm{OPT}}\right| - k$ 个潜在效用最小的元素 ▷ 这里，$0 \leq |S_{\mathrm{OPT}}| - k \leq m(2\gamma^{-1}k^{1/2})$
5. **返回** S_{OPT}

引理 *6.5* 的证明。设 k_0 满足以下不等式

$$k_0 \geq \max\left\{2\gamma^{-1}m(m+1), \left(\gamma \log \frac{m}{\delta}\right)^3, 16\gamma^{-2}m^4\right\}. \tag{27}$$

任取 $1 \leq j \leq m$。S_{OPT} 仅是 S_{OPT}、W和 δ的函数，而 S_{OPT} 本身也仅是 W的函数。因此，S_{OPT} 与 G_1独立。重复引理 6.4 中的集中论证，但令 $Z_i := \mathbb{I}[i \in G_1]$，可得对任意 $\delta > 0$

$$\Pr\left[\left|\left|S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j \cap G_1\right| - \frac{|G_1|}{n} \cdot \left|S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j\right|\right| > \sqrt{\frac{1}{2} \cdot k^{1/2} \cdot \log \frac{m}{\delta}}\right] \leq \frac{\delta}{m}.$$

因此，

$$\Pr\left[\left|S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j \cap G_1\right| > \frac{|G_1|}{n} \cdot \left|S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j\right| - \sqrt{\frac{1}{2} \cdot k^{1/2} \cdot \log \frac{m}{\delta}}\right] \leq \frac{\delta}{m}.$$

此外，由于 $\left|S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j\right| \geq \frac{2\sqrt{k}}{\gamma}$ 和 $|G_1| \geq \gamma n$，

$$\Pr\left[\left|S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j \cap G_1\right| > 2k^{1/2} - \sqrt{\frac{1}{2} \cdot k^{1/2} \cdot \log \frac{m}{\delta}}\right] \leq \frac{\delta}{m}.$$

由于 $k \geq k_0$ 和 k_0 满足公式 (27)，上述不等式意味着

$$\Pr\left[\left|S_{\mathrm{OPT}} \cap C_j \cap G_1\right| > k^{1/2}\right] \leq \frac{\delta}{m}. \tag{28}$$

根据霍夫丁界，我们还可以得到

$$\Pr\left[\left|\overline{S_{\mathrm{OPT}}}\cap G_1\right| \le k\frac{|G_1|}{n} + \sqrt{\frac{1}{2}\cdot k\frac{|G_1|}{n}\cdot\log\frac{m}{\delta}}\right] \le \frac{\delta}{m}. \tag{29}$$

令 $\mathscr{E}$ 为事件:

$$\left|\overline{S_{\mathrm{OPT}}}\cap G_1\right| \le k\frac{|G_1|}{n} + \sqrt{k\log\frac{m}{\delta}} \quad \text{and} \quad \left|\overline{S_{\mathrm{OPT}}}\cap C_j\cap G_1\right| > k^{1/2}.$$

根据公式（28）和（29），$\Pr[\mathscr{E}] \ge 1-2\delta$。因此，在给定 $\mathscr{E}$ 的条件下， $S_{\mathrm{OPT}}\cap\overline{G_1}$ 对于公式 (17) 是可行的。由于 S 是公式 (17) 的最优解，因此在给定 $\mathscr{E}$的条件下:

$$\widetilde{F}(\widetilde{S}) \ge \widetilde{F}(\overline{S_{\mathrm{OPT}}}). \tag{30}$$

此外，对于每个 j， $\left|S_{\mathrm{OPT}}\cap C_j\right| \ge 2\gamma^{-1}\sqrt{k}$和 $W_{ij}\ge\tau$，可知 $\sum_{i\in S_{\mathrm{OPT}}\cap C_j} W_{ij} \ge 2\tau\sqrt{k}$。因此，$S_{\mathrm{OPT}}$ 满足公式（21），其中 $x \ge 2\tau\gamma^{-1}(k)^{-1/2}$。利用引理 6.4（因为 S_{OPT} 与 G_1独立），可知其概率至少为 $1-\delta$ （对于任意 $\delta \ge me^{-\tau^2\gamma^5\sqrt{k}}$）

$$\widetilde{F}(\overline{S_{\mathrm{OPT}}}) \ge F(\overline{S_{\mathrm{OPT}}})\left(1-\sqrt{\frac{1}{2\tau^2\gamma^5\sqrt{k}}\log\frac{1}{\delta}}\right). \tag{31}$$

最后，我们将 $F(S_{\mathrm{OPT}})$ 下界为 $F(\mathrm{OPT})$ 的某个倍数。首先注意，对于所有 $j\ne j^\star$, $\overline{S_{\mathrm{OPT}}}\cap C_j \supseteq \mathrm{OPT}\cap C_j$，因此,

$$\forall j\ne j^\star,\quad g_j\left(\sum\nolimits_{i\in\overline{S_{\mathrm{OPT}}}} W_{ij}\right) \ge g_j\left(\sum\nolimits_{i\in S_{\mathrm{OPT}}} W_{ij}\right). \tag{32}$$

此外，根据 S_{OPT} 的构造，$(\overline{S_{\mathrm{OPT}}}\cap\overline{C_{j^\star}}) \subseteq (S_{\mathrm{OPT}}\cap C_{j^\star})$，而 $(S_{\mathrm{OPT}}\cap C_{j^\star})\backslash(S_{\mathrm{OPT}}\cap\overline{C_{j^\star}})$ 由 $S_{\mathrm{OPT}}\cap C_{j^\star}$ 中潜在效用最小的 α 个项目组成，其中 $\alpha\le 2m\gamma^{-1}k^{1/2}$。令$\Delta := |S_{\mathrm{OPT}}\cap C_{j^\star}|$。令 $i(1)$ $i(2)\ldots, i(\Delta)$ 为 $S_{\mathrm{OPT}}\cap C_{j^\star}$ 中满足 $W_{i(1)j^\star}\ge W_{i(2)j^\star}\ge\cdots$ 的项目。我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i\in\overline{S_{\mathrm{OPT}}}} W_{ij^\star}}{\sum_{i\in S_{\mathrm{OPT}}} W_{ij^\star}} &= \frac{\sum_{i\in\overline{S_{\mathrm{OPT}}}\cap C_{j^\star}} W_{ij^\star}}{\sum_{i\in S_{\mathrm{OPT}}\cap C_{j^\star}} W_{ij^\star}} && \text{(Using Assumption 1)}\\
&= \frac{\sum_{h=1}^{|\overline{S_{\mathrm{OPT}}}\cap C_{j^\star}|} W_{i(h)j^\star}}{\sum_{h=1}^{\Delta} W_{i(h)j^\star}}. && \text{（使用 } S_{\mathrm{OPT}}\cap C_{j^\star} = \{i(1)\ldots,\, i(\Delta)\}\text{）}
\end{aligned}$$

根据构造， S_{OPT} 从 $\overline{\mathrm{OPT}}$ 中至多删除 α 个项目；如果删除了 x 个项目，那么这些项目就是 $S_{\mathrm{OPT}}\cap C_{j^\star}$中潜在效用最小的$x$ 个项目。因此

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i\in\overline{S_{\mathrm{OPT}}}} W_{ij^\star}}{\sum_{i\in S_{\mathrm{OPT}}} W_{ij^\star}} &\ge \frac{\sum_{h=1}^{\Delta-\alpha} W_{i(h)j^\star}}{\sum_{h=1}^{\Delta} W_{i(h)j^\star}}\\
&\ge \left(1+\frac{\alpha W_{i(\Delta-\alpha)j^\star}}{\sum_{h=1}^{\Delta-\alpha} W_{i(h)j^\star}}\right)^{-1}\\
&\ge \left(1+\frac{\alpha}{\Delta-\alpha}\right)^{-1} && \text{(Using that } W_{i(\Delta-\alpha)j^\star}\le W_{i(h)j^\star} \text{ for all } \alpha\le j\le\Delta-\alpha\text{)}
\end{aligned}$$

$$\geq \left(1 + \frac{2m\gamma^{-1}\sqrt{k}}{\frac{k}{2m} - 2m\gamma^{-1}\sqrt{k}}\right)^{-1} \quad \text{(Using that } \alpha \leq 2m\gamma^{-1}k^{1/2} \text{ and by Pigeon hole principal } \Delta \geq \tfrac{k}{m}\text{)}$$
$$= 1 - \frac{4m^2}{\gamma\sqrt{k}}. \tag{33}$$

由于$g_{j^\star}$ 是凹函数且单调递增，我们有

$$\begin{aligned} g_{j^\star}\left(\sum\nolimits_{i\in\overline{S_{\mathrm{OPT}}}} W_{ij^\star}\right) &\overset{(33)}{\geq} g_{j^\star}\left(\left(1 - 4\gamma^{-1}m^2k^{-1/2}\right)\cdot \sum\nolimits_{i\in S_{\mathrm{OPT}}} W_{ij^\star}\right) \\ &\geq \left(1 - 4\gamma^{-1}m^2k^{-1/2}\right)\cdot g_{j^\star}\left(\sum\nolimits_{i\in\overline{S_{\mathrm{OPT}}}} W_{ij^\star}\right). \\ &\qquad \text{(Using that } g_{j^\star} \text{ is concave and } g(0)\geq 0\text{)} \end{aligned} \tag{34}$$

因此，结合公式（32）和（34），可得

$$F(\overline{S_{\mathrm{OPT}}}) \geq F(S_{\mathrm{OPT}})\cdot\left(1 - 4\gamma^{-1}m^2k^{-1/2}\right). \tag{35}$$

通过串联公式 (30)、(31) 和 (35)，并对公式 (30) 和 (31) 中的事件取并集界，即可得到所需结果。□

~如果 S 与 G_1独立，那么引理 6.4 和 6.5 表明，以高概率存在一个子集 S_E，使得 $\widetilde{S} = S_E \cap G_1$，并且 $F(S_E)$ 至少为 $\mathrm{OPT}\cdot\left(1 - O(k^{-1/4})\right)$. 然而， $\widetilde{S}$与 G_1并不独立。引理 6.6 解决了这一问题。

~**引理 6.6.** 假设 $C_1, \ldots, C_m$ 两两不相交，且对于所有 x， $\phi_1(x) = x$。令 S 为算法 *1* 第 *1* 部分中构造的集合， $k_1, \ldots, k_j$ 为算法 *1* 第 *11* 步中定义的集合。对于任意 $\delta > 0$，以至少 $1-\delta$ 的概率，存在一个子集 $S_E \subseteq [n]$ 满足

$$\forall j \in [m], \quad |S_E \cap C_j| \leq k_j \quad \textit{and} \quad F(S_E) \geq \mathrm{OPT}\cdot\left(1 - O\left(\sqrt{\frac{m^4}{\tau^2\gamma^5 k^{1/2}}\log\frac{m}{\delta}}\right)\right). \tag{36}$$

~证明。 证明依赖于这样一个事实： $S \subseteq G_1$ 是局部最优的。回顾一下，如果对于每个 j，$S \cap C_j$ 都是 $C_j \cap G_1$中潜在效用最高的 $|S \cap C_j|$ 个项目的集合，那么就称 $S \subseteq G_1$ 是局部最优的。将局部最优性的定义扩展到不一定是G_1子集的集合：如果对于每个 $j \in [m]$， $S \cap C_j$ 包含 C_j 中潜在效用最高的 $|S \cap C_j|$ 个项目（而非 $C_j \cap G_1$），则称子集 $S \subseteq [n]$ 是局部最优的。局部最优子集 S 由以下数值唯一确定

$$x_{j,S} \coloneqq |S \cap C_j| \quad \text{for each } 1 \leq j \leq m.$$

令 $\mathcal{S}$ 为所有满足$x_{j,\ S} \geq 2\gamma^{-1}\sqrt{k}$ （对每个$1 \leq j \leq m$均成立）且大小至多为 k 的局部最优子集 S 构成的集合。由于每个 $S \in \mathcal{S}$ 都由 $\{x_{j,S}\}_j$ 唯一确定，且对于每个$x_{j,\ S}$都有 $k+1$ 种选择，因此可得 $|\mathcal{S}| \leq (k+1)^m$。由于 $W_{ij} > \tau$（对每个 i 和 j均成立），

$$\forall S \in \mathcal{S}, \quad \sum\nolimits_{i\in S\cap C_j} \geq 2\tau\gamma^{-1}\sqrt{k}.$$

因此，每个 $S \in \mathcal{S}$ 都满足公式（21）和 $x = 2\tau\gamma^{-1}k^{-1/2}$。 $\mathcal{S}$ 由 W 确定，因此与 G_1 独立。consequently，引理 6.4 对任意 $S \in \mathcal{S}$ 均适用。应用

对每个 $S \in \mathcal{S}$ 应用引理 6.4，并取并集界，可得：对于任意 $\delta \geq m \cdot (k+1)^m \cdot e^{-\tau^2\gamma^5\sqrt{k}}$，以至少 $1-\delta$ 的概率，对所有 $T \in \mathcal{S}$

$$\left|\widetilde{F}(T) - F(T)\right| \leq \sqrt{\frac{1}{2\tau^2\gamma^5 k^{1/2}} \log \frac{m \cdot (k+1)^m}{\delta}} \cdot F(T).$$

换言之，对于任意 $\delta \geq e^{-\Omega(\tau^2\gamma^5\sqrt{k})}$，以至少 $1-\delta$ 的概率，对所有 $T \in \mathcal{S}$

$$\left|\widetilde{F}(T) - F(T)\right| \leq \sqrt{\frac{m}{\tau^2\gamma^5 k^{1/2}} \log \frac{mk}{\delta}} \cdot F(T).$$

选择子集 $T \in \mathcal{S}$，使得对每个 $1 \leq j \leq m$

$$|T \cap C_j| = x_{j,T} \geq \min\left\{\frac{n}{|G_1|} \cdot |\widetilde{S} \cap C_j|, |C_j|\right\}.$$

这样的子集存在，因为 $\sum_{j=1}^m \frac{n}{|G_1|} \cdot |S \cap C_j| = \frac{n}{|G_1|}|S| = k$。接下来，将 $1 \leq j \leq m$ 分为两种情形。

情形 A ($|T \cap C_j| = |C_j|$)： 必定有 $T \cap C_j = C_j$，因此 $(S \cap C_j) \subseteq (T \cap C_j)$。由于 $S \subseteq G_1$，这意味着 $(S \cap C_j) \subseteq (T \cap C_j \cap G_1)$。因此

$$g_j\left(\frac{n}{|G_1|}\sum\nolimits_{i \in T \cap C_j \cap G_1} W_{ij}\right) \geq g_j\left(\frac{n}{|G_1|}\sum\nolimits_{i \in \widetilde{S} \cap C_j} W_{ij}\right). \tag{37}$$

情形 B（$|T \cap C_j| \geq \frac{n}{|G_1|} \cdot |\widetilde{S} \cap C_j|$）： 在此情形下，我们将证明（$T \cap C_j$）至少包含（$S \cap C_j$）中 $1 - O(k^{-1/4})$ 比例的项目。为此，注意到

$$\mathbb{E}_{G_1}[|T \cap C_j \cap G_1|] = \frac{|G_1|}{n}|T \cap C_j| \geq |\widetilde{S} \cap C_j|.$$

对以下示性随机变量 $\{\mathbf{I}[i \in G_1]$ 应用切尔诺夫界：$i \in T \cap C_j\}$，我们得到，对于任意 $\delta > 0$

$$\Pr\left[|T \cap C_j \cap G_1| \geq |\widetilde{S} \cap C_j| - \sqrt{3 \cdot |\widetilde{S} \cap C_j| \cdot \log \frac{m}{\delta}}\right] \leq \frac{\delta}{m}.$$

由于 $|\widetilde{S} \cap C_j| \geq \sqrt{k}$，这意味着

$$\Pr\left[|T \cap C_j \cap G_1| \geq |\widetilde{S} \cap C_j|\left(1 - \sqrt{3 \cdot k^{-1/2} \cdot \log \frac{m}{\delta}}\right)\right] \leq \frac{\delta}{m}. \tag{38}$$

令上式中的事件为 $\mathscr{E}$。令 $\Delta := |C_j \cap G_1|, \phi := \left|\widetilde{S} \cap C_j\right|$，并令 $i(1)\ i(2) \ldots, i(\Delta)$ 为 $C_j \cap G_1$ 中按潜在效用递减排序的元素，即 $W_{i(1)j} \geq W_{i(2)j} \geq \cdots \geq W_{i(\Delta)j}$。那么，在给定 $\mathscr{E}$ 的条件下，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i \in T \cap C_j \cap G_1} W_{ij}}{\sum_{i \in \widetilde{S} \cap C_j} W_{ij}} &= \frac{\sum_{h=1}^{|T \cap C_j \cap G_1|} W_{i(h)j}}{\sum_{h=1}^{\phi} W_{i(h)j}} && \text{(Using that } \widetilde{S}, T \text{ are locally optimal and } \phi := |\widetilde{S} \cap C_j|) \\
&\geq \frac{\sum_{h=1}^{\phi \cdot \left(1 - O\left(k^{-1/4}\sqrt{\log m/\delta}\right)\right)} W_{i(h)j}}{\sum_{h=1}^{\phi} W_{i(h)j}} && \text{(Using that } \mathscr{E} \text{ is the event in Equation (38))}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{\sum_{h=\phi\cdot\left(1-O\left(k^{-1/4}\sqrt{\log m/\delta}\right)\right)+1}^{\phi} W_{i(h)j}}{\sum_{h=1}^{\phi\cdot\left(1-O\left(k^{-1/4}\sqrt{\log m/\delta}\right)\right)} W_{i(h)j}}\right)^{-1} \\
&\geq \left(1 + \frac{O\left(k^{-1/4}\sqrt{\log m/\delta}\right)}{1-O\left(k^{-1/4}\sqrt{\log m/\delta}\right)}\right)^{-1} \qquad \text{(Using } W_{i(1)j} \geq W_{i(2)j} \geq \ldots \geq W_{i(\Delta)j} \text{ and } W_{ij} \geq 0\text{)} \\
&\geq 1 - O\left(k^{-1/4}\sqrt{\log m/\delta}\right).
\end{aligned}
$$

因此，在给定 $\mathscr{E}$ 的条件下，

$$
\begin{aligned}
g_j\left(\frac{n}{|G_1|}\sum\nolimits_{i\in T\cap C_j\cap G_1} W_{ij}\right) &\geq g_j\left(\frac{n}{|G_1|}\cdot\left(1-O\left(k^{-1/4}\sqrt{\log m/\delta}\right)\right)\cdot\sum\nolimits_{i\in\widetilde{S}\cap C_j} W_{ij}\right) \\
&\qquad (g_j \text{ is increasing}) \\
&\geq \left(1-O\left(k^{-1/4}\sqrt{\log m/\delta}\right)\right)\cdot g_j\left(\frac{n}{|G_1|}\cdot\sum\nolimits_{i\in\widetilde{S}\cap C_j} W_{ij}\right). \\
&\qquad \text{(Using that } g_j \text{ is concave and } g(0)\geq 0\text{)} \quad (39)
\end{aligned}
$$

对所有 j 满足 $|T\cap C_j| \neq |C_j|$ 的情况应用并集界，我们得到，以至少 $1-\delta$ 的概率，所有 $1\leq j\leq m$ 都满足公式（39）。结合公式（37），我们得到，以至少 $1-\delta$ 的概率，

$$
\sum_{j=1}^{m} g_j\left(\frac{n}{|G_1|}\sum_{i\in T\cap C_j\cap G_1} W_{ij}\right) \geq \left(1-O\left(k^{-1/4}\sqrt{\log m/\delta}\right)\right)\cdot\sum_{j=1}^{m} g_j\left(\frac{n}{|G_1|}\cdot\sum_{i\in\widetilde{S}\cap C_j} W_{ij}\right). \quad (40)
$$

~结合情形 A 和情形 B，并利用 F 的定义（公式 (15)），可得其概率至少为 $1-\delta$，

$$
\widetilde{F}(T) \geq \left(1-O\left(k^{-1/4}\sqrt{\log m/\delta}\right)\right)\cdot\widetilde{F}(\widetilde{S}).
$$

~ ~将上述不等式与引理 6.5 给出的 $F(S)$ 下界结合起来，即可得出引理 6.6。 □

引理 6.7。 以至少 $1-\delta$ 的概率，对于所有 $j\in[m]$，算法 *1* 中计算的子集 S_j 满足

$$
g_j(S_j) \geq \left(1-O\left(\gamma^{-1}k^{-1/2}\log\frac{1}{\delta}\right)\right)\cdot\max_{T\subseteq C_j:|T|\leq k_j} g_j\left(\sum\nolimits_{i\in T} W_{ij}\right).
$$

该算法的运行时间为 $O(|C_j|$对数 $|C_j|)$。

我们在第 6.2.4 节中给出引理 6.7 的证明。

6.2.3 利用引理 6.6 和引理 6.7 证明定理 4.3

证明。 证明分为两部分。首先，我们利用假设 1 将最大化问题划分为 m 个部分，然后利用引理 6.6 完成证明。

（假设 1 的推论）。 由于假设 1 成立，我们有 $F(S) = \sum_{j=1}^{m} F(S \cap C_j)$。 因此，

$$\begin{aligned}
\max_{T\subseteq[n]:\forall j,\ |T\cap C_j|\le k_j} F(T) &= \max_{T\subseteq[n]:\forall j,\ |T\cap C_j|\le k_j} \sum_{j=1}^{m} F(T\cap C_j) \\
&= \max_{T_1\subseteq C_1,\ldots,T_m\subseteq C_m:\forall j,\ |T_j|\le k_j} \sum_{j=1}^{m} F(T_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \max_{T_j\subseteq C_j:|T_j|\le k_j} F(T_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \max_{T_j\subseteq C_j:|T_j|\le k_j} g_j(T_j).
\end{aligned}$$

（利用以下事实：根据 假设 1，对于任意 $h,\ j\in[m]$，在 $h\neq j$ 且集合 $A\subseteq C_j$, $g_h(A)=0$) 的情况下 (41)

（引理 6.6 的推论）。令 $\mathscr{E}$ 表示存在满足公式（36）的子集 S_E 这一事件。在给定 $\mathscr{E}$ 的条件下，有

$$\max_{S\subseteq[n]:\forall j,\ |S\cap C_j|\le k_j} F(S) \ge \mathrm{OPT}\cdot\left(1 - O\left(\sqrt{\frac{m^4}{\tau^2\gamma^5 k^{1/2}}\log\frac{m}{\delta}}\right)\right). \tag{42}$$

结合公式（41）和（42），可得在给定 $\mathscr{E}$ 的条件下，以下结论成立

$$\sum_{j=1}^{m} \max_{T_j\subseteq C_j:|T_j|\le k_j} F(T_j) \ge \mathrm{OPT}\left(1 - O\left(\sqrt{\frac{m^4}{\tau^2\gamma^5 k^{1/2}}\log\frac{m}{\delta}}\right)\right). \tag{43}$$

令 $\mathscr{F}$ 表示以下事件

$$\forall j\in[m],\quad g_j(S_j) \ge \left(1 - O\left(\sqrt{\frac{1}{\gamma^2 k}}\log\frac{1}{\delta}\right)\right)\cdot \max_{T_j\subseteq C_j:|T_j|\le k_j} g_j(T_j). \tag{44}$$

对所有 $j\in[m]$ 将公式（44）求和，并将其与公式（43）串联，可得：在给定 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{F}$ 的条件下，有

$$F(S) = \sum_{j=1}^{m} g_j(S_j) \ge \mathrm{OPT}\cdot\left(1 - O\left(\sqrt{\frac{m^4}{\tau^2\gamma^5 k^{1/2}}}\cdot\log\frac{m}{\delta}\right)\right). \tag{45}$$

引理 6.6 意味着 $\Pr[\mathscr{E}] \ge 1-\delta$，而引理 6.3 意味着 $\Pr[\mathscr{F}] \ge 1-\delta$.。因此，$\Pr[\mathscr{E},\mathscr{F}] \ge 1 - \Pr[\neg\mathscr{E}] - \Pr[\neg\mathscr{F}] \ge 1-2\delta$。由于 $k\ge k_0$，只需选择足够小的 k_0，使得公式（45）意味着 $F(S) \ge (1-\varepsilon)\cdot\mathrm{OPT}$，且 $2\delta\le\varepsilon$.，即可得出结论。 □

6.2.4 引理 6.7 的证明

证明。本证明仅考虑第 j 个属性以及 C_j 中的项目。为简化记号，对于 $\frown$ 的每个 $i\in C_j$，令 $w_i := W_{ij}$ 和 $\widehat{w}_i := W_{ij}$。此外，定义

$$H(S) = g\left(\sum_{i\in S} w_i\right) \quad \text{and} \quad \widehat{H}(S) = g\left(\sum_{i\in S}\widehat{w}_i\right). \tag{46}$$

令 $S^\star\subseteq C_j$ 为满足大小至多为 k_j 的条件下，使 $H(S)$ 最大化的子集。令 $S_j\subseteq C_j$ 为满足大小至多为 k_j 且满足比例

算法 2 引理 6.7 中的算法

输入： 观测效用 $\widehat{W} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times m}$、一个数 k 和受保护群体 G_1，G_2、.....、G_p **输出：** 一个子集 S，满足 $|S| \leq k$

初始化 $S = \emptyset$ **对于**群体 $t \in [p]$，**执行** 初始化 $T := G_t$ **对于**迭代次数 $r \in [{k \atop p}]$，**执行** 令 i 为使 W_{i1} 在 T **中的所有项目中达到最大值的项目** 设置 $T = T \setminus \{i\}$ 设置 $S = S \cup \{i\}$ **结束循环** **结束循环** **返回** S

代表性约束（即由 $\forall t \in [p]$、$U_t = |G_t \cap C_j| \cdot \frac{k}{n}$ 编码的约束）。请注意，这个 S_j 与算法 1 中计算出的 S_j 相同。我们将证明，以高概率

$$\sum\nolimits_{i \in S_j} w_i \geq (1-\varepsilon) \cdot \sum\nolimits_{i \in S^\star} w_i.$$

引理 6.7 由上述内容可得，因为 $0 \leq \varepsilon < 1$ 和 $x > 0$,

$$g((1-\varepsilon) \cdot x) \geq (1-\varepsilon) \cdot g(x) + \varepsilon \cdot g(0) = (1-\varepsilon) \cdot g(x),$$

因为 g 是凹函数，且 $g(0) = 0$。在证明的其余部分，我们设

$$H(S) = \sum\nolimits_{i \in S} w_i \quad \text{and} \quad \widehat{H}(S) = \sum\nolimits_{i \in S} \widehat{w}_i. \tag{47}$$

假设 $\{w_i : i \in C_j\}$ 中的所有值都互不相同。这可以通过对这些值施加无穷小扰动来保证。这样只会使 $H(S)$ 的值发生无穷小变化。

命题 A. 我们声称，对于每个 $\ell \in [p]$，以至少 $1-\delta$ 的概率，有

$$\frac{H(S_j \cap G_\ell)}{H(S^\star \cap G_\ell)} \geq 1 - \varepsilon. \tag{48}$$

假设命题 A 成立时引理 6.7 的证明。若此命题成立，则结论随即成立：对所有 $\ell \in [p]$ 使用并集界可得，以至少 $1-\delta$ 的概率，等式 (48) 对所有 $\ell \in [p]$ 都成立。在等式 (48) 对所有 $\ell \in [p]$ 都成立这一事件的条件下，我们有

$$\begin{aligned} \frac{H(S_j)}{H(S^\star)} &= \frac{\sum_{\ell \in [p]} H(S_j \cap G_\ell)}{\sum_{\ell \in [p]} H(S^\star \cap G_\ell)} \\ &\geq \frac{(1-\varepsilon) \cdot \sum_{\ell \in [p]} H(S^\star \cap G_\ell)}{\sum_{\ell \in [p]} H(S^\star \cap G_\ell)} && \text{(Using Equation (48))} \\ &= (1-\varepsilon). \end{aligned}$$

命题 A 的证明。任取 $\ell \subseteq [p]$。令 $i(h)$ 在 $\{w_i$ 中具有 h 个最大的 w 值：$i \in G_\ell \cap C_j\}$。由于 ϕ_ℓ 是递增的，因此 $i(h)$ 在 $\{\widehat{w}_i$ 中也具有 h 个最大的 $\widehat{w}$ 值：$i \in G_\ell \cap C_j\} = \{\phi_\ell(w_i)$：$i \in G_\ell \cap C_j\}$。定义

$$r \coloneqq |S^\star \cap G_\ell| \quad \text{and} \quad \widetilde{r} \coloneqq |S_j \cap G_\ell| \,.$$

成立的是

$$S^\star \cap G_\ell = \{i(1), \ldots, i(r)\} \,.$$

（否则，我们可以通过将 $S^\star$ 中的一个元素替换为 $\{i(1) \ldots, i(r)\} \setminus S^\star$中的一个元素，来增大 $H(S^\star)$。）此外，还成立的是

$$S_j \cap G_\ell = \{i(1), \ldots, i(\widetilde{r})\} \,.$$

$\widehat{\ }$（否则，我们可以通过将 S_j 中的一个元素 i 替换为 $\{i(1) \ldots, i(\widetilde{r})\} \setminus S_j$中的一个元素 i'，来增大 $H(S_j)$；注意，这不会违反比例代表性约束，因为两者均为 $i, i' \in G_\ell$。）

(步骤 1：关于 $H(S_j \cap G_\ell)$ $H(S^\star \cap G_\ell)$ 利用上述观察结果，我们得到以下表达式

$$\frac{H(S_j \cap G_\ell)}{H(S^\star \cap G_\ell)} = \frac{w_{i(1)} + w_{i(2)} + \cdots + w_{i(\widetilde{r})}}{w_{i(1)} + w_{i(2)} + \cdots + w_{i(r)}}.$$

因此，如果 $\widetilde{r} \geq r$，那么 $\frac{H(S_j \cap G_\ell)}{H(S^\star \cap G_\ell)} \geq 1$. 否则，我们有以下下界

$$\begin{aligned}
\frac{H(S_j \cap G_\ell)}{H(S^\star \cap G_\ell)} &= \frac{w_{i(1)} + w_{i(2)} + \cdots + w_{i(\widetilde{r})}}{w_{i(1)} + w_{i(2)} + \cdots + w_{i(r)}} \\
&\geq \frac{w_{i(1)} + w_{i(2)} + \cdots + w_{i(\widetilde{r})}}{w_{i(1)} + w_{i(2)} + \cdots + w_{i(\widetilde{r})} \cdot (r - \widetilde{r} + 1)} && \text{(Using that } w_{i(1)} \geq w_{i(2)} \geq \cdots \geq w_{i(r)}\text{)} \\
&\geq 1 - \frac{w_{i(\widetilde{r})} \cdot (r - \widetilde{r})}{w_{i(1)} + w_{i(2)} + \cdots + w_{i(\widetilde{r})} \cdot (r - \widetilde{r} + 1)} && \text{(Using that } w_{i(1)} \geq w_{i(2)} \geq \cdots \geq w_{i(r)}\text{)} \\
&\geq \frac{\widetilde{r}}{r}. && \text{(Using that } w_{i(\widetilde{r})} \leq w_{i(i)} \text{ for all } 1 \leq i \leq \widetilde{r}\text{)}
\end{aligned}$$

因此，在任一种情况下

$$\frac{H(S_j \cap G_\ell)}{H(S^\star \cap G_\ell)} \geq \frac{\widetilde{r}}{r}. \tag{49}$$

$\widetilde{\ }$（步骤 2：$\frac{r}{r}$ 的下界）。首先，

$$\widetilde{r} = k \cdot \frac{|G_\ell \cap C_j|}{n}. \tag{50}$$

（否则，将 $i(\widetilde{r}+1)$ 添加到 S_j 会提高其效用，且不会违反比例代表约束）。接下来，由于 $S^\star \subseteq C_j$ 与受保护群体 G_1，G_2，$\ldots$，G_p 独立，并且 G_ℓ 是通过从 C_j 中均匀且不放回地抽取 $|G_\ell|$ 个元素构造的，因此 $r \coloneqq |S^\star \cap G_\ell|$，是一个服从参数为 $n = |G_\ell|$、$K = |S^\star|$和 $N = |C_j|$ 的超几何分布的随机变量。（回想一下，对于超几何随机变量 X，$\mathbf{Pr}[X = r]$ 表示从一个含有 K 个红球和 $N - K$ 个蓝球的罐子中不放回地抽取 n 次，得到 r 个红球的概率。）根据超几何分布的标准性质 [36, 定理 1]，可得

$$\mathbb{E}[r] = |G_\ell \cap C_j| \cdot \frac{|S^\star|}{n} = |G_\ell \cap C_j| \cdot \frac{k}{n} \quad \text{and} \quad \Pr\left[\left|r - |G_\ell \cap C_j| \cdot \frac{k}{n}\right| \leq \ln\left(\frac{1}{\delta}\right)\sqrt{k}\right] \leq \delta. \tag{51}$$

因此，概率至少为 $1-\delta$

$$r \leq |G_\ell \cap C_j| \cdot \frac{k}{n} + \ln\left(\frac{1}{\delta}\right)\sqrt{k} = \widetilde{r} + \ln\left(\frac{1}{\delta}\right)\sqrt{k}. \tag{52}$$

（步骤 *3*：命题 *A* 的证明）。由此可知，以至少 $1-\delta$ 的概率，

$$\begin{aligned}
\frac{H(S_j \cap G_\ell)}{H(S^\star \cap G_\ell)} &\geq \frac{1}{1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)\sqrt{k}}{\widetilde{r}}} && \text{(Using Equations (49) and (52))} \\
&\geq 1 - \frac{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{\widetilde{\pi}}{\delta}\right) \cdot n} && \text{(Using } 1 - x \leq \tfrac{1}{1+x} \text{ for all } x \in \mathbb{R}\text{)} \\
&= 1 - \frac{}{\sqrt{k} \cdot |G_\ell|} && \text{(Using Equation (50))} \\
&\geq 1 - \frac{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\gamma\sqrt{k}}.
\end{aligned}$$

□

7 局限性与结论

本文研究次模函数的最大化问题。次模函数已被用于刻画推荐系统和网络搜索中项目子集的效用。本文考察了这样一种情形：定义次模函数的输入存在社会偏见——该偏差模型是对 [43] 的偏差模型的扩展——而这些偏差会降低输出子集的潜在效用。我们的首个结果表明，在公平性约束下最大化观测效用，并不足以恢复最优潜在效用的任何比例（定理 4.1）。积极的一面是，我们提出了一种用于次模最大化的算法（算法 1），适用于一类通用的次模函数，其中涵盖了推荐和网络搜索中使用的次模函数。在温和的假设下，该算法能够以理论保证输出潜在效用接近最优的子集（定理 4.3）。即使理论结果所需的假设不成立，从经验上看，该算法输出的子集的潜在效用仍高于基线方法（图 1 和图 2）。

我们的工作提出了若干值得后续研究的问题。当选取的项目数量 k 远多于属性数量 m时，我们的算法能够实现接近最优的潜在效用。设计能够在更广泛的 k 范围内实现较高潜在效用的算法，是一个有趣的研究方向。此外，我们的模型（与其他若干模型一样 [43, 18]）存在一个局限：它没有对交叉性进行建模。虽然可以通过将每个交叉类别定义为一个独立群体来部分解决这一问题，但当交叉类别的规模过小时，这种做法可能并不可行 [40]。基于真实世界数据的实证结果表明，即使在某些数据不符合所考虑的理论模型的情况下，我们的算法仍优于基线方法。然而，为避免造成任何意外伤害，在部署前后仔细评估算法在特定应用数据上的表现十分重要。此外，在某些情境下，已有研究表明，平权行动政策对“系统”中的偏差具有积极的长期影响 [16, 34]。我们的算法可被视为一种带有数据依赖约束的平权行动政策，研究其长期影响是一个有趣的方向。此外，子模最大化只是更广泛的信息检索或推荐系统的一部分；考察输入中的偏差对系统其他部分的影响，并评估我们的算法与整个系统结合使用时的效果，也是值得研究的方向。

致谢 本项目部分由美国国家科学基金会（NSF）资助项目（CCF-2112665 和 IIS-2045951）以及一项 AWS MLRA项目资助。

参考文献

[1] Himan Abdollahpouri。《推荐中的流行度偏差：多利益相关者视角》。博士论文，科罗拉多大学博尔德分校，2020年。[2] Rakesh Agrawal、Sreenivas Gollapudi、Alan Halverson 和 Samuel Ieong。搜索结果多样化。载于 *WSDM*，第5–14页。ACM，2009年。[3] Abolfazl Asudeh、Tanya Berger-Wolf、Bhaskar DasGupta 和 Anastasios Sidiropoulos。在确保公平性的同时最大化覆盖范围：冲突目标的故事。*Algorithmica*，2022年。[4] Sayan Bandyapadhyay、Aritra Banik 和 Sujoy Bhore。关于公平覆盖问题和击中问题。载于 Łukasz Kowalik、Michał Pilipczuk 和 Paweł Rzążewski（编），计算机科学中的图论概念，第39–51页，查姆，2021年。施普林格国际出版社。[5] Rémi Bardenet 和 Odalric-Ambrym Maillard。无放回抽样的集中不等式。*Bernoulli*，21(3):1361–1385，2015年。[6] Solon Barocas、Moritz Hardt 和 Arvind Narayanan。《公平性与机器学习》。fairml-book.org，2019年。http://www.fairmlbook.org。[7] Alyssa Bereznak。IMDb评分系统的问题，2019年1月。https://www.theringer.com/tv/2019/6/12/18661850/imdb-rating-system-problems-chernobyl。[8] Marianne Bertrand 和 Sendhil Mullainathan。Emily和Greg是否比Lakisha和Jamal更容易就业？劳动力市场歧视的现场实验。《美国经济评论》，94(4):991–1013，2004年。[9] Asia J. Biega、Krishna P. Gummadi 和 Gerhard Weikum。注意力公平：在排名中分摊个体公平性。载于 *SIGIR*，第405–414页。ACM，2018年。[10] Víctor Blanco 和 Ricardo Gázquez。最大覆盖选址问题中的公平性，2022年。[11] Niclas Boehmer 和 Tomohiro Koana。寻找公平多对一匹配的复杂性，2022年。[12] Iris Bohnet。《什么有效：通过设计实现性别平等》。哈佛大学出版社，2016年。[13] Bert Boyce。超越主题相关性：相关性与检索过程的两阶段视角。《信息处理与管理》，18(3):105–109，1982年。[14] Emanuele Bugliarello、Rishabh Mehrotra、James Kirk 和 Mounia Lalmas。Mostra：在音乐排序中权衡用户、艺术家与平台目标的灵活平衡框架。载于 *WWW*，第2936–2945页。ACM，2022年。[15] Gruia Calinescu、Chandra Chekuri、Martin Pál 和 Jan Vondrák。在拟阵约束下最大化单调次模函数。《*SIAM*计算杂志》，40(6):1740–1766，2011年。[16] L. Elisa Celis、Chris Hays、Anay Mehrotra 和 Nisheeth K. Vishnoi。鲁尼规则对长期隐性偏差的影响。载于*2021*年*ACM*公平性、问责制与透明度会议论文集，FAccT ’21，第678–689页，纽约州纽约，美国，2021年。计算机协会。

[17] L. Elisa Celis、Lingxiao Huang 和 Nisheeth K. Vishnoi。带公平性约束的多赢家投票。载于*IJCAI*，第 144–151 页。ijcai.org，2018年。[18] L. Elisa Celis、Anay Mehrotra 和 Nisheeth K. Vishnoi。隐性偏见存在时的排序干预措施。载于*FAT**，第 369–380 页。ACM，2020年。[19] Aaron Clauset、Cosma Rohilla Shalizi 和 Mark EJ Newman。经验数据中的幂律分布。*SIAM*评论，51(4):661–703，2009年。[20] Dan Cosley、Shyong K. Lam、Istvan Albert、Joseph A. Konstan 和 John Riedl。眼见为实吗？推荐系统界面如何影响用户意见。载于*SIGCHI*计算机系统中的人为因素会议论文集，CHI '03，第 585–592 页，美国纽约州纽约市，2003年。计算机协会。[21] Michael D. Ekstrand、Anubrata Das、Robin Burke 和 Fernando Diaz。信息访问系统中的公平性。*Foundations and Trends® in Information Retrieval*，16(1-2):1–177，2022年。[22] Michael D. Ekstrand 和 Daniel Kluver。探索图书评分与推荐中的作者性别。用户建模与用户适应交互，31(3):377–420，2021年。[23] Khalid El-Arini、Gaurav Veda、Dafna Shahaf 和 Carlos Guestrin。为博客圈降噪。载于第*15*届*ACM SIGKDD*知识发现与数据挖掘国际会议论文集，KDD '09，第 289–298 页，美国纽约州纽约市，2009年。计算机协会。[24] Vitalii Emelianov、Nicolas Gast、Krishna P. Gummadi 和 Patrick Loiseau。隐性偏见和差异方差存在时的公平选择。人工智能，302:103609，2022年。[25] Spotify工程团队。登顶之路：Spotify 如何在短短六个月内打造快捷方式，2020年4月。https://engineering.atspotify.com/reach-for-the-top-how-spotify-built-shortcuts-in-just-six-months/.[26] Uriel Feige。用于近似集合覆盖的 $\ln n$ 阈值。《*ACM*学报》，45(4):634–652，1998年7月。[27] Marshall L Fisher、George L Nemhauser 和 Laurence A Wolsey。最大化次模集合函数的近似算法分析——II。载于多面体组合学，第 73–87 页。施普林格，1978年。[28] Sahin Cem Geyik、Stuart Ambler 和 Krishnaram Kenthapadi。搜索与推荐系统中的公平性感知排序及其在LinkedIn人才搜索中的应用。载于*KDD*，第 2221–2231 页。ACM，2019年。[29] Anthony G Greenwald 和 Linda Hamilton Krieger。隐性偏见：科学基础。《加利福尼亚法律评论》，94(4):945–967，2006年。[30] Ulrike Gretzel 和 Daniel R. Fesenmaier。推荐系统中的说服。《国际电子商务杂志》，11(2):81–100，2006年。[31] Anupam Gupta、Aaron Roth、Grant Schoenebeck 和 Kunal Talwar。受约束的非单调次模最大化：离线算法与秘书算法。载于 Amin Saberi（编），互联网与网络经济学，第 246–257 页，柏林、海德堡，2010年。施普林格·柏林·海德堡。

[32] Anikó Hannák、Claudia Wagner、David Garcia、Alan Mislove、Markus Strohmaier 和 Christo Wilson。在线自由职业市场中的偏差：来自Taskrabbit和Fiverr的证据。载于*2017*年*ACM*计算机支持的协同工作与社会计算会议论文集，第 1914–1933 页，2017年。[33] F. Maxwell Harper 和 Joseph A. Konstan。MovieLens 数据集：历史与背景。*ACM*交互式智能系统汇刊，5(4):19:1–19:19，2015年12月。[34] Hoda Heidari 和 Jon Kleinberg。动态代际流动模型中的机会分配。载于*2021*年*ACM*公平性、问责制与透明度会议论文集，FAccT '21，第 15–25 页，美国纽约州纽约市，2021年。计算机协会。[35] Lu Hong 和 Scott E Page。多样化的问题解决者群体能够胜过高能力的问题解决者群体。美国国家科学院院刊，101(46):16385–16389，2004年。[36] Don Hush 和 Clint Scovel。超几何分布的集中性。《统计与概率快报》，75(2):127–132，2005年。[37] Lars Bo Jeppesen 和 Karim R Lakhani。广播式搜索中的边缘性与问题解决效能。《组织科学》，21(5):1016–1033，2010年。[38] Toshihiro Kamishima 和 Shotaro Akaho。关于"寻找好项目"任务中推荐独立性的考量。2017年。[39] Matthew Kay、Cynthia Matuszek 和 Sean A. Munson。职业图像搜索结果中的代表性不平等与性别刻板印象。载于 Bo Begole、Jinwoo Kim、Kori Inkpen 和 Woontack Woo（编），第*33*届*ACM*计算机系统中的人为因素年度会议论文集，*CHI 2015*，韩国大韩民国首尔，*2015*年*4*月*18*日至*23*日，第 3819–3828 页，韩国大韩民国首尔，2015年。ACM。[40] Michael Kearns、Seth Neel、Aaron Roth 和 Zhiwei Steven Wu。防止公平性操纵：子群公平性的审计与学习。载于 Jennifer Dy 和 Andreas Krause（编），第*35*届国际机器学习会议论文集，第 80 卷《机器学习研究论文集》，第 2564–2572 页。PMLR，2018年7月10–15日。[41] Vijay Keswani 和 L. Elisa Celis。Twitter文本摘要中的方言多样性。载于*WWW*，第 3802–3814 页。ACM / IW3C2，2021年。[42] Jon Kleinberg 和 Maithra Raghu。测试分数与团队表现。*ACM*经济与计算汇刊，6(3–4)，2018年10月。[43] Jon M. Kleinberg 和 Manish Raghavan。隐性偏见存在时的选择问题。载于*ITCS*，第 94 卷*LIPIcs*，第 33:1–33:17 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2018年。[44] Andreas Krause 和 Daniel Golovin。次模函数最大化。《可处理性》，3:71–104，2014年。[45] Hui Lin、Jeff Bilmes 和 Shasha Xie。用于抽取式摘要的基于图的次模选择。载于*2009*年*IEEE*自动语音识别与理解研讨会，第 381–386 页。IEEE，2009年。

[46] Karen S Lyness 和 Madeline E Heilman. 当契合度至关重要：高层女性和男性管理者的绩效评估与晋升。应用心理学杂志, 91(4):777, 2006年。[47] Christopher Manning、Prabhakar Raghavan 和 Hinrich Schütze. 信息检索导论。自然语言工程, 16(1):100–103, 2010年。[48] Anay Mehrotra、Bary S. R. Pradelski 和 Nisheeth K. Vishnoi. 隐性偏见下的选择：交叉性约束的优势。发表于$FAccT$, 页码待定。ACM, 2022年。[49] Rishabh Mehrotra、Ashton Anderson、Fernando Diaz、Amit Sharma、Hanna Wallach 和 Emine Yilmaz. 审计搜索引擎在不同人口统计群体间的差异化满意度。发表于第*26*届万维网国际会议伴随会议论文集, 第626–633页，2017年。[50] Rishabh Mehrotra、James McInerney、Hugues Bouchard、Mounia Lalmas 和 Fernando Diaz. 迈向公平市场：推荐系统中相关性、公平性与满意度之间权衡的反事实评估。发表于第*27*届*ACM*信息与知识管理国际会议论文集, CIKM '18, 第2243–2251页，纽约，纽约州，美国，2018年。计算机协会。[51] Scott Mendelson. 《瞒天过海：美人计》大可无视那些破坏《捉鬼敢死队》的人，2018年5月。
https://www.forbes.com/sites/scottmendelson/2018/05/17/
box-office-oceans-8-sandra-bullock-cate-blanchett-anne-hathaway-ghostbusters-rihanna/ ?sh=76
cfd561596d。[52] Christopher Mims. 社交媒体为何如此擅长让我们两极分化，2020年10月。https://
www.wsj.com/articles/why-social-media-is-so-good-at-polarizing-us-11603105204。[53] Michel Minoux. 用于最大化次模集合函数的加速贪心算法。载于 J. Stoer 编，优化技术, 第234–243页，柏林、海德堡，1978年。施普林格·柏林·海德堡。[54] Baharan Mirzasoleiman、Ashwinkumar Badanidiyuru 和 Amin Karbasi. 快速约束次模最大化：个性化数据摘要。载于 Maria Florina Balcan 和 Kilian Q. Weinberger 编，第*33*届国际机器学习会议论文集,《机器学习研究论文集》第48卷，第1358–1367页，美国纽约州纽约市，2016年6月20–22日。PMLR。[55] Baharan Mirzasoleiman、Ashwinkumar Badanidiyuru、Amin Karbasi、Jan Vondrak 和 Andreas Krause. 比惰性贪心更惰性。*AAAI*人工智能会议论文集, 29(1), 2015年2月。[56] Baharan Mirzasoleiman、Amin Karbasi、Rik Sarkar 和 Andreas Krause. 分布式子模最大化。机器学习研究杂志, 17(1):8330–8373, 2016年。[57] Houssam Nassif、Kemal Oral Cansizlar、Mitchell Goodman 和 S. V. N. Vishwanathan. 多样化音乐推荐。$CoRR$, abs/1810.01482, 2018年。[58] George L Nemhauser、Laurence A Wolsey 和 Marshall L Fisher. 最大化次模集合函数的近似算法分析——I。数学规划, 14(1):265–294, 1978年。

[59] Safiya Umoja Noble. 压迫算法：搜索引擎如何强化种族主义。纽约大学出版社，2018年。[60] Alexandra Olteanu、Carlos Castillo、Fernando Diaz 和 Emre Kiciman. 社会数据：偏差、方法论陷阱与伦理边界。*Frontiers Big Data*, 2:13, 2019年。[61] Gourab K. Patro、Lorenzo Porcaro、Laura Mitchell、Qiuyue Zhang、Meike Zehlike 和 Nikhil Garg. 公平排序：批判性综述、挑战与未来方向。发表于*FAccT*, 页码待定。ACM, 2022年。[62] Evaggelia Pitoura、Kostas Stefanidis 和 Georgia Koutrika. 排名与推荐中的公平性：综述。*The VLDB Journal*, 2021年。[63]Soumyajit Saha. Spotify采用印度习惯以避免“Netflix难题”，2022年5月。https://the-ken.com/story/ spotify-adopts-indian-habits-to-avoid-the-netflix-problem/。[64] Ashudeep Singh 和 Thorsten Joachims. 排名中的曝光公平性。发表于*KDD*, 第2219–2228页。ACM, 2018年。[65] Michael Tauberg. 大众媒体中的幂律，2018年6月。https://michaeltauberg.medium. com/power-law-in-popular-media-7d7efef3fb7c。[66] Choon Hui Teo、Houssam Nassif、Daniel Hill、Sriram Srinivasan、Mitchell Goodman、Vijai Mohan 和 S.V.N. Vishwanathan. 用于视觉发现的自适应个性化多样性。发表于第*10*届*ACM*推荐系统会议论文集, RecSys ’16, 第35–38页，纽约，纽约州，美国，2016年。计算机协会。[67] Sahil Verma 和 Julia Rubin. 公平性定义详解。载于 Yuriy Brun、Brittany Johnson 和 Alexandra Meliou 编，*2018*年*5*月*29*日于瑞典哥德堡举行的国际软件公平性研讨会论文集，*FairWare@ICSE 2018*, 第1–7页，瑞典哥德堡，2018年。ACM。[68] Yanhao Wang、Yuchen Li、Francesco Bonchi 和 Ying Wang. 子模最大化中的效用与公平性平衡（技术报告），2022年。[69]Christine Wennerås 和 Agnes Wold. 同行评审中的裙带关系与性别歧视。《自然》，387(6631):341–343, 1997年5月。[70] Ke Yang、Vasilis Gkatzelis 和 Julia Stoyanovich. 带多样性约束的平衡排序。发表于*IJCAI*, 第6035–6042页。ijcai.org，2019年。[71] Ke Yang、Joshua R. Loftus 和 Julia Stoyanovich. 因果交叉性与公平排序。发表于*FORC*, *LIPIcs*第192卷，第7:1–7:20页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2021年。[72] Sirui Yao 和 Bert Huang. 超越均等：协同过滤的公平性目标。神经信息处理系统进展, 30, 2017年。[73] Meike Zehlike 和 Carlos Castillo. 减少排名中的差异化曝光：一种学习排序方法。发表于*WWW*, 第2849–2855页。ACM / IW3C2, 2020年。[74] Meike Zehlike、Ke Yang 和 Julia Stoyanovich. 排名中的公平性，第一部分：基于分数的排序。*ACM*计算机评论, 2022年4月。已正式录用。

A 子模最大化及相关工作的进一步讨论

A.1 先前研究中使用的子模函数的其他示例

次模函数的边际收益递减性质出现在许多应用中，包括内容推荐 [14, 57]，网络搜索 [2]，文本摘要 [45]，和团队选择[35, 37, 42]。这一性质是上述应用采用次模函数的关键原因之一 [44]。

例如，当推荐系统具有不同的目标，且每增加一个满足相同目标的项目所带来的收益都会递减时，就会使用次模函数。具体而言，[14] 解释说：“ [Spotify 的] 音乐推荐系统的一项基本要求，是在向用户呈现音乐内容时，能够兼顾用户（例如，短期满意度目标）、艺术家（例如，增加新兴艺术家的曝光度）和平台（例如，促进发现并推广战略性内容）的考量。” [14] 为 Spotify 设计了一个使用子模目标函数的推荐系统。对于每个项目 i （例如，歌曲或播客），令 $W_{i1} \geq 0$ 表示其与用户的相关性（由学习算法预测），而 W_{i2}、.....、$W_{im} \in \{0, 1\}$ 表示艺术家和平台特定的指标（例如， i 是否由新兴艺术家创作，或者平台是否希望推广 i）。 [14] 使用以下目标函数来表示播放列表 S 对用户的效用。

$$F(S) \coloneqq \sum\nolimits_{i \in S} W_{i1} + \sqrt{\sum\nolimits_{i \in S} W_{i2}} + \cdots + \sqrt{\sum\nolimits_{i \in S} W_{im}}. \tag{53}$$

次模函数也会出现在网络搜索中，因为每个查询 q 都可能有多种解释。例如，查询词“flash”可以指 Adobe Flash 播放器、超级英雄“The Flash”，也可以指位于大不列颠且海拔最高的 Flash 村庄。无论用户想要的是哪种解释，与同一种解释相关的每个额外搜索结果所提供的边际效用都会更低 [2]。假设查询 q （例如“Flash”）以概率 $\Pr[j \mid q]$ 属于类别 $j \in [m]$ （例如技术、电影或地理位置），并且在 q 属于类别 j 这一事件发生的条件下，搜索结果 i 以概率 $\Pr[i \mid j, q]$ 满足用户需求（且与其他项目独立）。 [2] 观察到，使以下次模目标函数最大化的搜索结果集合 S，其质量高于商业搜索引擎提供的搜索结果。

$$F(S) \coloneqq \sum\nolimits_{j=1}^{m} \Pr[j \mid q] \left(1 - \prod_{i \in S} (1 - \Pr[i \mid j, q])\right). \tag{54}$$

这属于族 $\mathscr{F}$。要查看此集合， $W_{ij} = \log 1 - {}^{1}\!/_{\Pr[i|j,q]}$ 以及 $g_j(x) = -\Pr[j \mid q] \cdot e^{-x}$ 对所有 i和 $1 \leq j \leq m$成立，并且 $g_{j+1}(x) = 1$ 对所有 x成立。

给定权重 w_1、.....、w_{m-1}和分数 s_1、.....、s_n， [66] 考虑如下次模函数$F \in \mathscr{F}$，其定义为：(1) 对所有 $1 \leq j \leq m-1$， $g_j(x) = w_j \cdot \log(1 + x)$；(2) 对每个$1 \leq j \leq m-1$，若 i具有第 j 个属性，则 $W_{ij} = 1$；否则 $W_{ij} = 0$；以及 (3) $W_{im} = s_i$。

A.2 关于效用公平性约束益处的相关研究的进一步讨论

近期研究 [43, 18, 24, 48] 表明，当目标函数是可加的或线性的时，对基于输出潜在效用进行子集选择的结果施加公平性约束，能够带来益处。 [43] 引入了第 1 节提到的偏差数学模型。他们考虑两个群体，其中 G_2 是弱势群体，并研究了在什么条件下，关于 β、群体规模、 k和 W的分布的条件，要求输出 S满足 $|S \cap G_2| \geq 1$ 会提高输出的潜在效用。 [18] 研究了子集选择的一种推广形式——排序，在这种形式中，选中的个体

还需要排序。将他们的研究具体应用于子集选择：他们考虑两个群体 G_1和 G_2，并证明，如果 U 编码了比例代表性，且 W 的各项是从 $[0,1]$,上的均匀分布中独立同分布抽取的，那么 $F(S_U) \geq (1-o_k(1)) \cdot \mathrm{OPT}$。[8] [24]研究了另一种偏差模型下的选择问题，在该模型中，一个群体中的个体所受的观测效用噪声高于平均水平。他们给出了一系列公平性约束（包括比例代表性约束），这些约束能够提高输出的潜在效用。 [48] 在与 [18], 相同的模型下研究子集选择，但考虑多个重叠群体。考虑两个重叠群体 G_1、G_2，它们将项目划分为四个不相交的"交集"：$I_a := G_1 \cap G_2$、$I_b := G_1 \backslash G_2$、$I_c := G_2 \backslash G_1$和 $I_d := [n] \backslash (G_1 \cup G_2)$。类似地，$p$ 个重叠群体 G_1、G_2、.....、G_p 至多将项目划分为 2^p 个交集。 [48]研究了这样一种模型：不同交集中的每个项目 i 面临不同程度的偏差：i 的观测效用$\prod_\ell$比其潜在效用小$_{G_\ell \ni i} \beta_\ell$ 倍。 [48] 比较了对群体 G_1、G_2、.....、G_p 施加公平性约束，与对这些群体形成的不相交交集施加公平性约束的效果。与本文最相关的是，他们将 [18] 关于比例代表性约束的结果推广到了多个不相交群体 G_1、G_2、.....、G_p。我们可以采用类似的方法，将我们的结果推广到多个重叠群体：

注释 A.1 (**重叠群体**)。 除了 p 重叠群体 $G_1, G_2, \ldots, G_p$ 外，也可以将这些群体视为由 $G_1, G_2, \ldots, G_p$ 形成的交集。例如，对于 $p = 2$，可以将 I_a, I_b, I_c 和 I_d 视为群体，其偏差函数分别为 $\phi_a = \phi_1 \circ \phi_2$, $\phi_b = \phi_1$,$\phi_c = \phi_2$ 和$\phi_d(x) = x$。由于非空交集最多有 $\min(n, 2^p)$ 个，因此这不会增加论文所提算法（定理 *4.3*）的运行时间。为简单起见，本文假设这些群体互不相交。

与上述所有工作不同，我们研究了当子集选择的目标函数是子模的、而不一定是线性的情况下，公平性约束的有效性。

群体中随机性的必要性。 在我们的模型中，我们假设潜在效用是确定性选取的，而受保护群体是随机的。这是对 [43, 18, 48] 模型的推广；后者等价于从某个分布中独立同分布地抽取潜在效用，并以随机方式构建受保护群体的模型。进一步的推广可以考虑潜在效用和受保护群体都不具有随机性的情形。然而，在这种模型中，从信息论角度而言，不可能输出一个子集，使其潜在效用能够保证至少达到 OPT 的一个正比例。形式上，我们可以证明以下结果：如果潜在效用和受保护群体都可以是任意的，那么任何算法都无法恢复最优效用的任意常数因子 $\frown$近似。设 S_A 为算法 A 在输入 W和 G_1, $G_2, \ldots, G_p$时输出的子集。对于任意 $\varepsilon > 0$和任意算法 A，都存在两个不相交的受保护群体 G_1和 G_2，以及偏差函数 ϕ_1, ϕ_2：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得 $F(S_A) \leq \varepsilon$。

A.3 子模最大化的标准算法

在本节中，我们介绍由 [58]提出的标准贪心算法，用于在基数约束等条件下最大化单调次模函数。

[8]准确地说，他们要求输出中至少包含来自群体 G_ℓ的 L_ℓ 个项目。对于两个群体，这等价于要求输出子集至多包含来自 G_ℓ的 $U_\ell = k - L_{\neg\ell}$ 个项目。

Alg法 3 标准 greedy alg法 58

(∥) 输入：针对 F的评估预言机、一个数值 k以及可行集的集合 $I \subseteq 2^{[n]}$输出：一个子集 $S \in I$，满足 $|S| \leq k$1：初始化 $S = \emptyset$2：当 $|S| < k$ 时，执行以下操作 3：令 $i^\star$为 $[n]$中使 $F(S \cup \{i^\star\}) - F(S)$ 最大的项目，且满足 $S \cup \{i^\star\} \in I$4：设置 $S = S \cup \{i^\star\}$5：结束循环 6：返回 S

算法 4 满足给定上界约束的标准贪心算法变体 输入：针对 F 的评估预言机、数值 k、U_1、. . .、U_p 以及群体 G_1、G_2、. . .、G_p输出：满足 $|S| \leq k$ 和 $|S \cap G_\ell| \leq U_\ell$ 的子集 S 1：初始化 $S = \emptyset$ 2：当 $|S| < k$ 时循环 3：令 $i^\star$ 为 $[n]$ 中使 $F(S \cup \{i^\star\}) - F(S)$ 最大的项目，且满足 $|(S \cup \{i^\star\}) \cap G_\ell| \leq U_\ell$（对每个 ℓ）4：设置 $S = S \cup \{i^\star\}$5：结束循环 6：返回 S

B 实现细节和附加图

B.1 实现细节

代码。 我们的模拟代码可在
https://github.com/AnayMehrotra/Submodular-Maximization-in-the-Presence-of-Biases 获取

合成数据集 1。 图1(a)展示了使用该数据得到的结果。该数据包含 $m := 3$ 个属性和 $n := 250$ 首歌曲，并使用目标函数 $F(S) := \sum_{i \in S} W_{i1} + \lambda \sum_{j=2}^{3} \sqrt{\sum_{i \in S} W_{ij}}$（其中 $\lambda = \frac{1}{20}$）。 —

• 首先，我们选取一个大小为 $|S_E| = 0.8n$ 的歌曲子集 S_E，并将 S_E 中的所有歌曲标记为来自新兴艺术家，其余歌曲则标记为来自非新兴艺术家。这意味着，如果 $i \in S_E$，则 $W_{i2} = 1$；否则为 $W_{i2} = 0$。

• 接下来，对于每首歌曲 $i \in [n]$，以 $p_{\text{NH}} := 0.9$ 的概率，将其标记为“当前用户未听过”，并设置 $W_{i3} = 1$ ；否则，将其标记为 “ 当前用户听过 ”，并设置 $W_{i3} = 0$。

• 最后，对于每首歌曲 $i \notin S_E$，我们从指数为 δ 的幂律分布中独立抽取一个值 X，并设置 $W_{i1} = X \cdot 1000$。[9] 对于每个 $i \in S_E$，我们从指数为 δ、以 $X \leq 2$ 为条件的幂律分布中独立抽取一个值 X，并设置 $W_{i1} = X \cdot 1000$。该条件体现了新兴艺术家尚未拥有任何“热门”歌曲这一事实。

我们固定 $\lambda := \frac{1}{20}$, $|S_E| = 0.8n$ 和 $p_{\text{NH}} = 0.9$，并改变 $\beta \in [0, 1]$, $\delta \in \{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$ 和 $\frac{|G_1|}{n} \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$。

注 B.1. 我们还使用 $|S_E| \in \{0.4n, 0.9n\}$, $p_{\mathrm{NH}} \in \{0.4, 1.0\}$ 和$\lambda \in \left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right\}$ 重复了模拟，观察到的结果与图*1*、*3* 和 *4* 类似。

合成数据集 2。 第二个合成数据集对应图 1(b)，包含 $m := 3$ 个属性和 $n := 250$ 首歌曲，并采用目标函数 $F(S) := \sum_{j=1}^{3} \log\left(1 + \sum_{i \in S} W_{ij}\right)$.

- 我们均匀随机生成集合 C_1，C_2，C_3：对于每个项目 i，以 $\frac{1}{3}$ 的概率将其分配给 C_1，以 $\frac{1}{3}$ 的概率将其分配给 C_2，否则将其分配给 C_3。
- 对于每个 $h \in [3]$ 和 $i \in C_h$，我们从指数为 δ 的幂律分布中独立抽取一个值 X，并设置 $W_{i1} = X \cdot 1000$。[9]

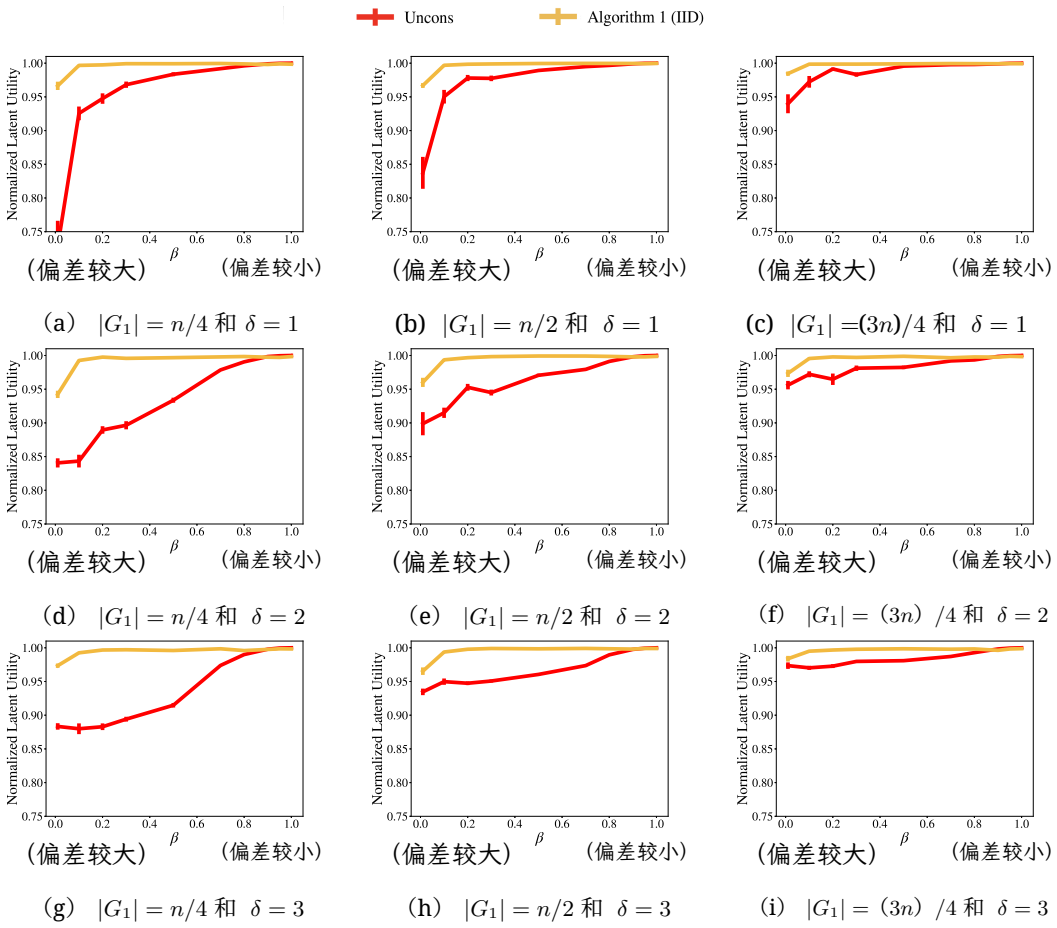
与第一个合成数据集一样，我们通过将均匀随机选择且不重复的 $|G_1|$ 个项目分配给 G_1，并将剩余项目分配给 G_2，来生成群体 G_1 和 G_2。给定 $\beta \in [0, 1]$，我们按照定义 3.2生成观测效用 W，其中 $\phi_1(x) = x$，以及 $\phi_2(x) = \beta x$。在这些数据上的模拟固定了变化的 $\beta \in [0, 1]$、$\delta \in \{1, 2, 3\}$和 $\frac{|G_1|}{n} \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$。

B.2 第5节模拟的附加图

本节将展示第5节中关于合成数据（第B.3节和第B.4节）以及 MovieLens 20M（第B.5节）的模拟附加图。

[9]这很自然，因为人们已经观察到，音乐家的表现 [65] 以及其他创意专业人士的表现 [19]都呈现幂律分布。

B.3 合成数据 1 模拟的附加图



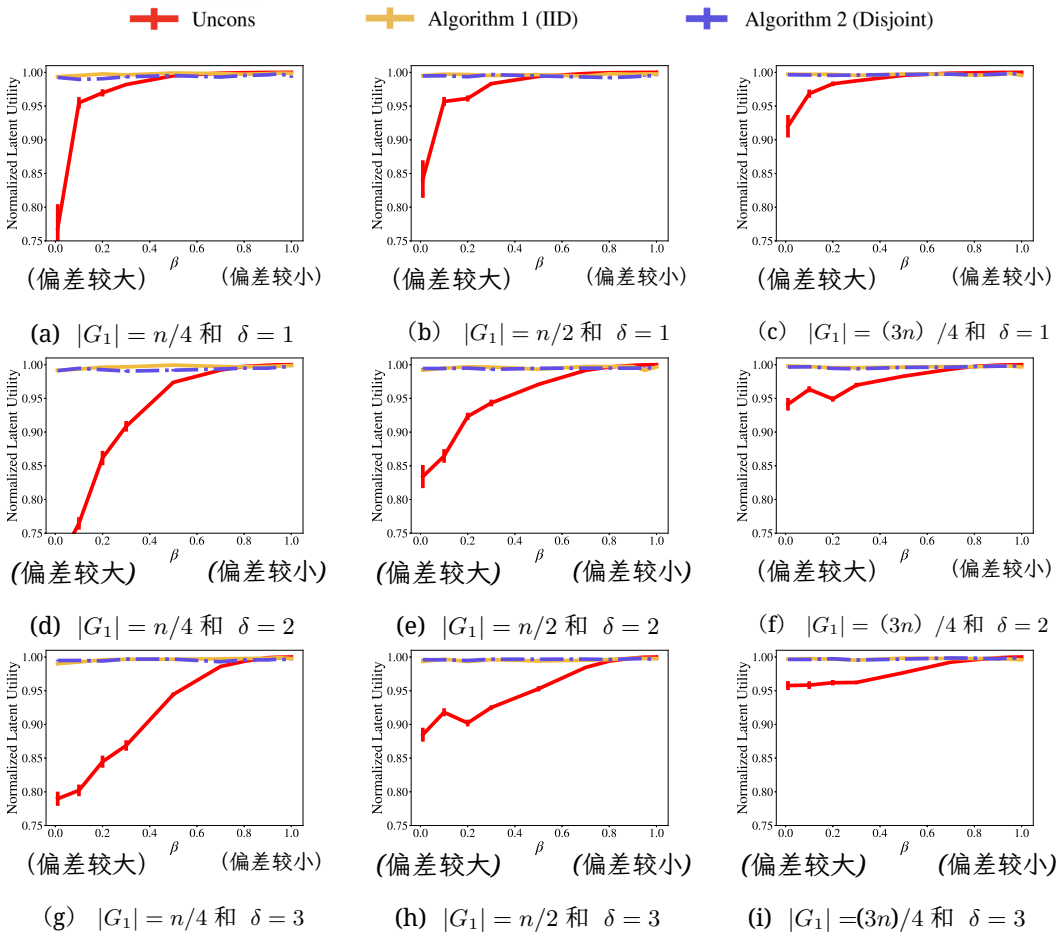
(a) $|G_1| = n/4$ 和 $\delta = 1$　(b) $|G_1| = n/2$ 和 $\delta = 1$　(c) $|G_1| = (3n)/4$ 和 $\delta = 1$

(d) $|G_1| = n/4$ 和 $\delta = 2$　(e) $|G_1| = n/2$ 和 $\delta = 2$　(f) $|G_1| = (3n)/4$ 和 $\delta = 2$

(g) $|G_1| = n/4$ 和 $\delta = 3$　(h) $|G_1| = n/2$ 和 $\delta = 3$　(i) $|G_1| = (3n)/4$ 和 $\delta = 3$

图 3：合成数据 *1* 上的模拟：我们改变偏差参数 $\beta \in [0, 1]$，在合成数据 1 上运行算法 1 和 Uncons，并报告它们的归一化潜在效用（误差条表示均值标准误）。x 轴显示 $\beta \in [0, 1]$，y 轴绘制归一化潜在效用。结果表明，在存在偏差的情况下，Uncons 可能损失最优潜在效用的相当大一部分（对于 $\beta < 0.1$、$\frac{|G_1|}{n} = \frac{1}{4}$ 和 $\delta = 3$，损失最高可达 15%）。而算法 1 在所有参数取值下损失的最优潜在效用均不到 5%。

B.4 使用合成数据进行模拟的附加图 2



(a) $|G_1| = n/4$ 和 $\delta = 1$ (b) $|G_1| = n/2$ 和 $\delta = 1$ (c) $|G_1| = (3n)/4$ 和 $\delta = 1$

(d) $|G_1| = n/4$ 和 $\delta = 2$ (e) $|G_1| = n/2$ 和 $\delta = 2$ (f) $|G_1| = (3n)/4$ 和 $\delta = 2$

(g) $|G_1| = n/4$ 和 $\delta = 3$ (h) $|G_1| = n/2$ 和 $\delta = 3$ (i) $|G_1| = (3n)/4$ 和 $\delta = 3$

图4：合成数据2上的模拟：我们改变偏差参数 $\beta \in [0, 1]$，在合成数据2上运行算法 1 和 Uncons，并报告它们的归一化潜在效用（误差棒表示均值标准误）。x 轴显示 $\beta \in [0, 1]$，y 轴绘制归一化潜在效用。结果表明，在存在偏差的情况下，Uncons 可能损失相当比例的最优潜在效用（最高达 25%，对应 $\beta < 0.1$、$\frac{|G_1|}{n} = \frac{1}{4}$ 和 $\delta \leq \frac{5}{2}$）。而算法 1 在所有参数取值下损失的最优潜在效用均不到 1%。

B.5 MovieLens 20M 数据模拟的补充图

类型	男性主导	非男性主导	比例 $\left(\frac{\text{Non-Male}}{\text{主导男性主导}}\right)$
动作	0.0604	0.0213	0.352
冒险	0.0334	0.0146	0.437
动画	0.0187	0.0138	0.741
儿童	0.0168	0.0164	0.9779
喜剧	0.0929	0.0646	0.6951
犯罪	0.0311	0.0135	0.4351
纪录片	0.0157	0.0141	0.903
剧情	0.1035	0.1238	1.1961
奇幻	0.0165	0.0145	0.8798
恐怖	0.0293	0.0489	1.6675
音乐剧	0.0105	0.0162	1.5458
悬疑	0.0128	0.0123	0.9612
爱情片	0.0306	0.0689	2.2492
科幻片	0.0287	0.0169	0.5878
惊悚片	0.0378	0.0316	0.8368
War	0.014	0.0061	0.4371
西部片	0.0093	0.0027	0.2923

表1：在不同类型中，分别由男性和非男性演员主演的电影的平均相关性分数。令 S_{M} 为由男性演员主演的电影集合，令 S_{NM} 为由非男性演员主演的电影集合（有关计算 S_{M} 和 S_{NM}的详细信息，请参见第5节）。MovieLens 20M 数据为类型 g 中的电影指定集合 S_g，并且对于每部电影 i 和类型 g，指定一个预测相关性评分 $r_{ig} \in [0,1]$，表示“ [电影 i] 在多大程度上体现了由 [类型 g]所代表的特定属性”。对于每种类型 g，我们报告$S_{\mathrm{M}} \cap S_g$ 和 $S_{\mathrm{NM}} \cap S_g$ 中电影的平均相关性分数。我们观察到，在与男性存在刻板关联的类型（例如“动作”或“战争片”）中，与非男性演员主演的电影相比，男性演员主演的电影在相关性得分上明显更高，最高相差300%。

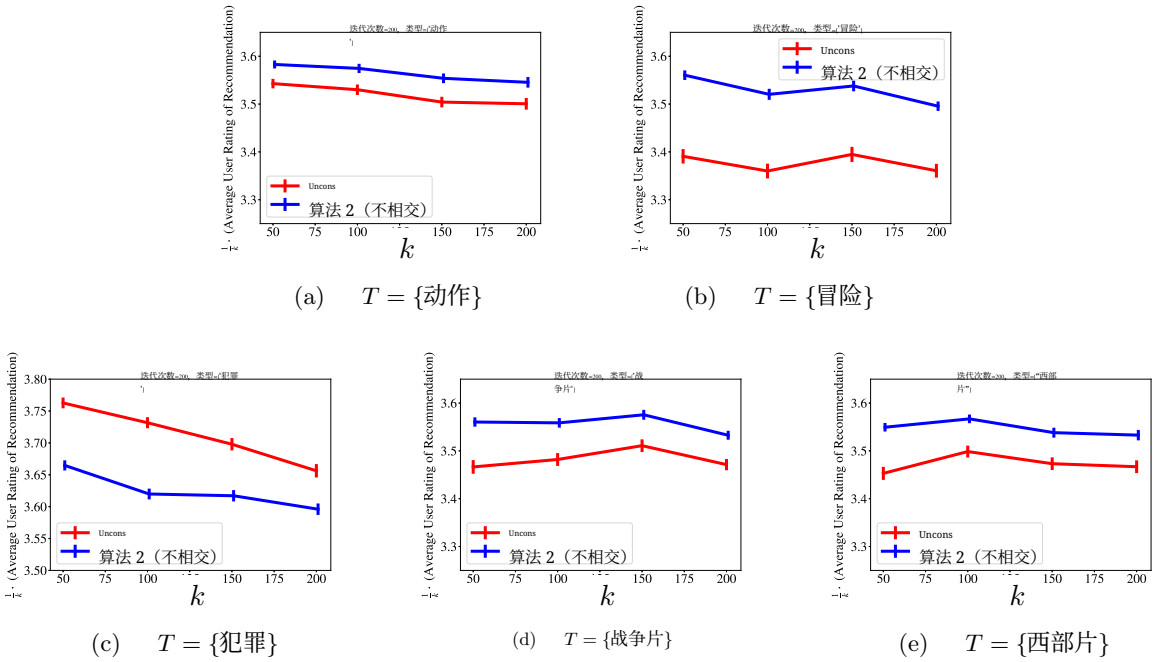
类型	男性主导	非男性主导	比例 $\left(\frac{\text{Non-Male 主导}}{\text{男性主导}}\right)$
动作	3.11 (0.53)	3.04（0.54）	0.98
冒险	3.22（0.51）	3.07（0.60）	0.95
动画	3.32（0.45）	3.43 (0.49)	1.03
儿童	3.03 (0.54)	3.18 (0.53)	1.05
喜剧	3.16 (0.53)	3.15 (0.48)	1.00
犯罪	3.36 (0.45)	3.24 (0.50)	0.96
纪录片	3.61 (0.41)	3.59 (0.34)	1.00
剧情	3.44 (0.40)	3.40 (0.40)	0.99
奇幻	3.22 (0.52)	3.24 (0.48)	1.01
恐怖	2.88 (0.57)	2.88 (0.53)	1.00
音乐剧	3.36 (0.43)	3.30（0.46）	0.98
悬疑	3.41（0.44）	3.21（0.50）	0.94
爱情片	3.37（0.43）	3.31 (0.45)	0.98
科幻片	3.11 (0.57)	3.07 (0.57)	0.99
惊悚片	3.25 (0.47)	3.12 (0.49)	0.96
War	3.51 (0.45)	3.61 (0.31)	1.03
西部片	3.38 (0.41)	3.36 (0.34)	0.99

表2：由男性演员和非男性演员分别领衔主演的电影在不同类型中的平均用户评分。令 S_{M} 为由男性演员领衔主演的电影集合， S_{NM} 为由非男性演员领衔主演的电影集合（关于如何计算 S_{M} 和 S_{NM} 的详情，请参见第5节）。MovieLens 20M 数据指定了类型为 g 的电影集合 S_g，并为每部电影 i 指定了电影 i 的平均用户评分 $\mathrm{rat}_i \in [0,1]$。对于每种类型 g，我们报告集合 $S_{\mathrm{M}} \cap S_g$ 和 $S_{\mathrm{NM}} \cap S_g$ 中电影的平均用户评分。我们观察到，在传统上与男性相关联的类型（例如“动作”或“战争片”）中，由男性演员领衔主演的电影，其相关性得分明显高于由非男性演员领衔主演的电影（最高相差 300%）。

类型	男性主导	非男性主导	比例 $\left(\frac{\text{Non-Male 主导}}{\text{男性主导}}\right)$
动作	0.061	0.0274	0.4486
冒险	0.0331	0.0168	0.5079
动画	0.0185	0.0161	0.8704
儿童	0.0169	0.0171	1.0114
喜剧	0.0937	0.0719	0.7679
犯罪	0.0312	0.0148	0.475
纪录片	0.0157	0.0126	0.8029
剧情	0.1042	0.1181	1.1333
奇幻	0.0162	0.0154	0.945
恐怖	0.0287	0.0492	1.7129
音乐剧	0.0107	0.0148	1.3819
悬疑	0.0126	0.0118	0.9346
爱情片	0.0306	0.0653	2.1365
科幻片	0.0285	0.0179	0.6298
惊悚片	0.0372	0.0334	0.8988
War	0.0141	0.0063	0.4467
西部片	0.0091	0.0027	0.3024

表3：由男性演员和非男性演员主演的电影在不同类型中的平均用户评分。对于每部电影 i，我们使用 Genderize API（gender-api.com）预测其主演的（可能）性别。在主要模拟中，我们剔除所有预测置信度低于 0.9 的电影。此处，我们考虑 Genderize 给出非 NA 预测结果，且具有用户评分和相关性分数的所有电影。最终得到由男性演员主演的 7382 部电影 S'_{M} 和由非男性演员主演的 2572 部电影 S'_{NM}。MovieLens 20M 数据指定了类型 g 中的电影集合 S_g，并为每部电影 i 指定了该电影的平均用户评分 $\mathrm{rat}_i \in [0,1]$。对于每种类型 g，我们报告 $S_{\mathrm{M}} \cap S_g$ 和 $S_{\mathrm{NM}} \cap S_g$ 中的电影的平均用户评分。我们观察到，在刻板印象中与男性相关联的类型（例如“动作”或“战争片”）中，男性演员主演的电影的相关性得分明显高于非男性演员主演的电影（最高相差 300%）。

B.5.1 含一种类型的图（$|T| = 1$）

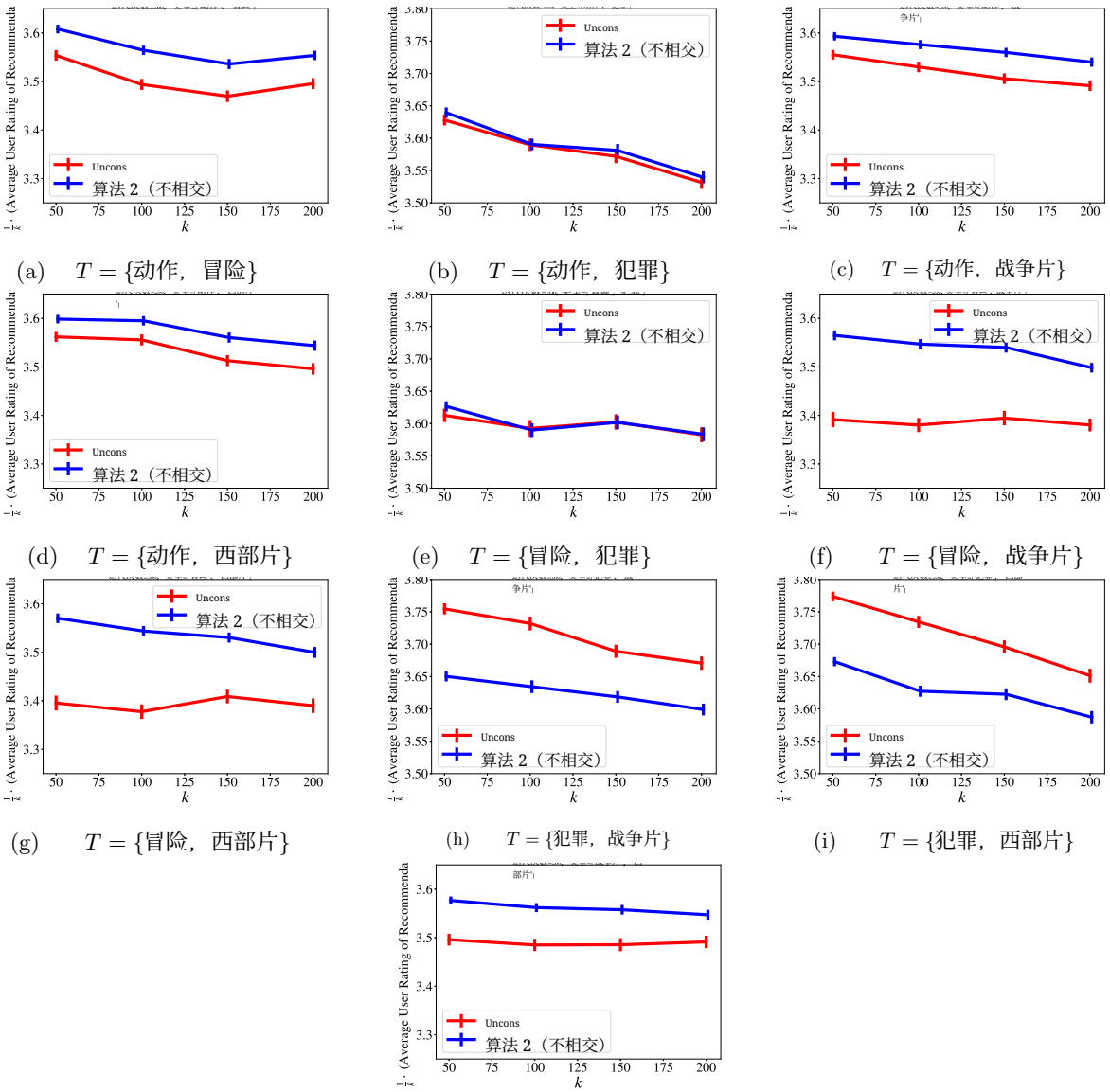


(a) $T = \{$动作$\}$　(b) $T = \{$冒险$\}$

(c) $T = \{$犯罪$\}$　(d) $T = \{$战争片$\}$　(e) $T = \{$西部片$\}$

图 5：使用 *MovieLens* 数据进行模拟，电影推荐来自单一男性刻板印象类型：我们观察到，在刻板印象上与男性相关的类型中，由男性演员担纲的电影，其 MovieLens 数据中的相关性分数比由非男性演员担纲的电影高出很多（最高达 3 倍）。相比之下，在所有类型中，这些电影集合的用户评分彼此相差不超过 6%。我们选择了男性担纲电影的平均相关性分数至少是非男性担纲电影的两倍的类型，它们是： $B = \{$动作、冒险、犯罪、西部片和战争片$\}$。我们使用相关性分数，从不同子集 T 的 B中推荐 $k \in \{50, 100, 150, 200\}$ 电影。此图展示了所有大小为 1 的子集 $T \subseteq B$ 的结果。我们观察到，在 5 个子图中的 4 个里，算法 1 对所有 k 的归一化潜在效用都高于 Uncons（最高达 5%）。请注意， y轴的范围在各子图之间有所不同，分别为 $[3.25, 3.65]$或 $[3.5, 3.8]$。

B.5.2 两种类型的图（$|T| = 2$）



(a) $T = \{$动作，冒险$\}$　(b) $T = \{$动作，犯罪$\}$　(c) $T = \{$动作，战争片$\}$

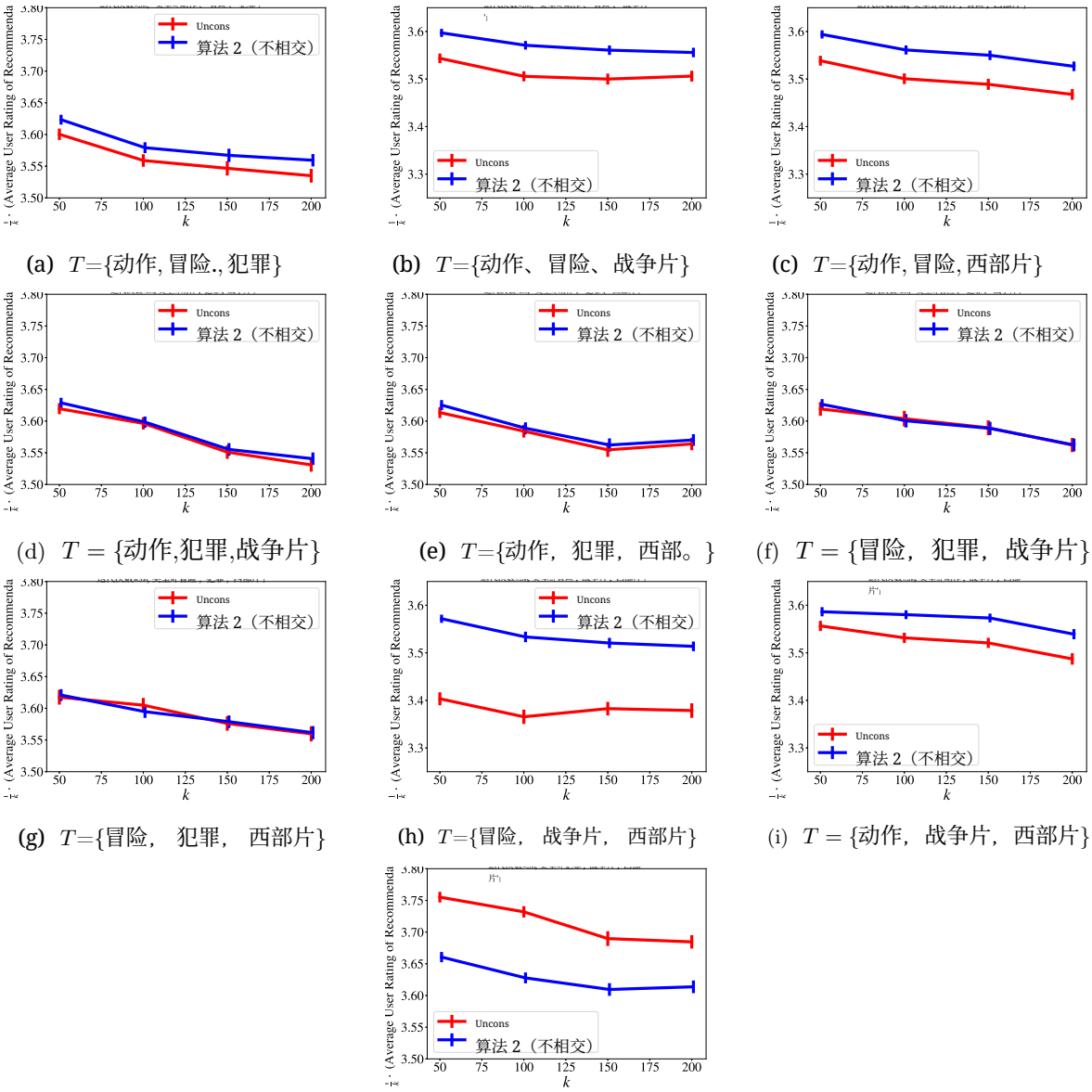
(d) $T = \{$动作，西部片$\}$　(e) $T = \{$冒险，犯罪$\}$　(f) $T = \{$冒险，战争片$\}$

(g) $T = \{$冒险，西部片$\}$　(h) $T = \{$犯罪，战争片$\}$　(i) $T = \{$犯罪，西部片$\}$

(j) $T = \{$战争片，西部片$\}$

图 6：使用 *MovieLens* 数据进行模拟，推荐来自两种男性刻板印象类型的电影：我们观察到，在与男性刻板印象相关的类型中，与非男性演员主演的电影相比，男性演员主演电影的 MovieLens 数据相关性分数明显更高（最高可达 3 倍）。相比之下，所有类型中，这些电影集合的用户评分彼此相差不到 6%。我们选择了男性主演电影的平均相关性分数至少是非男性主演电影两倍的类型，它们是： $B = \{$动作、冒险、犯罪、西部片和战争片$\}$。我们使用相关性分数，从不同的子集 T 中为 B推荐 $k \in \{50, 100, 150, 200\}$ 电影。该图展示了所有大小为 2 的子集 $T \subseteq B$ 的结果。我们观察到，在 10 个子图中的 8 个中，对于所有 k，算法 1 的归一化潜在效用与 Uncons 相当或更高（最高可达 5%）。请注意， y轴的范围因子图而异，分别为 $[3.25, 3.65]$ 或 $[3.5, 3.8]$。

B.5.3 三种类型的图（$|T| = 3$）



(a) T={动作, 冒险., 犯罪}　(b) T={动作、冒险、战争片}　(c) T={动作, 冒险, 西部片}

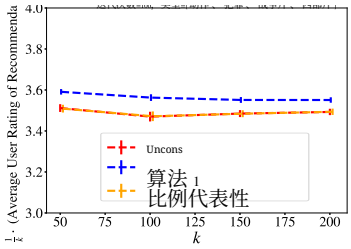
(d) T = {动作,犯罪,战争片}　(e) T={动作，犯罪，西部。}　(f) T = {冒险，犯罪，战争片}

(g) T={冒险， 犯罪， 西部片}　(h) T={冒险， 战争片， 西部片}　(i) T = {动作，战争片，西部片}

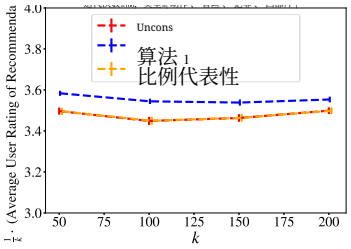
(j) T = {犯罪，战争片，西部片}

图 7：使用 *MovieLens* 数据进行模拟，推荐来自三种男性刻板印象类型的电影：我们观察到，在与男性刻板印象相关的类型中，男性演员担任主演的电影，其 MovieLens 数据中的相关性分数比非男性演员担任主演的电影高出很多（最多达 3 倍）。相比之下，在所有类型中，这些电影集合的用户评分彼此相差不超过 6%。我们选择了男性主演电影的平均相关性分数至少是非男性主演电影两倍的类型，它们是： B = {动作、冒险、犯罪、西部片和战争片}。我们使用相关性分数，从 B的不同子集 T 中推荐 $k \in \{50, 100, 150, 200\}$ 电影。此图展示了所有大小为 3 的子集 $T \subseteq B$ 的结果。我们观察到，在 10 个子图中的 9 个里，对于所有 k ，算法 1 的归一化潜在效用与 Uncons 相近或更高（最多高出 5%）。请注意， y<style id='13}轴的范围在各子图中有所不同，可能为 $[3.25, 3.65]$ 或 $[3.5, 3.8]$。

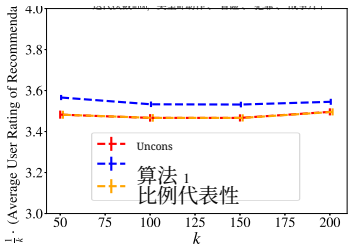
B.5.4 四种类型的图（$|T| = 4$）



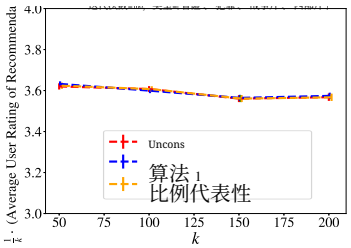
(a) $T = \{$冒险，犯罪，战争片，西部片$\}$



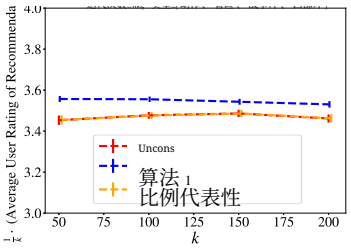
(b) $T = \{$动作,犯罪,战争片,西部片$\}$



(c) $T = \{$动作,冒险,战争片,西部片$\}$



(d) $T = \{$动作，冒险、犯罪、西部片$\}$



(e) $T = \{$动作, 冒险,犯罪, 战争片$\}$

图 8：使用 *MovieLens* 数据进行模拟，电影推荐来自四种男性刻板印象类型：我们观察到，在男性刻板印象类型中，由男性演员担任主演的电影，其 MovieLens 数据中的相关性分数明显高于由非男性演员担任主演的电影（最高可达 3 倍）。相比之下，在所有类型中，这些电影集合的用户评分彼此之间的差异均在 6% 以内。我们选择了男性主演电影的平均相关性分数比例至少是非男性主演电影两倍的类型，分别为： $B = \{$动作、冒险、犯罪、西部片和战争片$\}$。我们使用相关性分数，从 B 的不同子集 T 中推荐 $k \in \{50, 100, 150, 200\}$ 电影。本图展示了所有大小为 4 的子集 $T \subseteq B$ 的结果。我们观察到，在 5 个子图中的每一个中，对于所有 k，算法 1 的归一化潜在效用均高于 Uncons（最高可达 5%）。

B.5.5 五种类型的图（$|T| = 5$）

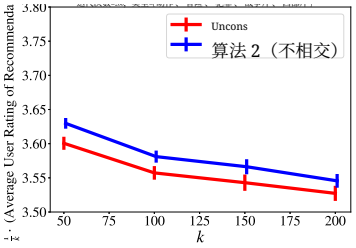


图 9：使用 *MovieLens* 数据进行的模拟，其中电影推荐来自五种男性刻板印象类型：我们观察到，在与男性刻板印象相关的类型中，由男性演员担任主角的电影，其 MovieLens 数据中的相关性分数明显高于由非男性演员担任主角的电影（最高可达 3 倍）。相比之下，在所有类型中，这些电影集合的用户评分彼此之间的差异均在 6% 以内。我们选择了男性主导电影的平均相关性分数至少是非男性主导电影两倍的类型，分别为： $B = \{$动作片、冒险片、犯罪片、西部片和战争片$\}$。我们使用相关性分数，从 B 的不同子集 T 中推荐 $k \in \{50,100,150,200\}$ 电影。该图展示了所有大小为 5 的子集 $T \subseteq B$ 的结果。我们观察到，对于所有 k，图中的算法 1 与 Uncons 具有相似的归一化潜在效用。