有色噪声高斯信道容量的算法可计算性

Holger Boche、Andrea Grigorescu、Rafael F. Schaefer 和 H. Vincent Poor

arXiv:2305.02819v2 [cs.IT] 1 Jun 2023

摘要

设计适用于带限加性有色高斯噪声（ACGN）信道的容量达成编码方案一直是一项挑战，至今仍然如此。本文从基础算法视角研究带限 ACGN 信道的容量，探讨容量是否能够通过算法计算。为此，本文采用图灵机的概念，它揭示了数字计算机的基本性能极限。研究表明，存在一些带限 ACGN 信道，其连续谱密度是可计算的，但容量却是不可计算数。此外，研究还证明，对于这些信道，不可能找到其容量的可计算渐近紧上界序列。

I. 引言

虽然第五代（5G）移动网络推动了物联网（IoT）的工业应用，但面向 6G 的无线网络基础设施技术进步将提供

[1]H. Boche的这项工作部分得到了德国联邦教育与研究部（BMBF）的支持，资助来自“6G通信系统”国家倡议下的6G-life研究中心（资助号16KISK002）、“后香农通信（NewCom）”国家倡议（资助号16KIS1003K），以及“神经形态计算的硬件平台与计算模型（NeuroCM）”项目（资助号16ME0442）。此外，该工作还获得了德国研究联合会（DFG）在德国卓越战略框架下的资助，项目编号为EXC-2092 – 390781972。R. F. Schaefer的这项工作部分得到了BMBF的支持，资助来自NewCom项目（资助号16KIS1004）和6G-life项目（资助号16KISK001K）；此外还部分获得了德国研究联合会（DFG）的资助，资助号为SCHA1944/11-1。

[2]H. Boche 任职于慕尼黑工业大学理论信息技术教席，地址为德国慕尼黑 Arcisstr. 21, 80333 M¨unchen。（电子邮箱：boche@tum.de）。他还任职于德国联邦教育与研究部（BMBF）研究中心 6G-life，以及波鸿鲁尔大学大规模对手时代的网络安全（CASA）卓越集群。A. Grigorescu 任职于慕尼黑工业大学理论信息技术教席，地址为德国慕尼黑 Arcisstr. 21, 80333 M¨unchen。（电子邮箱：andrea.grigorescu@tum.de）。R. F. Schaefer 任职于德累斯顿工业大学信息论与机器学习教席、德国联邦教育与研究部（BMBF）研究中心 6G-life、卓越集群“人在回路中的触觉互联网中心（CeTI）”以及德国5G实验室，地址为德国德累斯顿 01069。（电子邮箱：rafael.schaefer@tu-dresden.de）。H.V. Poor 任职于普林斯顿大学电气与计算机工程系（电子邮箱：poor@princeton.edu）

这将为消费者大规模使用物联网和触觉互联网奠定基础，催生改善人们生活质量的创新方式。这不仅会大幅增加无线网络上的数据流量，也意味着物理对象和虚拟对象将通过网络进行控制。因此，6G基础设施必须提供可靠、可扩展且安全的通信，其吞吐量要远高于5G，并具备低时延。6G无线网络基础设施的进步必须能够实现感知和控制功能的协调；参见 [1], [2]。另一方面，任何增强感知能力的技术进步都有可能被恶意行为者利用。因此，6G网络需要采用架构解决方案，不仅能够保障安全性，还能满足法律和社会方面的要求，例如《通用数据保护条例》（GDPR）。因此，为6G网络构建原生可信架构至关重要。

6G 的可信性框架包括隐私、安全性、完整性、韧性、可靠性、可用性、问责性、真实性和设备独立性。本文将探讨可信性的可靠性和完整性方面。具体而言，信息论已对通信网络的可靠性方面进行了深入研究。

信息论旨在提供一个数学框架，用于对通信场景建模并量化其性质。信息论框架能够推导出速率基准，在考虑通信信道的特性、噪声和功率约束的情况下，确定该信道的可靠传输速率。这些基准有助于确立所研究信道的可靠信息传输速率，并可用于设计通信系统，以找到能够以高传输速率运行且传输错误极少的最优编码策略。

信息论的一项关键目标是利用初等函数将速率基准表述为优化问题，并尽可能以闭式形式表示，从而为解提供精确而简洁的表示，便于计算和分析。

在信息论领域，研究人员旨在寻找简洁的容量公式，并通过数值评估计算系统的实际容量。数值评估是这一过程中的关键步骤。计算出的容量结果在实践中意义重大，因为它们可作为开发实际通信系统的基准。

长期以来，人们一直对使用数字计算机计算速率基准感兴趣，例如信道的容量或信道可靠性函数。人们尤其会隐含地假设某些性能函数是可计算的，特别是涉及容量表达式等熵量的函数。1967 年， [3] 提出了构造信道可靠性函数上界和下界的方法。这些技术专门用于支持使用

数字计算机计算这些界。

1972年， [4] 和 [5]分别独立提出了一种算法，用于计算任意离散无记忆信道的容量。 [5], 提出了一种类似算法，用于计算有损源压缩的率失真权衡。一般而言，容量通常用互信息表达式表示。请注意，即使对于交叉概率为有理数的二元对称信道（BSC），即 $\epsilon \in (0, 1 2) \cap \mathbb{Q}$，其容量也是一个超越数 [6]。因此，无法进行精确计算，因为计算必须在有限步之后停止。我们只能计算其适当的近似值。

人们已研究多种信道的容量算法可计算性，包括有限状态信道（FSC） [7], 带反馈的有限状态信道 [8], 复合信道 [9], 以及相关性辅助离散无记忆信道 [10]。研究表明，由于这些信道的描述复杂，它们的容量通常都不是可计算函数。这引出了一个有趣的问题：对于哪一种最简单的通信信道，容量无法进行这样的数值计算？我们通过证明存在一些带限加性有色高斯噪声（ACGN）信道来回答这个问题。这类信道是结构非常简单的标准通信信道，但其容量不可计算。

带限 ACGN 信道是无线通信中一个非常重要的模型，因为它可用于对频率选择性衰落信道等常见信道进行建模。 [11], [12], 中介绍的带限高斯信道是一种连续时间信道。在 [12], 中介绍了两种噪声模型：白高斯噪声和有色高斯噪声。有色高斯噪声服从高斯分布，其功率谱密度（p.s.d.）随频率变化，而白高斯噪声的谱密度在整个频率范围内保持恒定。 [13]–[15]对带限 ACGN 信道的容量和码的误码性能进行了深入研究。 [16]–[20]中给出了带限 ACGN 信道及其相关结果的详细描述。 [21], 中，Gallager 证明了线性 ACGN 信道的达容量功率谱密度可以使用注水技术确定。 [22], 中，作者概述了为 ACGN 信道构造容量达到码所需的技术。

此外，带限 ACGN 信道的容量函数在多用户信息论中发挥着基础性作用，例如，具有码间干扰（ISI）的广播信道 [23], 高斯广播信道 [24]–[26], 具有 ISI 的离散时间高斯信道 [27], 具有记忆的多址信道（MAC） [28], 具有 ISI 的高斯多址信道 [29], 等等。

计算带限 ACGN 信道的容量，对实际系统而言是一项非常重要的任务，对 6G 尤其如此。容量是设计和优化系统的基准，

以实现最优消息传输。这将有助于设计满足 6G 系统预期可靠性和效率要求的码，同时优化通信资源的使用。例如，资源分配很可能会在 6G 系统的基站中进行。目前以及可预见的未来，这项任务只能通过数字硬件来完成。

要在数字计算机上计算带限 ACGN 信道的容量，程序必须能够根据其参数计算出容量的描述。然而，带限 ACGN 信道的容量通常是不可计算的。因此，任何算法都无法满足完整性要求，也无法通过数字硬件确保通信系统的可信性。

为了解决算法可计算性问题，我们采用图灵机的概念 [30]–[32], 。图灵机是抽象机器的数学模型，能够根据给定规则操纵纸带上的符号。任何算法都可以转换为一系列可由图灵机执行的步骤，因此图灵机提供了一种简单而强大的计算模型。图灵机在计算复杂度、计算能力或存储方面不受限制，并且能够完全无误地执行程序。因此，它们为当今的数字计算机提供了基本的性能极限。图灵机涵盖了经典（即非量子）机器上算法可计算的所有问题和任务。它们等价于不受硬件限制的冯·诺依曼架构以及递归函数理论 [33]–[37]。

本文探讨了带限 ACGN 信道的容量是否可以通过计算确定这一问题。我们证明，存在这样的带限 ACGN 信道：对于任意给定的误差范围，都不可能找到一种算法，将其容量近似到该误差范围以内。此外，我们证明，不可能找到带限 ACGN 信道容量的算法可计算上界。最后，我们表明，放宽功率约束并不能改善容量的可计算性。

本文其余部分的组织如下：在第二节中，我们介绍带限 ACGN 信道并给出其容量结果。在第三节中，我们介绍可计算性框架。在第四节中，我们证明存在容量为不可计算数的带限 ACGN 信道。最后，我们在第五节中给出结论。

II. 连续高斯信道

本节考虑一种通信场景，其中信道的输入和输出在幅度和时间上都是连续的。幅度连续意味着信号字母表是不可数的。

无限，并且“时间连续”是指允许传输随时间连续进行。时间连续加性高斯信道由以下公式表示：

$$y(t) = x(t) + z(t),$$

其中， $x(t)$ $y(t)$和 $z(t)$ 分别表示时刻 $t \in \mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ 的信道输入、信道输出和噪声，其取值属于 $\mathbb{R}$。噪声 $z(t)$ 服从均值为零的高斯分布。输入信号和噪声的傅里叶变换表示为

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft}\, dt$$
$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-i2\pi ft}\, dt.$$

设 $x_T(t)$ 表示信号 $x(t)$ 在时间区间 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 内等于 $x(t)$、在区间外为 0 的部分。信号总功率 P_{tot} 为

$$P_{\text{tot}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2\, df = \int_{\infty}^{\infty} P_x(f)\, df$$

其中

$$|X_T(f)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t-\tau) x_T(t)\, dt \Big] e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau$$

且 $P_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f|^2)}{T}$是信号 $x(t)$的功率谱密度。类似地，设 $z_T(t)$ 在时间区间 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 内等于噪声 $z(t)$、在区间外为 0。噪声的功率谱密度为

$$N(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\tau) e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau$$

其中 $R_z(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} z_T(t-\tau) z_T(t)\, dt$。

我们仅考虑带限信号。令带宽为 $B > 0$，则带宽为 B 的带限信号的功率谱密度具有以下结构：

$$P_x(f) = \begin{cases} P_x(f) & \text{for } f \in [0, B] \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

$z(t)$ 是一个带限有色高斯噪声，其谱密度为 $N(f)$，且满足

$$N(f) = \begin{cases} \geq 0 & \text{for } f \in [0, B] \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

我们考虑一个受功率约束 P 限制的通信场景。这意味着总信号功率不应超过 P，其描述如下

$$\int_0^B P_x(f)\, df \leq P.$$

我们旨在为上述带限信道寻找码。码应由带限信号组成。为此，我们考虑集合 $\mathcal{X}$（B，T，P），它是由近似带限信号构成的集合，这些信号的带宽为 B，时间上近似限制在 T 秒内，且总功率不超过 P；也就是说，对于每个信号 $x \in \mathcal{X}$（B，T，P），均满足 $\int_0^B P_x(f)\, df \leq P$。我们将 $\mathcal{Y}$（B，T）定义为接收信号的集合，这些信号的带宽为 B，且时间上近似限制在 T 内。

带功率约束的带限 ACGN 信道的一个码由一对函数(f, ϕ)组成，其中 f是编码函数 f: $\mathcal{M} \to \mathcal{C} \subset \mathcal{X}(B, T, P)$，其中 $\mathcal{C}$是码本；另一个是译码函数 ϕ: $\mathcal{Y}(B, T) \to \mathcal{M}$。传输速率 R定义为

$$R = \frac{1}{T} \ln |\mathcal{M}|.$$

平均错误概率 P_e 为

$$P_e = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \sum_{i=1}^{|\mathcal{M}|} \Pr(\phi(f(i)) \neq i).$$

若存在一个码(f, ϕ)，以 R 的传输速率运行，且其平均错误概率随$T \to \infty$趋于零 $P_e \to 0$，则称速率 R 对于带限 ACGN 信道是可达的。信道容量定义为所有可达速率的上确界。

定理 1（ [12]）。带宽为 B、区间 $[0, B]$ 上具有连续噪声功率谱 N 且满足功率约束 $P > 0$ 的带限 ACGN 信道，其容量为

$$C(N, P) = \int_0^B \ln\left(1 + \frac{P_x^*(f)}{N(f)}\right) df.$$

容量达到功率谱密度为

$$P_x^*(f) = \begin{cases} \left[\nu - N(f)\right]_+ & \textit{for } f \in [0, B] \\ 0 & f \notin [0, B], \end{cases} \tag{1}$$

其中 ν 的选取应满足 $\int_0^B P_x^*(f)\, df = P$。

这里 该公式有许多不同的推导方法，参见 [17], [19], [38], [39].

达容量功率谱密度由注水解给出。注水法因其推导简单而广为人知 [40]。一般而言，该问题通过将噪声谱划分为n个宽度为 Δf_n的子信道，并假设每个子信道彼此独立来处理。 $N(f)$随后近似为 $N(f_i)$，其中$f \in [f_i - \frac{\Delta f_n}{2}, f_i + \frac{\Delta f_n}{2}]$和 $i \in \{1, \ldots, n\}$。每个子信道 f_i 的容量由下式给出。

$$C_n(N, P, f_i) = \Delta f_n \ln\left(1 + \frac{P_x^*(f_i)}{N(f_i)}\right)$$

其中， $P_x^*(f_i) = \nu - N(f_i)$，而 ν 是通过使用拉格朗日乘数法推导得到的。总容量和总传输功率由下式给出。

$$C_n(N,P) = \sum_{i=1}^{n} \Delta f_n \ln\left(1 + \frac{P_x^*(f_i)}{N(f_i)}\right) \tag{2}$$

$$P = \sum_{i=1}^{n} \Delta f_n P_x^*(f_i). \tag{3}$$

当 $n \to \infty$ 时， $\Delta f_n \to 0$ ，方程 2 和 3 变为积分:

$$C(N,P) = \lim_{n\to\infty} C_n(N,P) = \int_0^B \ln\left(1 + \frac{P_x^*(f)}{N(f)}\right) df$$

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta f_n P_x^*(f_i) = \int_0^B P_x^*(f)\, df.$$

一般来说，要证明信道容量的结论，必须证明可达性和逆定理。可达性是指能够以低于容量的速率渐近实现无差错通信，而逆定理则证明，以高于容量的速率渐近实现无差错通信是不可能的。

可达性结果给出了容量的下界。要证明带限 ACGN 信道的可达性，必须证明可以构造近似带限且近似时限的码本，使其以低于信道容量的速率运行，即 $R < C$。对于给定的错误概率 $P_e > 0$，可达性为我们提供一个可达速率的单调递增序列 $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ，当信号持续时间 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 增加时，该序列收敛于容量；也就是说，$\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个时间长度的单调递增序列。对于 $n \in \mathbb{N}$, 速率 R_n 描述了持续时间为 T_n 的带限信号的码本大小；对于该码本，可以找到一种译码策略，使错误概率不超过 P_e。

逆定理给出了编码定理的一个上界。更具体地说，逆定理为我们提供了一个速率的单调递减序列 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ，该序列收敛于容量。对于每个$n \in \mathbb{N}$， U_n 都是时长为 T_n 、且能够找到一种译码策略使错误概率不超过 P_e的带限信号码本大小的上界。

找到能够计算下界和上界的算法会很有用。此外，如果有一种算法能够接收带限 ACGN 信道并计算出相应的容量达成码，那就更理想了。这引出了以下问题:

问题 1: 给定噪声谱密度 N、功率约束 P 和精度 M，是否可以找到一种算法，以 N、 P 和 M 作为输入，为带限 ACGN 信道计算出一个码本和一种解码策略，使其速率为 R，从而达到 $R \geq C(N,P) - \frac{1}{2^M}$?

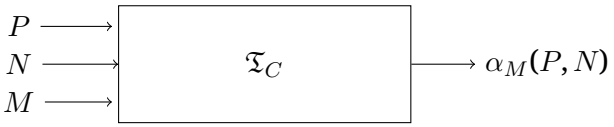

图 1：用于计算带限 ACGN 信道容量近似值的图灵机 $\mathfrak{T}_C$。它以功率约束 P、噪声功率谱 N 和近似精度 M 为输入，并计算 $\alpha_M(P,N)$，其中 $|C(N,P) - \alpha_M(P,N)| < \frac{1}{2^M}$。

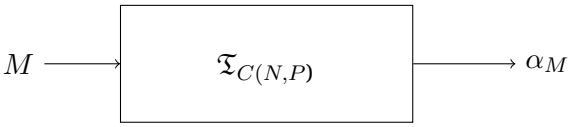

图 2：用于计算固定 N 和 P 时带限 ACGN 信道容量近似值的图灵机 $\mathfrak{T}_{C(N,P)}$。对于可计算的 $P \in \mathbb{R}_c$ 和 N，$\mathfrak{T}_{(N,P)}$ 接收近似精度 M，并计算满足 $|C(N,P) - \alpha_M| < \frac{1}{2^M}$ 的 α_M。

长期以来，人们一直对信息论中通信场景容量的算法计算感兴趣。此类算法的一个例子是 Blahut-Arimoto 算法，它可以计算作为输入给出的任意可计算离散无记忆信道的容量（见[4], [5]）。然而，迄今尚无已知算法能够像 Blahut-Arimoto 算法那样，计算噪声谱密度为 $N(f)$ 的带限 ACGN 信道的容量。理想情况下，我们希望找到这样一种算法。

问题 2：是否有可能找到一种算法，以噪声谱密度 N、功率约束P 和精度 M为输入，并计算出数值 $\alpha(N,M)$，其中

$$|C(N,P) - \alpha(N,M)| < \frac{1}{2^M}?$$

Th描述问题 2 算法的图灵机如图 1 所示。 .

我们可以通过固定 N 和 P 来简化所需算法的要求。这引出了以下问题:

问题 3：对于固定的 N 和固定的 P，是否可以找到一种算法，以精度 M 作为输入，并计算数值 $\alpha(N,M)$，使其满足

$$|C(N,P) - \alpha(N,M)| < \frac{1}{2^M}?$$

问题 3 的算法对应的图灵机如图 2 所示。

如果能为定理 1 找到构造性证明，包括有效构造容量达到码，以及对逆命题的算法描述，那么就能对这三个问题都给出肯定回答。然而，我们的分析表明，对于固定的 N 和 P，无法提供这样的构造性证明。

III. 可计算性框架

在本节中，我们介绍所需的可计算性理论基本概念。可计算性和可计算实数最初由图灵在 [30] 和 [31]中提出。在此背景下，可计算数指的是可以使用图灵机计算的实数。

有理数序列 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 被称为可计算序列，当且仅当存在递归函数 a、b、s：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，满足 $b(n)\neq 0$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立，并且

$$r_n=(-1)^{s(n)}\frac{a(n)}{b(n)},\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

如果存在一个有理数可计算序列$\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 x 满足，则称实数 x 是可计算的。

$$|x-r_n|<2^{-n} \tag{5}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$均成立。这意味着，可计算实数 x 完全由递归函数 a、b、s：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$刻画。它的表示为 $(a$、b、$s)$，我们也将其写作 $x\sim(a$、b、$s)$。显然，这一表示不一定是唯一的，也可能存在其他递归函数a'、b'、s'：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，它们同样刻画 x，即 $x\sim(a'$、b'、$s')$。

我们用 $\mathbb{R}_c$ 表示可计算实数的集合，用 $\mathbb{R}_c^{\geq 0}$ 表示正可计算实数的集合。

定义 1. 有理数序列 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有效地收敛到实数 x，如果存在递归函数 e: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对于所有 $N\in\mathbb{N}$，都有

$$k\geq e(N)\quad \textit{implies}\quad |r_k-x|\leq 2^k.$$

定义 2. 如果对于任意 $\epsilon>0$，都存在一个 $n_0\in\mathbb{N}$，使得对于任意 m，$n>n_0$，均成立，则称序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为柯西序列。

$$|x_n-x_m|<\epsilon.$$

定义 3. 如果存在一个递归函数e：$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对于所有 n，$N\in\mathbb{N}$都有成立，那么称柯西序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有效收敛。

$$k\geq e(n,N)\quad \textit{implies}\ |x_k-x_n|\leq 2^{-N}$$

定义 4. 如果存在一个算法（或图灵机），将可计算实数 x 的每个给定表示（a，b，s）转换为可计算实数 （x）的相应表示，则称函数： $\mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ 是博雷尔-图灵可计算的。

定义 5. 若存在一个可计算的有理数双序列 $\{r_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$，使得实数序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 可计算（作为一个序列），则称该序列可计算。

$$|r_{m,n} - x_n| \le 2^{-m} \tag{6}$$

对于所有 $m \in \mathbb{N}$ 和 $n \in \mathbb{N}$。

备注 1. 设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是实数的可计算序列。则以下序列也都是可计算的:

$$x_n \pm y_n,\ x_n y_n,\ x_n/y_n\ (y_n \neq 0 \textit{ for all } n),\ \exp x_n,\ \log x_n\ (x_n > 0 \textit{ for all } n).$$

定义 6（ [41]）。设 $\mathbb{I}_c \subset \mathbb{R}_c$ 是一个可计算区间。若函数 $f_c\colon \mathbb{I}_c \to \mathbb{R}_c$ 满足以下条件，则称其为可计算连续函数。

1) f_c 是序列可计算的，即 f_c 将每个由点 $x_n \in \mathbb{I}_c$ 组成的可计算序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 映射为实数的可计算序列 $\{f_c(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$，并且

2) f_c 是有效地一致连续的，即存在一个递归函数 $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于所有 $x, y \in \mathbb{I}_c$ 以及所有满足 $N \in \mathbb{N}$ 的.....

$$\|x - y\| \le \frac{1}{d(N)}$$

成立的是

$$|f_c(x) - f_c(y)| \le \frac{1}{2^N}.$$

注 2。可计算连续函数的概念比博雷尔-图灵可计算函数的概念更强。可计算连续函数也是博雷尔-图灵可计算函数。

引理 1（ [41]）。设 $[a, b] \subset \mathbb{R}_c$。设 $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ 为一个可计算函数。那么定积分

$$v = \int_a^b f(x)\,dx \tag{7}$$

是一个可计算实数。

我们还需要用到 [42] 中定义的递归集和递归可枚举集的概念。这些概念用于构造可计算信道序列，以研究反馈容量函数的可计算性。

定义 7. 若存在可计算函数 f 使得 $f(x) = 1$当 $x \in \mathcal{A}$ 时成立，且 $f(x) = 0$ 当 $x \notin \mathcal{A}$ 时成立，则称集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ 为递归集。

定义 8. 如果存在一个定义域恰好为 $\mathcal{A}$ 的递归函数，则集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ 是递归可枚举的。

我们有以下性质 [42]:

- $\mathcal{A}$ 是递归的，当且仅当： $\mathcal{A}$ 是递归可枚举的，且 $\mathcal{A}^c$ 是递归可枚举的。
- 存在不是递归集的递归可枚举集 $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$，即 $\mathcal{A}^c$ 不是递归可枚举的。这意味着不存在可计算的（即递归的）函数 f： $\mathbb{N} \to \mathcal{A}^c$，使得 $[f(\mathbb{N})] = \{m \in \mathbb{N}$： $\exists n \in \mathbb{N}$，并且 $f(n) = m\} = \mathcal{A}^c$。

IV. ACGN 信道容量的可计算性

在本节中，我们旨在回答第二节中的问题 1、问题 2 和问题 3。具体而言，我们构造一个带限 ACGN 信道的噪声功率谱 N，使这三个问题的答案均为否。为此，我们将引入一个参数可计算的带限 ACGN 信道，其参数包括可计算带宽、可计算噪声功率谱、可计算的达到信道容量的功率谱密度，以及可计算的功率约束。噪声功率谱和达到信道容量的功率谱都将是频域 $f \in \mathbb{R}$ 上的可计算连续函数。

我们考虑如下带宽为 $B \in \mathbb{R}_c$ 和 $B > 0$的带限信道

$$y(t) = x(t) + z(t).$$

$N(f)$ 也是带限的，带宽为 B。对于 $f \in [0, \frac{B}{2}]$， $N(f)$ 严格单调递减；对于 $f \in [\frac{B}{2}, B]$，则严格单调递增。 N 是关于 $\frac{B}{2}$ 的偶函数。

通信受功率约束 $P \in \mathbb{R}_c$， $P > 0$。功率谱密度 $P_x(f)$ 在 $f \in [0, B]$时是一个非负连续函数，且满足

$$\int_0^B P_x(f)\, df = P$$

我们用 $P_x^*(f)$ 表示使容量达到最大的功率谱密度，它由注水技术唯一确定。

我们选择 $f_1 \in \left(0, \frac{B}{2}\right]$, $f_1 \in \mathbb{R}_c$。我们希望找到一个达容量功率谱密度 $P_{f_1}^*$（f），它仅在区间 $\left[\frac{B}{2} - f_1, \frac{B}{2} + f_1\right]$ 内非零。这个最优功率谱密度与功率 P_{f_1} 唯一对应，其表达式为

$$P_{f_1} = \int_{\frac{B}{2}-f_1}^{\frac{B}{2}+f_1} \left(N\Big(\frac{B}{2} + f_1\Big) - N(f)\right) df.$$

请注意， $N(\frac{B}{2}+f_1)=N\left(\frac{B}{2}-f_1\right)$。 P_{f_1}是一个可计算数。

ˆ这意味着，当给定功率 P，且对于某个 f_1，有 $P=P^{\hat{}}f_1$ 时，最优功率分配为

$$P^*_{\hat{f}_1}(f)=\begin{cases}N\left(\frac{B}{2}+\hat{f}_1\right)-N(f), & \text{for } f\in\left[\frac{B}{2}+\hat{f}_1,\frac{B}{2}-\hat{f}_1\right]\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

>因此，相应的容量可以表示为 f_1 的函数，形式如下

$$C_1(N,f_1)=\int_0^B \ln(P^*_{f_1}(f)+N(f))\,df-\int_0^B \ln(N(f))\,df.$$

现在，若 $C(N,P)$ 是带限 ACGN 信道的容量，则对于 $0\le f_1\le\frac{B}{2}$ 及相应的功率 P_{f_1}，以下表示成立：

$$C(N,P_{f_1})=C_1(N,f_1),$$

也就是说，容量是 f_1 的函数。

定理 2. 令 $B>0$、 $B\in\mathbb{R}_c$ 为任意值。存在可计算连续函数 $N\colon[0,B]\to\mathbb{R}_c^{\ge 0}$，使得对于所有 $f_1\in[0,\frac{B}{2}]$、 $f_1\in\mathbb{R}_c$，均有

$$C_1(N,f_1)\notin\mathbb{R}_c.$$

此外，对于每个 $f_1\in[0,\frac{B}{2}]$、 $f_1\in\mathbb{R}_c$，不存在满足 $u_n\ge u_{n+1}$、 $n\in\mathbb{N}$ 且具有 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的可计算数序列

$$\lim_{n\to\infty}u_n=C_1(N,f_1).$$

证明。这里我们证明定理 2 的结果。为此，我们构造一个非负可计算连续功率谱密度 N。 N 的构造基于一个递归可枚举非递归集 $\mathcal{A}$。存在可数无穷多个递归可枚举非递归集 [42]。我们将 $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 记作递归可枚举非递归集的族。对于每个这样的集合 $\mathcal{A}_i$，都可以采用相同的方法构造出一个不同的非负可计算连续功率谱密度 N_i。每个 N_i 的容量都会产生一个不可计算数 ξ_i。

接下来，我们开始构造噪声功率谱密度 N。令 $B>0$ 为一个固定的可计算数。令 $n_0\in\mathbb{N}$，使得 $\frac{1}{n_0}<\frac{B}{2}$。

我们考虑以下关于 $n\ge n_0$ 的函数

$$G_n(f)=\begin{cases}-\frac{1}{|f-\frac{B}{2}|}, & \text{for } f\in\left[0,\frac{B}{2}-\frac{1}{n}\right]\cup\left[\frac{B}{2}+\frac{1}{n},\frac{B}{2}\right]\\ -n, & \text{for } f\in\left[\frac{B}{2}-\frac{1}{n},\frac{B}{2}+\frac{1}{n}\right]\end{cases}\tag{8}$$

G_n 是一个可计算连续函数。令

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^B G_n(f)\,df = 2\int_{\frac{B}{2}}^B G_n(f)\,df \\ &= -2\int_0^{\frac{1}{n}} n\,df - \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{B}{2}} \frac{1}{f}\,df \\ &= -2 - 2\Big(\log\frac{B}{2} - 2\ln\frac{1}{n}\Big) \\ &= -2\Big(1 + \ln\frac{nB}{2}\Big). \end{aligned} \tag{9}$$

注意， $\frac{nB}{2} > 1$，因此 $\ln\ \frac{nB}{2} > 0$。

我们定义 $C_n^{(1)} = |C_n|$。

设 $\mathcal{A} \in \mathbb{N}$ 是一个递归可枚举非递归集。设 $\varphi_{\mathcal{A}}$： $\mathbb{N} \to \mathcal{A}$ 是一个递归函数，列出该集合 $\mathcal{A}$ 的所有元素。

我们考虑以下函数序列：

$$N_M(f) = \Big(f - \frac{B}{2}\Big)^2 \exp\Big(\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f)\Big) \tag{10}$$

N_M 是 $[0, B]$上的可计算连续函数，因为对于 $1 \le n \le M$， G_n 都是可计算连续函数；指数函数 $\exp(\cdot)$ 将可计算连续函数映射为可计算连续函数，而与 $\Big(f - \frac{B}{2}\Big)^2$ 相乘在任何情况下都会生成可计算函数。因此， $\{N_M\}_{M\in\mathbb{N}}$ 是一个由可计算连续函数构成的可计算序列。 N_M 本身是在 $[\frac{B}{2}, B]$ 上严格单调递增的函数，并且关于 $\frac{B}{2}$是偶函数。

设 $K \in \mathbb{N}$ 为任意值。我们有

$$N_{M+K}(f) - N_M(f) = \Big(f - \frac{B}{2}\Big)^2 \exp\Big(\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f)\Big)\Big[\exp\Big(\sum_{n=M+1}^{M+K} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f)\Big) - 1\Big],$$

$$|N_{M+K}(f) - N_M(f)| = \Big(f - \frac{B}{2}\Big)^2 \exp\Big(\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f)\Big)\Big|1 - \exp\Big(\sum_{n=M+1}^{M+K} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f)\Big)\Big|.$$

对于 $x \in [0, 1]$ ，我们有

$$1 - e^{-x} \le 2x.$$

令 $L \in \mathbb{N}$（其中 $L > n_0$）为任意值。在区间 $[0, \frac{B}{2} - \frac{1}{L}]$ 和 $[\frac{B}{2} + \frac{1}{L}, B]$ 上，对于 $M > L$，我们有

$$\frac{B}{2} - \frac{1}{M} > \frac{B}{2} - \frac{1}{L} \quad \text{and} \quad \frac{B}{2} + \frac{1}{M} < \frac{B}{2} + \frac{1}{L}.$$

因此

$$G_M(f) = -\frac{1}{|f-\frac{B}{2}|} \quad \text{for} \quad f \in \Big[0, \frac{B}{2} - \frac{1}{L}\Big] \cup \Big[\frac{B}{2} + \frac{1}{L}, B\Big],$$

因此，对 $M > L$，以下结论成立:

$$\sum_{n=M+1}^{M+K} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f) = -\frac{1}{|f-\frac{B}{2}|} \sum_{n=M+1}^{M+K} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}}$$

and

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M+1}^{M+K} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} &< \frac{1}{C_{M+1}^{(1)}} \sum_{n=M+1}^{M+K} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \\
&< \frac{1}{C_{M+1}^{(1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \\
&< \frac{1}{C_{M+1}^{(1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{C_{M+1}^{(1)}}.
\end{aligned}$$

这里我们 用到了 $\{C_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个单调递增序列这一事实。还成立的是 t

$$\begin{aligned}
0 &\geq \sum_{n=M+1}^{M+K} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f) \\
&\geq -\frac{1}{|f-\frac{B}{2}|} \frac{1}{C_{M+1}^{(1)}}
\end{aligned}$$

我们还有

$$\frac{1}{|f-\frac{B}{2}|} \leq \frac{1}{|\frac{B}{2} + \frac{1}{L} - \frac{B}{2}|} = L,$$

因此

$$0 \geq \sum_{n=M+1}^{M+K} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f) \geq -\frac{L}{C_{M+1}^{(1)}}. \tag{11}$$

For $M \in \mathbb{N}$ 和 $K \in \mathbb{N}$, 使得 $M > U3^{L^2}$ 满足 $U \in \mathbb{N}, U \geq 1, \frac{B}{2}U > 1$，我们有

$$
\begin{aligned}
|N_{M+K}(f)-N_M(f)| &\le \Big(f-\frac{B}{2}\Big)^2 \exp\Big(\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}}\frac{L}{C_n^{(1)}}G_n(f)\Big)\frac{L}{C_{M+1}^{(1)}} \\
&< \Big(\frac{B}{2}\Big)^2 \times 1 \times \frac{L}{2(1+\ln\frac{BU3^{L^2}}{2})} \qquad (12)\\
&= \Big(\frac{B}{2}\Big)^2 \times 1 \times \frac{L}{(2+2\log\frac{BU}{2}+2\ln 3^{L^2})} \\
&< \Big(\frac{B}{2}\Big)^2 \frac{L}{(2\ln 3^{L^2})} \\
&< \Big(\frac{B}{2}\Big)^2 \frac{L}{2L^2}. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

(12) 可由 (9) 得出。

令 U_1 为满足 $U_1 > \frac{B}{2}$ 的最小自然数。那么对于所有 $L > n_0$、 $L \in \mathbb{N}$，对于所有 $M \ge U3^{L^2}$，对于所有 $K \in \mathbb{N}$，以及对于所有 $f \in [0, \frac{B}{2}-\frac{1}{L}] \cup [\frac{B}{2}+\frac{1}{L}, B]$，都有

$$
|N_{M+K}(f)-N_M(f)| < \frac{U_1^2}{2L}.
$$

对于 $f \in [\frac{B}{2}-\frac{1}{L}, \frac{B}{2}+\frac{1}{L}]$，我们有如下结论:

$$
\begin{aligned}
|N_{M+K}(f)-N_M(f)| &\le \Big(f-\frac{B}{2}\Big)^2\Big[\exp\Big(\sum_{n=1}^{M+K}\frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}}\frac{1}{C_n^{(1)}}G_n(f)\Big)+\exp\Big(\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}}\frac{1}{C_n^{(1)}}G_n(f)\Big)\Big] \\
&\le 2\Big(f-\frac{B}{2}\Big)^2 \\
&\le 2\Big(\frac{B}{2}+\frac{1}{L}-\frac{B}{2}\Big)^2 \\
&\le \frac{1}{2L^2}.
\end{aligned}
$$

因此， $\{N_M\}_{M\in\mathbb{N}}$ 是由可计算连续函数构成的有效柯西序列，并且它有效地收敛于函数

$$
N(f) = \Big(f-\frac{B}{2}\Big)^2 \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}}\frac{1}{C_n^{(1)}}G_n(f)\Big). \qquad (14)
$$

公式 (14) 描述了一种算法，该算法以递归函数 $\varphi_{\mathcal{A}}$ 作为输入，并计算出 N。 N 是一个可计算连续函数，对于 $f \in [0, B]$，满足 $N(f) \ge 0$。 N 在区间 $[\frac{B}{2}, B]$ 内是严格单调递增函数，并且关于 $\frac{B}{2}$ 为偶函数。

我们取一个 $f_1 \in (0, B]$、 $f_1 \in \mathbb{R}_c$，并计算数值 $C_1(N, f_1)$。对于

$$
P_{f_1} = \int_{\frac{B}{2}-f_1}^{\frac{B}{2}+f_1} \Big(N\Big(\frac{B}{2}+f_1\Big) - N(f)\Big)\, df
$$

我们有】【：】【
“】【

$$
\begin{aligned}
C_1(N, f_1) &= \int_{\frac{B}{2}-f_1}^{\frac{B}{2}+f_1} \ln(P_{f_1}^*(f) + N(f))\, df + \int_0^{\frac{B}{2}-f_1} \ln(N(f))\, df \\
&\quad + \int_{\frac{B}{2}+f_1}^{B} \ln(N(f))\, df - \int_0^{B} \ln(N(f))\, df \\
&= \int_{\frac{B}{2}-f_1}^{\frac{B}{2}+f_1} \ln\Big(N\Big(\frac{B}{2}+f_1\Big)\Big)\, df_1 - \int_{\frac{B}{2}-f_1}^{\frac{B}{2}+f_1} \ln(N(f))\, df. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

由于 $f_1 \in \mathbb{R}_c$，我们有 $\frac{B}{2}+f_1 \in \mathbb{R}_c$，因此 $N(\frac{B}{2}+f_1) \in \mathbb{R}_c$，且 $N(\frac{B}{2}+f_1) > 0$。因此，我们有 $\ln(N(\frac{B}{2}+f_1)) \in \mathbb{R}_c$，进而也有 $2f_1 \ln N(\frac{B}{2}+f_1) \in \mathbb{R}_c$。

现在我们必须重写这个数字。

$$
\begin{aligned}
Z(f_1) &= \int_{\frac{B}{2}-f_1}^{\frac{B}{2}+f_1} \ln N(f)\, df \\
&= \int_0^{B} \ln N(f)\, df - \int_0^{\frac{B}{2}-f_1} \ln N(f)\, df - \int_{\frac{B}{2}+f_1}^{B} \ln N(f)\, df \qquad (16)
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
\int_0^B \ln N(f)\, df = \int_0^B \ln\Big(f - \frac{B}{2}\Big)^2 df + \int_0^B \ln\Big(\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f)\Big)\Big)\, df
$$

我们有$\ln\Big(\cdot - \frac{B}{2}\Big)^2$是关于 $\mathcal{L}^1[0, B]$的可计算函数，见 [41]。这样，我们便有：

$$
\int_0^B \ln\Big(\cdot - \frac{B}{2}\Big)^2 df \in \mathbb{R}_c. \qquad (17)
$$

此外，我们还可以得出的是。

$$
\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f)\Big) = 2^{\log_2 \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f)\right)}
$$

and

$$
\int_0^B \log_2\Big(\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f)\Big)\Big)\, df = \log_2(e) \int_0^B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f)\, df.
$$

我们考虑以下关于 $f \in [0, B]$ 和 $M \in \mathbb{N}$的函数：

$$
\psi_M(f) = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f).
$$

注意， ψ 是一个连续函数。对于 $K \in \mathbb{N}$，，有

$$\begin{aligned}\int_0^B |\psi_{M+K}(f) - \psi_M(f)|\, df &= \int_0^M \sum_{n=M}^{M+K} \left| \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f) \right| df \\ &\leq \sum_{n=M}^{M+K} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} \int_0^M |G_n(f)|\, df \qquad (18) \\ &= \sum_{n=M}^{M+K} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \qquad (19) \\ &< \sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}}.\end{aligned}$$

式（18）成立是因为 ℓ_1- 范数满足三角不等式。式（19）由 $C_n^{(1)}$ 的定义可得。因此，序列 $\{\psi_M(f)\}_{M\in\mathbb{N}}$ 在 ℓ_1- 范数下收敛到函数

$$\psi(f) = \sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f)$$

用于 $f \in [0, B]$。

因此，我们有re热

$$\begin{aligned}\int_0^B \psi(f)\, df &= \lim_{M\to\infty} \int_0^B \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} G_n(f)\, df \\ &= \lim_{M\to\infty} \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \frac{1}{C_n^{(1)}} \int_0^B G_n(f)\, df \\ &= \lim_{M\to\infty} -\sum_{n=0}^{M} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}}.\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ 是一个递归可枚举非递归集，并且根据 [41, 第 1], 章，我们有

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}} = \xi \notin \mathbb{R}_c.$$

接下来，我们必须分析积分 $\int_0^{\frac{B}{2}-f_1} \log N(f)\, df$。我们已经在不等式 (11) 中证明，对于满足 $L \in \mathbb{N}$和 $\frac{1}{L} < f_1$的情形， $M > U3^{L^2}$ 始终满足以下关系：

$$|N_{M+K}(f) - N_M(f)| < \frac{L}{C_{M+1}^{(1)}}.$$

按照与公式 (16) 类似的计算，对于 $f \in [0, \frac{B}{2} - f_1]$ 和 $M > U3^{L^2}$，我们有：

$$|\psi_{M+K}(f) - \psi_M(f)| < \frac{1}{L}.$$

由于 $\{\psi_M(f)\}_{M\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $[0,\frac{B}{2}-f_1]$ 上的连续函数的可计算连续序列。该序列在 $[0,\frac{B}{2}-f_1]$ 上有效地收敛于函数 ψ。 ψ 本身是定义在 $[0,\frac{B}{2}-f_1]$ 上的可计算连续函数。由此以及根据 [41], , 可得

$$\int_0^{\frac{B}{2}-f_1}\psi(f)\,df\in\mathbb{R}_c. \tag{20}$$

沿用同样的论证思路，我们得到 ψ 也是区间 $[\frac{B}{2}+f_1,B]$ 上的可计算连续函数，因此

$$\int_{\frac{B}{2}+f_1}^{B}\psi(f)\,df\in\mathbb{R}_c.$$

由式（16）、（20）和（IV）可知，必有

$$Z(f_1)\notin\mathbb{R}_c,$$

因此

$$C_1(N,f_1)\notin\mathbb{R}_c.$$

由于 $f_1\in\mathbb{R}_c$ 可以取区间 $(0,\frac{B}{2}]$ 中的任意值，我们已经证明了定理 2 的第一个结论。

接下来，我们证明第二个陈述。我们采用反证法，假设第二个陈述不成立。假设存在一个 $f_1\in(0,\frac{B}{2}]$, $f_1\in\mathbb{R}_c$，使得我们可以找到一个由可计算数组成的可计算序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，满足以下条件：

$$u_n\geq u_{n+1}\text{ for }n\in\mathbb{N}\quad\text{ and }\lim_{n\to\infty}u_n=C_1(N,\hat{f}_1).$$

根据第一条陈述的证明，我们有：

$$C_1(N,\hat{f}_1)=a(\hat{f}_1)+\xi$$

其中 $a(\hat{}f_1)\in\mathbb{R}_c$ 和 $\xi=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}}\notin\mathbb{R}_c$。

我们令 $U(M)=-\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{2^{\varphi_{\mathcal{A}}(n)}}$表示 $M\in\mathbb{N}$。于是我们得到一个由可计算数组成的可计算序列，其

$$U(M)\geq U(M+1)\quad\text{ and }\lim_{M\to\infty}U(M)=\xi.$$

如果 C_1（N， f_1） 是可计算数的单调递减序列的极限值，ˆ ˆ那么对于 C_1（N， f_1） $-a$（f_1） 这同样成立。由于 a（f_1） 是一个可计算数，因此存在一个由可计算数组成的单调ˆ递增可计算序列 $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $\lim_{n\to\infty}m_n=a$（f_1）。ˆ ˆ此外，由于 a（f_1） $\geq m_n$，因此 $-a$（f_1） $\leq -m_n$ 也成立。于是我们得到

$$u_n-m_n\geq C_1(N,\hat{f}_1)-a(\hat{f}_1)\quad n\in\mathbb{N}$$

and

$$u_{n+1} - m_{n+1} \leq u_n - m_{n+1} \leq u_n - m_n,$$

也就是说，$\{u_n - m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个由可计算数组成的可计算序列，并且该序列是单调递减的。因此有

$$\lim_{n\to\infty}(u_n - m_n) = \lim_{n\to\infty} u_n - \lim_{n\to\infty} m_n = C_1(N, \hat{f}_1) - a(\hat{f}_1) = \xi. \tag{21}$$

这样，ξ 就是可计算序列的极限值。其中一个可计算序列是单调递减序列，另一个是单调递增序列。这自动意味着 $\xi \in \mathbb{R}_c$，从而产生矛盾。这个矛盾表明我们的假设是错误的，因此不存在收敛到 $C_1(N, f_1)$ 的可计算数单调递减可计算序列ˆ。

□

注 3. 定理 2 表明，存在容量为非可计算数的带限 ACGN 信道。这是信息论中已知的第二个容量被证明为非可计算的实例，此前的实例是文献 *[9]* 中的复合信道情形。在该研究中，作者考察了一个具有有限输入和输出字母表的可计算复合信道 $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。$\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是一个可计算序列，且 $C(\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \notin R_c$。容量 $C(\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ 是一个单调递减可计算序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限值，该序列构成$C(\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}})$的可计算上界；然而，不存在收敛到该容量的下界可计算序列。相比之下，定理 2 表明，对于 $C(N, P)$，也就是具有有色噪声的带限 ACGN 信道，其情况恰恰相反。

注 4. 在 *[12], [17], [21],* 等早期研究中，加性有色高斯噪声信道的容量通常与离散高斯信道的容量联系起来。这是通过对时间连续高斯信道进行离散近似实现的。在分析这些方法时，可以发现，随着离散信道的近似越来越精细，离散信道容量序列逐渐趋近于时间连续加性有色高斯噪声信道的容量。然而，迄今尚未确定近似过程的停止准则。在我们的研究中，这种停止准则是指一种算法：该算法以 $\frac{1}{2^M}$ 的近似误差作为输入，用于计算一个固定加性有色高斯噪声信道的容量；当计算结果与时间连续加性有色高斯噪声信道的容量之间的误差不超过 $\frac{1}{2^M}$ 时，算法便停止近似过程。我们的结果表明，存在一些具有有色噪声的带限 ACGN 信道，对这些信道而言，这样的停止准则并不存在。

注 5. 我们不仅证明了存在非负可计算连续噪声谱密度，还开发了一种算法，可以有效地构造出一个满足定理 2 结论的噪声功率谱 N。该算法以递归函数 $\varphi_{\mathcal{A}}$ 为输入，并计算出 N。递归函数 $\varphi_{\mathcal{A}}$ 生成一个递归可枚举非递归集 $\mathcal{A}$。存在可数无穷多个递归可枚举非递归集 $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots\}$。将同一算法应用于任意其他递归可枚举非递归集 $\mathcal{A}_i$ 的生成函数 $\varphi_{\mathcal{A}_i}$，即可得到另一个具有与 N 相同结构、且满足定理 2 的可计算噪声功率谱 N_i。

定理 3。令 $B > 0$、 $B \in \mathbb{R}_c$ 为任意值。存在可计算连续噪声谱密度$\hat{}N\colon \ [0, B] \to \mathbb{R}^c_{\geq 0}$，使得存在无穷多个可计算 $P \in [0, P_*]$，其中

$$P_* = \int_0^B (N(0) - N(f))\, df,$$

$\hat{}$使得 $P \in \mathbb{R}_c$ 但

$$C(N, \hat{P}) \notin \mathbb{R}_c.$$

此外，不存在一个由可计算数构成的可计算序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其具有 $u_n \geq u_{n+1}$、 $n \in \mathbb{N}$ 和

$$\lim_{n\to\infty} u_n = C(N, \hat{P}).$$

证明。我们考虑公式 (14) 中的非负且可计算的连续功率谱密度 N。

设 $f_1 \in$ （0, $\frac{B}{2}$）、 $f_1 \in \mathbb{R}_c$ 为任意但固定的值。我们有 that

$$P_{f_1} = \int_{\frac{B}{2}-f_1}^{\frac{B}{2}+f_1} (N(B + f_1) - N(f))\, df$$

相应的功率集中在区间 $[\frac{B}{2} - f_1, \frac{B}{2} + f_1]$ 中。成立的是 $\hat{}\ P = P_{f_1}$，因此$\hat{}C(N, P) = C_1(N, f_1)$ 不过，我们已经证明了 $C_1(N, f_1) \notin \mathbb{R}_c$。这样，我们证明了第一个结论。

考虑递归可枚举非递归集族 $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$。对于由公式 (14) 的算法计算得到的每个$N$，只要该算法以任意一个生成$\hat{}$递归可枚举非递归集 $\mathcal{A}_i$ 的递归函数 $\varphi_{\mathcal{A}_i}$ 为输入，这一结果就成立。注意， P 也是 $\varphi_{\mathcal{A}}$ 的函数，因为它依赖于N，而N又由 $\varphi_{\mathcal{A}}$决定。

该定理第二个陈述的证明，沿用了定理3第二个陈述的证明思路。

□

定理4。设 $B>0$、 $B\in\mathbb{R}_c$ 和 $[0,B]$ 为任意值。存在可计算连续噪声谱密度 $N:=[0,B]\to\mathbb{R}^c_{\geq 0}$，使得对于每个 $P>P_*$ 和 $P\in\mathbb{R}_c$，其中

$$P_*=\int_0^B (N(0)-N(f))\,df,$$

始终成立的是

$$C(N,P)\notin\mathbb{R}_c.$$

此外，不存在一个由可计算数构成的可计算序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其具有 $u_n\geq u_{n+1}$、 $n\in\mathbb{N}$ 和

$$\lim_{n\to\infty} u_n=C(N,P).$$

证明。我们考虑公式 (14) 中的非负且可计算的连续功率谱密度 N】【。

令 $P>P_*$, $P\in\mathbb{R}_c$ 为任意但固定的值。

我们有】【:

$$P=P_*+\Delta B$$

因此 $\Delta=\frac{P-P_*}{B}$。由于 P， P_*， $B\in\mathbb{R}_c$，因此我们有 $\Delta\in\mathbb{R}_c$。

因此， P 的最优功率谱密度为

$$P_x^*(f)=N(0)+\Delta-N(f)$$

对于 $f\in[0,B]$，由此可得

$$\begin{aligned}C(N,P)&=\int_0^B \ln(P_x^*(f)+N(f))\,df-\int_0^B \ln N(f)\,df\\&=B\ln(N(0)+\Delta)-\int_0^B \ln N(f)\,df.\end{aligned}$$

我们有 $B\ln(N(0)+\Delta)\in\mathbb{R}_c$，然而我们已经证明了 $\int_0^B \ln N(f)\,df\notin\mathbb{R}_c$。这意味着 $C(N,P)\notin\mathbb{R}_c$，从而证明了定理的第一个结论。

考虑递归可枚举非递归集族 $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$。对于由任意递归函数$\varphi_{\mathcal{A}_i}$ 生成递归可枚举非递归集 $\mathcal{A}_i$ 的情形，利用式（14）的算法计算得到的每个N，这一结果都成立。注意， P_* 也是 $\varphi_{\mathcal{A}}$的函数，因为它取决于 N，而后者由 $\varphi_{\mathcal{A}}$决定。

为了证明第二个结论，我们必须遵循与定理2第二个结论的证明相同的论证思路。

□

推论1. 存在无穷多个 P，其 $P\in\mathbb{R}_c$ 满足定理 3 或 4 的条件，并且不存在可计算的可计算上界序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} u_n=C_1(N,f_1).$$

证明. 假设存在一个可计算的可计算上界序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其 $u_n \geq C$（N， P）对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。考虑公式 (14) 中的 N。令 $\hat{}u_n$ 满足

$$\hat{u}_n = \min_{1\leq k\leq n} u_k.$$

$\{\hat{}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个单调递减的可计算数构成的可计算序列。由此可知 t

$$\lim_{n\to\infty} \hat{u}_n = C(N,P).$$

这意味着 $C(N,P)$ 必须是一个可计算数。然而，在定理 2 的证明中，我们已经证明了 $C(N,P) \notin \mathbb{R}_c$，由此得出结论：我们的初始假设必定有误。 □

备注 6. 推论1指出，我们可以找到一个可计算序列 $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，它有效地收敛到容量，因此可达性部分在算法上是可计算的。然而，无法通过算法计算可达速率 R_n 与容量之间的差距。这一结论的影响不仅在于无法计算出达到容量的码本。即使我们放宽达到容量的要求，允许存在一定的译码错误，仍然无法计算码本大小的上界。

备注 7. 值得注意的是，尽管存在一些带限 ACGN 信道的例子，其功率谱密度是可计算的，而容量却是不可计算数，但这并不一定意味着不可计算容量的逆定理在一般情况下也不可计算。所谓不可计算的逆定理，是指不存在由可计算数构成、渐近紧确的可计算上界序列。为此，考虑复合信道。近期关于 *[9]* 的可计算性研究给出了一个逆定理结果：复合信道容量的逆定理是可计算的，即存在由可计算数构成、渐近紧确的可计算上界序列；但该容量的可达性在算法上不可计算，也就是说，不存在由可计算数构成、渐近紧确的可计算下界序列。

五、讨论

在本文中，我们重点研究了一种简单通信信道的算法性质：带限 ACGN 信道。我们证明，存在容量为不可计算数的此类信道。因此，对于给定的可计算带宽、噪声功率谱和功率约束，不存在能够以指定精度有效计算此类信道容量的算法。此外，我们还证明，此类信道的逆命题结果也无法通过算法计算。具体而言，尽管可以通过算法构造一个序列

一系列收敛至容量的可达速率，无法计算它们与容量相差多远。因此，不可能通过算法计算该信道码本大小的上界。

我们还研究了功率约束对加性有色高斯噪声信道容量可计算性的影响。遗憾的是，我们已经证明，对于那些容量为不可计算数的可计算信道，调整功率约束并不会影响容量的可计算性。此外，调整功率约束也无法使人们能够通过算法计算容量的上界。

对于更复杂的信道，例如有限状态信道、带反馈的有限状态信道，以及相关辅助离散无记忆信道的识别问题，已有研究表明其容量不是博雷尔-图灵可计算的，这意味着不存在能够计算任意信道容量的通用算法。然而，这些信道的容量能否作为一个数值计算出来，仍是一个未解决的问题。通过证明这个特定加性有色高斯噪声信道的容量是一个不可计算数，可以立即得出，其容量无法表示为信道参数和功率约束参数的可计算函数。因此，不存在一种通用算法，能够以噪声功率谱、带宽和功率约束为输入，并根据这些参数计算容量。

作为未来的研究方向，可以尝试确定哪些信道的容量是可计算数。在这些情况下，或许可以将容量表示为信道和功率约束参数的可计算函数，进而研究其计算复杂度。这将有助于开发高效计算容量的算法。

参考文献

[1] G. P. Fettweis 和 H. Boche，《6G：个人触觉互联网——信息论中的开放问题》，BITS 信息论杂志，第 1 卷，第 1 期，第 71–82 页，2021年。[2] ——，《关于 6G 与可信性》，ACM 通讯，第 65 卷，第 4 期，第 48–49 页，2022年。[3] C. E.Shannon、R. G. Gallager 和 E. R. Berlekamp，《离散无记忆信道编码错误概率的下界（一）》，Inf. Contr.，第 10 卷，第 1 期，第 65–103 页，1967 年。[4] S. Arimoto，《一种计算任意离散无记忆信道容量的算法》，IEEE 信息论汇刊，第 18 卷，第 1 期，第 14–20 页，1972年1月。[5] R. Blahut，《信道容量与率失真函数的计算》，IEEE 信息论汇刊，第 18 卷，第 4 期，第 460–473 页，1972年7月。[6] H. Boche、R. F. Schaefer 和 H. V. Poor，《容量达成输入分布的算法可计算性与可逼近性》（即将出版）。[7] ——，《香农遇上图灵：有限状态信道容量的不可计算性与不可逼近性》，Commun. Inf. Syst.，第 20 卷，第 2 期，第 81–116 页，2020年。

[8] A. Grigorescu、H. Boche、R. F. Schaefer 和 H. V. Poor，《带反馈的有限状态信道容量：算法与优化理论性质》，arXiv 预印本 arXiv:2201.11639，2022年。[9] H. Boche、R. F. Schaefer 和 H. V. Poor，《信道不确定性下的通信：算法视角与有效构造》，IEEE信号处理汇刊，第 68 卷，第 6224–6239 页，2020年。[10] ——，《相关辅助离散无记忆信道的识别容量：解析性质与表征》，载于 IEEE 国际信息论研讨会论文集，法国巴黎，2019年7月，第 470–474 页。[11] C. E. Shannon，《保密系统的通信理论》，贝尔系统技术期刊，第 28 卷，第 4 期，第 656–715 页，1949年10月。[12] ——，《噪声环境中的通信》，Proc. IRE，第 37 卷，第 1 期，第 10–21 页，1949年。[13] A. D. Wyner，《带限高斯信道的容量》，贝尔系统技术期刊，第 45 卷，第 3 期，第 359–395 页，1966年。[14] R. B. Ash，《时间连续高斯信道的容量与错误界》，Inf.Contr.，第 6 卷，第 1 期，第 14–27 页，1963年。[15] C. E. Shannon，《高斯信道中最优码的错误概率》，贝尔系统技术期刊，第 38 卷，第 3 期，第 611–656 页，1959年。[16] R. B. Ash，《信息论》。Courier Corporation，2012年。[17] T. M. Cover，《信息论基础》。John Wiley & Sons，1999年。[18] S. Ihara，《连续系统信息论》。World Scientific，1993年，第 2 卷。[19] D. Tse 和 P. Viswanath，《无线通信基础》。剑桥大学出版社，2005年。[20] M. S. Pinsker，《随机变量与过程的信息及信息稳定性》。Holden-Day，1964年。[21] R. G. Gallager，《信息论与可靠通信》。John Wiley & Sons, Inc.，1968年。[22] G. Forney 和 G. Ungerboeck，《线性高斯信道的调制与编码》，IEEE 信息论汇刊，第 44 卷，第 6 期，第 2384–2415 页，1998年10月。[23] A. J. Goldsmith 和 M. Effros，《存在码间干扰和有色高斯噪声的广播信道容量区域》，IEEE 信息论汇刊，第 47 卷，第 1 期，第 219–240 页，2001年1月。[24] D. Hughes-Hartogs，《退化频谱高斯广播信道的容量》。博士学位论文，1975年。[25] G. S. Poltyrev，《广播信道之和的容量》，Problemy Peredachi Informatsii，第 15 卷，第 2 期，第 40–44 页，1979年。[26] A. El Gamal，《两个不匹配广播信道的乘积与和的容量》，Problemy Peredachi Informatsii，第 16 卷，第 1 期，第 3–23 页，1980年。[27] W. Hirt 和 J. L. Massey，《存在码间干扰的离散时间高斯信道容量》，IEEE 信息论汇刊，第 34 卷，第 3 期，第 38–38 页，1988年。[28] S. Verdu，《有记忆且有或无帧同步的多址信道》，IEEE 信息论汇刊，第 35 卷，第 3 期，第 605–619 页，1989年。[29] R. S. Cheng 和 S. Verd´u，《存在码间干扰的高斯多址信道：容量区域与多用户注水》，IEEE 信息论汇刊，第 39 卷，第 3 期，第 773–785 页，1993年5月。[30] A. M. Turing 等，《论可计算数及其在判定问题中的应用》，伦敦数学会会刊，第 2 卷，第 42 期，第 230–265 页，1936年。[31] A. M. Turing，《论可计算数及其在判定问题中的应用：更正》，伦敦数学会会刊，第 2 卷，第 43 期，第 544–546 页，1937年。[32] K. Weihrauch，《可计算分析：导论》。Springer Science & Business Media，2000年。[33] K. G¨odel，《逻辑函数演算公理的完备性》，Monatshefte f¨ur Mathematik und Physik，第 37 卷，第 1 期，第 349–360 页，1930年。

[34] ——,《形式数学系统中的不可判定命题》，Stephen C. Kleene 和 J. Barkley Rosser 编写的油印讲义，第39–74页，1934年。[35] S. C. Kleene，《元数学导论》。阿姆斯特丹：North-Holland Publishing；格罗宁根：P. Noordhoff N.V.，1952年。[36] M. L. Minsky，《Post“标记”问题及图灵机理论中其他主题的递归不可解性》，《数学年刊》，第437–455页，1961年。[37] J. Avigad、V. Brattka 和R. Downey，《可计算性与分析：Alan Turing 的遗产》。英国剑桥：剑桥大学出版社，2014年。[38] J. G. Proakis 和 M. Salehi，《数字通信》。纽约：McGraw-Hill，2001年，第4卷。[39] S. Haykin，《通信系统》，第4版。John Wiley & Sons，2001年。[40] M. F. Flanagan，《关于信息率优化中倒水定理的证明》，载于《国际信号与电子系统会议》。Citeseer，2006年。[41] M. B. Pour-El 和 J. I. Richards，《分析与物理学中的可计算性》。剑桥大学出版社，2017年。[42] R. I. Soare，《递归可枚举集与度》，《美国数学会通报》，第84卷，第6期，第1149–1181页，1978年。