arXiv:2305.02808v1 [math.PR] 4 May 2023

XX′矩阵的线性特征值统计

Kiran Kumar A.S*, Shambhu Nath Maurya†, Koushik Saha‡

*‡印度理工学院孟买分校数学系，孟买 400076，印度

†印度统计研究所统计学与数学部，加尔各答 700108，印度

Abstract. 本文研究了 $T_{n\times p}T'_{n\times p}$的线性特征值统计量的涨落，其中 $T_{n\times p}$ 是一个具有实数、复数或时变元素的 $n\times p$ 托普利兹矩阵。我们证明，当 $n\to\infty$ 且 $p/n\to\lambda\in(0,\infty)$时，对于多项式检验函数，这些矩阵的线性特征值统计量依分布收敛于高斯随机变量。我们还讨论了 $H_{n\times p}H'_{n\times p}$的线性特征值统计量，其中 $H_{n\times p}$ 是一个 $n\times p$ 汉克尔矩阵。作为研究结果，我们还推导出了矩形托普利兹矩阵 Schettan 范数的依概率极限和中心极限定理型结果。为建立这些结果，我们采用了矩方法。

关键词：线性特征值统计量、托普利兹矩阵、汉克尔矩阵、矩方法、中心极限定理、弱收敛、过程收敛。

2020 年 AMS 学科分类：60B20、60B10、60F05、60G15

1. 引言与主要结果

线性特征值统计量是随机矩阵理论中一个热门研究领域。对于一个 $n\times n$ 矩阵 A_n， A_n 的线性特征值统计量定义为

$$\mathcal{A}_n(\phi)=\sum_{i=1}^{n}\phi(\lambda_i), \tag{1}$$

其中， λ_1、 λ_2、.....、 λ_n 是 A_n 的特征值，而 ϕ 是一个“良好”的检验函数。线性特征值统计量的研究始于对样本协方差矩阵[3] 和 [21]的线性特征值统计量中心极限定理的研究。2004 年，Bai 和 Silverstein [5] 利用基于斯蒂尔切斯变换的技术，给出了具有一般元素的大维样本协方差矩阵线性特征值统计量的中心极限定理。除样本协方差矩阵外，其他类型矩阵的线性特征值统计量也得到了广泛研究：Wigner 矩阵方面有 Johansson [20], 、Sinai 和 Soshnikov [33], 、Lytova 和 Pastur [25]；三对角矩阵方面有 Popescu[32]；托普利兹矩阵方面有 Chatterjee [15], 、Liu、Sun 和 Wang [24], 、Li 和 Sun [23]；汉克尔矩阵方面有 Liu、Sun 和 Wang [24], 、Kiran 和 Maurya [1]；循环矩阵方面有 Adhikari 和 Saha [2], 、Maurya 和 Saha [27], 、Bose 等人 [12]。随机矩阵的线性特征值统计量已在多个领域得到应用，例如参数估计和假设检验（见 [6], [34] 和 [28]）、回归系数检验（见 [7] 和 [18]），以及检验两个大维变量的独立性（见 [18] 和 [10]）。

Date: 2023年5月5日。

*kiran [at] math.iitb.ac.in, †shambhumath4 [at] gmail.com, ‡koushik.saha [at] iitb.ac.in。1

随机矩阵理论领域的研究者对 XX' 这类矩阵的极限谱分布（LSD）和线性特征值统计量给予了广泛关注。最著名的结果是 Marˇcenko–Pastur 定律，该定律指出，如果 X 的元素是均值为零、方差为 1 且具有有限高阶矩的独立同分布随机变量，那么当 $n \to \infty$、$p/n \to \lambda > 0$时，其极限谱分布为参数为 λ的 Marˇcenko–Pastur 分布。

特征值的分布 XX' 对于 $n \times p$ 矩阵 X，其元素之间的依赖结构近年来也引起了关注。对于 $p/n \to \lambda$样本相关矩阵，其极限谱分布被证明是参数为 λ 的 Marˇcenko–Pastur 分布，这一结果由 Jiang 于[19]提出。对于 $p/n \to \lambda > 0$ Spearman 秩相关矩阵的极限谱分布在 [8], 中推导，其线性特征值统计量则在 [9]中进行了研究。近年来，XX' 类型的矩阵也被应用于神经网络中的误差传播 [4]。关于由神经网络产生、具有依赖结构的 XX' 类型矩阵的极限谱分布结果，参见 [30] 和 [31]。

对于 $\lambda \in [0, \infty)$，当 $p/n \to \lambda$ 时，模式矩阵的 XX' 的极限谱分布也得到了研究X。对于 X，当 $n \times p$ 为托普利兹矩阵、汉克尔矩阵、循环矩阵和反循环矩阵，且其元素为均值为零、方差为一、具有实数值的独立元素并满足高阶矩一致有界时，Bose 等人 [11] 研究了 XX' 的极限谱分布。Bose 和 Sen [14]，在一篇近期文章中，将 [11] 的结果推广到了对元素要求更弱的假设下。本文研究 XX' 的线性特征值统计量，其中 X 为 $n \times p$ 托普利兹矩阵或汉克尔矩阵，且元素可以为实数、复数或时变元素。本文中的方法也可用于研究其他模式随机矩阵 X 的 XX' 的线性特征值统计量。

托普利兹矩阵：对于随机变量序列 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$，相应的 $n \times p$ 随机托普利兹矩阵定义如下：

$$T_{n\times p} = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{1-p} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{2-p} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{3-p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_{n-p} \end{pmatrix}.$$

托普利兹矩阵的第（i, j）个元素为 a_{i-j}。根据 a_i 之间的关系，托普利兹矩阵可分为不同类型。我们考虑以下几种类型：

(I) 如果 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一列独立实值随机变量，且对于所有 $i \geq 1$ 都有 $a_{-i} = a_i$，则称 $T_{n\times p}$ 为对称托普利兹矩阵。如果 $T_{n\times p}$ 不是对称托普利兹矩阵，则称 $T_{n\times p}$ 为非对称托普利兹矩阵。(II) 如果 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一列独立复值随机变量，且对于所有 $i \geq 1$ 都有 $a_{-i} = \overline{a}_i$，则称 $T_{n\times p}$ 为厄米托普利茨矩阵。

对于托普利兹矩阵 $T_{n\times p}$，我们将 $T_{n\times p}T'_{n\times p}$ 的中心化且标准化的线性特征值统计量定义为

$$w_k := \frac{1}{\sqrt{n}}\big[\mathrm{Tr}(T_{n\times p}T'_{n\times p})^k - \mathrm{E}[\mathrm{Tr}(T_{n\times p}T'_{n\times p})^k]\big]. \tag{2}$$

对于随机变量序列 $\{x_i\}_{i\in I}$，我们假设其满足一些矩条件，这些条件是陈述主要定理所必需的。

假设 I. 设 $\{x_i\}_{i\in I}$ 是一列满足以下矩条件的独立实值随机变量

$$\mathrm{E}[x_i] = 0,\ \mathrm{E}[x_i^2] = 1\ \forall\ i \in I \text{ and } \sup_{i\in I}\mathrm{E}\big[\,|x_i|^k\,\big] = \alpha_k < \infty \text{ for } k \geq 3.$$

Th以下定理给出了 $T_{n\times p}T'_{n\times}$的线性特征值统计量的波动

p.

定理1. 设 $\lambda\in(0,\infty)$，且 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是满足假设 I 且具有 $a_0\equiv 0$ 的随机变量序列。设 $T_{n\times p}$ 是以 $\{\frac{a_i}{\sqrt{n}}\}_{i\geq 0}$ 为输入元素的 $n\times p$ 对称托普利兹矩阵。则对于任意 $k\geq 1$，当 n、$p\to\infty$ 且 $p/n\to\lambda$ 时，

$$w_k \xrightarrow{d} N_k,$$

其中 $\{N_k;\ k\geq 1\}$ 是具有式（23）所示协方差结构的零均值高斯分布。此外，对于给定的多项式 $Q(x)=\sum_{j=0}^{k}c_jx^j$，其次数为 $k\geq 1$，

$$w_Q:=\frac{1}{\sqrt{n}}\big[TrQ(T_{n\times p}T'_{n\times p})-E[TrQ(T_{n\times p}T'_{n\times p})]\big]\xrightarrow{d}N(0,\sigma_Q^2),$$

其中 $N(0,\sigma_Q^2)$ 是均值为零、方差为

$$\sigma_Q^2=\sum_{j_1,j_2=0}^{k}c_{j_1}c_{j_2}\mathrm{Cov}(N_{j_1},N_{j_2}). \tag{3}$$

注2。 在定理 1中，我们考虑了 $a_0\equiv 0$。如果 a_0 是一个非零随机变量，那么线性特征值统计量的波动可能不是高斯的。关于非零 a_0情形下类似于定理 1的波动结果，参见定理 18。

矩阵值随机过程的研究也是随机矩阵理论中一个备受关注的领域。在矩阵值随机过程中，矩阵元素为布朗运动的情形尤为值得关注。接下来，我们考虑时变对称托普利兹矩阵 $T_{n\times p}(t)$，其元素为 $\{^{b_m(t)\sqrt{n}};\ t\geq 0\}_{m\geq 0}$，其中 $\{b_m(t);\ t\geq 0\}_{m\geq 1}$ 是相互独立的标准布朗运动，且 $b_0(t)\equiv 0$。我们研究具有多项式检验函数的 $T_{n\times p}(t)T'_{n\times p}(t)$ 的时变线性特征值统计量的联合涨落与紧性。对于 $k\geq 1$，我们将中心化且标准化的线性特征值统计量定义为

$$w_k(t):=\frac{1}{\sqrt{n}}\big[\mathrm{Tr}\big\{T_{n\times p}(t)T'_{n\times p}(t)\big\}^k-\mathrm{E}[\mathrm{Tr}\big\{T_{n\times p}(t)T'_{n\times p}(t)\big\}^k]\big]. \tag{4}$$

以下是关于时变元素的主要结果。

定理 3. 假设 $k\geq 1$ 和 $\lambda\in(0,\infty)$。那么当 $n,p\to\infty$ 且 $p/n\to\lambda$ 时，

$$\{w_k(t);t\geq 0\}\xrightarrow{\mathcal{D}}\{N_k(t);t\geq 0\},$$

其中 $\{N_k(t);\ t\geq 0,\ k\geq 1\}$ 是均值为零的高斯过程，其协方差结构如（43）所示。

注意，$\xrightarrow{d}$ 用于表示随机变量的弱收敛，而 $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ 用于表示随机过程的过程收敛或泛函收敛。

注 4. 我们考虑了 $b_0(t)\equiv 0$ 定理 3 中。对于非零连续随机过程$b_0(t)$，极限可能不是高斯过程。关于 $b_0(t)\neq 0$ 情形的详细信息，请参见定理24。

我们还研究了其他类型托普利兹矩阵的线性特征值统计量 $T_{n\times p}T'_{n\times p}$。在第 5 节中，我们考虑非对称托普利兹矩阵 $T_{n\times p}$。在定理 26 中，我们给出了关于 $T_{n\times p}T'_{n\times p}$ 的线性特征值统计量的结果，其中 $T_{n\times p}$ 的各项相互独立；在定理 27 中，我们研究了当各项为相互独立的布朗运动时，$T_{n\times p}(t)T'_{n\times p}(t)$ 的时变线性特征值统计量的过程收敛。在第 6 节中，我们考虑厄米托普利茨矩阵 $T_{n\times p}$，并研究了 $T_{n\times p}T^*_{n\times p}$ 的线性特征值统计量，分别针对各项相互独立的情形（见定理 31）以及各项为布朗运动的情形（见定理 32）。从以下定理的证明可以看出：

定理1 和定理 3 的证明中可以看出，与非对称托普利兹矩阵和厄米托普利茨矩阵相比，对称托普利兹矩阵的结果和证明思路更为复杂。因此，我们主要关注对称托普利兹矩阵。

汉克尔矩阵：给定一个随机变量序列 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，相应的 $n\times p$ 汉克尔矩阵定义为 $H_{n\times p}=(a_{i+j-1})_{i,j=1}^{n\ p}$。汉克尔矩阵与托普利兹矩阵密切相关，也可将汉克尔矩阵定义为 $H_{n\times p}=P_{n\times n}T_{n\times p}$，其中 $T_{n\times p}$ 是输入序列为 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 的非对称托普利兹矩阵，而 $P_{n\times n}$ 是维度为n的反向单位矩阵。类型为 $P_{n\times n}T_{n\times p}$的汉克尔矩阵定义如下：

$$H_{n\times p}=\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_{n-p} \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & a_{n-p-1} \\ a_{n-3} & a_{n-4} & a_{n-5} & \cdots & a_{n-p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{1-p} \end{pmatrix}.$$

以下备注给出了 $H_{n\times p}H'_{n\times p}$ 的线性特征值统计量的涨落行为。

注5. 请注意，如果我们考虑形式为 $P_{n\times n}T_{n\times p}$ 的汉克尔矩阵 $H_{n\times p}$，其中 $T_{n\times p}$ 是一个非对称托普利兹矩阵，而 $P_{n\times n}=(\delta_{i-1,\ n-j})_{n\times n}$ 是维数为 n 的反向单位矩阵，那么

$$H_{n\times p}H'_{n\times p}=P_{n\times n}T_{n\times p}T'_{n\times p}P_{n\times n}.$$

由于 $P_{n\times n}=(P_{n\times n})^{-1}$，我们有 $H_{n\times p}H'_{n\times p}$ 和 $T_{n\times p}T'_{n\times p}$ 具有相同的特征值，因此 $H_{n\times p}H'_{n\times p}$ 的线性特征值统计量的波动行为与 $T_{n\times p}T'_{n\times p}$在定理26中得到的结果相同。

Schatten r范数是矩阵范数中的一个重要类别，其中迹范数和Frobenius范数是其特例。对于两个希尔伯特空间之间的紧算子 A，Schatten r-范数A 定义为 ℓ_r 的奇异值的 A范数，前提是该范数有限。在此范数下，希尔伯特空间上所有 r-可和紧算子构成一个巴拿赫空间。此外，Schatten$r$范数在酉算子的乘法作用下保持不变。Schatten r范数自然地出现在非自伴算子和对称赋范算子理想的研究中。有关这些联系的详细讨论，请参见[16]。由于其与奇异值的联系，Schatten 范数适用于低秩矩阵逼近 [29] 和图像重建 [35], [22]。

我们对线性特征值统计量的研究，给出了当 n 和 $p/n\to\lambda>0$ 取较大值时，$n\times p$ 托普利兹矩阵的 Schatten r-范数的渐近行为。本文所得结果类似于文献 [13] 中关于方形托普利兹矩阵和 Hankel 矩阵谱范数波动的结果。

现在我们简要概述手稿其余部分的内容。在第 2 节中，我们介绍一些组合对象，并推导定理证明所需的一些结果。在第 3 节和第 4 节中，我们分别研究对称托普利兹矩阵，并证明定理 1 和定理 3。在第 5 节中，我们研究非对称托普利兹矩阵及其线性特征值统计量；在第 6 节中，我们研究厄米托普利兹矩阵的线性特征值统计量。最后，在第 7 节中，我们研究不同类型托普利兹矩阵的 Schatten r-范数波动。

2. 预备知识

我们首先介绍一些划分、匹配的概念，以及与之相关的一些积分。随后，当 X 是托普利兹矩阵时，我们推导出 XX' 的迹公式。

定义 6. 考虑集合 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$。我们称 $\pi=\{V_1,\ldots,V_r\}$ 为 $[n]$ 的一个划分，若块 V_j($1\le j\le r$) 是 $[n]$ 的两两不相交的非空子集，且满足 $[n]=V_1\cup\cdots\cup V_r$。$[n]$ 的所有划分组成的集合记为 $\mathcal{P}(n)$。划分 π 中的块数记为 $|\pi|$，块 V_j 中的元素数记为 $|V_j|$。若 i、j 属于 π的同一个块，则记作 $i\sim_\pi j$。若 π 是 $[n]$ 的一个划分，且 π 的每个块恰有两个元素，则称 π 为二元划分。$[n]$ 的所有二元划分组成的集合记为 $\mathcal{P}_2(n)$。显然，当 n为奇数时，$\mathcal{P}_2(n)=\emptyset$。

对于 $[n]$的一个划分 π，我们按照各块最小元素递增的顺序排列这些块，从而定义其典范排序。对于块按 B_1、B_2、.....、B_k排列的划分 π，我们定义一个满射（也记为 π）：$[n]\to[k]$，如下所示:

$$\pi(i)=j,\ \text{ if } i\in B_j. \tag{5}$$

为了计算极限分布的矩以及线性特征值统计量的极限协方差，我们先回顾一些与之相关的基本组合概念。随后，我们还将定义与不同划分相关的一些积分。

定义7. 设 k_1、k_2 为正整数。

(i) 假设 k_1+k_2 为偶数。考虑所有满足存在 $1\le i\le k_1<j\le k_1+k_2$ 使得 $i\sim_\pi j$的二元划分 $\pi\in\mathcal{P}_2(k_1+k_2)$所构成的集合。在这种情况下，我们称 π 中存在交叉匹配，并将具有交叉匹配的所有二元划分 $\pi\in\mathcal{P}_2(k_1+k_2)$所构成的集合记为 $\mathcal{P}_2(k_1,k_2)$。(ii) 当 k_1 和 k_2 均为偶数时，我们用$\mathcal{P}_{2,4}(k_1,k_2)$表示 $\mathcal{P}(k_1+k_2)$的一个子集，该子集由所有满足以下条件的划分 $\pi=\{V_1,V_2,\ldots,V_r\}$ 组成：(a) 对某个 i，$|V_i|=4$，且对所有 $1\le j\le r$、$j\ne i$，$|V_j|=2$。(b) 对所有 $1\le j\le r$、$j\ne i$，$V_j\subseteq\{1,2,\ldots,k_1\}$ 或 $\{k_1+1,k_1+2,\ldots,k_1+k_2\}$。(c) V_i 中的两个元素来自 $\{1,2,\ldots,k_1\}$，另外两个来自 $\{k_1+1,p+2$、.....、$k_1+k_2\}$。对于 k_1 和 k_2的其他情况，我们假设$\mathcal{P}_{2,4}(k_1,k_2)$为空集。

定义 8. 对于属于 $\mathcal{P}_2(k_1,k_2)$ 或 $\pi\in\mathcal{P}_{2,4}(k_1,k_2)$ 的划分 π，我们定义以下类型的块。

(i) 如果 r 和 s 奇偶性相同，则称块 $\{r,s\}$ 为同奇偶性块。(ii) 如果 r 和 s 奇偶性不同，则称块 $\{r,s\}$ 为不同奇偶性块。(iii) 如果 r_1+s_1 和 r_2+s_2 均为奇数，则称满足 $r_1<s_1<r_2<s_2$ 的块 $\{r_1,s_1,r_2,s_2\}$ 为不同奇偶性块。否则，该块称为同奇偶性块。

π 的所有同奇偶性块的集合记为 $SP(\pi)$，π 的所有不同奇偶性块的集合记为 $DP(\pi)$。

定义 9. 如果划分 $\pi\in\mathcal{P}_2(2k_1)$ 或 $\pi\in\mathcal{P}_{2,4}(2k_1,2k_2)$ 中的所有块都是不同奇偶性块，则称其为不同奇偶性划分。我们用记号 $\mathcal{DP}_2(2k_1)$、$\mathcal{DP}_2(2k_1,2k_2)$ 和$\mathcal{DP}_{2,4}(2k_1,2k_2)$ 分别表示 $\mathcal{P}_2(2k_1)$、$\mathcal{P}_2(2k_1,2k_2)$ 和$\mathcal{P}_{2,4}(2k_1,2k_2)$ 中所有不同奇偶性划分的集合。

现在，我们定义几类与 $\mathcal{P}_2(p,q)$ 和$\mathcal{P}_{2,4}(p,q)$ 中的划分相关的定积分。为方便读者，我们建议暂时略过这些内容，并在第3.2节和第5节需要时再查阅。考虑一个二元划分$\pi\in\mathcal{P}_2(2k_1+2k_2)$。注意，$\pi$可表示为 $\pi=\{r_1,s_1\},\{r_2,s_2\},\ldots,\{r_{k_1+k_2},s_{k_1+k_2}\}$，其中对每个 $1\le i\le k_1+k_2$，$r_i<s_i$。我们考虑映射 $\epsilon_\pi:[2(k_1+k_2)]\to\{\pm1\}$，定义如下:

$$\epsilon_\pi(r_i)=1 \text{ and } \epsilon_\pi(s_i)=(-1)^{1+r_i+s_i} \text{ for } 1\le i\le k_1+k_2. \tag{6}$$

对于每个二元划分 $\pi \in \mathcal{P}_2(2(k_1+k_2))$，我们按如下方式构造两组未知数 $y_1,\dots,y_{2k_1+2k_2}$ 和 $x_1,\dots,x_{k_1+k_2}$ 之间的射影关系：

$$\epsilon_\pi(i)\, y_i = \epsilon_\pi(j)\, y_j = x_{\pi(i)} \tag{7}$$

每当 $i \sim_\pi j$。注意，r,s 具有相同奇偶性，当且仅当 $\epsilon_\pi(r) + \epsilon_\pi(s) = 0$。因此，对于未知数 $x_1,\dots,x_{k_1+k_2}$ 的所有取值，等式 $\sum_{j=1}^{2k_1+2k_2}(-1)^j y_j = 0$ 都自动成立。

对于 $\pi \in \mathcal{P}_2(2k_1,2k_2)$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}^+$，我们定义以下积分：

$$f_I^-(\pi) = \int_{[0,1]^2\times[-m,m]^{|SP(\pi)|}\times[-\lambda,1]^{|DP(\pi)|}} \delta\left(\sum_{i=1}^{2k_1}(-1)^i y_i\right)\prod_{j=1}^{k_1}\chi_{[0,\lambda]}(x_0+\sum_{i=1}^{2j-1}y_i)\ \chi_{[0,1]}(x_0+\sum_{i=1}^{2j}y_i)$$
$$\times\prod_{j'=k_1+1}^{k_1+k_2}\chi_{[0,\lambda]}(y_0+\sum_{i=2k_1+1}^{2j'-1}(-1)^i y_i)\ \chi_{[0,1]}(y_0+\sum_{i=2k_1+1}^{2j'}(-1)^i y_i)\, d\, y_0\prod_{l=0}^{k_1+k_2} d\, x_l, \tag{8}$$

$$f_I^+(\pi) = \int_{[0,1]^2\times[-m,m]^{|SP(\pi)|}\times[-\lambda,1]^{|DP(\pi)|}} \delta\left(\sum_{i=1}^{2k_1}(-1)^i y_i\right)\prod_{j=1}^{k_1}\chi_{[0,\lambda]}(x_0+\sum_{i=1}^{2j-1}y_i)\ \chi_{[0,1]}(x_0+\sum_{i=1}^{2j}y_i)$$
$$\times\prod_{j'=k_1+1}^{k_1+k_2}\chi_{[0,\lambda]}(y_0-\sum_{i=2k_1+1}^{2j'-1}(-1)^i y_i)\ \chi_{[0,1]}(y_0-\sum_{i=2k_1+1}^{2j'}(-1)^i y_i)\, d\, y_0\prod_{l=0}^{k_1+k_2} d\, x_l, \tag{9}$$

其中 $m=$最小值$\{\lambda,1\}$；$SP(\pi)$ $DP(\pi)$ 与定义 8 中相同；δ_x 是集中于 x 的狄拉克函数，而 χ 是示性函数。在（8）和（9）中，x_i 在区间 $[-m,m]$ 内变化，若块B_i 是同奇偶性块；若块 $[-\lambda,1]$，则在 B_i 内变化，该块为不同奇偶性块。

现在，我们定义与 $\mathcal{P}_{2,4}(2k_1,2k_2)$ 中划分相关的积分。对于 $\pi=\{V_1,\dots,V_{k_1+k_2-1}\}\in\mathcal{P}_{2,4}(2k_1,2k_2)$（将具有四个元素的块记为 V_i），我们按如下方式定义映射 τ_π：$[2(k_1+k+2)]\to\{\pm1\}$：对于满足 $r<s$ 的 $V_j=\{r,s\}$，我们定义

$$\tau_\pi(r)=1 \text{ and } \tau_\pi(s)=(-1)^{r+s+1}. \tag{10}$$

而对于满足 $r_1<s_1<r_2<s_2$ 的 $V_i=\{r_1,s_1,r_2,s_2\}$，我们定义

$$\tau_\pi(k)=\begin{cases}1 & \text{if } k=r_1 \text{ or } r_2,\\ (-1)^{r_i+s_i+1} & \text{if } k=s_1 \text{ or } s_2.\end{cases}$$

对于每个划分 $\pi\in\mathcal{P}_{2,4}(2k_1,2k_2)$，我们按如下方式在两组未知量 y_1、…、$y_{2k_1+2k_2}$ 和 x_1、…、$x_{k_1+k_2-1}$ 之间构造射影关系：

$$\tau_\pi(i)\, y_i = \tau_\pi(j)\, y_j = x_{\pi(i)}$$

只要 $i\sim_\pi j$。那么对于 $x_1,x_2,..,x_{k_1+k_2-1}$ 的任意取值，方程 $\sum_{j=1}^{2k_1}(-1)^j y_j=0$ 和 $\sum_{j=2k_1+1}^{2k_1+2k_2}(-1)^j y_j=0$ 总是成立。对于划分 $\pi\in\mathcal{P}_{2,4}(2k_1,2k_2)$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}^+$，我们

定义以下积分:

$$f_{II}^{-}(\pi)=\int_{[0,1]^2\times[-m,m]^{|SP(\pi)|}\times[-\lambda,1]^{|DP(\pi)|}}\prod_{j=1}^{k_1}\chi_{[0,\lambda]}(x_0+\sum_{i=1}^{2j-1}y_i)\ \chi_{[0,1]}(x_0+\sum_{i=1}^{2j}y_i)$$
$$\times\prod_{j'=k_1+1}^{k_1+k_2}\chi_{[0,\lambda]}(y_0+\sum_{i=2k_1+1}^{2j'-1}(-1)^i y_i)\ \chi_{[0,1]}(y_0+\sum_{i=2k_1+1}^{2j'}(-1)^i y_i)\,d\,y_0\prod_{l=0}^{k_1+k_2-1}d\,x_l,\quad(11)$$

$$f_{II}^{+}(\pi)=\int_{[0,1]^2\times[-m,m]^{|SP(\pi)|}\times[-\lambda,1]^{|DP(\pi)|}}\prod_{j=1}^{k_1}\chi_{[0,\lambda]}(x_0+\sum_{i=1}^{2j-1}y_i)\ \chi_{[0,1]}(x_0+\sum_{i=1}^{2j}y_i)$$
$$\times\prod_{j'=k_1+1}^{k_1+k_2}\chi_{[0,\lambda]}(y_0-\sum_{i=2k_1+1}^{2j'-1}(-1)^i y_i)\ \chi_{[0,1]}(y_0-\sum_{i=2k_1+1}^{2j'}(-1)^i y_i)\,d\,y_0\prod_{l=0}^{k_1+k_2-1}d\,x_l.\quad(12)$$

其中 $m=\min\{\lambda,1\}$和 $SP(\pi)$ $DP(\pi)$与定义 8中相同。

注意，对于 $\pi\in\mathcal{DP}_2(2k_1,2k_2)$，式 (6) 中的函数 ϵ_π 是取值为 1 的常函数。因此，方程组 (7) 变为 $y_i=x_{\pi(i)}$，对所有 i 均成立。此外，注意在这种情况下$|SP(\pi)|=0$且 $|DP(\pi)|=k_1+k_2$，因此 $f_I^-(\pi)$ 和 $f_I^+(\pi)$ 的积分域为$[0,1]^2\times[-\lambda,1]^{k_1+k_2}$。类似的论证表明，对于 $f_{II}^-(\pi)$ 和 $f_{II}^+(\pi)$，积分域为 $[0,1]^2\times[-\lambda,1]^{k_1+k_2-1}$。

现在，我们推导形如 $T_{n\times p}T'_{n\times p}$ 的矩阵乘积的迹公式，该公式用于证明定理1 和定理 3。

引理 10. 设 $T_{n\times p}^{(r)}$ 是 $n\times p$ 个托普利兹矩阵，其输入序列为 $\{a_i^r\}_{i\in\mathbb{Z}}$，其中 $r=1,2,\ldots,k$。令 $X^{(r)}=T_{(r)\,n\times p}(T_{(r)\,n\times p})'$。则

$$Tr(X^{(k)}\cdots X^{(1)})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1,\ldots,j_{2k}=-(p-1)}^{n-1}\prod_{r=1}^{k}a_{j_{2r-1}}^{(r)}a_{j_{2r}}^{(r)}I(i,J,p,n)\delta_0(\sum_{q=1}^{2k}(-1)^q j_q),\quad(13)$$

其中 $J=(j_1,j_2,\ldots,j_{2k})$，$\delta_x$ 是位于 x 处的狄拉克 δ 函数，并且

$$I(i,J,p,n)=\prod_{s=1}^{k}\chi_{[1,n]}(i+\sum_{\ell=1}^{2s-1}(-1)^\ell j_\ell)\chi_{[1,p]}(i+\sum_{\ell=1}^{2s}(-1)^\ell j_\ell).\quad(14)$$

引理 *10* 的证明。首先，根据托普利兹矩阵的结构可知

$$T_{n\times p}^{(1)}=\sum_{j=0}^{n-1}a_j^{(1)}F_{n\times p}(j)+\sum_{j=1}^{p-1}a_{-j}^{(1)}G_{n\times p}(j),$$

其中对于 $j=0,\ 1,\ldots,(n-1)$,

$$F_{n\times p}(j)e_i=\begin{cases}e_{i+j} & \text{if } 1\le(i+j)\le n,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$
$$=\chi_{[1,n]}(i+j)e_{i+j},$$

且对于 $j=1,\ldots,(p-1)$,

$$G_{n\times p}(j)e_i=\begin{cases}e_{i-j} & \text{if } 1\le(i-j)\le n,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$
$$=\chi_{[1,n]}(i-j)e_{i-j}.$$

因此，对于 $i = 1, 2, \ldots, n$，我们有

$$(T_{n\times p}^{(1)})e_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j^{(1)}\chi_{[1,n]}(i+j)e_{i+j} + \sum_{j=1}^{p-1} a_{-j}^{(1)}\chi_{[1,n]}(i-j)e_{i-j} = \sum_{j=-(p-1)}^{n-1} a_j^{(1)}\chi_{[1,n]}(i+j)e_{i+j}.$$

同样，我们也可以证明

$$(T_{n\times p}^{(1)})'e_i = \sum_{j=0}^{p-1} a_{-j}^{(1)}\chi_{[1,p]}(i+j)e_{i+j} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j^{(1)}\chi_{[1,p]}(i-j)e_{i-j} = \sum_{j=-(p-1)}^{n-1} a_j^{(1)}\chi_{[1,p]}(i-j)e_{i-j}.$$

现在根据上述两个表达式，对于 $i = 1, 2, \ldots, n$，我们有

$$\begin{aligned}
\big(T_{n\times p}^{(1)}(T_{n\times p}^{(1)})'\big)e_i &= T_{n\times p}^{(1)}\Big[\sum_{j_1=-(p-1)}^{n-1} a_{j_1}^{(1)}\chi_{[1,p]}(i-j_1)e_{i-j_1}\Big] \\
&= \sum_{j_1=-(p-1)}^{n-1} a_{j_1}^{(1)}\chi_{[1,p]}(i-j_1)\Big[\sum_{j_2=-(p-1)}^{n-1} a_{j_2}^{(1)}\chi_{[1,n]}(i-j_1+j_2)e_{i-j_1+j_2}\Big] \\
&= \sum_{j_1,j_2=-(p-1)}^{n-1} a_{j_1}^{(1)}a_{j_2}^{(1)}\chi_{[1,p]}(i-j_1)\chi_{[1,n]}(i-j_1+j_2)e_{i-j_1+j_2}.
\end{aligned}$$

同样，对于 $i = 1, 2, \ldots, n$ 以及 $X^{(r)} = T_{n\times p}^{(r)}(T_{n\times p}^{(r)})'$，我们有

$$\begin{aligned}
(X_n^{(2)}X_n^{(1)})e_i &= \sum_{j_1,j_2=-(p-1)}^{n-1} a_{j_1}^{(1)}a_{j_2}^{(1)}\chi_{[1,p]}(i-j_1)\chi_{[1,n]}(i-j_1+j_2)(X_n^{(2)})e_{i-j_1+j_2} \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_4=-(p-1)}^{n-1}\prod_{r=1}^{2} a_{j_{2r-1}}^{(r)}a_{j_{2r}}^{(r)}\chi_{[1,p]}(i-j_1)\chi_{[1,n]}(i-j_1+j_2) \\
&\quad\times\chi_{[1,p]}(i-j_1+j_2-j_3)\chi_{[1,n]}(i-j_1+j_2-j_3+j_4)e_{i-j_1+j_2-j_3+j_4}.
\end{aligned}$$

继续这一过程，我们得到

$$\begin{aligned}
(X^{(k)}\cdots X^{(1)})e_i = &\sum_{j_1,\ldots,j_{2k}=-(p-1)}^{n-1}\prod_{r=1}^{k} a_{j_{2r-1}}^{(r)}a_{j_{2r}}^{(r)}\prod_{s=1}^{k}\chi_{[1,n]}(i+\sum_{\ell=1}^{2s-1}(-1)^{\ell}j_\ell) \\
&\times\chi_{[1,p]}(i+\sum_{\ell=1}^{2s}(-1)^{\ell}j_\ell)e_{i-\sum_{q=1}^{2k}(-1)^q j_q}. \qquad (15)
\end{aligned}$$

最后，利用 $\mathrm{Tr}(X^{(k)}\cdots X^{(1)}) = \sum_{i=1}^{n} e_i'(X^{(k)}\cdots X^{(1)})e_i$，由 (13) 和 (15) 得到。这就完成了引理 10 的证明。■

3. 对称托普利兹矩阵（独立元素）

本节讨论 $T_{n\times p}T_{n\times p}'$ 在 $T_{n\times p}$ 为具有独立元素的对称托普利兹矩阵时的情形。在第3.1节，我们计算 $\frac{1}{n}T_{n\times p}T_{n\times p}'$的迹的极限矩；在第3.2节，我们研究$T_{n\times p}T_{n\times p}'$ 在对角线元素为零时的线性特征值统计量（定理1）。对于非零对角元， $T_{n\times p}T_{n\times p}'$ 的线性特征值统计量将在第3.3节研究。

3.1. 极限矩序列。本节求出 $T_{n\times p}T'_{n\times p}$的极限矩。注意， r阶矩经验谱分布的 $T_{n\times p}T'_{n\times p}$ 可以写为 $\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(T_{n\times p}T'_{n\times p})^r\right]$。在 [11] 中，为建立 $T_{n\times p}T'_{n\times p}$ 的极限谱分布，计算了这些量的极限，但未能得到该序列的闭式表达。下面的定理将给出极限的显式积分形式。稍后在第3.3节，该定理还将用于研究当 $T_{n\times p}T'_{n\times p}$ 的对角线元素 $T_{n\times p}$ 非零时的线性特征值统计量；在第7节，该定理将用于求出 $T_{n\times p}$的 Schatten 范数的渐近分布。

定理 11. 设 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个满足假设 I 且具有 $a_0\equiv 0$ 的随机变量序列。假设 $T_{n\times p}$ 是具有输入序列 $\{\frac{a_i}{\sqrt{n}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的 $n\times p$ 对称托普利兹矩阵，并令 $X=T_{n\times p}T'_{n\times p}$。则对于每个 $r\geq 1$ 和 $\lambda\in(0,\infty)$，当 $p/n\to\lambda$,$n\to\infty$ 时，$\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Tr}X^r\right]=M_r+o(1/\sqrt{n})$，其中

$$M_r=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(2r)}\int_{[0,1]\times[-m,m]^{|SP(\pi)|}\times[-\lambda,1]^{|DP(\pi)|}}\prod_{s=1}^{r}\chi_{[0,\lambda]}\left(x_0+\sum_{i=1}^{2s-1}\epsilon_\pi(i)x_{\pi(i)}\right)\times\chi_{[0,1]}\left(x_0+\sum_{i=1}^{2s}\epsilon_\pi(i)x_{\pi(i)}\right)\prod_{l=0}^{r}\mathrm{d}x_l, \tag{16}$$

其中 $m=$最小值$\{\lambda,1\}$和 $SP(\pi)$ $DP(\pi)$与定义 8中的一致。

证明。 首先根据引理 10 可知

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left(X^r\right)\right]=\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1,\ldots,j_{2r}=-(p-1)}^{(n-1)}\mathrm{E}\left[a_J\right]I(i,J,p,n)\delta_0(\sum_{q=1}^{2k}(-1)^q j_q), \tag{17}$$

其中 $a_J=\prod_{u=1}^{2r}a_{j_u}$和 $I(i,\ J,\ p,\ n)$ 如 (14) 中所示。

注意，若对于某个向量 $J=(j_1,\ j_2\ldots\ldots,\ j_{2r})$，存在一个分量 j_u 使得$|j_u|\neq|j_v|$ 对所有 $v\neq u$，则由假设 I 可知 $\mathrm{E}[a_J]=0$。此外，由于$a_0\equiv 0$，若 $j_u=0$ 对于某个 u成立，则 $\mathrm{E}[a_J]=0$。因此，(17) 可写为

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left(X^r\right)\right]=\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\pi\in\widehat{\mathcal{P}}(2r)}\sum_{J\in\Pi(\pi)}\mathrm{E}\left[a_J\right]I(i,J,p,n)\delta_0(\sum_{q=1}^{2r}(-1)^q j_q), \tag{18}$$

其中 $\widehat{\mathcal{P}}(2r)$ 是所有满足每个块的大小大于或等于二的 $[2r]$ 的划分集合；对于一个划分 π， $\Pi(\pi)$ 是所有向量 $J\in\{-(p-1)\ -(p-2)\ldots,-1,1,\ldots,(n-1)\}^{2r}$ 的集合，使得 $u\sim_\pi v$ 当且仅当 $|j_u|=|j_v|$。

注意，对于固定的 π， $J\in\Pi(\pi)$ 的可选数量为 $O(n^{|\pi|})$ 阶，其中 $|\pi|$是 π 的块数。考虑满足存在一个大小严格大于二的块 B_i 的 $\pi\in\mathcal{P}(2r)$，则可知 π 的块数小于或等于 $(r-1)$。此外，由于 $\{a_i\}$ 满足假设 I，对于所有 $J\in\Pi(\pi)$，$\mathrm{E}\ [a_J]$ 都是常数，且有一个与 J 无关的常数作为其上界。因此，这些项对 (18) 的贡献为$O(\frac{1}{n^{r+1}}\times n\times n^{r-1})=o(\sqrt{n})$。这意味着，对于每个 r，极限中的非零贡献来自 $[2r]$的成对划分。因此，我们有，

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left(X^r\right)\right]=\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(2r)}\sum_{J\in\Pi(\pi)}\mathrm{E}\left[a_J\right]I(i,J,p,n)\delta_0(\sum_{q=1}^{2r}(-1)^q j_q)+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{19}$$

对于 $\pi \in \mathcal{P}_2(2r)$，考虑集合

$$\Pi_1(\pi) = \{J \in \Pi(\pi) : \text{ for all } u \sim_\pi v, j_u = \epsilon_\pi(v) j_v\} \text{ and}$$
$$\Pi_2(\pi) = \Pi(\pi) \setminus \Pi_1(\pi).$$

对于 $\pi \in \mathcal{P}_2(2r)$以及满足 $u \sim_\pi v$的固定 $1 \le u \ne v \le 2r$，考虑子集 $\Pi_2(\pi, u, v) = \{J \in \Pi_2(\pi) : j_u \ne \epsilon_\pi j_v\}$。对于 $J \in \Pi_2(\pi, u, v)$，注意到 ϵ_π的定义意味着$(-1)^u j_u = (-)^v j_v$，因此，当且仅当$2(-1)^u j_u = \sum_{\substack{q=1 \\ q \ne u \ v}}^{2r}$、$(-1)^q j_q$时，求和 $\sum_{q=1}^{2r}(-1)^q j_q$ 为零。于是，一旦选定所有其他 j_q，使(19)非零的 j_u 的取值便唯一确定。由于 $\cup_{u \sim_\pi v} \Pi_2(\pi, u, v) = \Pi_2(\pi)$，可知使(19)非零的 $J \in \Pi_2(\pi)$的选择数至多为 $O(n^{r-1})$。

此外，根据 ϵ_π 的定义，对于每个 $J \in \Pi_1(\pi)$，$\sum_{q=1}^{4r}(-1)^q j_q$ 始终为零。因此，我们得到：

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left(X^r\right)\right] = \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(2r)} \sum_{J \in \Pi_1(\pi)} I(i, J, p, n) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{20}$$

假设 $B_j = \{u, v\}$ of π 是同奇偶性块。那么对于每个 $J \in \Pi_1(\pi)$，根据 $\Pi_1(\pi)$ 的定义，可得 $j_u = j_v$。如果 B_j 是不同奇偶性块，则可得 $j_u = -j_v$，并且由于 $-(p-1) \le j_u, j_v \le (n-1)$，可得 $-M \le j_u \le M$，其中 $M = \min\{p-1, n-1\}$。不失一般性，我们用 $j_1, j_2, \ldots, j_{|SP(\pi|)}$ 表示同奇偶性块的元素，并用 $j_{|SP(\pi)|+1}, \ldots, j_r$ 表示不同奇偶性块的元素。将 $I(i, J, p, n)$ 的表达式代入，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(X^r)] &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(2r)} \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1, \ldots, j_r} \prod_{s=1}^{r} \chi_{[1,p]}(i + \sum_{\ell=1}^{2s-1}(-1)^\ell j_\ell)\ \chi_{[1,n]}(i + \sum_{\ell=1}^{2s}(-1)^\ell j_\ell) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(2r)} \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1, \ldots, j_r} \prod_{s=1}^{r} \chi_{[\frac{1}{n}\frac{p}{n}]}(i + \sum_{\ell=1}^{2s-1}(-1)^\ell j_\ell)\ \chi_{[\frac{1}{n},1]}(i + \sum_{\ell=1}^{2s}(-1)^\ell j_\ell) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),
\end{aligned} \tag{21}$$

其中 j_1，j_2，……，$j_{|SP(\pi)|}$在 $-(p-1)$ 和 $(n-1)$ 之间变化，而 $j_{|SP(\pi)|+1}$，……，j_r在$-M$和 M之间变化。现在注意到，当 p，$n \to \infty$且 $p/n \to \lambda$时，式（21）中对应于$\pi \in \mathcal{P}_2$（$2r$）的首项是下列积分的黎曼和

$$\int_{[0,1]\times[-m,m]^{|SP(\pi)|}\times[-\lambda,1]^{|DP(\pi)|}} \prod_{s=1}^{r} \chi_{[0,\lambda]}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{2s-1} \epsilon_\pi\ (i)\ x_{\pi(i)}\right) \chi_{[0,1]}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{2s} \epsilon_\pi\ (i)\right) \prod_{l=0}^{r} \mathrm{d}x_l,$$

其中 $m =$最小值$\{\lambda, 1\}$和 SP（π） DP（π）如定义 8中所述。因此，$\mathrm{E}[\frac{1}{n}\mathrm{Tr}$（$X^r$）]收敛于 M_r 对所有 $r \ge 1$ 均成立，这就完成了证明。■

注 12。注意，式（16）中积分号下的函数是非负函数。此外，由于 $|\epsilon_\pi\ (i)\ | = 1$对所有 i均成立，该函数在区域 $\left[\frac{m}{4}, \frac{3m}{4}\right] \times \left[-\frac{m}{8r}, \frac{m}{8r}\right]^r$上严格为正，其中 $m =$ 最小值$\{\lambda, 1\}$。由此可知，$M_r > 0$ 对所有 $r \ge 1$均成立。

3.2. 波动：$T_{n\times p}$对角线元素为零。在本节中，我们证明定理1。我们首先定义一些将在定理 1 的证明中出现的集合和关系。对于向量$J = (j_1,\ j_2,\ \ldots\ldots,\ j_p) \in \mathbb{Z}^p$，我们将多重集合 S_J定义为

$$S_J = \{|j_1|, |j_2|, \ldots, |j_p|\}. \tag{22}$$

对于向量序列 J_1、J_2……，我们使用记号 $J_r = (j_1^r$、j_2^r……、$j_p^r)$ 表示 J_r 的分量，并使用 S_{J_r} 表示与 J_r 相关的多重集。

现在，我们推导 $\{w_k$ 的极限协方差结构； $k \geq 1\}$。

定理 13. 设 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是满足假设 I（其中$a_0 \equiv 0$）的随机变量序列。设 $T_{n\times p}$ 为 $n \times p$ 输入序列为 $\{\frac{a_i}{\sqrt{n}}\}_{i\geq 0}$ 的对称托普利兹矩阵，并令w_{k_1}， w_{k_2} 如（2）中所定义。则对于正整数 k_1， k_2，

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p/n\to\lambda>0}} \mathrm{Cov}(w_{k_1}, w_{k_2}) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(2k_1,2k_2)} (f_I^-(\pi) + f_I^+(\pi)) + (\kappa-1) \sum_{\pi\in\mathcal{P}_{2,4}(2k_1,2k_2)} (f_{II}^-(\pi) + f_{II}^+(\pi)), \tag{23}$$

其中 $f_I^-(\pi)$ $f_I^+(\pi)$ $f_{II}^-(\pi)$ 以及 $f_{II}^+(\pi)$ 分别如（8）、（9）、（11）和（12）中所给出。

证明。 首先由引理 10 可知

$$w_{k_1} = \frac{1}{n^{k_1+\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1,\ldots,j_{2k_1}=-(p-1)}^{n-1} \Big(\prod_{r=1}^{2k_1} a_{j_r} - \mathrm{E}\big(\prod_{r=1}^{2k_1} a_{j_r}\big)\Big) I(i, J_1, p, n) \delta_0\big(\sum_{q=1}^{2k_1} (-1)^q j_q\big), \tag{24}$$

其中 $I(i,\ J_1,\ p,\ n)$ 如（14）中所定义。因此

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}(w_{k_1}, w_{k_2}) \\ &= \frac{1}{n^{k_1+k_2+1}} \sum_{\substack{i=1 \\ i'=1}}^{n} \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_{2k_1}=-(p-1) \\ j'_1,\ldots,j'_{2k_2}=-(p-1)}}^{n-1} \Big[\mathrm{E}\big(\prod_{r=1}^{2k_1} a_{j_r} \prod_{r=1}^{2k_2} a_{j'_r}\big) - \mathrm{E}\big(\prod_{r=1}^{2k_1} a_{j_r}\big)\mathrm{E}\big(\prod_{r=1}^{2k_2} a_{j'_r}\big)\Big] g(i, i', J_1, J_2, p, n), \end{aligned} \tag{25}$$

其中 J_1和 J_2由 $J_1 = (j_1, j_2, \ldots, j_{2k_1})$、 $J_2 = (j'_1, j'_2, \ldots, j'_{2k_2})$ 给出，并且

$$g(i, i', J_1, J_2, p, n) = I(i, J_1, p, n) I(i, J_2, p, n) \delta_0\big(\sum_{q=1}^{2k_1} (-1)^q j_q\big) \delta_0\big(\sum_{q=1}^{2k_2} (-1)^q j'_q\big). \tag{26}$$

对于向量 $J = (j_1, j_2, \ldots, j_{2k_1+2k_2}) \in \{-(p-1)\ldots, (n-1)\}^{2k_1+2k_2}$，我们对所有$1 \leq r \leq 2k_2$定义 $j'_r = j_{2k_1+r}$。在本证明中，我们约定，对于向量 $J = (j_1, j_2, \ldots, j_{2k_1+2k_2}) \in\{-(p-1)\ldots, (n-1)\}^{2k_1+2k_2}$， $J_1 = (j_1, j_2, \ldots, j_{2k_1})$ 且 $J_2 = (j_{2k_1+1}, j_{2k_1+2}\ldots, j_{2k_1+2k_2})$。此外，注意对于向量 J，如果元素 $|j_u|$ 在 S_J 中仅出现一次，或者 $j_u = 0$，则式 (25) 中对应于 J 的被加数为零。因此，我们得到

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}(w_{k_1}, w_{k_2}) \\ &= \frac{1}{n^{k_1+k_2+1}} \sum_{\substack{i=1 \\ i'=1}}^{n} \sum_{\pi\in\widehat{\mathcal{P}}(2k_1+2k_2)} \sum_{J\in\Pi(\pi)} \Big[\mathrm{E}\Big(\prod_{r=1}^{2k_1+2k_2} a_{j_r}\Big) - \mathrm{E}\Big(\prod_{r=1}^{2k_1} a_{j_r}\Big)\mathrm{E}\Big(\prod_{r=2k_2+1}^{2k_2} a_{j'_r}\Big)\Big] g(i, i', J_1, J_2, p, n) \\ &= \frac{1}{n^{k_1+k_2+1}} \sum_{\pi\in\widehat{\mathcal{P}}(2k_1+2k_2)} \sum_{i=1}^{n} |\Pi(\pi)| V(\pi), \text{ say}, \end{aligned} \tag{27}$$

^其中， $\mathcal{P}(2k_1+2k_2)$ 是 $[2k_1+2k_2]$ 上所有划分的集合，其中每个块的大小都大于或等于 2； $\Pi(\pi)$ 是所有向量 $J \in \{-(p-1)\ -(p-2)\ldots, -1, 1, \ldots, (n-1)\}^{2k_1+2k_2}$ 的集合，满足当且仅当 $|j_u| = |j_v|$时， $u \sim_\pi v$。注意，最后一个求和是由以下事实得出的：对于所有 $J \in \Pi(\pi)$，(25) 中的被加数都相等。这里， $|\Pi(\pi)|$ 表示集合 $\Pi(\pi)$ 的基数。

现在，我们找出所有满足 π 对 $\mathrm{Cov}(w_{k_1} w_{k_2})$ 的渐近贡献非零的划分 π。注意，一旦划分确定，选择 $j_1, j_2, \ldots, j_{2(k_1+k_2)}$的自由度就等于 $|\pi|$，即划分 π 的块数。现在，我们根据划分 π 中块的数量来考虑不同的情形。

情形 I: π 的块数严格小于 k_1+k_2-1。
在这种情况下，我们有 $|\Pi(\pi)|$ 的阶为 $O(n^{|\pi|}) < O(n^{k_1+k_2-1})$。由假设 I 可知，对于每个固定的 r，存在 $M>0$ 使得 $\mathrm{E}|a_j|^r \le M$ 对所有 $j\in\mathbb{N}$均成立。因此，式（27）中的被加项有一个常数上界。因此，对于满足情形 I 条件的每个 π，我们得到:

$$\frac{1}{n^{k_1+k_2+1}}\sum_{J\in\Pi(\pi)}\sum_{\substack{i=1\\ i'=1}}^{n}|\Pi(\pi)|V(\pi)=O\left(\frac{1}{n^{k_1+k_2+1}}n^2n^{|\Pi(\pi)|}\right)=o(1).$$

情形 II: π 的块数为 k_1+k_2-1。
考虑$\mathcal{P}_\pi(2k_1+2k_2)$，使得 π 的块数为 k_1+k_2-1。假设 π 包含一个块 B_j，满足 $|(B_j\cap[2k_1])|=1$ 或 $|(B_j\cap([2(k_1+k_2)]\setminus[2k_1]))|=1$。不失一般性，假设 $|(B_j\cap[2k_1])|=1$，并令 $\{b\}=B_j\cap[2k_1]$。注意，如果除 j_b 外的所有 j_q 均已选定，那么使式（25）中的被加项非零的 j_b 的选择至多有一种。因此，在这种情况下，选择 j_q时会少一个自由度，因此对于所有满足 $V(\pi)\neq 0$ 的 π，有 $|\Pi(\pi)|=O(n^{|\pi|-1})$，从而

$$\frac{1}{n^{k_1+k_2+1}}\sum_{J\in\Pi(\pi)}\sum_{\substack{i=1\\ i'=1}}^{n}|\Pi(\pi)|V(\pi)=o(1).$$

因此，在这种情况下，要使 π 的贡献在极限中为非零，每个交叉匹配的块都必须至少包含四个元素。现在注意到，π 的块数为 k_1+k_2-1，且 π 中至少存在一个交叉匹配。因此可知，只有满足以下所有条件，π 才会在极限中产生非零贡献:

(i) π 仅有一个交叉匹配块，即 B_j。(ii) $|B_j|=4$ 和 B_j 中的两个元素属于 $[2k_1]$，而 B_j 中剩余的两个元素属于 $[2(k_1+k_2)\setminus 2k_1]$。(iii) π 的所有其他块的基数均为 2。

换言之，只有当 $\pi\in\mathcal{P}_{2,4}(2k_1,2k_2)$ 时，$\pi\in\mathcal{P}(2k_1+2k_2)$ 才会在（27）的极限下产生非零贡献。

考虑一个固定的 $\pi\in\mathcal{P}_{2,\ 4}(2k_1+2k_2)$。根据假设 I，我们有 $\mathrm{E}a_j^2=1$ 以及 $\mathrm{E}a_j^4=\kappa$对所有 j均成立。因此由（27），可得

$$\frac{1}{n^{k_1+k_2+1}}\sum_{J\in\Pi(\pi)}\sum_{\substack{i=1\\ i'=1}}^{n}|\Pi(\pi)|V(\pi)=(\kappa-1)\frac{1}{n^{k_1+k_2+1}}\sum_{\substack{i=1\\ i'=1}}^{n}\sum_{J\in\Pi(\pi)}g(i,i',J_1,J_2,p,n),\tag{28}$$

其中 $\Pi(\pi)$ 的定义见（27）。

考虑一个固定的 $\pi\in\mathcal{P}_2(2k_1,\ 2k_2)$，其块为 B_1、B_2、……、$B_{k_1+k_2-1}$，其中 $|B_i|=4$，且 $J=(J_1,\ J_2)\in\Pi(\pi)$。根据$\mathcal{P}_2$、$4(2k_1,\ 2k_2)$的定义，对于每个 u，$|(B_\ell\cap S_{J_u})|\in\{0,2\}$当$u=1$时，2，并令 $B_\ell\cap S_{J_u}=\{u_1,u_2\}$。通过类似于定理 11 的证明可知，只有在附加条件 $j_{u_1}=(-1)^{u_1+u_2+1}j_{u_2}$成立时，才会出现非零贡献。这只有在以下情况下才可能

$$\tau_\pi(r)j_r=\tau_\pi(s)j_s\ \text{for}\ B_\ell=\{r,s\},\tag{29}$$

并且对于 $B_i=\{r_1,s_1,r_2,s_2\}$，其中 $r_1<s_1<r_2<s_2$,

$$\tau_\pi(r_1)j_{r_1}=\tau_\pi(s_1)j_{s_1}=\tau_\pi(r_2)j_{r_2}=\tau_\pi(s_2)j_{s_2}\tag{30}$$

$$\text{or}\ \tau_\pi(r_1)j_{r_1}=\tau_\pi(s_1)j_{s_1}=-\tau_\pi(r_2)j_{r_2}=-\tau_\pi(s_2)j_{s_2}.\tag{31}$$

注意，向量 (J_1, J_2) 满足 (31)，当且仅当 $(J_1, -J_2)$ 满足 (30)。此外，注意向量 (J_1, J_2) 满足 (29)，当且仅当 $(J_1, -J_2)$ 满足 (29)；并且 $(J_1, J_2) \in \Pi(\pi)$，当且仅当 $(J_1, -J_2) \in \Pi(\pi)$。结合这些结果与 (28)，可得$\pi \in \mathcal{P}_{2,4}(2k_1, 2k_2)$ 对 $\mathsf{Cov}(w_{k_1}, w_{k_2})$ 的贡献为

$$(\kappa-1)\frac{1}{n^{k_1+k_2+1}}\sum_{\substack{i=1\\ i'=1}}^{n}\left(\sum_{J\in\Pi_1(\pi)} g(i,i',J_1,J_2,p,n)+\sum_{J\in\Pi_2(\pi)} g(i,i',J_1,J_2,p,n)\right)+o(1), \tag{32}$$

其中

$$\Pi_1(\pi)=\{J=(J_1,J_2)\in\Pi(\pi):(J_1,J_2)\text{ obeys (29) and (30)}\},$$
$$\Pi_2(\pi)=\{J=(J_1,J_2)\in\Pi(\pi):(J_1,-J_2)\text{ obeys (29) and (30)}\}.$$

注意，由条件 (29) 和 (30) 可知，对于所有的 $J\in\Pi_1(\pi)$ 和 $J\in\Pi_2(\pi)$，$\delta_0(\sum_{q=1}^{2k_1}(-1)^q j_q)$ 和 $\delta_0(\sum_{q=1}^{2k_2}(-1)^q j'_q)$ 均等于 1。因此，(32) 的第一项是 $f_{II}^{+}(\pi)$ 的黎曼和，而 (32) 的第二项是 $f_{II}^{-}(\pi)$ 的黎曼和。因此，在这种情况下，其贡献为

$$(\kappa-1)\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{2,4}(2k_1,2k_2)}(f_{II}^{-}(\pi)+f_{II}^{+}(\pi)).$$

情形 III：π 的块数为 k_1+k_2。
在这种情况下，每个块的大小为 2。注意，在这种情况下，如果 27 的所有块都是 π 的子集，或者是 $[2k_1]$ 或 $[2(k_1+k_2)]\setminus[2k_1]$，则其等于零。因此，要在极限中产生非零贡献，$\pi$ 应是 $\mathcal{P}_2(2k_1,2k_2)$ 中的一个元素。对于 $\pi\in\mathcal{P}_2(2k_1,2k_2)$，我们有

$$\mathrm{E}\left(\prod_{r=1}^{2k_1+2k_2}a_{j_r}\right)=1,\mathrm{E}\left(\prod_{r=1}^{2k_1}a_{j_r}\right)=0\text{ and }\mathrm{E}\left(\prod_{r=2k_2+1}^{2k_2}a_{j'_r}\right)=0.$$

因此，我们得到，对于 $\pi\in\mathcal{P}_2(2k_2,2k_2)$，

$$\frac{1}{n^{k_1+k_2+1}}\sum_{J\in\Pi(\pi)}\sum_{\substack{i=1\\ i'=1}}^{n}|\Pi(\pi)|V(\pi)=\frac{1}{n^{k_1+k_2+1}}\sum_{\substack{i=1\\ i'=1}}^{n}\sum_{J\in\Pi(\pi)}g(i,i',J_1,J_2,p,n),$$

其中 $g(i,i',J_1,J_2,p,n)$ 的定义见 (25)。令 u 为满足以下条件的最小整数：对于某个 $u\sim_\pi v$，有 $1\le u\le 2k_1<v\le 2(k_1+k_2)$。那么请注意，只有在以下情况下 $g(i,i',J_1,J_2,p,n)$ 才非零

$$j_u=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq u}}^{2k_1}(-1)^i j_i\text{ and }j_v=\sum_{\substack{i=2k_1+1\\ i\neq u}}^{2k_1+2k_2}(-1)^i j_i.$$

因此，j_u 和 j_v 由其他 j_q 决定，而 $(-1)^u j_u+(-1)^v j_v$ 可能非零。通过与情形 II 类似的论证可知，只有当对于 $(J_1,J_2)\in\Pi(\pi)$，(J_1,J_2) 或 $(J_1,-J_2)$ 满足该方程时，才会出现非零贡献。

$$\epsilon_\pi(u_1)j_{u_1}=\epsilon_\pi(u_2)j_{u_2}=x_\ell, \tag{33}$$

其中 $j_i\in\{-(p-1),-(p-2)\ldots,-1,1,2,\ldots,n-1\}$ 对每个 i 成立，且 ϵ_π 定义如式 (6)。这意味着，当 $p, n\to\infty$ 和 $p/n\to\lambda$ 时，满足 (33) 的 $(J_1,-J_2)$ 所对应的贡献为 $f_I^{-}(\pi)$，而满足 (33) 的 (J_1,J_2) 所对应的贡献为 $f_I^{+}(\pi)$。定理 13 的证明至此完成。■

现在我们陈述一些将在定理 1的证明中使用的其他记号和结果。首先回顾多重集的概念 S_J 对于给定的向量 J，见（22）。

定义 14. 如果 $J=(j_1,j_2,\ldots,j_k)\in\mathbb{Z}^k$ 和 $J'=(j'_1,j'_2,\ldots,j'_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell$ 满足 $S_J\cap S_{J'}\neq\emptyset$，则称这两个向量是连通的。

定义 15. 给定一个向量集合 $S=\{J_1,J_2,\ldots,J_\ell\}$，其中 $J_i\in\mathbb{Z}^{k_i}$ 属于 $1\le i\le\ell$，如果子集 $C=\{J_{n_1},J_{n_2},\ldots,J_{n_k}\}$ 属于 S 并满足以下两个条件，则称其为一个簇：

(i) 对于来自 C 的任意一对 J_{n_i}、J_{n_j}，都可以找到一条由 C 中的向量组成的链，链的起点为 J_{n_i}，终点为 J_{n_j}，且链中任意两个相邻向量均连通。(ii) 子集 C 无法扩展为仍满足条件 (i) 的子集。

现在注意，如果托普利兹矩阵的对角线元素为零，那么引理 10 的迹公式可以写为

$$\mathrm{Tr}(X^{(k)}\cdots X^{(1)})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{A_k}\prod_{r=1}^{k}a^{(r)}_{j_{2r-1}}a^{(r)}_{j_{2r}}I(i,J,p,n),\tag{34}$$

其中 $I(i,J,p,n)$ 如（14）所示，$X^{(r)}=T^{(r)}_{n\times p}(T_{(r)\,n\times p})'$ 以及

$$A_k=\big\{(j_1,\ldots,j_{2k})\in\{-(p-1),\ldots,-1,1,\ldots,(n-1)\}^{2k}:\sum_{q=1}^{2k}(-1)^q j_q=0\big\}.\tag{35}$$

下面的引理保证，当 n 变大时，长度大于二的簇的基数可以忽略。

引理 16. 假设 B_{K_ℓ} 是所有满足以下条件的 $(J_1,J_2,..,J_\ell)\in A_{k_1}\times A_{k_2}\times\cdots\times A_{k_\ell}$ 的子集

(i) $\{J_1,J_2,\ldots,J_\ell\}$ 构成一个簇；(ii) $\cup_{i=1}^{\ell}S_{J_i}$ 中的每个元素的重数都大于或等于二。

那么，对于 $\ell\ge3$,

$$|B_{K_\ell}|=o\big((n+p)^{k_1+k_2+\cdots+k_\ell-\frac{\ell}{2}}\big)$$

并且 $|B_{K_2}|=O\big((n+p)^{k_1+k_2-1}\big)$。

引理的证明 16，请参阅 [24] 中的引理 5.3。证明思路相同，因此此处略去证明。下面的引理是引理 16 的直接推论，也是证明定理 1 的主要要素之一。

引理 17. 假设 $\{x_i\}_{i\ge1}$ 是满足假设 I 的随机变量序列。那么对于 n、$p\to\infty$，若 $p/n\to\lambda>0$ 且 $\ell\ge3$,

$$\frac{1}{n^{k_1+k_2+\cdots+k_\ell-\frac{\ell}{2}}}\sum_{\substack{J_1\in A_{k_1},\ldots,J_\ell\in A_{k_\ell},\\ \{J_1,\ldots,J_\ell\}\ forms\ a\ cluster}}E\Big[\prod_{r=1}^{\ell}\Big(x_{J_r}-E(x_{J_r})\Big)\Big]=o(1),\tag{36}$$

其中 $J_r=(j^r_1,\ j^r_2,\ .....,\ j^r_{2k_r})\in A_{k_r}$，$A_{k_r}$ 如式（35）所示，且 $x_{J_r}=\prod_{s=1}^{2k_r}x_{j^r_s}$.

证明。首先注意到，对于每个 i，$\mathrm{E}(x_i)=0$，因此 $\mathrm{E}\Big[\prod_{r=1}^{\ell}\Big(x_{J_r}-\mathrm{E}(x_{J_r})\Big)\Big]$ 只有在集合 $\{x_{j^r_1},x_{j^r_2},\ldots,x_{j^r_{2k_r}}$ 中每个 x_i 至少出现两次时才非零；$1\le r\le\ell\}$。于是

$$\sum_{\substack{J_1\in A_{k_1},\ldots,J_\ell\in A_{k_\ell},\\ \{J_1,\ldots,J_\ell\}\ \mathrm{forms\ a\ cluster}}}\mathrm{E}\Big[\prod_{r=1}^{\ell}\Big(x_{J_r}-\mathrm{E}(x_{J_r})\Big)\Big]=\sum_{(J_1,J_2,\ldots,J_\ell)\in B_{K_\ell}}\mathrm{E}\Big[\prod_{r=1}^{\ell}\Big(X_{J_r}-\mathrm{E}(X_{J_r})\Big)\Big],\tag{37}$$

其中 B_{K_ℓ} 如引理 16中所述。根据假设 I，我们有 x_i的矩有界。因此，对于所有 $(J_1,\ J_2,\ \ldots\ldots,\ J_\ell) \in A_{k_1} \times A_{k_2} \times \cdots \times A_{k_\ell}$，有

$$\Big|\mathrm{E}\big[\prod_{r=1}^{\ell}\big(x_{J_r} - \mathrm{E}(x_{J_r})\big)\big]\Big| \le \beta_\ell, \tag{38}$$

其中 $\beta_\ell > 0$ 仅取决于 $k_1,\ k_2,\ \ldots\ldots,\ k_\ell$。现在注意到，由（37）和（38）可知

$$\sum_{\substack{J_1\in A_{k_1},\ldots,J_\ell\in A_{k_\ell},\\ \{J_1,\ldots,J_\ell\}\text{ forms a cluster}}} \Big|\mathrm{E}\big[\prod_{r=1}^{\ell}\big(x_{J_r} - \mathrm{E}(x_{J_r})\big)\big]\Big| \le \sum_{(J_1,J_2,\ldots,J_\ell)\in B_{K_\ell}} \beta_\ell \ = |B_{K_\ell}| \times \beta_\ell.$$

因此在上述表达式中使用引理 16 ，我们得到

$$\sum_{\substack{J_1\in A_{k_1},\ldots,J_\ell\in A_{k_\ell},\\ \{J_1,\ldots,J_\ell\}\text{ forms a cluster}}} \Big|\mathrm{E}\big[\prod_{r=1}^{\ell}\big(x_{J_r} - \mathrm{E}(x_{J_r})\big)\big]\Big| = o\big((n+p)^{k_1+k_2+\cdots+k_\ell-\frac{\ell}{2}}\big).$$

由于 $p/n \to \lambda \in (0,\ \infty)$，$p = O(n)$ 且上述表达式给出了 (36)。至此，引理的证明完成。■

现在我们可以利用上述引理和定理1 来证明定理13。

定理的证明*1.* 我们使用矩方法和 Wick 公式来证明定理 1。首先回顾矩方法：要证明 $w_Q \xrightarrow{d} N(0,\sigma_Q^2)$，只需证明

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ p/n\to\lambda>0}} \mathrm{E}[(w_Q)^\ell] = \mathrm{E}[(N(0,\sigma_Q^2))^\ell] \ \ \forall\ \ell = 1,2,\ldots. \tag{39}$$

因此，要证明（39），只需证明对于 k_1、k_2、……、$k_\ell \ge 1$,

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ p/n\to\lambda>0}} \mathrm{E}[w_{k_1} w_{k_2}\cdots w_{k_\ell}] = \mathrm{E}[N_{k_1} N_{k_2}\cdots N_{k_\ell}], \tag{40}$$

w这里 $\{N_k\}_{k\ge1}$ 是一个协方差为$\sigma_{k_1,\ k_2}$ 如（23）所示的中心高斯族。由迹公式（34）可知

$$\begin{aligned} w_{k_r} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\mathrm{Tr}(T_{n\times p}T'_{n\times p})^{k_r} - \mathrm{E}[\mathrm{Tr}(T_{n\times p}T'_{n\times p})^{k_r}]\Big) \\ &= \frac{1}{n^{k_r+\frac12}}\sum_{i_r=1}^{n}\sum_{A_{k_r}}\big(a_{J_{k_r}} - \mathrm{E}[a_{J_r}]\big)I(i_r,J_r,p,n), \end{aligned}$$

其中 $J_r = (j_1^r,\ j_2^r,\ \ldots\ldots,\ j_{2k_r}^r) \in A_{k_r}$，$A_{k_r}$如（35）所示，$a_{J_r} = \prod_{s=1}^{2k_r} a_{j_s^r}$而 I（i_r、J_r、p、n）如（14）所示。因此

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}[w_{k_1} w_{k_2}\cdots w_{k_\ell}] \\ &= \frac{1}{n^{k_1+k_2+\cdots+k_\ell+\frac{\ell}{2}}}\sum_{i_1,\ldots,i_\ell=1}^{n}\ \sum_{A_{k_1},\ldots,A_{k_\ell}} \mathrm{E}\Big[\prod_{r=1}^{\ell}(a_{J_r} - \mathrm{E}[a_{J_r}])\Big]\prod_{r=1}^{\ell} I(i_r,J_r,p,n). \end{aligned} \tag{41}$$

首先注意，对于固定的 $J_1, J_2, \ldots, J_\ell$，如果存在一个 $s \in \{1,2,\ldots,\ell\}$，使得 J_s与任何满足 $r \ne s$ 的 J_r 都不连通，那么由于条目 $\{a_i\}_{i\ge1}$ 的独立性，我们有

$$\mathrm{E}\Big[\prod_{r=1}^{\ell}(a_{J_r} - \mathrm{E}[a_{J_r}])\Big] = 0.$$

因此，要在极限中获得非零贡献，$\{J_1, J_2, \ldots, J_\ell\}$ 中的每个簇的长度都必须大于或等于二，其中簇的定义见定义 15。假设向量 J_1、J_2、……、J_ℓ 分解为若干簇 T_1、T_2、……、T_s，且对于所有 $1 \le i \le s$，都有 $|T_i| \ge 2$，其中$|T_i|$ 表示簇 T_i的长度。注意到 $\sum_{i=1}^{s} |T_i| = \ell$。

如果存在一个簇 T_j位于 T_1、……、T_s之中，使得 $|T_j| \ge 3$，那么根据定理 13 和引理 17，我们有

$$\frac{1}{n^{k_1+k_2+\cdots+k_\ell+\frac{\ell}{2}}} \sum_{i_1,\ldots,i_\ell=1}^{n} \sum_{A_{k_1},\ldots,A_{k_\ell}} \mathrm{E}\Big[\prod_{r=1}^{\ell}(a_{J_r} - \mathrm{E}[a_{J_r}])\Big] = o(1).$$

由于对于每个 r, $|I(i_r, J_r, p, n)| \le 1$，我们有

$$\frac{1}{n^{k_1+k_2+\cdots+k_\ell+\frac{\ell}{2}}} \sum_{i_1,\ldots,i_\ell=1}^{n} \sum_{A_{k_1},\ldots,A_{k_\ell}} \Big|\mathrm{E}\Big[\prod_{r=1}^{\ell}(a_{J_r} - \mathrm{E}[a_{J_r}])\Big] \prod_{r=1}^{\ell} I(i_r, J_r, p, n)\Big| = o(1).$$

因此，如果 ℓ 为奇数，则将存在一个奇数长度的簇，从而

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p/n\to\lambda>0}} \mathrm{E}[w_{k_1} w_{k_2} \cdots w_{k_\ell}] = 0.$$

现在设 ℓ 为偶数。由与 ℓ 奇数情形类似的论证可知，J_1，J_2、……、J_ℓ对 $\mathrm{E}[w_{k_1} w_{k_2} \cdots w_{k_\ell}]$的贡献仅在 O（1）当且仅当 J_1，J_2、……、J_ℓ分解为长度为 2 的簇时才存在。因此由（41），得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[w_{k_1} w_{k_2} \cdots w_{k_\ell}] \\
&= \frac{1}{n^{k_1+\cdots+k_\ell+\frac{\ell}{2}}} \sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(\ell)} \prod_{r=1}^{\ell/2} \sum_{i_{y(r)},i_{z(r)}=1}^{n} \sum_{A_{k_{y(r)}},A_{k_{z(r)}}} \mathrm{E}\big[(a_{J_{y(r)}} - \mathrm{E}[a_{J_{y(r)}}])(a_{J_{z(r)}} - \mathrm{E}[a_{J_{z(r)}}])\big] \\
&\qquad \times I(i_{y(r)}, J_{y(r)}, p, n) I(i_{z(r)}, J_{z(r)}, p, n) + o(1) \\
&= \sum_{\pi\in P_2(\ell)} \prod_{i=1}^{\ell/2} \mathrm{E}[w_{k_{y(i)}} w_{k_{z(i)}}] + o(1), \qquad (42)
\end{aligned}$$

其中 $\pi = \big\{\{y\ (1)\ \ z\ (1)\ \},\ \ldots\ldots,\ \{y\ (\tfrac{\ell}{2})\ \ z\ (\tfrac{\ell}{2})\ \}\big\} \in \mathcal{P}_2\ (\ell)$ 以及 $\mathcal{P}_2\ (\ell)$ 是 的所有二元划分的集合。现在由定理 13和（42），得到

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{n\to\infty \\ p/n\to\lambda>0}} \mathrm{E}[w_{k_1} w_{k_2} \cdots w_{k_\ell}] = \sum_{\pi\in P_2(\ell)} \prod_{i=1}^{\ell/2} \lim_{\substack{n\to\infty \\ p/n\to\lambda>0}} \mathrm{E}[w_{k_{y(i)}} w_{k_{z(i)}}] &= \sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(\ell)} \prod_{i=1}^{\ell/2} \mathrm{E}[N_{k_{y(i)}} N_{k_{z(i)}}] \\
&= \mathrm{E}[N_{k_1} N_{k_2} \cdots N_{k_\ell}],
\end{aligned}$$

其中 最后一个等式是由 Wick 公式得出的。定理的证明至此完成 1. ■

3.3. 具有非零对角元的 $T_{n\times p}$。 在定理1中，我们考虑了$a_0 \equiv 0$。在本节中，我们考虑 a_0 为非零随机变量的情形。首先，我们定义以下记号：对于 $k \ge 1$，定义

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{n\times p} &:= T_{n\times p} + \frac{a_0}{\sqrt{n}} I_{n\times p}, \\
\tilde{w}_k &:= \frac{1}{\sqrt{n}} \big[\mathrm{Tr}(\tilde{T}_{n\times p}\tilde{T}'_{n\times p})^k - \mathrm{E}[\mathrm{Tr}(\tilde{T}_{n\times p}\tilde{T}'_{n\times p})^k]\big],
\end{aligned}$$

其中 $T_{n\times p}$ 是对称托普利兹矩阵，其元素为 $\{\frac{a_i}{\sqrt{n}}\}_{i\ge 0}$，对角线元素为零（$a_0 = 0$），而 $I_{n\times p}$ 是由（δ_{ij}）给出的 $n \times p$ 矩阵$_{i}^{n\ p}{}_{,,j=1}$。

定理 18. 设 $\{a_i\}_{i\geq 0}$ 是一列满足假设 I 的随机变量。假设 $T_{n\times p}$ 如上所定义。那么对于每个 $k\geq 1$, 当 n、$p\to\infty$ 且 $p/n\to\lambda>0$ 时,

$$\tilde{w}_k \xrightarrow{d} \tilde{N}_k,$$

其中

$$\tilde{N}_k = N_k + kM_{k-1}a_0,$$

其中 $\{N_k;\ k\geq 1\}$ 如定理 1和 $M_k=\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}E\big[Tr(T_{n\times p}T'_{n\times p})^k\big]$, 见式（16）。

定理 18 的证明思路与定理 1 的证明类似，但有一些技术上的~改动。我们略去证明。由注释 12 可知, M_k 对所有 $k\geq 1$均非零。因此，只有当 N_k是高斯变量时，才会是高斯变量。a_0 是高斯变量。

4. 含布朗运动元素的对称托普利兹矩阵

本节中，我们考虑元素为布朗运动的时变对称托普利兹矩阵（$T_{n\times p}(t)$）。在第 4.2 节中，我们研究对角线元素为零时 $T_{n\times p}(t)T'_{n\times p}(t)$ 的线性特征值统计量的过程收敛。对于非零对角元, $T_{n\times p}(t)T'_{n\times p}(t)$ 的线性特征值统计量将在第 4.2 节讨论。

4.1. 的波动 $T_{n\times p}(t)$ 其中对角线元素为零。在本节中，我们证明定理 3。我们使用过程收敛的标准结果来建立该结论。注意，为了建立 $\{w_k(t);t\geq 0\}$ 的过程收敛，只需证明 $\{w_k(t);t\geq 0\}$ 的有限维收敛，以及过程 $\{w_k(t);\ t\geq 0\}$的紧性。有关过程收敛的更多细节，请参见（第 1 章。4 , [17]）。

4.1.1. 有限维收敛：我们证明以下命题。

命题 19. 设 $k\geq 1$和 $0<t_1<t_2<\cdots<t_r$。那么当 n、$p\to\infty$和 $p/n\to\lambda$时,

$$(w_k(t_1),w_k(t_2),\ldots,w_k(t_r)) \xrightarrow{d} (N_k(t_1),N_k(t_2),\ldots,N_k(t_r)),$$

其中 $\{N_k(\ t);t\geq 0,k\geq 1\}$ 是均值为零的高斯过程，其协方差结构如(43) .

在证明命题 19 之前，我们先推导 $\{w_k(t)$ 的极限协方差结构；$t\geq 0\}$。回顾定义 $\sim_\pi$ 中定义的关系 6。注意, $\sim_\pi$ 唯一确定了该划分。基于这一思路，我们现在根据给定的两个划分 $\pi=(\pi_1,\pi_2)$ 构造一个新的划分 π_1 和 π_2。

定义 20. 对于 $[n]$ 的划分 π_1 和 $[m]$的划分 π_2，我们构造 $[n+m]$ 的划分 $\pi=(\pi_1,\pi_2)$，该划分具有以下块结构。

(i) 对于 $1\leq i,j\leq n, i\sim_\pi j$，如果 $i\sim_{\pi_1} j$。(ii) 对于 $n+1\leq i,j\leq n+m, i\sim_\pi j$，如果 $(i-n)\sim_{\pi_2}(j-n)$。(iii) 对于 $1\leq i\leq n<j\leq n+m, i\nsim_\pi j$。

例 21. 令 $r\in\{0,2,4,\ldots,2k_2\}$ 为固定整数。注意，对于划分 $\pi=(\pi_1,\pi_2)$，$i\sim_\pi j$ 当且仅当 $i\sim_{\pi_1} j$ 或 $(i-n)\sim_{\pi_2}(j-n)$。因此，对于 $(\pi_1,\pi_2)\in\mathcal{P}_{2,4}(2k_1,2r)\times\mathcal{P}_2(2(k_2+r))$，划分 $\pi=(\pi_1,\pi_2)$ 属于 $\mathcal{P}_{2,4}(2k_1,2k_2)$；而对于 $(\pi_1,\pi_2)\in\mathcal{P}_2(2k_1,2r)\times\mathcal{P}_2(2(k_2+r))$，划分 $\pi=(\pi_1,\pi_2)$ 属于 $\mathcal{P}_2(2k_1,2k_2)$。

下面的引理给出了 $\{w_k(t);t\geq 0\}$ 的极限协方差结构。

引理 22。 设 $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为一列相互独立的布朗运动，并设 $b_0 \equiv 0$。假设$T_{n\times p}$是 $n \times p$ 输入序列为 $\{\frac{b_i}{\sqrt{n}}\}_{i\geq 0}$ 的时变对称托普利兹矩阵，并令$w_k(t)$ 如（4）所示。那么对于 $0 < t_1 \leq t_2$ 以及正整数 k_1, k_2,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p/n\to\lambda>0}} \operatorname{Cov}(w_{k_1}(t_1), w_{k_2}(t_2)) = \sum_{r=1}^{k_2} \binom{2k_2}{2r} t_1^{k_1+r}(t_2-t_1)^{k_2-r}\mathcal{R}(p,r), \tag{43}$$

其中

$$\mathcal{R}(p,r) = \sum_{\substack{\pi=(\pi_1,\pi_2)\in \\ \mathcal{P}_2(2k_1,2r)\times\mathcal{P}_2(2(k_2-r))}} (f_I^-(\pi)+f_I^+(\pi)) + 2 \sum_{\substack{\pi=(\pi_1,\pi_2)\in \\ \mathcal{P}_{2,4}(2k_1,2r)\times\mathcal{P}_2(2(k_2-r))}} (f_{II}^-(\pi)+f_{II}^+(\pi)),$$

采用定义 20 中的概念（π_1, π_2） $\in \mathcal{P}_2$（$2k_1, 2r$） $\times \mathcal{P}_2(2(k_2-r))$； $f_I^-(\pi)$ $f_I^+(\pi)$ $f_{II}^-(\pi)$ 和$f_{II}^+(\pi)$分别见式（8）、（9）、（11）和（12）。

证明。首先定义 $U := T_{n\times p}(t_1)$ 和 $V := T_{n\times p}(t_2) - T_{n\times p}(t_1)$，其中 $T_{n\times p}(t_1)$ 和 $T_{n\times p}(t_2)$ 分别是在时刻 t_1 和t_2取值、元素为布朗运动的时变对称托普利兹矩阵。此外，对于 $0 \leq r \leq k_2$，定义

$$\begin{aligned} &J=(j_1,j_2,\ldots,j_{2k_1}),\ J'=(j'_1,j'_2,\ldots,j'_{2k_2}),\ J'_1=(j'_1,j'_2,\ldots,j'_{2r}),\ J'_2=\left(j'_{2r+1},\ldots,j'_{2k_2}\right), \\ &u_J=u_{j_1}\cdots u_{j_{2k_1}},\ u_{J'_1}=u_{j'_1}\cdots u_{j'_{2r}} \text{ and } v_{J'_2}=v_{j'_{2r+1}}\cdots v_{j'_{2k_2}}, \end{aligned} \tag{44}$$

其中 $u_r = b_r(t_1)$ 和 $v_r = b_r(t_2) - b_r(t_1)$. 现在利用上述记号和引理 10，$\operatorname{Cov}(w_{k_1}(t_1)\ w_{k_2}(t_2))$ 可写为

$$\begin{aligned} &\operatorname{Cov}\left(w_{k_1}(t_1), w_{k_2}(t_2)\right) \\ &= \frac{1}{n^{k_1+k_2+1}} \sum_{r=0}^{2k_2} \binom{2k_2}{r} \sum_{i,i'=1}^{n} \sum_{J,J'} \left\{ \left(\mathrm{E}[u_J u_{J'_1}] - \mathrm{E}[u_J]\mathrm{E}[u_{J'_1}]\right) \mathrm{E}[v_{J'_2}] \right\} g(i,i',J,J',p,n), \end{aligned}$$

其中 $J \in A_{k_1}$ 和 $J' \in A_{k_2}$ 以及 g（i、i'、J、J'、p、n）如（26）中所示。现在固定 r， $0 \leq r \leq 2k_2$考虑

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^{k_1+k_2+1}} \sum_{i,i'=1}^{n} \sum_{J,J'} \left\{ \left(\mathrm{E}[u_J u_{J'_1}] - \mathrm{E}[u_J]\mathrm{E}[u_{J'_1}]\right) \mathrm{E}[v_{J'_2}] \right\} g(i,i',J,J',p,n) \\ &= \frac{1}{n^{k_1+k_2+1}} \sum_{\pi} \sum_{i,i'=1}^{n} \sum_{(J,J')\in\Pi(\pi)} \left\{ \left(\mathrm{E}[u_J u_{J'_1}] - \mathrm{E}[u_J]\mathrm{E}[u_{J'_1}]\right) \mathrm{E}[v_{J'_2}] \right\} g(i,i',J,J',p,n), \end{aligned} \tag{45}$$

其中求和 π 遍历 [2（$k_1 + k_2$）] 的所有划分，且 Π（π）的定义见（27）。

考虑项 $\left(\mathrm{E}[u_J u_{J'_1}] - \mathrm{E}[u_J]\mathrm{E}[u_{J'_1}]\right) \mathrm{E}[v_{J'_2}]$。由于随机变量$\{u_i\}$ 和 $\{v_i\}$的独立性，该项非零当且仅当以下三个条件均得到满足：

（a） S_J 和 $S_{J'_1}$之间至少存在一个公共元素，即 $S_J \cap S_{J'_1} \neq \emptyset$； （b）$S_J \cup S_{J'_1}$ 的每个元素的基数至少为 2； （c）$S_{J'_2}$ 的每个元素的基数至少为 2,

其中多重集 S_J、 $S_{J'_1}$、和 $S_{J'_2}$的定义见（22）。

根据定理 13的证明可知， （45）的极限仅当划分π 属于 $\mathcal{P}_{2,\ 4}(2k_1, 2k_2)$ 或 $\pi \in \mathcal{P}_2(2k_1, 2k_2)$ 时才非零。现在我们分别求出对应于$\pi \in \mathcal{P}_{2,\ 4}(2k_1, 2k_2)$ 和 $\pi \in \mathcal{P}_2(2k_1, 2k_2)$ 的贡献。

首先考虑 $\pi \in \mathcal{P}_{2,\ 4}(2k_1,\ 2k_2)$ 且 $|V_i| = 4$的情形。根据条件（a），要在极限中产生非零贡献， V_i 中的两个元素必须属于 $\{1, 2, \ldots, 2k_1\}$，而 V_i 中的另外两个元素必须属于 $\{2k_1+1, \ldots, 2k_1+r\}$。注意，在此情形下，只有当 r 为偶数时，条件（b）和（c）才成立。进一步考虑定义 $\pi = (\pi_1,\ \pi_2)$ 中的情形，其中 20，可得

仅当，$_4(2k_1, r)$ 和 $\pi_2 \in \mathcal{P}_2(2k_2 - r)$ 时，45）才非零。根据布朗运动的性质，$\mathrm{E}u_j^2 = t_1$、$\mathrm{E}v_j^2 = (t_2 - t_1)$ 和 $\mathrm{E}u_j^4 = 3t_1^2$，且在此情形下

$$\left(\mathrm{E}[u_J u_{J_1'}] - \mathrm{E}[u_J]\mathrm{E}[u_{J_1'}]\right)\mathrm{E}[v_{J_2'}] = t_1^{k_1+\frac{r}{2}}(t_2 - t_1)^{k_2-\frac{r}{2}}\left(\mathrm{E}[a_J a_{J_1'}] - \mathrm{E}[a_J]\mathrm{E}[a_{J_1'}]\right)\mathrm{E}[a'_{J_2'}], \tag{46}$$

其中，a_J、$a_{J_1'}$ 和 $a'_{J_2'}$ 是 a_i、a_i' 的适当乘积，它们具有以下性质：$a_i \overset{D}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t_1}}u_i$、$a_i' \overset{D}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t_2 - t_1}}v_i$；$a_i$、$a_i'$ 满足假设 I，且 $\mathrm{E}a_i^4 = 3$。这里，$x_1 \overset{D}{\sim} x_2$ 表示 x_1 和 x_2 具有相同的分布。由定理 13 的证明以及式（46）可知，（45）中的被加项收敛于 $2t_1^{k_1+\frac{r}{2}}(t_2 - t_1)^{k_2-\frac{r}{2}}\left(f_{II}^-(\pi) + f_{II}^+(\pi)\right)$。

现在考虑 $\pi \in \mathcal{P}_2(2k_1, 2k_2)$。注意，条件（c）意味着，只有当 r 为偶数时，（45）中的被加项才非零。此外，根据条件（c），我们得到，仅当 π 的所有块均不同时与 $\{1, 2, \ldots, (2k_1 + r)\}$ 和 $\{(2k_1 + r + 1)\ldots\ldots 2k_2\}$ 相交时，极限中才有非零贡献。将定义 20 中定义的 $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ 代入，我们得到 $\pi_1 \in \mathcal{P}_2(2k_1, r)$和 $\pi_2 \in \mathcal{P}_2(2k_2 - r)$。因此，我们得到

$$\left(\mathrm{E}[u_J u_{J_1'}] - \mathrm{E}[u_J]\mathrm{E}[u_{J_1'}]\right)\mathrm{E}[v_{J_2'}] = t_1^{k_1+\frac{r}{2}}(t_2 - t_1)^{k_2-\frac{r}{2}}\left(\mathrm{E}[a_J a_{J_1'}] - \mathrm{E}[a_J]\mathrm{E}[a_{J_1'}]\right)\mathrm{E}[a'_{J_2'}], \tag{47}$$

其中 a_J，$a_{J_1'}$ 以及 $a'_{J_2'}$ 如（46）所示。同样，由定理 13的证明可知，（45）中的被加项收敛于 $t_1^{k_1+\frac{r}{2}}(t_2 - t_1)^{k_2-\frac{r}{2}}\left(f_I^-(\pi) + f_I^+(\pi)\right)$。综合这两种情况，可得（43）。引理得证。■

命题 *19* 的证明。 我们使用 Cramér-Wold 定理、Wick 公式和矩法来证明命题 19。注意，只需证明对于 $0 < t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_\ell$和$k_1$，$k_2$，$\ldots$，$k_\ell \ge 1$，

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p/n\to\lambda>0}} \mathrm{E}[w_{k_1}(t_1)w_{k_2}(t_2)\cdots w_{k_\ell}(t_\ell)] = \mathrm{E}[N_{k_1}(t_1)N_{k_2}(t_2)\cdots N_{k_\ell}(t_\ell)], \tag{48}$$

其中 $\{N_k(t);\, t \ge 0, k \ge 1\}$ 是均值为零的高斯过程，其协方差结构如（43）所示。（48）的证明思路与（40）的证明类似，此处略去。■

4.1.2. 紧性： 为证明过程 $\{w_k(t); t \ge 0\}$ 的紧性，我们检验以下命题的条件；该命题是过程 $\{w_k(t); t \ge 0\}$ 具有紧性的充分条件。

命题 23. (定理 I.4.*3, [17]*) 对每个 $k \ge 1$，存在正常数 M 和 γ，使得

$$E|w_k(0)|^\gamma \le M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{49}$$

并且存在正常数 α，β和 M_T, $T = 1, 2, \ldots,$ 使得

$$E|w_k(t) - w_k(s)|^\alpha \le M_T|t - s|^{1+\beta} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ and } t, s \in [0,\ T], (T = 1, 2, \ldots,). \tag{50}$$

命题 *23* 的证明。 首先回忆 $w_k(t)$，由（4）得，

$$w_k(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\mathrm{Tr}(X_n(t))^k - \mathrm{E}[\mathrm{Tr}(X_n(t))^k]\right\},$$

其中 $X_n(t) = T_{n\times p}(t)T'_{n\times p}(t)$。注意，$w_k(0) = 0$ 对所有 $k \ge 1$均成立。这表明（49）显然成立。

现在我们证明（50），其中 $\alpha = 4$和 $\beta = 1$。假设 $k \ge 2$固定，且 t，$s \in [0, T]$，对某个固定的$T \in \mathbb{N}$。那么

$$w_k(t) - w_k(s) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\mathrm{Tr}(X_n(t))^k - \mathrm{Tr}(X_n(s))^k - \mathrm{E}[\mathrm{Tr}(X_n(t))^k - \mathrm{Tr}(X_n(s))^k]\right]. \tag{51}$$

对于 $0 < s < t$，我们有

$$X_n(t) = X_n(t) - X_n(s) + X_n(s) = \widetilde{X}_n(t - s) + X_n(s),$$

其中 $\widetilde{X}_n(t-s) := T_{n\times p}(t)T'_{n\times p}(t) - T_{n\times p}(s)T'_{n\times p}(s)$。现在利用二项式展开，我们得到

$$(X_n(t))^k - (X_n(s))^k = (\widetilde{X}_n(t-s))^k + \sum_{d=1}^{k-1}\binom{k}{d}(\widetilde{X}_n(t-s))^d(X_n(s))^{k-d},$$

因此

$$\mathrm{Tr}(X_n(t))^k - \mathrm{Tr}(X_n(s))^k = \mathrm{Tr}[(\widetilde{X}_n(t-s))^k] + \sum_{d=1}^{k-1}\binom{k}{d}\mathrm{Tr}[(\widetilde{X}_n(t-s))^d(X_n(s))^{k-d}]. \tag{52}$$

现在，我们计算上述表达式中的每一项。首先，利用迹公式（34），可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}[(\widetilde{X}_n(t-s))^k]\\
&= \frac{1}{n^k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{A_k}\prod_{r=1}^{k}\big\{b_{j_{2r-1}}(t)b_{j_{2r}}(t) - b_{j_{2r-1}}(s)b_{j_{2r}}(s)\big\}I(i,J_p,p,n)\\
&= \frac{1}{n^k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{A_k}\prod_{r=1}^{k}\big\{b_{j_{2r-1}}(t)b_{j_{2r}}(t) - b_{j_{2r-1}}(t)b_{j_{2r}}(s) + b_{j_{2r-1}}(t)b_{j_{2r}}(s) - b_{j_{2r-1}}(s)b_{j_{2r}}(s)\big\}I(i,J_k,p,n)\\
&= \frac{1}{n^k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{A_k}\prod_{r=1}^{k}\big[b_{j_{2r-1}}(t)\big\{b_{j_{2r}}(t) - b_{j_{2r}}(s)\big\} + \big\{b_{j_{2r-1}}(t) - b_{j_{2r-1}}(s)\big\}b_{j_{2r}}(s)\big]I(i,J_k,p,n)\\
&\overset{D}{\sim} \frac{1}{n^k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{A_k}\prod_{r=1}^{k}\big[\sqrt{t}y_{j_{2r-1}}\sqrt{t-s}x_{j_{2r}} + \sqrt{t-s}x_{j_{2r-1}}\sqrt{s}y_{j_{2r}}\big]I(i,J_k,p,n)\\
&= \frac{(t-s)^{\frac{k}{2}}}{n^k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{A_k}\prod_{r=1}^{k}\big\{\sqrt{t}y_{j_{2r-1}}x_{j_{2r}} + \sqrt{s}x_{j_{2r-1}}y_{j_{2r}}\big\}I(i,J_k,p,n),
\end{aligned}\tag{53}$$

其中，记号 $x_1 \overset{D}{\sim} x_2$ 表示 x_1 和 x_2 具有相同的分布，并且对于任意 $j\in\mathbb{N}$ 和 $t,\ s\in(0,T)$，

$$b_j(t-s) \overset{D}{\sim} (\sqrt{t-s})x_j,\ b_j(s) \overset{D}{\sim} \sqrt{s}y_j \text{ and } b_j(t) \overset{D}{\sim} \sqrt{t}y_j.$$

由于 $\{b_j(t);\ t\geq 0\}$ 是布朗运动，$\{x_j\}$ 和 $\{y_j\}$ 是相互独立的正态随机变量，其均值为零，方差为 1，且其他各阶矩有限。

同样，利用迹公式（34），我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}[(\widetilde{X}_n(t-s))^d(X_n(s))^{k-d}]\\
&= \frac{1}{n^k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{A_k}\prod_{r=1}^{k-d}(b_{j_{2r-1}}(s)b_{j_{2r}}(s)\prod_{r=(k-d)+1}^{k}\big\{b_{j_{2r-1}}(t)b_{j_{2r}}(t) - b_{j_{2r-1}}(s)b_{j_{2r}}(s)\big\}I(i,J_k,p,n)\\
&\overset{D}{\sim} \frac{(t-s)^{\frac{d}{2}}}{n^k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{A_k}\prod_{r=1}^{k-d}(s)^{\frac{k-d}{2}}y_{j_{2r-1}}y_{j_{2r}}\prod_{r=(k-d)+1}^{k}\big\{\sqrt{t}y_{j_{2r-1}}x_{j_{2r}} + \sqrt{s}x_{j_{2r-1}}y_{j_{2r}}\big\}I(i,J_k,p,n).
\end{aligned}\tag{54}$$

现在将（53）和（54）代入（52），得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(X_n(t))^k - \mathrm{Tr}(X_n(s))^k \\
&\overset{D}{\sim} \frac{1}{n^k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{A_k}\Big((t-s)^{\frac{k}{2}}\prod_{r=1}^{k}\{\sqrt{t}y_{j_{2r-1}}x_{j_{2r}}+\sqrt{s}x_{j_{2r-1}}y_{j_{2r}}\} \\
&\quad+\sum_{d=1}^{k-1}(t-s)^{\frac{d}{2}}\prod_{r=1}^{k-d}(s)^{\frac{k-d}{2}}y_{j_{2r-1}}y_{j_{2r}}\prod_{r=(k-d)+1}^{k}\{\sqrt{t}y_{j_{2r-1}}x_{j_{2r}}+\sqrt{s}x_{j_{2r-1}}y_{j_{2r}}\}\Big)I(i,J_k,p,n) \\
&=\frac{\sqrt{t-s}}{n^k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{A_k}\Big((t-s)^{\frac{k-1}{2}}\prod_{r=1}^{k}\{\sqrt{t}y_{j_{2r-1}}x_{j_{2r}}+\sqrt{s}x_{j_{2r-1}}y_{j_{2r}}\} \\
&\quad+\sum_{d=1}^{k-1}(t-s)^{\frac{d-1}{2}}\prod_{r=1}^{k-d}(s)^{\frac{k-d}{2}}y_{j_{2r-1}}y_{j_{2r}}\prod_{r=(k-d)+1}^{k}\{\sqrt{t}y_{j_{2r-1}}x_{j_{2r}}+\sqrt{s}x_{j_{2r-1}}y_{j_{2r}}\}\Big)I(i,J_k,p,n) \\
&=\frac{\sqrt{t-s}}{n^k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{A_k}Z_{J_k}I(i,J_k,p,n),\ \text{say.}
\end{aligned}
\tag{55}
$$

最后，将（55）代入（51），得到

$$
w_k(t)-w_k(s)\overset{D}{\sim}\frac{\sqrt{t-s}}{n^{k+\frac{1}{2}}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{A_k}(Z_{J_k}-\mathrm{E}[Z_{J_k}])I(i,J_k,p,n),
$$

因此♀♀♀♀
♀♀

$$
\mathrm{E}[w_k(t)-w_k(s)]^4=\frac{(t-s)^2}{n^{4k+2}}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{n}\sum_{A_k,A_k,A_k,A_k}\mathrm{E}\Big[\prod_{m=1}^{4}(Z_{J_k^m}-\mathrm{E}Z_{J_k^m})I(i_m,J_k^m,p,n)\Big], \tag{56}
$$

其中，J_k^m是来自 A_k的向量，对于每个 $m=1$、2、3、4。根据 J_k^m之间的连通性，会出现以下三种情况：

情形 I. $\{J_k^m:\ m=1$、2、3、$4\}$ 中至少有一个与其余各项不连通：在这种情况下，由于各项的独立性，我们得到

$$
\mathrm{E}\Big[\prod_{m=1}^{4}(Z_{J_k^m}-\mathrm{E}Z_{J_k^m})\Big]=0.
$$

因此，在这种情况下，对 $\mathrm{E}[w_p(t)-w_p(s)]^4$ 的贡献为零。

情形 II. J_k^1只与其中一个 J_k^2,J_k^3,J_k^4相连，而剩下的两个 J_k^2,J_k^3,J_k^4仅彼此相连：不失一般性，假设 J_k^1 与 J_k^2 相连，且 J_k^3 与 J_k^4相连。在这种情况下，(56)右侧的项可写为

$$
\begin{aligned}
&\frac{(t-s)^2}{n^{4k+2}}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{n}\sum_{A_k,A_k}\mathrm{E}\Big[\prod_{m=1}^{2}(Z_{J_k^m}-\mathrm{E}Z_{J_k^m})I(i_m,J_k^m,p,n)\Big]\sum_{A_k,A_k}\mathrm{E}\Big[\prod_{m=3}^{4}(Z_{J_k^m}-\mathrm{E}Z_{J_k^m})I(i_m,J_k^m,p,n)\Big] \\
&=T_2,\ \text{例如。}
\end{aligned}
\tag{57}
$$

首先注意到

$$
\sum_{A_k,A_k}\mathrm{E}\Big[\prod_{m=1}^{2}(Z_{J_k^m}-\mathrm{E}Z_{J_k^m})\Big]=\sum_{(J_k^1,J_k^2)\in B_{K_2}}\mathrm{E}\Big[\prod_{m=1}^{2}(Z_{J_k^m}-\mathrm{E}Z_{J_k^m})\Big], \tag{58}
$$

其中 B_{K_2} 如引理 16。

由于 x_i、y_i 是正态随机变量，且 t、$s \in [0,T]$，因此存在 $\alpha > 0$，使得对所有的 $(J_k^1, J_k^2) \in B_{K_2}$，

$$\left|\mathrm{E}\Big[\prod_{m=1}^{2}(Z_{J_k^m} - \mathrm{E}Z_{J_k^m})\Big]\prod_{m=1}^{2} I(i_m, J_k^m, p, n)\right| \le \alpha.$$

现在利用上述界，由（58）可得

$$\sum_{A_k, A_k}\left|\mathrm{E}\Big[\prod_{m=1}^{2}(Z_{J_k^m} - \mathrm{E}Z_{J_k^m})\Big]\prod_{m=1}^{2} I(i_m, J_k^m, p, n)\right| \le \sum_{(J_k^1, J_k^2)\in B_{K_2}} \alpha = |B_{K_2}| \times \alpha.$$

注意引理 16 表明 $|B_{K_2}| = O(n^{2k-1})$，因此由上述表达式和（57），

$$|T_2| \le \frac{(t-s)^2}{n^4} \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{n} \alpha^2 O(1) = (t-s)^2\alpha^2 O(1).$$

情形 III。 $\{J_k^1, J_k^2, J_k^3, J_k^4\}$ 形成一个簇：由于 $\mathrm{E}(x_i) = 0$ 且 $\mathrm{E}(y_i) = 0$，在这种情形下我们有

$$\sum_{A_k,A_k,A_k,A_k} \mathrm{E}\Big[\prod_{m=1}^{4}(Z_{J_k^m} - \mathrm{E}Z_{J_k^m})\Big] = \sum_{(J_k^1,J_k^2,J_k^3,J_k^4)\in B_{K_4}} \mathrm{E}\Big[\prod_{m=1}^{4}(Z_{J_k^m} - \mathrm{E}Z_{J_k^m})\Big], \tag{59}$$

其中 B_{K_4} 与引理 16 中对 $\ell = 4$ 和 $k_i = k$，$i = 1$，2，3，4 中的情况相同。再次采用情形 II 中给出的类似论证，可得存在 $\beta > 0$，使得对每个 $(J_k^1,\ J_k^2,\ J_k^3,\ J_k^4) \in B_{K_4}$，

$$\left|\mathrm{E}\Big[\prod_{m=1}^{4}(Z_{J_k^m} - \mathrm{E}Z_{J_k^m})\Big] I(i_m, J_k^m, p, n)\right| \le \beta.$$

利用上述不等式，由（59）可得

$$\sum_{A_k,A_k,A_k,A_k}\left|\mathrm{E}\Big[\prod_{m=1}^{4}(Z_{J_k^m} - \mathrm{E}Z_{J_k^m})\Big] I(i_m, J_k^m, p, n)\right| \le \sum_{(J_k^1,J_k^2,J_k^3,J_k^4)\in B_{K_4}} \beta = |B_{K_4}| \times \beta.$$

回顾引理 16 可知 $|B_{K_4}| = o((n+p)^{4k-2})$。对于 $p, n \to \infty$ 和 $p/n \to \lambda > 0$，我们得到

$$\frac{(t-s)^2}{n^{4k+2}} \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{n} \sum_{A_k,A_k,A_k,A_k}\left|\mathrm{E}\Big[\prod_{m=1}^{4}(Z_{J_k^m} - \mathrm{E}Z_{J_k^m})\Big] I(i_m, J_k^m, p, n)\right| = (t-s)^2 o(1).$$

综合这三种情况，我们得到存在一个正数常量 M_T，它仅依赖于p, T，使得

$$\mathrm{E}[w_k(t) - w_k(s)]^4 \le M_T(t-s)^2 \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ and } t, s \in [0,\ T].$$

这就完成了命题 23 的证明，其中 $\alpha = 4$ 和 $\beta = 1$。 ■

4.2. 的波动 $T_{n\times p}(t)$ ，其中对角线元素非零。 在定理3中，我们考虑了 $b_0(t) \equiv 0$。现在我们讨论非零连续随机过程 $b_0(t)$ 的涨落行为。首先，定义如下概念：

设 $\{b_0(t); t \geq 0\}$ 是一个非零连续随机过程，且与布朗运动序列 $\{b_m(t);\ t \geq 0, m \geq 1\}$ 相互独立。对于 $k \geq 1$，我们定义：

$$\tilde{T}_{n\times p}(t) := T_{n\times p}(t) + \frac{b_0(t)}{\sqrt{n}} I_{n\times p},$$
$$\tilde{w}_k(t) := \frac{1}{\sqrt{n}}\big[\mathrm{Tr}\big\{\tilde{T}_{n\times p}(t)\tilde{T}'_{n\times p}(t)\big\}^k - \mathrm{E}[\mathrm{Tr}\big\{\tilde{T}_{n\times p}(t)\tilde{T}'_{n\times p}(t)\big\}^k]\big],$$

其中 $T_{n\times p}(t)$ 是一个托普利兹矩阵，其元素为 $\{\frac{b_{m(t)}}{\sqrt{n}}\}_{m\geq 0}$，且对角线元素为零（$b_0(t) \equiv 0$）。那么，对每个 $k \geq 1$，当 $n, p \to \infty$ 且 $p/n \to \lambda > 0$ 时，我们有以下结果：

定理 24。（i）对于 $k \geq 1$、$r \geq 1$ 和 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_r$、$n$、$p \to \infty$ 和 $p/n \to \lambda > 0$，我们有

$$(\tilde{w}_k(t_1), \ldots, \tilde{w}_k(t_r)) \xrightarrow{d} (\tilde{N}_k(t_1), \ldots, \tilde{N}_k(t_r)),$$

其中

$$\tilde{N}_k(t) = N_k(t) + kt^{k/2} M_{k-1} b_0(t), \tag{60}$$

其中 $\{N_k(t);\ k \geq 1\}$ 如定理 3 所示，且 $M_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathrm{E}\big[\mathrm{Tr}\big(\tilde{T}_{n\times p}(1)\,\tilde{T}'_{n\times p}(1)\big)^k\big]$，如~定理 11所给出。注意，只有当 $b_0(t)$ 为高斯变量且与$\{b_m(t)\}_{m\geq 1}$独立时，$N_k(t)$ 才是高斯变量。

(ii) 只有当 $b_0(t)$ 是布朗运动，且独立于 $\{b_m(t)\}_{m\geq 1}$ 时，过程 $\{\tilde{w}_k(t); t \geq 0\}$ 才具有紧性。

关于定理 24 的证明，请参阅定理 3 的证明。也可参见 [26] 中定理 4 的证明。注意，在定理 24 (ii) 中，如果 $b_0(t)$ 不是布朗运动，那么 $\{\tilde{w}_k(t); t \geq 0\}$ 不具有紧性。详情请参见 [26] 中定理 4 的证明。因此，只有当 $b_0(t)$ 是独立于 $\{b_m(t)\}_{m\geq 1}$ 的布朗运动时，$\{\tilde{w}_k(t); t \geq 0\}$ 才具有过程收敛性；在这种情况下，极限为 $\{N_k(t); t \geq 0\}$。

5. 非对称托普利兹矩阵

本节考虑非对称托普利兹矩阵，并研究其线性特征值统计量。

5.1. 极限矩序列： 下面的定理给出了非对称托普利兹矩阵 $T_{n\times p}$ 的 $\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(T_{n\times p}T'_{n\times p})^r\right]$ 的极限序列。

定理 25. 设 $\lambda \in (0, \infty)$ 和 $X_n = T_{n\times p}T'_{n\times p}$，其中 $T_{n\times p}$ 是具有输入序列 $\{\frac{a_i}{\sqrt{n}}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 的 $n\times p$ 非对称托普利兹矩阵，$\{a_i\}_{|i|\geq 1}$ 满足假设 I，且 $a_0 \equiv 0$。则对于 $r \geq 1$，当 n、$p \to \infty$、$p/n \to \lambda$ 时，$\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Tr}X_n^r\right] = M'_r + o(1/\sqrt{n})$，其中

$$M'_r = \sum_{\pi\in\mathcal{DP}_2(2r)} \int_{[0,1]\times[-\lambda,1]^r} \prod_{s=1}^{r} \chi_{[0,\lambda]}\left(x_0 - \sum_{\ell=i}^{2s-1} \epsilon_\pi(i) x_{\pi(i)}\right) \chi_{[0,1]}\left(x_0 - \sum_{i=1}^{2s} \epsilon_\pi(i) x_{\pi(i)}\right) \prod_{l=0}^{r} \mathrm{d}x_l, \tag{61}$$

其中 $\mathcal{DP}_2(2r)$ 如定义*9* 所述，且 ϵ_π 如式（*6*）所示。

证明。 该定理的证明与定理 11 的证明类似，这里我们仅提及关键步骤。注意，类似的计算可得

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left(X^r\right)\right]=\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\pi\in\widehat{\mathcal{P}}(2r)}\sum_{J\in\Pi(\pi)}\mathrm{E}\left[a_J\right]I(i,J,p,n)\delta_0(\sum_{q=1}^{2r}(-1)^q j_q), \tag{62}$$

其中， $\widehat{\mathcal{P}}(2r)$表示 $[2r]$ 的所有划分的集合，且每个块的大小均大于或等于二； $\Pi(\pi)$表示所有 $J=(j_1,j_2,\ldots,j_{2r})\in\{-(p-1)\ldots,-1,1,\ldots,(n-1)\}^{2r}$的集合，其中 $r\sim_\pi s$ 当且仅当 $j_r=j_s$。通过类似于定理 11证明中的论证可知，极限中的非零贡献仅来自二元划分 π。假设 π 包含一个同奇偶性块，例如 $\{u,v\}$ ，并令 $J\in\Pi(\pi)$。则 $(-1)^u j_u=(-1)^v j_v$ ，因此一旦除 j_u、 j_v之外的所有 j_q均选定，(62) 非零当且仅当 $(-1)^u j_u=-\frac{1}{2}\sum_{q=1;\ q\neq r,\ s}^{2r}(-1)^q j_q$。于是， j_u 由其他 j_q's确定，因此使 (62) 非零的 $J\in\Pi(\pi)$的选择数量为 $O(n^{r-1})$的阶。故只有当 $\pi\in\mathcal{DP}_2(2r)$时，阶为 $O(1)$的贡献才会出现在极限中，而其余项的贡献为 $o(1/\sqrt{n})$的阶。这就完成了定理 25 的证明。■

5.2. 独立元素的波动：下述定理给出了 $T_{n\times p}T'_{n\times p}$的线性特征值统计量的波动。

定理26. 设 $\lambda\in(0,\infty)$，且 $T_{n\times p}$ 是输入元素为$\{\frac{a_i}{\sqrt{n}}\}_{i\in\mathbb{Z}}$的 $n\times p$ 非对称托普利兹矩阵，其中 $\{a_i\}_{|i|\geq 1}$满足假设 I，且 $a_0\equiv 0$。那么当 n时， $p\to\infty$ 满足$p/n\to\lambda$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\big[TrQ(T_{n\times p}T'_{n\times p})-E[TrQ(T_{n\times p}T'_{n\times p})]\big]\xrightarrow{d}N(0,\widehat{\sigma}_Q^2),$$

其中 $Q(x)=\sum_{j=0}^{k}c_j x^j$是次数为 $k\geq 1$的实多项式，且$\widehat{\sigma}_Q^2=\sum_{j_1,\ j_2=0}^{k}c_{j_1}c_{j_2}\widehat{\sigma}_{j_1,\ j_2}$满足

$$\widehat{\sigma}_{j_1,j_2}=\sum_{\pi\in\mathcal{DP}_2(2j_1,2j_2)}f_I^-(\pi)+(\kappa-1)\sum_{\pi\in\mathcal{DP}_{2,4}(2j_1,2j_2)}f_{II}^-(\pi), \tag{63}$$

其中 $\mathcal{DP}_2(2j_1,\ 2j_2)$， $\mathcal{DP}_{2,\ 4}(2j_1,\ 2j_2)$如定义9所给出， $f_I^-(\pi)$和 $f_{II}^-(\pi)$分别是式(8)和式(11)中给出的积分。

定理的证明 26 与定理的证明 1类似，此处略去证明。

5.3. 时变元素的波动：

定理 27. 令 $k\geq 1$ 和 $\lambda\in(0,\infty)$。假设 $w_k(t)$ 如（4）所示，为非对称托普利兹矩阵 $T_{n\times p}(t)$，其非对角线元素为布朗运动，对角线元素为零。当 $n,p\to\infty$ 且 $p/n\to\lambda$,

$$\{w_k(t);t\geq 0\}\xrightarrow{\mathcal{D}}\{N_k(t);t\geq 0\},$$

其中 $\{N_k(t);\ t\geq 0,k\geq 1\}$是零均值高斯过程，其协方差结构如下：对于$t_1\leq t_2$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}(N_{k_1}(t_1),N_{k_2}(t_2))\\&=\sum_{r=1}^{k_2}\binom{2k_2}{2r}t_1^{k_1+r}(t_2-t_1)^{k_2-r}\Big[\sum_{\substack{\pi=(\pi_1,\pi_2)\in\mathcal{DP}_2(2k_1,2r)\\ \times\mathcal{DP}_2(2k_2-2r)}}f_I^-(\pi)+2\sum_{\substack{\pi=(\pi_1,\pi_2)\in\mathcal{DP}_{2,4}(2k_1,2r)\\ \times\mathcal{DP}_2(2k_2-2r)}}f_{II}^-(\pi)\Big],\end{aligned}$$

其中， $f_I^-(\pi)$ 和 $f_{II}^-(\pi)$ 分别如式 (8) 和 (11) 所示； $\mathcal{DP}_2(2k_1,2r)$、 $\mathcal{DP}_2(2k_2-2r)$ 和 $\mathcal{DP}_{2,4}(2k_1,2r)$ 如定义 9 所示，其中概念 $(\pi_1,\pi_2)\in\mathcal{DP}_2(2k_1,2r)\times\mathcal{DP}_2(2k_2-2r)$ 如定义 20 所示。

第 i 定理证明的思路27 与定理证明的思路3类似，这里略去证明 .

注28。 在定理 26 和定理 27中，我们考虑了对角元为零的非对称托普利兹矩阵。对于对角元非零的非对称托普利兹矩阵，可以得出与定理 18 和定理24类似的结果。

6. 厄米托普利兹矩阵

本节中，我们考虑厄米托普利兹矩阵。我们研究 $T_{n\times p}T_{n\times p}^*$的线性特征值统计量的涨落，其中 $T_{n\times p}$是一个厄米托普利兹矩阵， $T_{n\times p}^*$表示 $T_{n\times p}$的伴随矩阵。

给定输入序列 $\{a_i\}_{i\geq 0}$，我们通过对所有 $i\in\mathbb{N}$定义 $a_{-i}=a_i$，构造一个厄米托普利兹矩阵。我们对输入序列作如下假设。

假设 II。设 $\{a_j = x_j + \mathrm{i}y_j; j\geq 0\}$ 为一列复随机变量，其中$\{(x_j,y_j);\ j\in\mathbb{N}\}$ 为一列均值为 0 的独立实随机变量。此外，对于所有$j\in\mathbb{N}$,

$$\mathrm{E}(x_j^2)=\mathrm{E}(y_j^2)=\frac{1}{2},\ \mathrm{E}(|a_j|^4)=\kappa \text{ and } \sup_j\{\mathrm{E}(|x_j|^k),\mathrm{E}(|y_j|^k)\}\leq c_k<\infty,\quad \text{for all}\quad k\geq 1.$$

我们首先介绍当 $T_{n\times p}^{(r)}$ 是厄米托普利茨矩阵时， $T_{n\times p}^{(r)}(T_{(r)\,n\times p})^*$ 的迹公式。

引理29. 假设 $T_{n\times p}^{(r)}$ 是具有复数输入序列 $\{a_i^r\}_{i\in\mathbb{Z}}$ （$r=1$，2，...，k）的 $n\times p$ 托普利兹矩阵。令 $X^{(r)}=T_{n\times p}^{(r)}(T_{(r)\,n\times p})^*$。那么

$$Tr(X^{(k)}\cdots X^{(1)})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1,\ldots,j_{2k}=-(p-1)}^{n-1}\prod_{r=1}^{k}\overline{a}_{j_{2r-1}}^{(r)}a_{j_{2r}}^{(r)}I(i,J_k,p,n)\delta_0(\sum_{q=1}^{2k}(-1)^q j_q),$$

其中 $J=(j_1,j_2,\ldots,j_{2k})$ 和 $I(i,J,p,n)$ 的定义与（*14*）中相同。

引理 29的证明可参见引理 10的证明。下述定理给出了 $\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(T_{n\times p}T_{n\times p}^*)^r\right]$的极限序列。

定理 30. 设 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是满足假设 II 且 $a_0\equiv 0$的复随机变量序列。假设 $X=T_{n\times p}T_{n\times p}^*$ 且 $T_{n\times p}$ 是具有输入元素 $n\times p$ 的厄米托普利茨矩阵，其中 $\{\frac{a_i}{\sqrt{n}}\}_{i\geq 0}$且 $a_{-i}=\overline{a}_i$对所有 $i\in\mathbb{N}$均成立。那么，对所有 $r\geq 1$， $\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}TrX^r\right]=M_r+o(1/\sqrt{n})$ 当$p/n\to\lambda>0$时， $n\to\infty$，其中 M_r 的定义见式（*16*）。

证明。 定理 30 的证明与定理 11的证明类似。注意到，类似的计算以及引理 29 可推出

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left(X^r\right)\right]=\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\pi\in\widehat{\mathcal{P}}(2r)}\sum_{J\in\Pi(\pi)}\mathrm{E}\left[\widehat{a_J}\right]I(i,J,p,n)\delta_0(\sum_{q=1}^{2r}(-1)^q j_q),\tag{64}$$

其中， $\mathcal{P}(2r)$ 是 $[2r]$ 的划分集合，其中每个块的大小都大于或等于二； $\Pi(\pi)$ 是 $J=(j_1,j_2,\ldots,j_{2r})\in\{-(p-1)\ldots,-1,1,\ldots,(n-1)\}^{2r}$ 的集合，使得对于所有 $r\sim_\pi s$，当且仅当 $|j_r|=|j_s|$时，$\widehat{a_J}=\prod_{u=1}^{r}\overline{a}_{j_{2u-1}}a_{j_{2u}}$。由此可知，只有二元划分 π 才会在极限中产生非零贡献。此外，对于二元划分 $\pi\in\mathcal{P}_2(2r)$，只有在以下情况下才会在极限中产生非零贡献:

$$\Pi_1(\pi)=\{J\in\Pi(\pi):\ \text{for all } u\sim_\pi v,\ \epsilon_\pi(u)j_u=\epsilon_\pi(v)j_v\}.$$

设 $\{u,v\}$ 是 π 的一个同奇偶性块，且 $J\in\Pi_1(\pi)$，那么根据 $\Pi_1(\pi)$ 的定义可得 $j_u=-j_v$，进而 $\mathrm{E}[a_{j_u}a_{j_v}]=1$ 和 $\mathrm{E}[\overline{a}_{j_u}\overline{a}_{j_v}]=1$。类似地，对于一个不同奇偶性

块 $\{r,s\}$，其属于 π，且 $J\in\Pi_1(\pi)$，我们得到 $\mathrm{E}[a_{j_u}\overline{a}_{j_v}]=1$ 和 $\mathrm{E}[a_{j_u}\overline{a}_{j_v}]=1$。因此，对于每个 $\pi\in\mathcal{P}_2(\pi)$ 和 $J\in\Pi_1(\pi)$，都有 $\mathrm{E}[\widehat{a_J}]=1$，并且 $\sum_{q=1}^{2r}(-1)^q j_q=0$。所以 (64) 等于 (20)，且由于 $n\to\infty$，$p/n\to\lambda$，$\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\,(X^r)\right]$ 对所有 $r\geq 1$ 都收敛到 M_r。■

下面的定理给出了当$T_{n\times p}$ 为厄米托普利茨矩阵时， $T_{n\times p}T_{n\times p}^*$ 的线性特征值统计量的波动。

定理31. 设 $\lambda\in(0,\infty)$。假设 $T_{n\times p}$ 是一个 $n\times p$ 复厄米托普利茨矩阵，其输入元素为$\{\frac{a_i}{\sqrt{n}}\}_{i\geq 0}$，其中 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足假设 II，且 $a_0\equiv 0$。那么，当 n时， $p\to\infty$ 且$p/n\to\lambda$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\big[TrQ(T_{n\times p}T_{n\times p}^*)-E[TrQ(T_{n\times p}T_{n\times p}^*)]\big]\xrightarrow{d}N(0,\sigma_Q^2),$$

其中 $Q(x)=\sum_{j=0}^k c_j x^j$ 是一个次数为 $k\geq 1$ 的实多项式，且$\sigma_Q^2=\sum_{j_1,\ j_2=0}^k c_{j_1}c_{j_2}\sigma_{j_1,\ j_2}$ wit h

$$\sigma_{j_1,j_2}=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(2k_1,2k_2)}f_I^-(\pi)+(\kappa-1)\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{2,4}(2k_1,2k_2)}(f_{II}^-(\pi)+f_{II}^+(\pi)),\tag{65}$$

其中 $f_I^-(\pi)$ $f_{II}^-(\pi)$和 $f_{II}^+(\pi)$分别如式（*8*）、（*11*）和（*12*）所示。

证明。 证明方法与定理 13 的证明类似，这里只说明证明中的不同之处。这里的关键区别在于，对所有 $a_j^2=0$， j。定义

$$w_k^*:=\frac{1}{\sqrt{n}}\big[\mathrm{Tr}(T_{n\times p}T_{n\times p}^*)^k-\mathrm{E}[\mathrm{Tr}(T_{n\times p}T_{n\times p}^*)^k]\big].$$

根据引理 29，协方差结构可表示为

$$\mathrm{Cov}(w_{k_1}^*,w_{k_2}^*)=\frac{1}{n^{k_1+k_2+1}}\sum_{\pi\in\widehat{\mathcal{P}}(2k_1+2k_2)}\sum_{\substack{i=1\\ i'=1}}^{n}|\Pi(\pi)|V(\pi),\tag{66}$$

其中

$$V(\pi)=\Big[\mathrm{E}\Big(\prod_{r=1}^{k_1+k_2}\overline{a}_{j_{2r-1}}a_{j_{2r}}\Big)-\mathrm{E}\Big(\prod_{r=1}^{k_1}\overline{a}_{j_{2r-1}}a_{j_{2r}}\Big)\mathrm{E}\Big(\prod_{r=k_2+1}^{k_2}\overline{a}_{j_{2r-1}}a_{j_{2r}}\Big)\Big]g(i,i',J_1,J_2,p,n),$$

其中$g(i,\ i',\ J_1,\ J_2,\ p,\ n)$ 如式（26）所示，而 $\mathcal{P}(2k_1+2k_2)$ 是 $[2k_1+2k_2]$的所有划分的集合，其中每个块的大小至少为 2。现在，我们来找出在式（66）的极限中产生非零贡献的划分 π。与定理 13 中一样，划分 π 满足 $|\pi|<k_1+k_2-1$ 所产生的贡献为 $o(1)$。

对于 $|\pi|=k_1+k_2-1$，可知极限中的非零贡献来自 $\pi\in\mathcal{P}_2$,4$(2k_1+2k_2)$。此外，对于$\pi\in\mathcal{P}_2$, 4$(2k_1+2k_2)$ 和 $J\in\Pi(\pi)$，只有当 J 属于 $\Pi_1(\pi)$ 或 $\Pi_2(\pi)$ 时，才会产生非零贡献，其中 $\Pi_1(\pi)$ 和 Π_2 (π) 的定义见式（32）。考虑一个属于 $\Pi_1(\pi)$ 或 $\Pi_2(\pi)$ 的向量 J。对于 π 的同奇偶性块 $\{r,s\}$，根据 ϵ_π 的定义，可得 $j_r=-j_s$，因此 $\overline{a}_{j_r}=a_{j_s}$。类似地，对于 π 的不同奇偶性块$\{r,s\}$，可得 $a_{j_r}=a_{j_s}$ 和 $\overline{a}_{j_r}=\overline{a}_{j_s}$。以同样的方式继续推导，可得 π 的一个块$\{r_1,s_1,r_2,s_2\}$ 在 E $\left(\prod_{r=1}^{2k_1+2k_2}\overline{a}_{j_{2r-1}}a_{j_{2r}}\right)$ 中对应的乘积为 κ。因此，对于 $n\to\infty$ 和 $p/n\to\lambda$， π 的贡献为 $(\kappa-1)(f_{II}^-$ $(\pi)+f_{II}^+(\pi))$。

对于成对划分 π，由于 $\mathrm{E}a_j^2=0$，只有当对所有 $r\sim_\pi s$，$a_{j_r}=\overline{a}_{j_s}$，即 $j_r=-j_s$ 时， $\pi\in\mathcal{P}_2$ $(2k_1,2k_2)$ 才有非零贡献，当且仅当 $(J_1,J_2)\in\Pi(\pi)$ 满足 (33)。因此，此时的贡献为 $f_I^-(\pi)$，证明至此完成。■

现在我们考虑元素为复布朗运动的厄米托普利兹矩阵。首先，我们给出复布朗运动的定义。若复值随机过程 $\{Z(t); t \geq 0\}$ 可以写成

$$Z(t) = X(t) + \mathrm{i}Y(t),$$

其中 $\{X(t)$和 $t \geq 0\}$ 以及 $\{Y(t)$、 $t \geq 0\}$ 是相互独立的实布朗运动。令 $\{Z_m(t)$、 $t \geq 0\}_{m\geq 0}$ 为相互独立的复布朗运动序列。以下定理给出了具有复布朗运动元素的厄米托普利茨矩阵的 $T_{n\times p}(t)$ $T^*_{n\times p}(t)$的线性特征值统计量的波动。

定理32。设 $\lambda \in (0,\infty)$ 和 $\{Z_m(t)$； $t \geq 0\}_{m\geq 0}$ 是一列相互独立的复布朗运动，其 $Z_0(t) = 0$。假设厄米托普利茨矩阵 $T_{n\times p}(t)$ 的元素为$\{ Z_m(t)\sqrt{n}$； $t \geq 0\}_{m\geq 0}$。那么对于 $k \geq 1$，当 n 时，$p \to \infty$ 且 $p/n \to \lambda$,

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\left[Tr(T_{n\times p}(t)T^*_{n\times p}(t)) - E\left[Tr(T_{n\times p}(t)T^*_{n\times p}(t))\right]\right]; t \geq 0\right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{N_k(t); t \geq 0\},$$

其中 $\{N_k(t)$； $t \geq 0$、 $k \geq 1\}$ 是均值为零的高斯过程，其协方差结构如下：对于 $t_1 \leq t_2$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(N_{k_1}(t_1), N_{k_2}(t_2)) \\
&= \sum_{r=1}^{k_2} \binom{2k_2}{2r} t_1^{k_1+r}(t_2-t_1)^{k_2-r}\Big[\sum_{\substack{(\pi_1,\pi_2)\in \mathcal{P}_2(2k_1,2r) \\ \times \mathcal{P}_2(2k_2-2r)}} f_I^-(\pi) + 2 \sum_{\substack{(\pi_1,\pi_2)\in \mathcal{P}_{2,4}(2k_1,2r) \\ \times \mathcal{P}_2(2k_2-2r)}} (f_{II}^-(\pi) + f_{II}^+(\pi))\Big].
\end{aligned}$$

此处 $f_I^-(\pi)$ $f_{II}^-(\pi)$和 $f_{II}^+(\pi)$分别如式（*8*）、（*11*）和（*12*）所示，其中 (π_1,π_2) $\in \mathcal{SP}_2(2k_1,2r)$ $\times \mathcal{SP}_2(2(k_2-r))$ 如定义 *20*所述。

注 33。 在定理 31 和定理32中，我们考虑了对角线元素为零的厄米托普利兹矩阵。对于对角线元素非零的厄米托普利兹矩阵，可以得出与定理 18 和定理24类似的结果。

7. 随机 Toeplitz 矩阵的 Schatten r-范数

对于一个 $n \times p$ 矩阵 A 和 $1 \leq r < \infty$， r-Schatten 范数定义为

$$||A||_r := \left(\mathrm{Tr}(AA^*)^{r/2}\right)^{1/r} = \left(\sum_i \sigma_i^r\right)^{1/r},$$

wh其中 σ_i 是矩阵 A的奇异值。由此可得，对于 w_k 如式（2）所定义,

$$w_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(||T_{n\times p}||_{2k}^{2k} - \mathrm{E}||T_{n\times p}||_{2k}^{2k}\right).$$

我们对 $T_{n\times p}T'_{n\times p}$ 的线性特征值统计的研究，得出了关于托普利兹矩阵的 r-Schatten 范数的以下结果。

定理34。设 $\lambda \in (0,\infty)$，且 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是满足 $a_0 \equiv 0$ 的随机变量序列。令 $r \in \mathbb{N}$，并假设 p、$n \to \infty$ 和 $p/n \to \lambda$。

(i) 对于对称托普利兹矩阵 $T_{n\times p}$，其输入序列为 $\{\frac{a_i}{\sqrt{n}}\}_{i\geq 0}$ 且 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足假设 I，则 $\frac{1}{n^{1/2r}}||T_{n\times p}||_{2r} \to M_r^{1/2r}$依概率收敛，其中 M_r 定义见（*16*）。(ii) 对于非对称托普利兹矩阵 $T_{n\times p}$，其输入序列为 $\{\frac{a_i}{\sqrt{n}}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 且 $\{a_i\}_{|i|\geq 1}$满足假设 I，则 $\frac{1}{n^{1/2r}}||T_{n\times p}||_{2r} \to (M'_r)^{1/2r}$依概率收敛，其中 M'_r定义见（*61*）。

(iii) 对于厄米托普利茨矩阵 $T_{n\times p}$，其输入序列为 $\{\frac{a_i}{\sqrt{n}}\}_{n\geq 0}$ 且 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足假设 II，则 $\frac{1}{n^{1/2r}}||T_{n\times p}||_{2r} \to (M_r)^{1/2r}$依概率收敛，其中 M_r 定义见（16）。

证明。 我们仅给出第（i）部分的证明，其余部分可由类似论证得出。注意，根据定理 11，可得 $\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}||T_{n\times p}||_{2r}^{2r}\right]$ 收敛于 M_r，当 n趋于无穷大时。根据定理 13，可得 $\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left[||T_{n\times p}||_{2r}^{2r} - \mathrm{E}||T_{n\times p}||_{2r}^{2r}\right]$ 当 $n\to\infty$时收敛于零。因此我们得到 $\frac{1}{n}||T_{n\times p}||_{2r}^{2r}$ 依概率收敛于 M_r，对所有 $r\geq 1$均成立，从而得出所需结果。■

下面的定理描述了 $T_{n\times p}$ 的 Schatten 范数的涨落行为 .

定理 35。设 $\lambda\in(0,\infty)$ 且 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是一列随机变量，满足 $a_0\equiv 0$。令$r\in\mathbb{N}$ 并假设 n、$p\to\infty$ 和 $p/n\to\lambda$。

(i) 对于具有输入序列 $\{\frac{a_i}{\sqrt{n}}\}_{n\geq 0}$ 的对称托普利兹矩阵 $T_{n\times p}$，其中 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足假设 I,

$$\sqrt{n}\left(\frac{||T_{n\times p}||_{2r}}{n^{1/2r}} - M_r^{1/2r}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{4r^2}M_r^{\frac{1}{r}-2}\sigma_{r,r}\right),$$

其中 M_r 的定义见（16），且 $\sigma_{r,\,r}$ 如（3）所示。

(ii) 对于非对称托普利兹矩阵 $T_{n\times p}$，其输入序列 $\{\frac{a_i}{\sqrt{n}}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 满足 $\{a_i\}_{|i|\geq 1}$，遵循假设 I,

$$\sqrt{n}\left(\frac{||T_{n\times p}||_{2r}}{n^{1/2r}} - {M'_r}^{1/2r}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{4r^2}{M'_r}^{\frac{1}{2r}-1}\widehat{\sigma}_{r,r}\right),$$

其中 M'_r 定义如（61）所示，且$\widehat{\sigma}_{r,\,r}$ 如（63）所示。

(iii) 对于厄米托普利茨矩阵 $T_{n\times p}$，其输入序列 $\{\frac{a_i}{\sqrt{n}}\}_{n\geq 0}$ 满足 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 遵循假设 II,

$$\sqrt{n}\left(\frac{||T_{n\times p}||_{2r}}{n^{1/2r}} - M_r^{1/2r}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{4r^2}M_r^{\frac{1}{r}-2}\sigma_{r,r}\right),$$

其中 M_r 如（16）中所定义，且 $\sigma_{r,\,r}$ 如（65）中所示。

证明。 我们仅证明（i）这一部分。其余情况可通过类似的论证得到。注意到定理 11 表明 $\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\mathrm{E}||T_{n\times p}||_{2r}^{2r} - M_r\right)$ 收敛于 0。因此，由定理 1，可得

$$\sqrt{n}\left(\frac{||T_{n\times p}||_{2r}^{2r}}{n} - M_r\right)$$

依分布收敛于均值为零、方差为$\sigma_{r,\,r}$。由备注12可知， M_r 对所有 r都严格大于零。对函数$g(x) = x^{1/2r}$ 应用 Delta 方法即可得到所需结果。■

致谢：S.N. Maurya 的研究工作得到了以下基金的资助：NBHM 博士后研究奖学金（批准编号：0204/10/(25)/2023/R&D-II/2803）。本研究的部分工作是在其访问 IISER Bhopal 期间完成的（由 DST/INSPIRE/04/2020/000579 资助）。

作者声明：作者没有需要披露的利益冲突。

数据可用性：由于本研究未创建或分析任何新数据，因此本文不适用数据共享。

References

[1] Kiran Kumar A. S. 和 Shambhu Nath Maurya, *Asymptotic behaviour of linear eigenvalue statistics of Hankel matrices* **181** 2022 109273 4334692 , 《统计与概率快报》 (), 论文编号: 。MR [2] Kartick Adhikari 和 Koushik Saha, *Universality in the fluctuation of eigenvalues of random circulant matrices*, 《统计与概率快报》 **138** 2018 1 8 3788711 (), –。MR L. V. Arharov, [3] *Limit theorems for the characteristic roots of a sample covariance matrix*, 《苏联科学院院刊》 **199** 1971 994 997 0309171 (), –。MR Yasaman Bahri、Jonathan Kadmon、Jeffrey Pennington、Sam S. Schoenholz、Jascha Sohl-Dickstein 和 Surya Ganguli, [4] *Statistical mechanics of deep learning* **11** 2020 1, , 《凝聚态物理年度评论》 (), 501–528。第–期。[5] Z. D. Bai 和 Jack W. Silverstein, *CLT for linear spectral statistics of large-dimensional sample covariance matrices* **32** 2004 1 553 605 2040792 , 《概率年刊》 (), 第A期, –。MR[6] Zhidong Bai、Dandan Jiang、Jian-Feng Yao 和 Shurong Zheng, *Corrections to LRT on large-dimensional covariance matrix by RMT* **37** 2009 6 3822 3840 2572444 , 《统计年刊》 (), 第B期, –。MR[7] Zhidong Bai、Dandan Jiang、Jian-feng Yao 和 Shurong Zheng, *Testing linear hypotheses in high-dimensional regressions* **47** 2013 6, 1207 1223 3175743 , 《统计学》 (), 第–期。MR[8] Zhidong Bai 和 Wang Zhou, *Large sample covariance matrices without independence structures in columns*, 《中华统计学志》18（2008）, 第2期, 425–442。MR 2411613[9] Zhigang Bao、Liang-Ching Lin、Guangming Pan 和 Wang Zhou, *Spectral statistics of large dimensional Spearman's rank correlation matrix and its application* **43** 2015 6, 2588 2623 , 《统计年刊》 (), 第–期。3405605 MR [10] *Testing for independence of large dimensional vectors* Taras Bodnar、Holger Dette 和 Nestor Parolya, , 《统计年刊》 **47** 2019 5, 2977 3008 3988779 (), 第–期。MR Arup Bose、Sreela Gangopadhyay 和 Arnab Sen, *Limiting spectral distribution of XX' matrices*, 《亨利·庞加莱概率与统计研究所年刊》46（2010）, 第3期, 677–707。MR 2682263[12] Arup Bose、Shambhu Nath Maurya 和 Koushik Saha, [11] *Process convergence of fluctuations of linear eigenvalue statistics of random circulant matrices* **10** 2021 4, , 《随机矩阵: 理论与应用》 (), 论文编号: 2150032, 32 4379537。MR [13] Arup Bose 和 Arnab Sen, *Spectral norm of random large dimensional noncentral Toeplitz and Hankel matrices*, 《电子通信概率学》 **12** 2007 29 35, 21 27 2284045 (), –。期刊网站上的页码已更改为 -。MR Arup Bose 和 Priyanka Sen, [14] *XX^T matrices with independent entries* 《ALEA: 拉丁美洲概率与数学统计杂志》 **20** 2023 1, 75 125 4554226 (), 第–期。MR Sourav Chatterjee, [15] *Fluctuations of eigenvalues and second order Poincaré inequalities*, 《概率论及相关领域》143（2009）, 第1-2期, 1–40。MR 2449121[16] Israel Gohberg 和 Mark Grigorievich Kreuın, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, 《数学专著译丛》第18卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1969年, 由 A. Feinstein 从俄文译出。MR 0246142[17] Nobuyuki Ikeda 和 Shinzo Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 北荷兰数学图书馆第24卷, 北荷兰出版公司, 阿姆斯特丹—纽约; 讲谈社, 东京, 1981年。MR 637061[18] DanDan Jiang、ZhiDong Bai 和 ShuRong Zheng, *Testing the independence of sets of large-dimensional variables* **56** 2013 147 , 《中国科学: 数学》 (), 第1, 135 3016588 –期。MR Tiefeng Jiang, [19] *The limiting distributions of eigenvalues of sample correlation matrices*, 《Sankhy¯a》66（2004）, 第1期, 35–48。MR 2082906[20] Kurt Johansson, *On fluctuations of eigenvalues of random Hermitian matrices* **91** 1998 1, , 《杜克数学杂志》 (), 第–期。151 204 1487983 MR [21] Dag Jonsson, *Some limit theorems for the eigenvalues of a sample covariance matrix*, 《多元分析杂志》12（1982）, 第1期, 1–38。MR 650926[22] Stamatios Lefkimmiatis 和 Michael Unser, *Poisson image reconstruction with hessian schatten-norm regularization* **22** 2013 11, 4314 4327 , 《IEEE 图像处理汇刊》 (), 第–期。[23] Yiting Li 和 Xin Sun, *On fluctuations for random band Toeplitz matrices*, 《随机矩阵: 理论与应用》4（2015）, 第3期, 1550012, 28。MR 3385706[24] Dang-Zheng Liu、Xin Sun 和 Zheng-Dong Wang, *Fluctuations of eigenvalues for random Toeplitz and related matrices* **17** 2012 2994843 , 《电子概率学杂志》 (), 第95期, 22。MR [25] Anna Lytova 和 Leonid Pastur, *Central limit theorem for linear eigenvalue statistics of random matrices with independent entries* **37** 2009 5, 1778 1840 2561434 , 《概率年刊》 (), 第–期。MR [26] Shambhu Nath Maurya 和 Koushik Saha, *Process convergence of fluctuations of linear eigenvalue statistics of band Toeplitz matrices* **166** 2020 108875, 11 4122111 , 《统计与概率快报》 ()。MR

[27] Shambhu Nath Maurya 和 Koushik Saha, *Fluctuations of linear eigenvalue statistics of reverse circulant and symmetric circulant matrices with independent entries* **62** 2021 4, 043506, 31 4248935 , 《数学物理学杂志》（），第 期。

MR[28] Jamal Najim 和 Jianfeng Yao, *Gaussian fluctuations for linear spectral statistics of large random covariance matrices* **26** 2016 3, 1837 1887 3513608 , 《应用概率年刊》（），第 – 期。

MR[29] Feiping Nie、Heng Huang 和 Chris Ding, *Low-rank matrix recovery via efficient schatten p-norm minimization*, 人工智能促进协会人工智能会议论文集 26（2021），第 1 期，655–661。[30] Leonid Pastur, *On random matrices arising in deep neural networks: Gaussian case*, 《纯粹与应用泛函分析》 **5** 2020 6, 1395 1424 4196151 （），第 – 期。MR Leonid Pastur 和 Victor Slavin, [31] *On random matrices arising in deep neural networks: General I.I.D. case*, 《随机矩阵：理论与应用》 **12** 2023 1, 2250046, 41 4552699 （），论文编号 。MR Ionel Popescu, , [32] *General tridiagonal random matrix models limiting distributions and fluctuations*, 《概率论及相关领域》144（2009）第 1-2 期，179–220，MR 2480789[33] Yakov Sinai 和 Alexander Soshnikov, *General limit theorem for traces of large random symmetric matrices with independent matrix elements* **29** 1998 1, 1 24 , 《巴西数学学会公报》（新系列）（），第 – 期。MR 1620151 [34] *On the sphericity test with large-dimensional observations*

Qinwen Wang 和 Jianfeng Yao, , 《电子统计学杂志》7（2013），2164–2192。MR 3104916[35] Yuan Xie、Shuhang Gu、Yan Liu、Wangmeng Zuo、Wensheng Zhang 和 Lei Zhang, *Weighted schatten p -norm minimization for image denoising and background subtraction*, 《IEEE 图像处理汇刊》25（2016），第 10 期，4842–4857。