Schr¨oder 情形下超临界分枝过程左尾渐近式的周期乘子公式

Anton A. Kutsenko

德国艾希施泰特–因戈尔施塔特天主教大学机器学习与数据科学数学研究所；电子邮箱：
akucenko@gmail.com

arXiv:2305.02812v1 [math.PR] 4 May 2023

摘要

众所周知，在 Schr¨oder 情形下，超临界分枝过程的左尾渐近式满足幂律关系，并乘以某个乘法周期函数。我们给出了该周期函数的显式表达式。

关键词：超临界伽尔顿-沃森过程，左尾渐近式，Schr¨oder 型函数方程，
Karlin-McGregor 函数

1. 引言

我们考虑超临界情形下的一个简单 Galton-Watson 分枝过程 Z_t，其最小家族规模为 1，即所谓的 Schr¨oder 情形。记子代分布的均值为 E，则可以定义鞅极限 $W = \lim_{t\to+\infty} E^{-t}Z_t$。文献[1] 证明了，$p(x)$（$W$的密度）具有一个渐近式

$$p(x) = x^{\alpha}V(x) + o(x^{\alpha}), \quad x \to 0, \tag{1}$$

其中包含一些显式的 α，以及一个连续、正值的乘法周期函数 V，其周期为 E。后续关于这一渐近式的参考文献均基于主要著作 [1]，且未给出 $V(x)$ 的任何公式。我们将尝试填补这一空白。$V(x)$ 的显式表达式用 1 周期的 Karlin-McGregor 函数 $K^*(z)$ 的傅里叶系数（见 (12)）以及若干 Γ 函数的值（见 (11)）表示。主要结果见 (20)。**2**

. Main resu lts

我们回顾一下有关分枝过程的一些已知事实，包括 [4] 中获得的一些近期结果。Galton–Watson 过程定义为

$$X_{t+1} = \sum_{j=1}^{X_t} \xi_{j,t}, \quad X_0 = 1, \quad t \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{2}$$

其中所有的 $\xi_{j,\,t}$ 均为相互独立且服从相同分布的取自然数值的随机变量，其概率生成函数为

$$P(z) := \mathbb{E}z^{\xi} = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + ... \tag{3}$$

众所周知，见 [2],

$$\mathbb{E}z^{X_t} = \underbrace{P \circ ... \circ P}_{t}(z) = p_{t0} + p_{t1}z + p_{t2}z^2 + ..., \quad t \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

为简单起见，假设 P 是 $N \geqslant 2$次多项式，这在实践中很常见。另一个假设是 $p_0 = 0$ 和 $p_1 \neq 0$。为避免周期性带来的复杂情况，我们还假设存在 k 使得 $p_k p_{k+1} \neq 0$。最后这个假设对鞅极限并不重要，但为简单起见，我们希望保留它，因为我们推导主要渐近式时，基于使用另一个对该假设有要求的极限分布。值得注意的是，情形 $p_0 \neq 0$ 通常可以借助 Harris-Sevastyanov变换化归为（超临界）情形 $p_0 = 0$ ，见[3]。在假设 $p_0 = 0$ 和 $0 < p_1 < 1$下，我们可以定义

$$\Phi(z) = \lim_{t\to\infty} p_1^{-t} \underbrace{P \circ ... \circ P}_{t}(z), \tag{5}$$

其至少在 $|z| < 1$ 处是解析的。函数 Φ 满足 Schröder 型函数方程

$$\Phi(P(z)) = p_1\Phi(z), \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = 1. \tag{6}$$

由于（3）—（5），.....的泰勒系数 φ_n

$$\Phi(z) = z + \varphi_2 z^2 + \varphi_3 z^3 + ... \tag{7}$$

描述了后代数量的相对极限密度

$$\varphi_n = \lim_{t\to+\infty} \frac{p_{tn}}{p_{t1}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\mathbb{P}\{Z_t = n\}}{\mathbb{P}\{Z_t = 1\}}. \tag{8}$$

文献 [4], 中证明，这些密度具有如下渐近式

$$\varphi_n \simeq n^{\frac{-\ln(Ep_1)}{\ln E}} K_0(\frac{-\ln n}{\ln E}) + o(n^{\frac{-\ln(Ep_1)}{\ln E}}), \tag{9}$$

其中一阶矩

$$E := P'(1) = \sum_{j=1}^{N} jp_j > 1, \tag{10}$$

且 1-周期函数 $K_0(z)$ 由下式给出

$$K_0(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\theta_m e^{2\pi \mathbf{i} mz}}{\Gamma(-\frac{2\pi \mathbf{i} m + \ln p_1}{\ln E})}. \tag{11}$$

这些数值 θ_m 是该 1-周期函数的傅里叶系数。

$$K^*(z) := \Phi(\Pi(E^z))p_1^{-z} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \theta_m e^{2\pi \mathbf{i} mz}, \tag{12}$$

定义于条带 $\{z:\ |\mathrm{Im}\ z|<\vartheta^*\}$，并具有某个 $\vartheta^*>0$。条带的宽度 $2\vartheta^*$ 取决于多项式 P的朱利亚集的几何性质，见 [4]。该宽度会影响系数 θ_m的指数衰减速率。函数 $\Pi(z)$由下式给出。

$$\Pi(z):=\lim_{t\to+\infty}\underbrace{P\circ\ldots\circ P}_{t}(1-E^{-t}z). \tag{13}$$

该函数是一个整函数，满足庞加莱型函数方程。

$$P(\Pi(z))=\Pi(Ez),\quad \Pi(0)=1,\quad \Pi'(0)=-1. \tag{14}$$

除了式 (8) 之外，系数 p_{tn} 还存在另一种缩放方式，即

$$p(x)=\lim_{t\to+\infty}E^t p_{t,[xE^t]},\quad x\in\mathbb{R}, \tag{15}$$

其中，$[\cdot]$ 表示整数部分。假设对于 $x<0$，$p(x)=0$。一方面，我们有黎曼和。

$$\underbrace{P\circ\ldots\circ P}_{t}(e^{\frac{-\mathbf{i}y}{E^t}})=E^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}E^t p_{tn}e^{\frac{-n\mathbf{i}y}{E^t}}\to\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)e^{-\mathbf{i}yx}dx. \tag{16}$$

另一方面，关于指数的众所周知的展开式给出

$$\underbrace{P\circ\ldots\circ P}_{t}(e^{\frac{-\mathbf{i}y}{E^t}})\sim\underbrace{P\circ\ldots\circ P}_{t}(1-\frac{\mathbf{i}y}{E^t})\to\Pi(\mathbf{i}y). \tag{17}$$

因此，结合式（16）、（17），并应用傅里叶逆变换，我们得到

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi(\mathbf{i}y)e^{\mathbf{i}yx}dy. \tag{18}$$

利用 K_0 的 1-周期性、恒等式 $p_{1t}=p_1^t$（见 (5) 和 (6)），以及 (8) 和 (9)，我们得到

$$E^t p_{t,[xE^t]}=E^t p_1^t\frac{p_{t,[xE^t]}}{p_{1t}}\sim(Ep_1)^t(xE^t)^{\frac{-\ln Ep_1}{\ln E}}K_0(\frac{-\ln xE^t}{\ln E})=x^{\frac{-\ln Ep_1}{\ln E}}K_0(\frac{-\ln x}{\ln E}). \tag{19}$$

最后，由（19）、（15）和（1）可得

$$V(x)=K_0(\frac{-\ln x}{\ln E}). \tag{20}$$

K_0 的计算可以基于 [4]中提出的高效数值方法。借助快速傅里叶变换，可以高效地计算傅里叶变换（18）以及傅里叶系数 θ_m，见（12）。我们准备了两个数值示例，用于比较归一化密度的精确值与第一渐近项，见图1。

致谢

本文是对由德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）资助的协同研究中心 TRR 181“大气与海洋中的能量传递”项目 M3 的贡献，项目编号为 274762653。

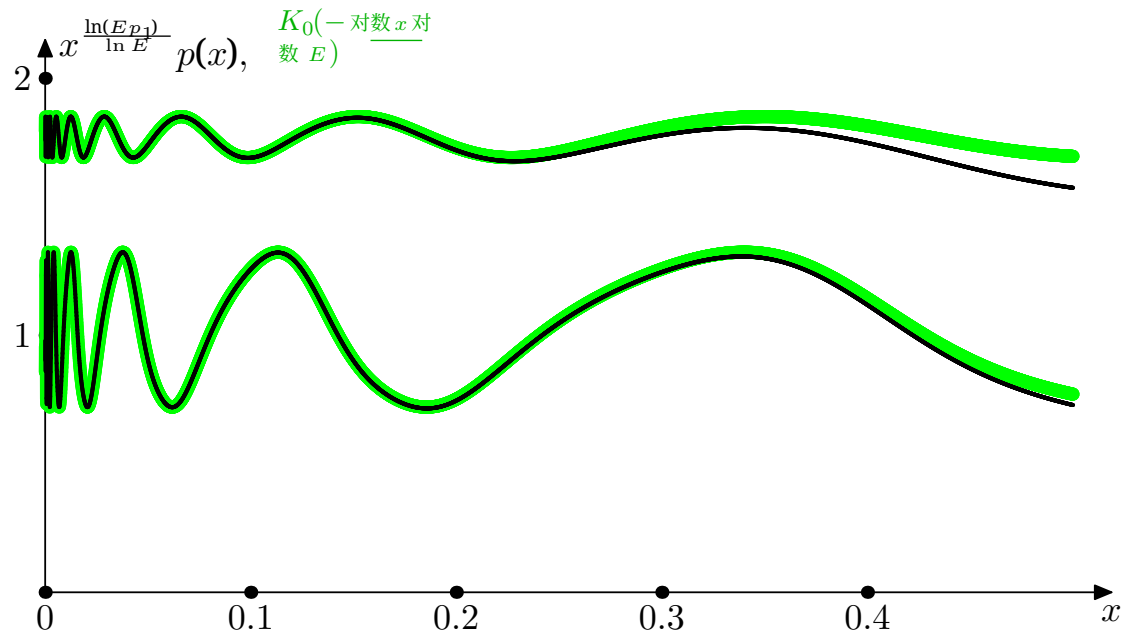


图1：两　　例子：$p_1 = 0.1$、$p_2 = 0.5$、$p_3 = 0.4$（上方曲线），以及 $p_1 = 0.1$、$p_2 = 0.1$,$p_3 = 0.5$, $p_4 = 0$

数据可用性声明

由于本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。本文所涉及的过程和函数的程序代码可在合理请求的情况下向通讯作者索取。

参考文献

[1] J. D. Biggings 和 N. H. Bingham，《超临界分枝过程中的大偏差》。*Adv. Appl.Prob.*，**25**，757-772，1993。[2] T. E. Harris，《分枝过程》，*Ann. Math. Statist.*，**41**，474-494，1948。[3] N. H. Bingham，《关于超临界分枝过程的极限》。*J. Appl. Probab.*，**25**，215–228，1988。[4] A. A. Kutsenko，《分枝过程中后代数量的近似》。*J. Stat. Phys.*，**190**，68，2023。