arXiv:2305.02824v1 [math.QA] 4 May 2023

之字形代数上的 A_∞ 范畴的辫群作用

Benjamin Cooper、You Qi、Joshua Sussan

2023年5月4日

谨以此文献给 *Igor Frenkel*，以庆祝他七十岁生日

摘要

我们构造了之字形代数的微分分次增强。Khovanov、Seidel 和 Thomas 曾利用这些代数构造范畴化辫群作用。这些增强通过 Koszul 对偶的一个变体，与 p-微分分次结构相关。我们证明，之字形代数上的极小模型 A_∞-结构是非形式的。我们在这一设定下构造了一个辫群作用，并提出一种辛几何解释。

目录

1 引言 1 2 预备知识 3 3 微分分次代数

$A_n^!$ **84 第 A_∞ 之字形代**

数 13 5 范畴对称性 18 6 关于与辛拓扑的联系的评注 20

1 引言

20 世纪 90 年代，Crane 和 Frenkel 猜想，Witten、Reshetikhin 和 Turaev 的三维拓扑场论可以用当时正在几何表示论中兴起的新范畴语言重述 [CF94]。多年来，这些思想揭示了广阔的数学图景。尽管这一猜想仍未解决，但我们如今所知的许多内容预计都会在最终答案中发挥作用。在这些内容中，由 Khovanov 和 Seidel 引入的之字形代数 C_{n-1}（其中 $n \geq 2$ 是自然数） [KS02], 也 [RZ03], 堪称一种最简单的非平凡例子：它足够精巧，其有界同伦范畴 $K^b(C_{n-1})$ 能够支持辫群的忠实范畴表示

$$\Psi_n : \mathrm{Br}_n \to \mathrm{Aut}(K^b(C_{n-1})) \qquad \mathrm{Ker}(\Psi_n) = \{e\},$$

但又足够简单，因此在许多地方都会出现。 C_{n-1} 可以用范畴$\mathcal{O}(\mathfrak{sl}_n)$和 $\mathbb{P}^{n-1}$上的层来解释。之字形代数也自然出现在Nakajima箭图簇 [FKS05], 的同调实现中，以及一组拉格朗日球[KS02]的自同态代数中。Seidel和Thomas利用了后一个观察，在许多不同的例子中构造了范畴化辫群作用 [ST01]。

在一个略有不同的方向上，Chen、Khovanov 和 Stroppel 独立地将某种代数 A_n 上分次模的格罗滕迪克群 $K_0(A_n) \otimes \mathbb{C}$ 作为其构造的一个特例进行了研究。

与 C_{n-1} 相关，证明它可以被识别为表示 $(\mathbb{C}(q)^2)^{\otimes n}$ 中 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ [CK14, Str09] 的次高权空间。在这一对应关系下，同态 Ψ_n 变为 Burau 表示，该表示在低维拓扑中得到了深入研究 [Bir74]。

在 [Kho16], 中，Khovanov 提出，通过引入一个 p-幂零导子，将 q 设为 p 次单位根这一操作范畴化

$$\partial : A \to A \qquad \text{such that} \qquad \partial^p = 0$$

并从分次 A-模范畴转向 (A, ∂)-模的三角范畴（见第 2 节）。这促使 Khovanov 和第二作者在 nilHecke 代数、Khovanov-Lauda-Rouquier 代数及 Webster 代数上发现了 p-幂零算子；这些代数构成了量子群及其表示的许多范畴化的基础 [KQ15, EQ16, KQS17, QS18]。注意到代数 A_n 的 Koszul 对偶 $A_n^!$ 具有这样的 p- 导子 $\partial \in \mathrm{End}(A_n^!)$，且该导子与其作为对应于 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 表示的第二高权的 Webster 代数的识别相容（$\mathbb{C}(q)^2$），这促成了对 $(A_n^!, \partial)$ 的深入研究，并最终构造出上述范畴表示 Ψ_n 在 p 次单位根处取值的类比 [QS16, QS17]。

本文继续研究之字形代数，考察这一 p-微分分次结构 ∂ 在 $A_n^! \to A_n^!$ Koszul 对偶性下会发生什么。简言之，

$$\text{what is } (A_n^!, \partial)^!?$$

当 $p = 2$ 时，我们回答了这个问题。在这种情况下，$(A_n^!, \partial)$ 成为一个微分分次代数，我们计算其 Koszul 对偶 A_∞-代数。我们分阶段完成这一工作。$A_n^!$ 的简单模 $\{L_i\}$ 与 $(A_n^!, \partial)$ 的简单模之间存在自然双射。我们发现，引理 3.3 中 $(A_n^!, \partial)$ 上简单模 L_i 的余纤维化分解 $\mathbb{P}(L_i) \to L_i$ 与对应简单模 L_i 在 $A_n^!$ 上的投射分解密切相关，但并不相同。接着，我们构造与代数 A_n的生成元相对应的分解之间的链映射。这些链映射满足的关系使我们能够引入微分分次代数 (E_n, d)，作为 $(A_n^!, \partial)$ 与 A_n 之间的中介。更确切地说，

1. 存在微分分次代数的典范嵌入：$E_n \hookrightarrow \mathrm{END}(\oplus_i \mathbb{P}(L_i))$，它们诱导同构 $\mathrm{H}(E_n, d) \cong \mathrm{Ext}^*(\oplus_i L_i, \oplus_i L_i)$。

2. 存在代数的典范同构：$\mathrm{H}(E_n, d) \cong A_n$。

从这个意义上说，代数 (E_n, d) 是代数 A_n 的微分分次（DG）增强。像这样的情形正适合应用传递定理 [Kel03, CS19]：代数 $A_n \cong \mathrm{H}(E_n, d)$ 支持一个极小 A_∞-结构 (A_n, m)，其中 $m = \{m_r \colon A_n^{\otimes r} \to A_n[2-r]\}_{r \geq 1}$，且 $m_1 = 0$，这使得 (A_n, m) 与 (E_n, d) 作为 A_∞-代数等价。上面提出的问题可以用以下方程来回答：

$$(A_n^!, \partial)^! \cong (E_n, d) \cong (A_n, m).$$

第 4 节给出了代数 (E_n, d) 上这个最小 A_∞-代数结构的计算。这个稳定的最小 A_∞-代数是非平凡的，公式见定理 4.4；这表明，非稳定代数 A_n and C_{n-1} 上的 A_∞-结构也必定是非平凡的。这个结果有些出人意料，因为 Seidel 和 Thomas 利用之字形代数上的形式性（即所有 A_∞-结构都消失），构造了他们的辫群表示，参见 [ST01，引理 4.21]。我们在之字形代数上得到的 A_∞-结构并不与 Seidel 和 Thomas 的定理矛盾，因为这里采用了不同的分次。更准确地说，运算$m_3 \in CC^3(C_n, C_n)^{-1}$ （见第 4 节）所处的 Hochschild上同调次数并未涵盖在他们的消失结果中。相关研究中也有相应的消失结论，参见 [LW23、BW22]。

在第5节中，我们验证了 A_∞-代数之字形代数的导出范畴支持辫群作用。具体而言，我们利用通过 Koszul 对偶性构造得到的导出Morita等价，将在 $(A_n^!, \partial)$ 的背景下定义的辫群作用传递过来。之字形代数上的 A_∞-结构m 能够促成辫群表示，这一事实有力地表明，它与 Crane和Frenkel猜想密切相关，并且在这一背景下具有自然性。

最后，之字形代数出现在各种不同的背景中。自然会产生这样一个问题：我们能否在其中某一种背景下解释这种新的 A_∞结构？在第6节中，我们将回顾如何在曲面的 Fukaya 范畴中找到 A_n 或 C_{n-1}，为什么存在辫群表示，并了解我们从 A_∞ 扰动引理中发现的方程如何通过曲面上圆盘与曲线之间的关系来理解。

组织结构。 我们在第 2 节回顾同调代数中的一些工具。在第 3 节中，我们引入对偶之字形代数，构造简单模 L_i 的分解 $\mathbb{P}(L_i)$，并构造这些分解之间的链映射。在第 4 节中，我们引入微分分次代数 (E_n, d) 及其子代数 (S_n, d)，并使用传递定理计算 S_n 上同调中的 A_∞ 结构；该上同调即为之字形代数 C_{n-1}。在第5节中，我们构造范畴化辫群表示。在第6节中，我们借助曲面上的曲线考察稳定的 A_∞ 结构。

记号。基环将取为特征为2的域。以下列出本文中将发挥作用的代数：

1. $A_n^!$ 是具有原始DG结构的Koszul代数（其中一个简单模不是球面的）。2. A_n 是 $A_n^!$ 的Koszul对偶（其中一个射影模不是球面的）。这几乎就是锯齿代数（zigzag algebra）。

3. C_{n-1} 是 A_n的一个子代数。这就是之字形代数，所有 $n-1$ 射影模都是球面的。4. E_n 是 $A_n^!$的简单模的DG自同态代数，其同调是 A_n。 5. E_n' 是 E_n 的某个子代数，其同调是 A_n。 6. S_{n-1} 是 E_n的一个DG子代数。其同调是 C_{n-1} （之字形代数）。

这些代数大多在第 4 节开头定义。下面的图可能会有帮助。

$$\begin{array}{ccc} (S_{n-1}, d) & \xrightarrow{\subset} & (E_n, d) \\ \mathrm{H}\downarrow & & \downarrow\mathrm{H} \\ C_{n-1} & \xrightarrow{\subset} & A_n \end{array}$$

致谢。 作者谨此感谢 Igor Frenkel，他总是与我们分享对数学和物理学的广阔视野，并给予我们持续不断的鼓励。

J.S. 谨此感谢 Ben Elias 和 Anthony Licata，就 DG 增强的之字形代数相关问题与他们进行讨论。

Y.Q. 获得 p部分资y supp助，来自y 西蒙斯基金会数学家合作资助。

B.C. 感谢 K. Kawamuro 和 M. Tehrani 的友好合作。西蒙斯奖#638089 为他的参与提供了便利。

2 预备知识

辫群。令 q 为形式变量， $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 为 Laurent 多项式环。Temperley-Lieb 代数 TL_n 在 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 上由元素 u_i（其中 $i = 1, \ldots, n-1$）生成，并满足以下关系：

(i) $u_i u_j = u_j u_i$ 若 $|i-j| > 1$, (ii) $u_i^2 = (1+q)u_i$ 对于 $i = 1, \ldots, n-1$, (iii) $u_i u_{i+1} u_i = q u_i$ 对于 $i = 1, \ldots, n-1$ 以及 $u_i u_{i-1} u_i = q u_i$ 对于 $i = 2, \ldots, n$。

考虑 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-格 $V_{n-1} = \oplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}[q, q^{-1}] v_i$。定义

$$u_i(v_j) := \begin{cases} (1+q)v_i & i = j \\ v_i & j = i-1 \\ q v_i & j = i+1 \\ 0 & |i-j| > 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

通过将 q 映射到一个选定的复数，对 $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 进行基变换到 $\mathbb{C}$，我们将所得的 $(n-1)$ 维表示称为（约化）*Burau* 表示，仍记作 V_{n-1}。

辫群 Br_n 由元素 t_i（其中 $i=1,\dots,n-1$）生成，并满足以下关系

(i) $t_it_j=t_jt_i$ if $|i-j|>1$,

(ii) $t_it_{i+1}t_i=t_{i+1}t_it_{i+1}$（其中 $i=1,\dots,n-2$）。

对于 $i=1,\dots,n-1$，将辫群生成元 t_i 映射到 $1-u_i$，可定义从 Br_n 的群代数到 TL_n的同态。通过此同态，我们也可以将 V_{n-1} 视为辫群的一个表示。

同调代数。本节汇集了我们将要用到的一些必要的同调代数背景知识。更多详情请参阅参考文献 [Kel94, Kel06b]。

固定一个特征为 2 的基域 $\Bbbk$。未加修饰的张量积 $\otimes$ 表示在 $\Bbbk$上的张量积。全文采用法式约定 $\mathbb{N}:=\{0,1,2,\dots\}$。

A 微分分次代数（*DG* 代数）(A,d_A) 在 $\Bbbk$ 上由一个 $\mathbb{Z}$-分次代数 $A=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}A^i$ 和一个 A 的一次次数端态射 d_A 构成，该端态射满足二次幂为零且遵循莱布尼茨法则：

$$d_A^2\equiv 0,\quad d_A(ab)=d_A(a)b+ad_A(b),$$

对于任意 a、$b\in A$。在 (A,d_A) 上的左（分别为右）DG 模（M,d_M）是一个左（分别为右）A-模，配备了一个次数为 1、平方为零的自同态 d_M, $d_M^2\equiv 0$，该自同态与 A 上的微分作用相容：

$$d_M(ax)=d_A(a)x+ad_M(x)\quad(\text{resp. } d_M(xa)=d_M(x)a+xd_A(a)).$$

对于 DG 模（M,d_M），我们还将考虑移位模（$M[i],d_{M[i]}$），其中次数为 j 的分量 $M[i]^j$ 等于 M^{i+j}。在下文中，我们将仅考虑以下类型的 DG 代数。

定义 2.1。如果微分分次代数 A 满足以下三个条件，则称其为正的。

(i) 代数 A 是非负分次的，$A\cong\oplus_{i\in\mathbb{N}}A^i$，且每个固定次数上的维数均有限。

(ii) 齐次零次部分 A^0 是半单的。

(iii) 微分 d_A 在 A^0上平凡作用。

当不会引起混淆时，我们将省略 DG 代数和 DG 模的微分下标。我们改编了 [KQ15 第 2] 节中的一些基本定义，以适用于 A 为正的情形；关于 DG 模同调理论的基本定义和技巧概要，请读者参阅上述文献。关于 *Hopfological* 代数 背景下这一主题的更多信息，可参见 [Qi14]。设 $H=\Bbbk[d]/(d^2)$。我们将使用记号 A_d–mod（分别表示 $\mathcal{C}(A)$、$\mathcal{D}(A)$），来指称 A上的 DG 模的阿贝尔范畴（分别为同伦范畴、导出范畴）。这里，A_d 表示爆破积代数[1],，它作为向量空间同构于 $A\otimes H$，并满足以下关系：$A\cong A\otimes 1\subset A\otimes H$、$H\cong 1\otimes H\subset A\otimes H$ 是子代数，以及元素之间的交换规则。

$$(1\otimes d)\cdot(a\otimes 1)=(a\otimes 1)\cdot(1\otimes d)+d(a)\otimes 1,$$

其中 a 是 A 的任意元素。

当 A 是一个正的微分分次代数时，A_d 也是一个正分次代数，其零次部分同构于 A^0。在 A^0 中选取一组两两不同构的不可分解幂等元 $\{e_i|i\in I\}$，并令 $P_i:=Ae_i$。按照构造，P_i 是秩一自由模 A 的微分分次直和项。

作为约定，给定分次代数 A 上的两个分次模 M、N，我们将 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 定义为 M 与 N 之间保持次数的 A-模映射所构成的空间。我们定义

$$\mathrm{HOM}_A(M,N):=\oplus_{l\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_A(M,N[l]).$$

范畴 $\mathcal{C}(A)$、$\mathcal{D}(A)$ 是三角范畴，配备了可逆的移位 自函子 $[l]$，适用于任意$l\in\mathbb{Z}$。

[1]通常记作 $A\#H$。

定义 2.2. 设 A 是一个微分分次代数， M 是 A 上的一个 DG 模。

(i) 若对任意 DG 模的满射拟同构 $N_1 \twoheadrightarrow N_2$，所诱导的映射

$$\mathrm{HOM}_A(M,N_1)\longrightarrow\mathrm{HOM}_A(M,N_2)$$

复形之间的映射是一个同伦等价。

(ii) 当 A 为正的时，若 M 具有有限、穷尽的递增滤过 $F^\bullet$，其各项均为微分分次子模，且其子商

$$F^\bullet/F^{\bullet-1}\cong P_i[l_i]$$

为某些射影 A-模 P_i、 $i=1$、.....、 n 和 $l_i\in\mathbb{Z}$，则称 P_i 为有限胞腔模 。

余纤维模之所以“好”，是因为我们能够很好地控制导出范畴 $\mathcal{D}(A)$ 中它们之间的态射空间。具体而言，对于任意余纤维模 M，存在一个关于 N 函子性的 $\Bbbk$-向量空间同构态射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(M,N)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(M,N),$$

它由局部化函子 $\mathcal{C}(A)\longrightarrow\mathcal{D}(A)$ 所诱导。容易验证有限胞腔模是余纤维的。显然，若 V 是有限维复形 V，则 $A\otimes V$ 是有限胞腔模。在 DG 语境下，有限胞腔模也称为射影模 [BK90] 的“单侧扭曲复形”。

例 2.3. 设 A 是一个微分分次代数。假设 a_0 是 A 中的一个元素，且满足 $d_A(a_0)=0$。下面我们构造一个有限胞腔模的例子，它不能写成 $A\otimes V$ 的形式。

考虑由两个生成元 $M:=Av_0\oplus Av_1$ 生成的自由 A-模，其中 $\deg(v_0)-\deg(v_1)=1-\deg(a_0)$。定义微分 d_M 如下。在生成元上，它的作用为

$$d_M(v_0)=0,\quad d_M(v_1)=a_0v_0.$$

利用莱布尼茨法则将其延拓到整个 M 上。我们留给读者作为练习，验证 $d_M^2\equiv 0$，且 M 不同构于某个二维复形的张量积 A 。

两个 DG 模 $M,N\in\mathcal{D}(A)$ 之间的态射空间 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{D}(A)}(M,N)$，典范同构于复形 $\mathrm{RHOM}_A(M,N)$ 的零次上同调

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(M,N)\cong\mathrm{H}^0(\mathbf{R}\mathrm{HOM}_A(M,N)) \tag{2.2}$$

其中 $\mathrm{RHOM}_A(M,N):=\mathrm{HOM}_A(\mathbb{P}(M)\ N)$ 是利用 M的余纤维化替换 $\mathbb{P}(M)\ \to M$计算得到的。更一般地，对于三角范畴中的任意两个对象，都可以关联如下的“Ext 空间”。

定义 2.4. 给定任意 DG 模 $M,N\in\mathcal{D}(A)$ 和 $i\in\mathbb{Z}$，我们定义 i 阶 *p-DG* Ext-空间，或简称它们之间的 Ext-空间为

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}(A)}(M,N):=\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(M,N[i]),$$

并定义 总 Ext-空间 为

$$\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{D}(A)}(M,N):=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}(A)}(M,N).$$

也可以在同伦范畴 $\mathcal{C}(A)$ 中作出这些定义，但我们不会用到它们。由式 (2.2) 可知，存在一个双函子同构

$$\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{D}(A)}(M,N)\cong\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{H}^i(\mathbf{R}\mathrm{HOM}_A(M,N)). \tag{2.3}$$

W接下来回顾紧致模的概念，它是在导出范畴中讨论的。 .

定义 2.5. 设 A 为一个 DG 代数。若且唯若对于任意一族 DG 模 N_i，其中 i 取值于某个指标集 I，自然映射满足.....，则称 A 上的 DG 模 M 是紧致的（在导出范畴$\mathcal{D}(A)$中）。

$$\oplus_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(M,N_i)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(M,\oplus_{i\in I}N_i)$$

是 $\Bbbk$-向量空间之间的一个同构。

$\mathcal{D}(A)$ 中由紧致模组成的严格满子范畴记作 $\mathcal{D}^c(A)$。它是三角范畴，并称为紧导出范畴。

对于正的微分分次代数，有限胞腔模与紧致模之间有着密切的联系。用 $\mathcal{F}(A)$ 表示 A 上所有有限胞腔模的集合，并令 $\overline{\mathcal{F}}(A)$ 表示 $\mathcal{F}(A)$ 在 $\mathcal{D}(A)$ 中关于同构取闭包所得的子范畴。注意，自然包含函子 $\overline{\mathcal{F}}(A)\subset\mathcal{D}(A)$ 可经由紧导出范畴 $\mathcal{D}^c(A)$分解。

命题 2.6。 自然包含函子

$$\overline{\mathcal{F}}(A)\subset\mathcal{D}^c(A)$$

是三角范畴之间的一个等价。 □

换言之，对于正的微分分次代数，任意紧致模都与一个有限胞腔模拟同构。该命题的证明可见于 [Sch11]。对三角范畴 $\mathcal{D}^c(A)$ 应用通常的格罗滕迪克群构造，我们得到微分分次代数A的 DG 格罗滕迪克群，记作 $K_0(A)$。 $K_0(A)$ 上的阿贝尔群结构源于由 $\mathcal{D}(\Bbbk)$ 对 $\mathcal{D}^c(A)$ 的范畴作用所诱导的模结构$K_0(\Bbbk)\otimes K_0(A)\to K_0(A)$。

分解。设 M 是一个 DG 模。我们将 DG 模 M 的一个*DG* 分解定义为 DG 模的拟同构 $P\longrightarrow M$，使得 P是余纤维的。已知 DG 模总是存在分解 [Kel94, 定理 3.1]，尽管这些分解通常并不唯一。然而，一般而言，并非每个 DG 模都有有限胞腔模分解。命题 2.6 指出，对于正的微分分次代数，当且仅当该模在导出范畴中是紧致的时，才会出现这种情况。

记号 2.7。接下来，我们将介绍一种便于改写有限胞腔模的方法。设 M 是一个 DG 模，带有有限递增滤过 $F^\bullet(\bullet\in\mathbb{Z})$，其中 $F^i/F^{i-1}:=P_i$。于是，我们将这个滤过模示意性地写成其伴随分次的直和；若映射 $d_M(p_i)$ 投影到 $\phi(p_i)\in P_j$（必然有 $j<i$），则从 P_i 到 P_j 画一条箭头，并以映射 ϕ 标记，其中 p_i 是 P_i 中的一个元素在M中的提升。例如，下面的图表示一个滤过 DG 模

$$P_n\xrightarrow{\phi_n}P_{n-1}\xrightarrow{\phi_{n-1}}\cdots\xrightarrow{\phi_{m+2}}P_{m+1}\xrightarrow{\phi_{m+1}}P_m$$

其中，滤过被隐式地理解为 $F^i=\sum_{k=n}^i P_k$。在每个 F^i 上，微分结构通过复合运算归纳地定义。

$$d_{F^i}:P_j\longrightarrow P_j+P_{j-1}\subset F^i,\quad p_j\mapsto(d_{P_j}(p_j),\phi_j(p_j)),$$

其中 $m\le j\le i$。

或者，可以将 M 上的原过滤视为：将双重分次的 A-模 $M\cong\bigoplus_{i,\ j\in\mathbb{Z}}P_j^i$的双重分次合并为单一分次后所得到的滤过，该单一分次将始终称为 q-分次，并取 $F^j:=\sum_{k\ge j,\ i\in\mathbb{Z}}P_k^i$。注意， d_M不一定保持双重分次。

例如，在这种记号下，例 2.3 中的滤过微分分次模将用这种记号表示为

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{\cdot a_0}A\longrightarrow 0.$$

引理 2.8. 设 $\phi:\ M\longrightarrow N$ 是 A 上 *DG* 模之间的映射。态射 ϕ 的锥同构于滤过微分分次模

$$M[1]\xrightarrow{\phi}N\ ,$$

其中 N 位于同调次数零。ϕ 的余锥同构于滤过模 e

$$M \xrightarrow{\phi} N[-1]\,,$$

其中 M 处于同调次数零。

为方便后文，我们将 ϕ 的（余）锥简记为

$$M[1] \xrightarrow{\phi} N \qquad \Big(\text{resp. } M \xrightarrow{\phi} N[-1]\Big)\,.$$

*Pro*的。这由锥和余锥的定义可得。参见 [KQ15，定义 2.14]. □

引理 2.9。 *[QS16，引理 3.11]* 设 $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\phi} L \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$ 是爆破积代数 A_d上的分次模之间的短正合列。那么滤过微分分次模

$$K[2] \xrightarrow{\phi} L[1] \xrightarrow{\psi} M \tag{2.4a}$$

是无环的。

光滑微分分次代数。现在我们回顾光滑微分分次代数的概念。为简洁起见，全文假设 A 是一个有限维微分分次代数。

定义 2.10. DG 代数 A 称为左（分别为右）光滑，如果所有简单左（分别为右）DG 模在左（分别为右）DG 模的导出范畴中都是紧致的。

给定一个有限维微分分次代数 A，我们有一个严格满子范畴 $\mathcal{D}^f(A) \subset \mathcal{D}(A)$，它由与有限维左（分别为右）微分分次模拟同构的微分分次左（分别为右）模组成。$\mathcal{D}^c(A)$ 到 $\mathcal{D}(A)$ 的自然包含经由 $\mathcal{D}^f(A)$ 分解，因为 A 是有限维的。

以下结果众所周知。为求完整起见，我们列出一篇在 Hopfological 代数背景下证明该结果的参考文献。

引理 2.11. *[QS16，引理 3.15]* 若 A 左（分别地，右）光滑，则自然包含函子 $\mathcal{D}^c(A) \longrightarrow \mathcal{D}^f(A)$是左（分别地，右）*DG* 模的三角范畴之间的等价。

关于 A_∞-代数的背景。我们简要回顾一下域特征为 2 的 A_∞-代数的一些基本材料，参见文献 [Kel01] 和 [Kel06a]。

域 $\Bbbk$ 上的一个 A_∞-代数 A 是一个定义在 $\Bbbk$ 上的 $\mathbb{Z}$-分次向量空间，带有运算 m_n： $A^{\otimes n} \to A$ 其次数为 $2-n$，并满足关系

$$\sum m_u(1^{\otimes r} \otimes m_s \otimes 1^{\otimes t}) = 0,$$

其中求和遍历所有分解 $n = r+s+t$ 和 $u = r+1+t$。

域 A 上的右 A_∞-模是一个带有运算 m_n的 $\mathbb{Z}$-分次向量空间 M： $M \otimes A^{\otimes n-1} \to M$ 其次数为 $2-n$，并满足与 A_∞-代数类似的关系。详情参见 [Kel01，第 4 节2]。左 A_∞-模以类似方式定义。

域 A 上的右 A_∞-模的态射是一列映射 f_n： $M \otimes A^{\otimes n-1} \to N$ 其次数为 $1-n$，并且对每个 $n \geq 1$，都存在一个关系

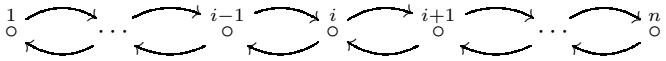
$$\sum f_u \circ (1^{\otimes r} \otimes m_s \otimes 1^{\otimes t}) = \sum m_u(f_r \otimes 1^{\otimes s}),$$

其中，左侧的求和遍历所有分解 $n = r+s+t, r, t \geq 0, s \geq 1, u = r+1+t$，右侧的求和遍历所有分解 $n = r+s, r \geq 1, s \geq 0$ 和 $u = 1+s$。态射的复合定义见 [Kel01，第 4 节。2]

A_∞-双模 M 是一个带 $\mathbb{Z}$分次的向量空间，配备满足某些关系的运算 $m_{i,\,j}$： $A^{\otimes i-1} \otimes M \otimes A^{\otimes j-1} \to M$ 其次数为 $3-i-j$。更多详情请参见 [Kel06a 第 3]节。可以在一个 A_∞代数 A上构造右 A_∞-模 M 与左 A_∞-模 N 的张量积，并将其记为$M \boxtimes_A N$。有关详情同样请参见 [Kel06a 第 3] 节。

3 微分分次代数 $A_n^!$

箭图表示。令 $\Bbbk$ 为一个特征为 2 的域。令 n 为一个大于或等于二的自然数， Q_n 为以下箭图：



(3.1)

令 $\Bbbk Q_n$ 为基域 $\Bbbk$ 上与 Q_n 关联的路径代数。遵循 Khovanov-Seidel [KS02], 的记号，例如，我们用符号 $(i|j|k)$ 表示一条路径：它从顶点 i 出发，经过 j （必然是 $j = i \pm 1$），并终止于 k；其中 i、j、k 是箭图 Q_n 的顶点。路径的复合定义如下：

$$(i_i|i_2|\cdots|i_r)\cdot(j_1|j_2|\cdots|j_s) = \begin{cases} (i_i|i_2|\cdots|i_r|j_2|\cdots|j_s) & \text{if } i_r = j_1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $i_1, \ldots, i_r$ 和 $j_1, \ldots, j_s$ 是 Q_n 中相邻顶点组成的序列。

定义 3.1。 代数 $A_n^!$ 是路径代数 $\Bbbk Q_n$ 关于以下关系取商所得：

$$(i|i-1|i) = (i|i+1|i)\ \ (i = 2, \ldots, n-1),\ \ (1|2|1) = 0.$$

这是一个分次代数，其生成元的次数如下：$(i|i+1)$ 的次数为 **1**，$(i|i-1)$ 的次数为 **0**，而 (i) 的次数为 **0**。

注释 **3.2.** 在文献中， $A_n^!$ 上的分次通常取为路径长度分次 .

代数 $A_n^!$ 与范畴 $\mathcal{O}(\mathfrak{gl}_n)$ 的极大奇异块 Morita 等价，并且同构于一个特定的 Webster 代数。有关更多详情，请参见 [QS16]。

代数 $A_n^!$ 是 Koszul，其二次对偶同构于 [KS02] 中研究的代数 A_n。

箭图代数 $A_n^!$ 具有一个微分 d，其在路径生成元上的定义为

$$d(i|i+1) = (i|i+1|i|i+1), \qquad d(i|i-1) = 0,$$

并通过 Leibniz 法则扩展到整个代数。有时为方便起见，我们会将顶点 i 处的环 $(i|i+1|i) = (i|i-1|i)$ 简写为 c_i，于是 $d(i|i+1) = c_i(i|i+1) = (i|i+1)c_{i+1}$。

在本文余下部分，我们将专门研究一族正的 DG 代数（定义 2.1）。现在设 A 是一个正的 DG 代数，$\{e_i | i = 1, \ldots, n\}$ 是 A 中两两不同构的不可分解幂等元的完备列表。定义 P_i （分别为 ${}_iP$）为 DG 模 $A \cdot e_i$ （分别为 $e_i \cdot A$），并定义 $L_i := P_i/A' \cdot P_i$ （分别为 ${}_iL := {}_iP/{}_iP \cdot A'$），其中 $A' = \oplus_{i>0} A^i$ 是 A 的增广理想。于是， A 左（分别为右）光滑，当且仅当所有 L_i （分别为 ${}_iL$）、 $i = 1$、 ..... 、 n 在导出范畴中都是紧致的。此外，对任意有限维微分分次代数都存在自然的范畴配对，

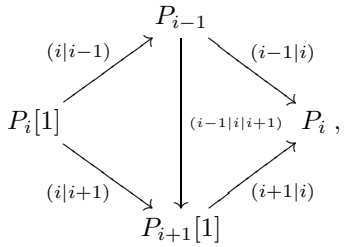
$$\mathbf{R}\mathrm{HOM}_A(-,-) : \mathcal{D}^c(A) \times \mathcal{D}^f(A) \longrightarrow \mathcal{D}(\Bbbk) \tag{3.3}$$

它通过引理 2.11 中的等价 $\mathcal{D}^c(A) \longrightarrow \mathcal{D}^f(A)$ 在 $\mathcal{D}^c(A)$ 上诱导出一个配对。该配对下降为格罗滕迪克群上的半线性非退化配对

$$[\mathbf{R}\mathrm{HOM}_A(-,-)] : K_0(A) \times K_0(A) \longrightarrow \mathbb{Z}, \tag{3.4}$$

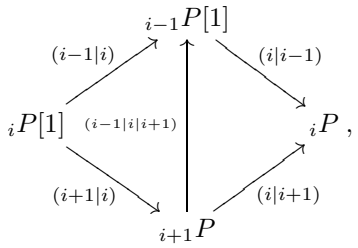
当所有 L_i（$i = 1$， ..... ， n）都是绝对不可约时，它是完美的。

引理 3.3。 *(i)* 对于 $i = 1, \ldots, n-1$， 左 *DG* 模 L_i 拟同构于有限胞腔模 $\mathbb{P}(L_i)$



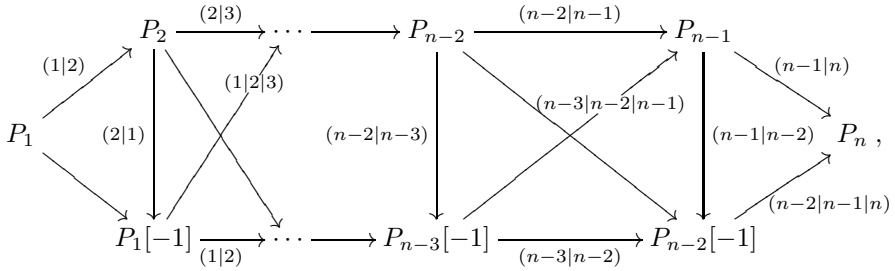
(3.5)

右 *DG* 模 ${}_iL$ 拟同构于有限胞腔模 $\mathbb{P}({}_iL)$



(3.6)

(ii) 左 *DG* 模 L_n 拟同构于有限胞腔模 $\mathbb{P}(L_n)$



(3.7)

其中所有未加装饰的箭头都是恒等映射。右 *DG* 模 ${}_nL$ 拟同构于有限胞腔模 $\mathbb{P}({}_nL)$

$$ {}_{n-1}P[1] \xrightarrow{(n|n-1)} {}_nP\,. \tag{3.8}$$

证明。 第一个陈述是 [QS16] 的 $p=2$ 情形。

直接检查可知，(3.7) 中的模实际上是一个 DG 模。这个对象 $\mathbb{P}(L_n)$ 可以通过从 P_n 开始，再向下和向左、然后向上添加模来过滤。更确切地说：

$$F_1 = P_n, \quad F_2 = P_n \oplus P_{n-2}[-1], \ldots, F_{2j-1} = F_{2j-2} \oplus P_{n-j+1}, \quad F_{2j} = F_{2j-1} \oplus P_{n-j-1}[-1], \ldots, F_{2n-2} = \mathbb{P}(L_n)\,.$$

□

推论 3.4。 微分分次代数 $(A_n^!, d)$ 是光滑的。

证明。 该引理表明， $A_n^!$ 上的简单左、右 DG 模都是有限胞腔的，因此是导出范畴中的紧对象。

□

Temperley–Lieb 作用。 现在我们回顾 [QS16] 中构造的 $\mathcal{D}^c(A_n^!)$ 上的范畴化 Temperley–Lieb 代数作用。

定义 3.5。 设 i 是 $\{1, \ldots, n-1\}$ 中的一个整数。

(i) 第 i 个杯函子 是函子

$$\cup_i \colon \mathcal{D}(\Bbbk) \longrightarrow \mathcal{D}(A_n^!), \qquad \cup_i(V) := L_i \otimes V.$$

(ii) 第 i 个帽函子定义为

$$\cap_i \colon \mathcal{D}(A_n^!) \longrightarrow \mathcal{D}(\Bbbk), \qquad \cap_i(M) := {}_iL \otimes^{\mathbf{L}}_{A_n^!} M.$$

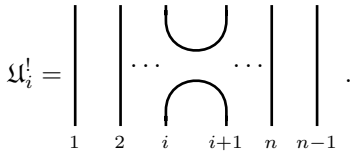
由于引理 3.3，上述在 $\mathcal{D}(A_n^!)$与 $\mathcal{D}(\Bbbk)$之间相互作用的函子会将紧对象映射为紧对象。此外，存在一个函子同构。

$$\cap_i\,(M) = {}_iL \otimes^{\mathbf{L}}_{A_n^!}\,(M) \cong \mathbf{R}\mathrm{HOM}_{A_n^!}(L_i, M) \tag{3.9}$$

反过来，这使得可以针对每个 $i \in \{1, \dots, n-1\}$ 定义一个自函子

$$\mathfrak{U}_i^! = \cup_i \circ \cap_i : \mathcal{D}^c(A_n^!) \longrightarrow \mathcal{D}^c(A_n^!), \tag{3.10}$$

通常以图示形式表示为

$\mathfrak{U}_i^! =$ 

这一图示记法解释了前文引入的“杯”和“帽”这两个名称。

定理 3.6。 *[QS16，定理 5。10]* 对于 $i = 1, .., n-1$，函子 $\mathfrak{U}_i^!$ 是自双伴随的，并满足以下函子同构关系。

(i) $\mathfrak{U}_i^! \circ \mathfrak{U}_i^! \cong \mathfrak{U}_i^! \oplus \mathfrak{U}_i^![1]$, *(ii)*
$\mathfrak{U}_i^! \circ \mathfrak{U}_j^! \cong \mathfrak{U}_j^! \circ \mathfrak{U}_i^!$ 用于 $|i-j| > 1$,
(iii) $\mathfrak{U}_i^! \circ \mathfrak{U}_j^! \circ \mathfrak{U}_i^! \cong \mathfrak{U}_i^!$ 用于 $|i-j| = 1$。

通过函子 $\mathfrak{U}_i^!$ 的自伴随性，可以针对每个 $i \in \{1, \dots, n-1\}$，如下定义 $\mathcal{D}^c(A_n^!)$ 上的辫子函子。对于任意 $M \in \mathcal{D}(A_n^!)$，令

$$\mathfrak{T}_i^!(M) := L_i \otimes \mathbf{R}\mathrm{HOM}_{A_n^!}(L_i, M)[1] \xrightarrow{\lambda} M. \tag{3.11}$$

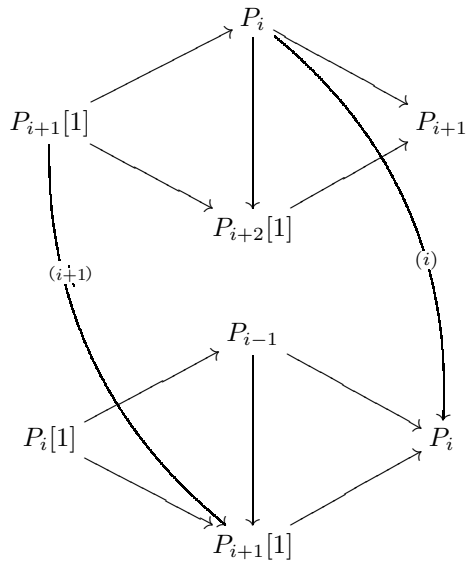
这里 λ 是典范配对映射。另外，λ 可以被识别为双伴随对 $\cup_i$ 和 $\cap_i$ 的余单位映射（通过公式（3.9）将 $\cap_i(M)$ 与 $\mathbf{R}\mathrm{HOM}^{A_n^!}(L_i, M)$ 对应起来）。

定理 3.7。 *[QS16，定理 5.14]* 函子 $\mathfrak{T}_i^!$, $i = 1, \dots, n-1$ 在 $\mathcal{D}^c(A_n^!)$ 上可逆。此外，它们满足以下范畴辫子关系：

1. $\mathfrak{T}_i^! \mathfrak{T}_j^! \cong \mathfrak{T}_j^! \mathfrak{T}_i^!$ *if* $|i-j| > 1$,
2. $\mathfrak{T}_i^! \mathfrak{T}_{i+1}^! \mathfrak{T}_i^! \cong \mathfrak{T}_{i+1}^! \mathfrak{T}_i^! \mathfrak{T}_{i+1}^!$.

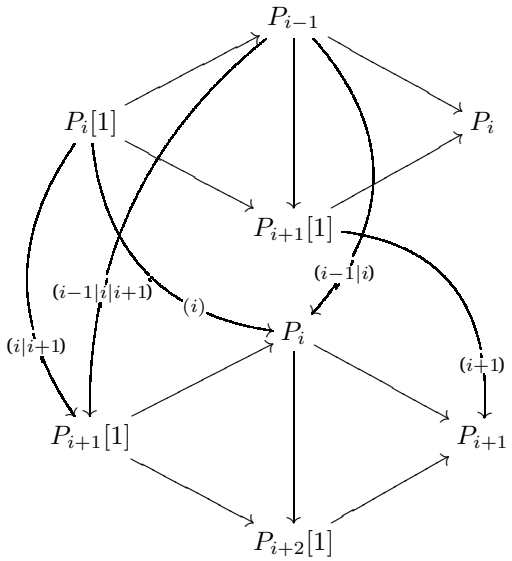
简单对象之间的非平凡映射。 引理 3.3 允许构造余纤维替换 $\mathbb{P}(L_i)$ 之间的显式 DG 模映射。我们在此记录这些映射，以供后续使用。

唯一的非平凡映射（在同伦意义下唯一）$\alpha_{i,\ i+1}$：$L_{i+1} \to L_i$ 如下所示：



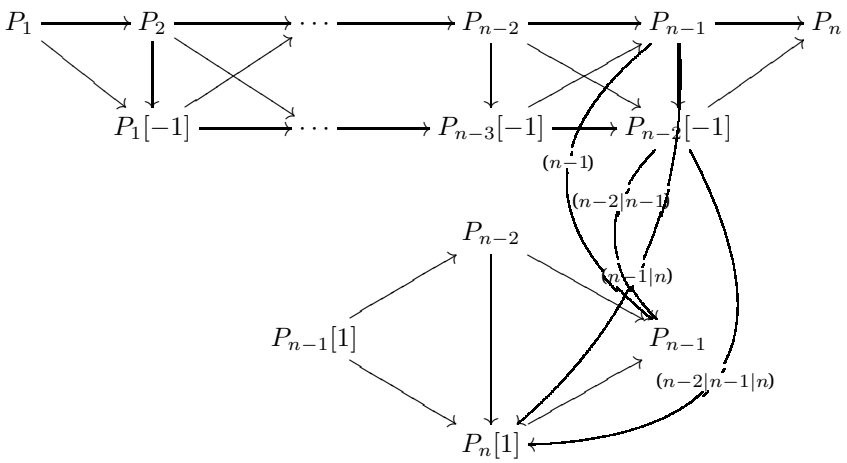
. (3.12)

唯一的映射（在同伦意义下唯一）$\alpha_{i+1,\ i}\colon\ L_i \to L_{i+1}$ 如下所示：



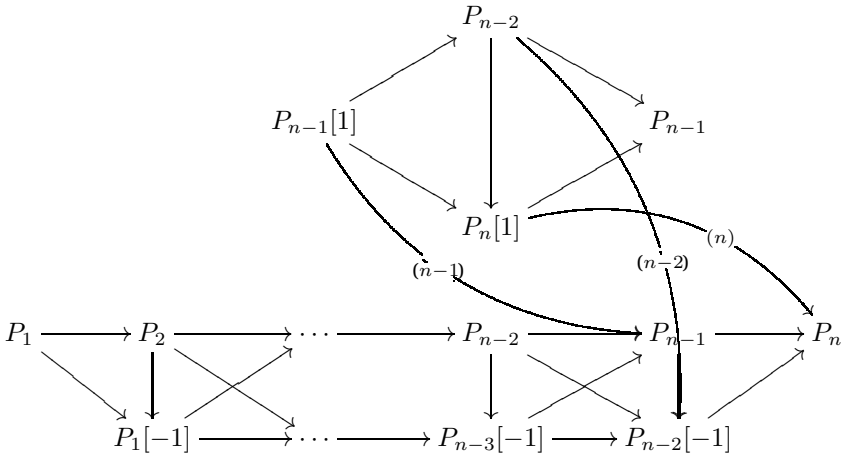
. (3.13)

唯一的（在同伦意义下）非平凡映射 $\alpha_{n-1,n}\colon\ L_n \to L_{n-1}$ 如下 :



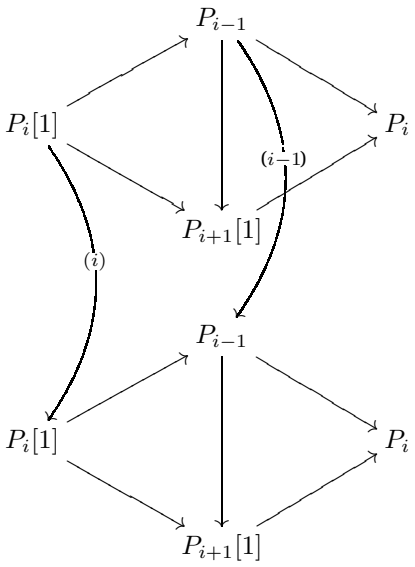
. (3.14)

唯一的（在同伦意义下）非平凡映射 $\alpha_{n,\ n-1}\colon\ L_{n-1} \to L_n$ 由下式给出：



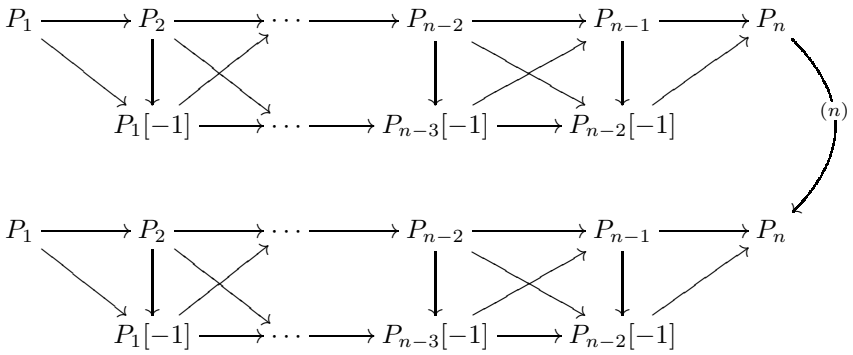
. (3.15)

一些同伦。定义映射 $h_i\colon L_i \to L_i$，对于 $i = 1, \dots, n-1$，如下：



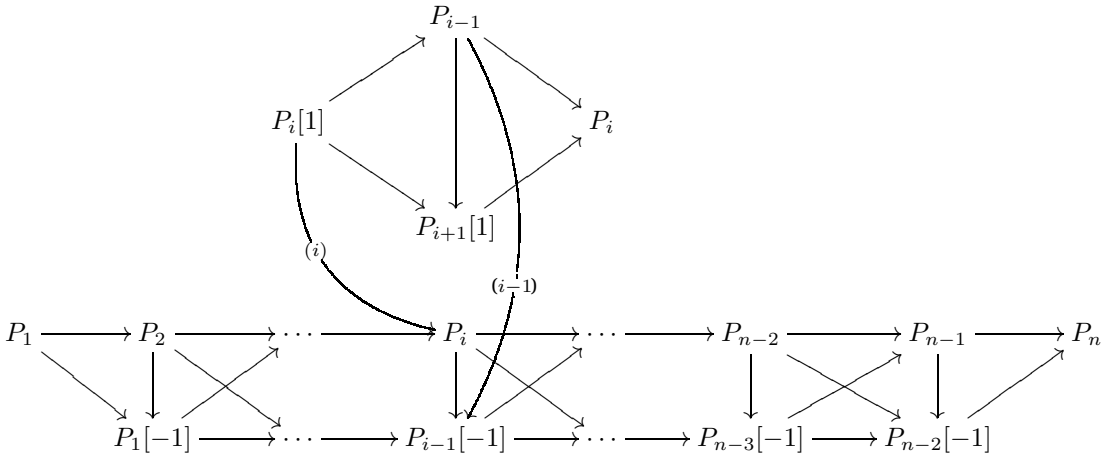
. (3.16)

令 $h_n\colon L_n \to L_n$ 为映射



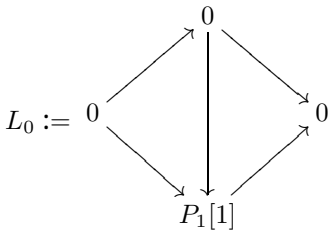
. (3.17)

最后，我们定义映射 $h_{n,i}\colon L_i \to L_n$



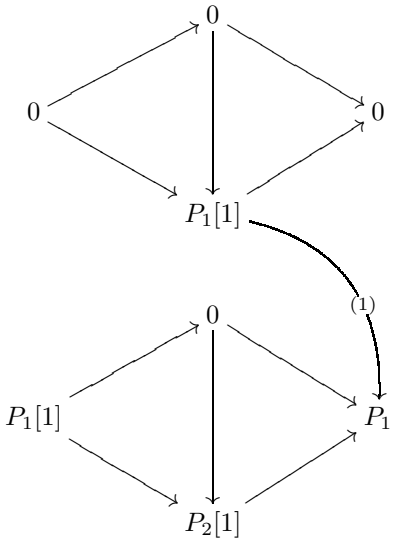
. (3.18)

辅助映射。 定义如下记号较为方便。



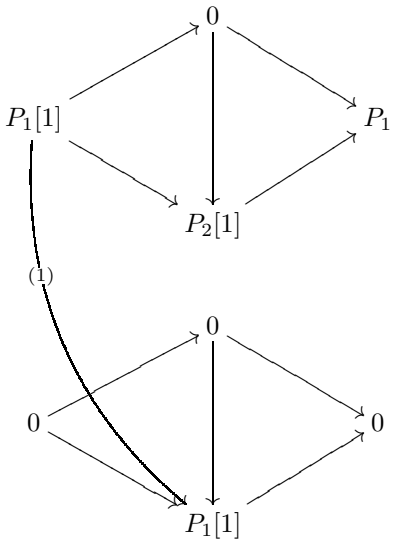
.

现在我们定义映射 $\alpha_{1,0}$: $L_0 \to L_1$



(3.19)

和 $\alpha_{0,\ 1}$: $L_1 \to L_0$



. (3.20)

注意，$\alpha_{1,0}\alpha_{0,1}$ 是零伦的。

4 A_∞ zigzag代数

之字形代数。我们现在回顾在 [KS02] 中发挥关键作用的代数 A_n 的定义。当按照路径长度进行分次时，这个代数与代数 $A_n^!$ 互为 Koszul对偶，后者也按照路径长度进行分次。

长度。

定义 4.1. 环 A_n 是路径代数 $\Bbbk Q_n$ 关于以下关系的商

$$(i|i\pm1|i\pm2)=0,\ \ (i|i+1|i)=(i|i-1|i),\ \text{for}\ \ (i=2,\dots,n-1),\ \ (n|n-1|n)=0,$$

$$\deg((i))=0,\quad \deg((i|i+1))=0,\quad \deg((i+1|i))=1.$$

之字形代数 C_{n-1} 是由以下元素给出的幂等元子代数

$$C_{n-1}=((1)+\cdots+(n-1))A_n((1)+\cdots+(n-1)).$$

为便于后续使用，我们定义投射模

$$Z_i:=A_n\cdot(i),\quad i=1,\dots,n, \tag{4.1}$$

它们 是 A_n 的不可分解直和项。于是 C_{n-1} 也可以被识别为 wi th

$$C_{n-1}\cong \mathrm{END}_{A_n}(\oplus_{i=1}^{n-1}Z_i)\ . \tag{4.2}$$

对偶 DG 代数 a E_n。 现在我们将中间的微分分次代数 E_n 定义为分次端同态代数

$$E_n:=\mathrm{END}_{A_n^!}(\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{P}(L_i)). \tag{4.3a}$$

端同态代数上的微分按惯例定义为

$$d(f)(x):=d(f(x))+f(d(x)) \tag{4.3b}$$

对任意齐次的 $f\in E_n$ 和 $x\in\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{P}(L_i)$。由于我们在特征为二的域上工作，(4.3b) 中通常应出现的符号省略了。

在 E_n中，我们有自然的幂等元 $1_i, i=1,\dots,n$，它们在 $\mathbb{P}(L_i)$ 上作用为恒等映射，在 $j\neq i$ 时则在 $\mathbb{P}(L_j)$ 上作用为零。我们还将对 E_n 作如下幂等元截断。考虑 $e=1_1+\cdots+1_{n-1}$。于是得到幂等元子代数 $S_{n-1}:=eE_ne$。

我们将使用余纤维 DG 模

$$Q_i:=E_n1_i,\quad i=1,\dots,n, \tag{4.4}$$

根据构造，它是 E_n 的一个直和 DG 直项。

为了计算 E_n 的同调上的 A_∞-结构，我们将考虑由上文记录的显式 DG 模映射定义的 E_n 的一个子代数。令 E_n' 为由以下元素生成的 $\Bbbk$-代数。

- 1_i for $i=1,\dots,n$, $\deg(1_i)=0$.
- $\alpha_{i+1,i},\alpha_{i,i+1}$ for $i=1,\dots,n-1$, $\deg(\alpha_{i+1,i})=1,\deg(\alpha_{i,i+1})=0$.
- h_i for $i=1,\dots,n$, $\deg(h_i)=0$.
- $h_{n,i}$ for $i=1,\dots,n-2$, $\deg(h_{n,i})=1$.

我们设$h_{n,n-1}=\alpha_{n,n-1}$。

命题 4.2。 这些生成元满足以下一组关系：

- 这些元素 1_i 是正交幂等元。
- 这些幂等元 1_i 在其他生成元上按恒等映射作用。
- $\alpha_{i,\ i+1}\alpha_{i+1,\ i+2}=0$，对于 $i=1$，.....，$n-2$。
- $\alpha_{i+2,\ i+1}\alpha_{i+1,\ i}=0$，对于 $i=1$，.....，$n-3$。
- $h_i^2=h_i$，对于 $i=1$.....n。

- $h_i\alpha_{i,\ i+1} = 0$，对于 $i = 1 \ldots\ldots n-1$。
- $\alpha_{i,\ i+1}h_{i+1} = \alpha_{i,\ i+1}$，对于 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ n-2$。
- $\alpha_{i,i+1}\alpha_{i+1,i}\alpha_{i,i+1} = 0$。
- $\alpha_{n-1,\ n}h_n = 0$。
- $\alpha_{i+1,\ i}h_i = h_{i+1}\alpha_{i+1,\ i}$，对于 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ n-2$。
- $\alpha_{n,n-1}h_{n-1} + h_n\alpha_{n,n-1} = \alpha_{n,n-1}$。
- $h_{n,\ i}h_i = h_{n,\ i}$，对于 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ n-2$。
- $h_nh_{n,\ i} = 0$，对于 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ n-2$。
- $h_{n,\ i}\alpha_{i,\ i+1} = 0$，对于 $i = 1, \ldots, n-2$。

DG 结构由生成元定义为

- $d(1_i) = 0$,
- $d(\alpha_{i+1,\ i}) = d(\alpha_{i,\ i+1}) = 0$,
- $d(h_i) = \alpha_{i,\ i-1}\alpha_{i-1,\ i} + \alpha_{i,\ i+1}\alpha_{i+1,\ i}$，对于 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ n-1$,
- $d(h_{n,\ i}) = h_{n,\ i+1}\alpha_{i+1,\ i}$。

证明。这些都是直接的计算。 □

可以很容易地计算幂等化子空间 $1_iE'_n1_j$ 及其同调 $1_i\mathrm{H}(E'_n)1_j$ 的基，如下所示。

首先假设 $i, j \neq n$。

$$1_iE'_n1_i = \Bbbk\langle 1_i, h_i, \alpha_{i,i+1}\alpha_{i+1,i}, \alpha_{i,i-1}\alpha_{i-1,i}\rangle \qquad d(h_i) = \alpha_{i,i+1}\alpha_{i+1,i} + \alpha_{i,i-1}\alpha_{i-1,i}$$

$$\mathrm{H}(1_iE'_n1_i) = \Bbbk\langle 1_i, c_i\rangle$$

$$1_iE'_n1_j = 0 \quad \text{for} \quad |i-j| > 1$$

$$1_iE'_n1_{i+1} = \Bbbk\langle \alpha_{i,i+1}\rangle$$
$$\mathrm{H}(1_iE'_n1_{i+1}) = \Bbbk\langle \alpha_{i,i+1}\rangle$$

$$1_{i+1}E'_n1_i = \Bbbk\langle \alpha_{i+1,i}, \alpha_{i+1,i}\alpha_{i,i+1}\alpha_{i+1,i}, \alpha_{i+1,i}h_i\rangle \qquad d(\alpha_{i+1,i}h_i) = \alpha_{i+1,i}\alpha_{i,i+1}\alpha_{i+1,i}$$
$$\mathrm{H}(1_{i+1}E'_n1_i) = \Bbbk\langle \alpha_{i+1,i}\rangle$$

其次，假设 i 或 j 是 n。

$$1_nE'_n1_n = \Bbbk\langle 1_n, h_n, \alpha_{n,n-1}\alpha_{n-1,n}\rangle \qquad d(h_n) = \alpha_{n,n-1}\alpha_{n-1,n}$$

$$\mathrm{H}(1_nE'_n1_n) = \Bbbk\langle 1_n\rangle$$
$$1_nE'_n1_i = \Bbbk\langle h_{n,i}, h_{n,i+1}\alpha_{i+1,i}\rangle \qquad d(h_{n,i}) = h_{n,i+1}\alpha_{i+1,i} \quad \text{for } i = 1, \ldots, n-2$$
$$\mathrm{H}(1_nE'_n1_i) = 0 \quad \text{for } i = 1, \ldots, n-2$$

$$1_iE'_n1_n = 0 \text{ for } i = 1, \ldots, n-2$$
$$\mathrm{H}(1_iE'_n1_n) = 0 \quad \text{for } i = 1, \ldots, n-2$$

$$1_n E'_n 1_{n-1} = \Bbbk\langle \alpha_{n,n-1}, \alpha_{n,n-1}\alpha_{n-1,n}\alpha_{n,n-1}, h_n\alpha_{n,n-1}\rangle \qquad d(h_n\alpha_{n,n-1}) = \alpha_{n,n-1}\alpha_{n-1,n}\alpha_{n,n-1}$$
$$\mathrm{H}(1_n E'_n 1_{n-1}) = \Bbbk\langle \alpha_{n,n-1}\rangle$$

$$1_{n-1} E'_n 1_n = \Bbbk\langle \alpha_{n-1,n}\rangle$$
$$\mathrm{H}(1_{n-1} E'_n 1_n) = \Bbbk\langle \alpha_{n-1,n}\rangle$$

命题 4.3。 存在一个代数同构 $A_n \cong \mathrm{H}(E'_n) \cong \mathrm{H}(E_n)$。

证明。 这显然可由代数中的关系以及上述同调计算得出。 □

A_∞上的结构 C_{n-1}。 考虑幂等元子代数 $C_{n-1} \subset \mathrm{H}(E_n)$。我们使用扰动引理计算幂等元代数 $C_{n-1} \cong \mathrm{H}(S_{n-1})$ 上的 A_∞-结构。

令 $\overrightarrow{\alpha}_i = \alpha_{i,i+1}\alpha_{i+1,i}$ 和 $\overleftarrow{\alpha}_i = \alpha_{i,i-1}\alpha_{i-1,i}$。 现在我们如下定义线性映射 p、 j 和 H。

$$\begin{aligned} p(h_i) &= 0 \\ p(\alpha_{i,i+1}) &= (i|i+1) \\ p(\alpha_{i+1,i}) &= (i+1|i) \\ p(\overrightarrow{\alpha}_i) &= (i|i+1|i) \\ p(\overleftarrow{\alpha}_i) &= (i|i+1|i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j((i|i+1)) &= \alpha_{i,i+1} \\ j((i+1|i)) &= \alpha_{i+1,i} \\ j((i|i+1|i)) &= \overrightarrow{\alpha}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(\overrightarrow{\alpha}_i) &= 0 \\ H(\overleftarrow{\alpha}_i) &= h_i \\ H(\alpha_{i+1,i}\overrightarrow{\alpha}_i) &= \alpha_{i+1,i}h_i \\ H(\overrightarrow{h}_i) &= 0 \\ H(\alpha_{i+1,i}h_i) &= 0. \end{aligned}$$

这些数据总结于 (4.5) 中。

$$H \circlearrowright S_{n-1} \underset{j}{\overset{p}{\rightleftarrows}} C_{n-1} \tag{4.5}$$

扰动引理（见 [Kel06a，定理 2.3]）确定了 A_∞-结构于 C_{n-1} is given by

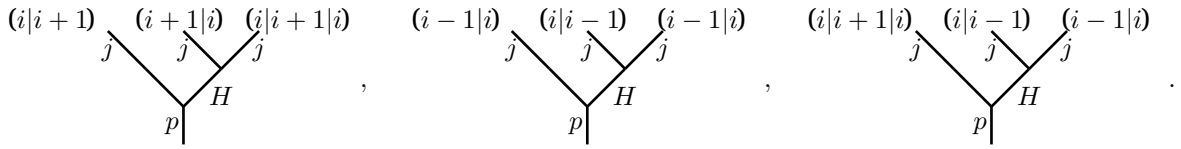
$$m_k = \sum_T m_k^T \tag{4.6}$$

其中 T遍历具有 k 个叶子的平面有根二叉树，而 m_k^T 由以下树形图合成给出：将每个叶子标记为 j，每个分支点标记为 S_{n-1}中的乘法 μ，每条内部边标记为 H，根标记为 p。注意，此 A_∞ 结构在 A_∞ 同构意义下是唯一的。

定理 引理 4.4. 对于 $k > 3$，所有高阶运算 m_k 均消失。存在三类 m_3 运算。 :

$$m_3((i|i+1),(i+1|i),(i|i+1|i)) = (i|i+1|i)$$
$$m_3((i-1|i),(i|i-1),(i-1|i)) = (i-1|i)$$
$$m_3((i|i+1|i),(i|i-1),(i-1|i)) = (i|i+1|i).$$

产生这些运算的非零树如下：



证明。 显然，这些树产生了定理中所述的非平凡运算，并且在这些情况下，(4.6) 中的其他项 m_k^T 均为零。

为了说明输入数超过 3 的树为零，首先注意到 H 的可能输出为h_i 和$\alpha_{i+1,\ i}h_i$。

如果一棵树只有 3 个叶子，那么不难看出，唯一非平凡的可能性就是定理中所述的那些情况。

如果叶子数超过三个，那么在树的根处， H 的两个输出必须在E'_n 中非平凡地相乘，然后通过 p映射到 C_n 中的某个非零元素。由于$H(x)H(y)$的唯一非零输出是 h_i 和 $\alpha_{i+1,\ i}h_i$，而它们经由 p映射后为零，因此我们得出结论：当 $k > 3$时，不存在任何非平凡运算 m_k。 □

Hochschild上同调不消失。 本节中，我们证明当 $n \geq 4$时，映射 $m_3 \in C^3(C_{n-1}, C_{n-1})$ 不是 Hochschild 上边界。具体而言，传递定理给出了定理4.4中的赋值。将其扩张为零后，映射 m_3 : $C_{n-1}^{\otimes 3} \to C_{n-1}$ 可解释为 Hochschild上链复形中的一个次数为 -1的元素 $m_3 \in C^3(C_{n-1}, C_{n-1})^{-1}$，

$$\cdots \to C^2(C_{n-1}, C_{n-1})^{-1} \xrightarrow{\delta} C^3(C_{n-1}, C_{n-1})^{-1} \to \cdots,$$

计算代数 C_{n-1}的 Hochschild上同调的次数 -1 部分。我们在此证明，不存在满足 $\delta m = m_3$的映射 $m \in C^2(C_{n-1}, C_{n-1})^{-1}$。由于边界映射 δ 保持次数，且传递定理保证 $\delta m_3 = 0$，下面的计算足以证明 m_3 在 $\mathrm{HH}^3(C_{n-1}, C_{n-1})^{-1}$ 中确定了一个非平凡类。

现在，对于任意映射 $m \in C^2(C_{n-1}, C_{n-1})^{-1}$，即 m 是 $\mathrm{Hom}(C_{n-1}^{\otimes 2}, C_{n-1}[1])$ 中的一个元素，由齐次性可知，存在常数 α_i、 b_i、 c_i、 d_i 和 η_i，它们由 C_{n-1}、 $1 \leq i \leq n-1$ 的幂等元 i 标记，使得

$$m((i|i+1),(i+1|i)) = \alpha_i(i)$$
$$m((i|i+1|i),(i|i+1)) = b_i(i|i+1)$$
$$m((i|i+1|i),(i|i-1)) = c_i(i|i-1)$$
$$m((i|i+1|i),(i|i+1|i)) = d_i(i|i+1|i)$$
$$m((i|i-1),(i-1|i|i-1)) = \eta_i(i|i-1).$$

通过代入计算，方程

$$(\delta m)(x,y,z) = xm(y,z) - m(xy,z) + m(x,yz) - m(x,y)z$$

在输入 $(x,y,z) \in$上 $C^{\otimes 3}$ 其形式为 $((i|i+1),(i+1|i),(i|i-1)),((i|i-1),(i-1|i|i-1),(i-1|i)),((i|i+$

$(i+1|i)$, $(i|i+1|i)$ 和 $((i|i+1|i), (i|i+1), (i+1|i))$，由此得到方程

$$\begin{aligned} c_i + \alpha_i &= 0 \\ b_{i-1} + \eta_i &= 0 \\ \eta_{i+1} + d_i + \alpha_i &= 1 \\ \alpha_i + d_i + b_i &= 0 \end{aligned}$$

它们彼此矛盾。为得出这些方程，$(i-1)$、(i)、$(i+1)$ 必须属于 C_{n-1}，因此 $n \geq 4$。

5 范畴对称性

本节中，我们在 A_∞-代数 C_{n-1} 的紧致导出范畴上构造一个（弱）范畴 Temperley-Lieb 代数和辫群作用。为简化记号，我们常记 $C = C_{n-1}$。

对于 $i = 1, \ldots, n-1$，令 $C_i := C(i)$ 且 ${}_iC := (i)C$。另设 $B_i = C_i \otimes {}_iC$。这个 (C, C)-双模可视为来自 DG 双模 $S_{n-1}1_i \otimes 1_i S_{n-1}$ 在 $S_{n-1} \otimes S_{n-1}$ 上的上同调。由此可知，B_i 在 $C \otimes C$ 上有唯一的最小 A_∞-结构。

引理 5.1. 双模 B_i 具有 A_∞-结构

$$m_{k,l} \colon C^{\otimes k-1} \otimes B_i \otimes C^{\otimes l-1} \to B_i$$

次数为 $3-k-l$，由

$$m_{k,l} = 0 \text{ if } k \text{ and } l > 0 \qquad m_{k,1} = m_k \otimes \mathrm{Id} \qquad m_{1,l} = \mathrm{Id} \otimes m_l$$

证明. 不难验证，这在双模上定义了一个 A_∞-结构。 □

引理 5.2. 在 (C, C)-双模 C 上，存在一个 A_∞-结构

$$m_{i,j} \colon C^{\otimes i-1} \otimes C \otimes C^{\otimes j-1} \to C$$

次数为 $3-i-j$，由 $m_{i,j} = m_{i+j-1}$ 给出。

证明. 同样不难验证，这是双模 C 上的一个 A_∞-结构。更多细节见 [Tra08，引理 4.1]。

□

引理 5.3。存在一个 A_∞-双模映射 $f_{i,j} \colon B_k \to C$，其定义为 $f_{i,j} = 0$，但 $i = 2, j = 1$ 或 $i = 1, j = 2$ 的情况除外。在这些其他情况下

$$\begin{aligned} f_{2,1}(\alpha \otimes [\beta(k) \otimes (k)\gamma)]) &= m_3(\alpha, \beta(k), (k)\gamma) \\ f_{1,2}([\alpha(k) \otimes (k)\beta)] \otimes \gamma) &= m_3(\alpha(k), (k)\beta, \gamma). \end{aligned}$$

证明。这是一个直接但繁琐的计算，可以验证这定义了一个 A_∞-映射。 □

定义 5.4. 考虑导出范畴 $\mathcal{D}_\infty(C)$，并令 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$。

(i) 函子 $\mathcal{U}_k$ 是导出张量函子

$$\mathfrak{U}_k : \mathcal{D}_\infty(C) \longrightarrow \mathcal{D}_\infty(C), \quad M \mapsto B_k \boxtimes_C M.$$

(ii) 函子 $\mathcal{T}_k$ 是由单侧扭曲复形给出的导出张量函子。

$$\mathfrak{T}_k : \mathcal{D}_\infty(C) \longrightarrow \mathcal{D}_\infty(C), \quad M \mapsto (B_k \xrightarrow{f} C) \boxtimes_C M.$$

定理 5.5。令 $\mathcal{D}^c_\infty(C)$ 为 A_∞-代数 C 的紧导出范畴。

(1) 该函子 $\mathcal{U}_i, i \in \{1, \ldots, n-1\}$ 在 $\mathcal{D}^c_\infty(C)$ 上定义了范畴化 *Temperley–Lieb* 代数作用 .

(2) 函子 $\mathcal{T}_i, i \in \{1, \dots, n-1\}$ 在 $\mathcal{D}^c_\infty(C)$ 上定义了范畴化辫群作用。

证明。 证明基本上归结为在特征为二的域上特化的[QS16] 中构造的 Br_n 在 $\mathcal{D}^c(A^!_n)$ 上的范畴化辫群作用。

根据构造，存在一个 DG导出范畴的等价关系。

$$\mathcal{D}(A^!_n) \cong \mathcal{D}(E_n). \tag{5.1a}$$

另一方面，代数 A_n 是 E_n 的上同调，并带有其极小的 A_∞-代数结构。根据关于 A_∞-代数的标准论证（例如参见 [Kel02，第 3.3] 节）， E_n 与 A_n之间存在一个 A_∞-代数拟同构，它诱导出一个三角等价。

$$\mathcal{D}(E_n) \cong \mathcal{D}_\infty(A_n). \tag{5.1b}$$

导出等价（5.1a）和（5.1b）下降为相应紧导出范畴之间的等价。

接下来，定义 $\mathfrak{U}_i$ 和 $\mathfrak{T}_i$ 的 A_∞-双模结构也可以自然地与从作用于 $\mathcal{D}(A^!_n)$ 上的函子 $\mathcal{U}^!_i$ 和 $\mathfrak{T}^!_i$ 继承的 A_∞-双模结构相识别。

在 [QS16], 中，Temperley-Lieb 代数 TL_n 和 n 股辫群 Br_n 作用于 $\mathcal{D}(A^!_n)$，其生成元为 $\mathfrak{U}^!_i$ 和 $\mathfrak{T}^!_i, i = 1, \dots, n-1$。由引理 3.3 可知，范畴化Temperley–Lieb生成元保持由前 $n-1$ 个简单DG模 $L_1, \dots, L_{n-1}$ 生成的最小三角子范畴:

$$\mathcal{U}^!_i(L_j) = \cup_i \circ \cap_i(L_j) = L_i \otimes (\mathbb{P}(L_i) \otimes_{A^!_n} L_j) = \begin{cases} L_i \oplus L_i[1] & i = j \\ L_i & j = i-1 \\ L_i[1] & j = i+1 \\ 0 & |i-j| > 1 \end{cases} \tag{5.2}$$

将此子范畴记为 $\langle L_1, \dots, L_{n-1}\rangle$。在函子 $\mathrm{HOM}^{A^!_n}(\oplus_{i=1}^n \mathbb{P}(L_i), \text{-})$ 作用下， $\langle L_1, \dots, L_{n-1}\rangle$ 对应于由 $Q_1, \dots, Q_{n-1}$ 生成的三角子范畴（公式 (4.4)）。根据构造，此子范畴等价于幂等元截断DG代数S_{n-1}上的紧导出范畴。取上同调后， Q_i 定义了 A_∞-模，即 Z_i，其 A_∞-自同态代数等于 C_{n-1}，而后者正是截断DG代数 S_{n-1} 的上同调代数。我们将所涉及范畴之间的包含关系展示如下。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}(A^!_n) & \xrightarrow{\mathrm{HOM}(\oplus_{i=1}^n \mathbb{P}(L_i), \text{-})} & \mathcal{D}(E_n) & \xleftarrow{\quad\cong\quad} & \mathcal{D}_\infty(A_n) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \langle L_1, \dots, L_{n-1}\rangle & & \langle Q_1, \dots, Q_{n-1}\rangle & & \langle Z_1, \dots, Z_{n-1}\rangle \\ & & \cong\uparrow & & \cong\uparrow \\ & & \mathcal{D}^c(S_{n-1}) & & \mathcal{D}^c_\infty(C_{n-1}) \end{array} . \tag{5.3}$$

通过上述图将 $\mathcal{D}^c(A^!_n)$上的相应作用转移到 A_∞-代数 C 上后，Temperley-Lieb代数和辫群作用便成为导出范畴 $\mathcal{D}_\infty(C_{n-1})$上的作用，并保持紧对象构成的全子范畴不变。

□

注5.6。 对象 $L_i (i = 1, \dots, n-1)$ 类似于 Seidel-Thomas [ST01] 意义下导出范畴 $\mathcal{D}(A^!_n)$ 中的一个 A_{n-1} 球形对象链 。它们在一系列等价映射下于 $\mathcal{D}_\infty(A_n)$ 中的像

$$\mathcal{D}(A^!_n) \cong \mathcal{D}(E_n) \cong \mathcal{D}_\infty(A_n),$$

由投射模 C_i 给出。因此，集合 C_i, $i = 1, \dots, n-1$ 也构成了这样一个由球形对象组成的 A_{n-1}-链。因此，辫群作用自然来源于沿着这条链进行的球面扭。我们将在下一节指出这一组球形对象的辛几何意义。

推论 5.7。 范畴化辫群作用在 $q=-1$ 处下降为格罗滕迪克群上的 *Burau* 表示。更具体地说，以下交换图成立。

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathcal{D}^c_\infty(C)) & \xrightarrow{\cong} & V_{n-1} \\ \downarrow{\scriptstyle [\mathfrak{U}_i]} & & \downarrow{\scriptstyle u_i} \\ K_0(\mathcal{D}^c_\infty(C)) & \xrightarrow{\cong} & V_{n-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K_0(\mathcal{D}^c_\infty(C)) & \xrightarrow{\cong} & V_{n-1} \\ \downarrow{\scriptstyle [\mathfrak{T}_i]} & & \downarrow{\scriptstyle t_i} \\ K_0(\mathcal{D}^c_\infty(C)) & \xrightarrow{\cong} & V_{n-1}. \end{array}$$

证明。 这是通过图 (5.3) 中的等价关系直接翻译 [QS16 的命题 5.16]所得。 □

6 关于与辛拓扑联系的评述

之字形代数 C_{n-1} 在几何上表现为 Fukaya 范畴 $\mathcal{D}_\infty(\mathcal{F}(S))$ [KS02]中拉格朗日子流形 $\oplus_i L_i$ 的自同态代数。当采用第 4 节的分次约定时，相关的辛流形 S 是一个曲面，而这一识别

$$C_{n-1} \cong \mathrm{END}_{\mathcal{D}_\infty(\mathcal{F}(S))}(\oplus_i L_i) \tag{6.1}$$

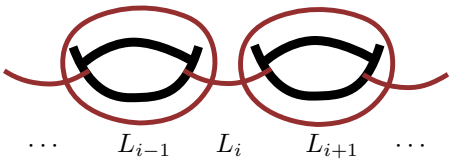
赋予之字形代数一些辅助的几何内容。本节旨在说明如何在 Fukaya 范畴的几何构造中定位通过代数方法得到的定理 4.4 的 A_∞-结构。

稍作简化，曲面 S 的 Fukaya 范畴 $\mathcal{F}(S)$ 的对象是带有自旋结构的定向嵌入 1-流形 $L \subset S$。当 $L, L' \in Ob(\mathcal{F}(S))$ 横截时，态射 $CF(L,L') := \mathbb{F}_2\langle L \pitchfork L' \rangle$ 由交点张成。 A_∞-结构由映射 $m_r : \mathcal{F}(S)^{\otimes r} \to \mathcal{F}(S)$（$r \geq 1$）编码。若集合 $\{L_0, \ldots, L_r\}$ 两两横截，则这些映射

$$\begin{aligned} m_r : CF(L_r, L_{r-1}) \otimes \cdots \otimes CF(L_1, L_0) \to CF(L_r, L_0) \qquad & \text{are given by} \\ m_r(x_r, \ldots, x_1) := \sum_{x_0 \in L_n \pitchfork L_1} & \#\mathcal{M}(x_r, \ldots, x_0) x_0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

表示虚维数为零的模空间 $\mathcal{M}(x_r, \ldots, x_0)$ 中点的浸入圆盘的（带符号）计数 [Sei08, II (13b)]。图 1 描绘了拉格朗日子流形之间的这样一个圆盘，这些拉格朗日子流形已被扰动为横截的。每个映射 m_r 都可以扩展为映射 $m_r : \oplus_n \mathcal{F}(S)^{\otimes n} \to \mathcal{F}(S)$，使得在设定 $d := \sum_n m_n$ 后， A_∞-关系变为 $d^2 = 0$。由于 $\mathcal{F}(S)$ 太小而无法进行三角化，因此重点放在三角包 $\mathcal{D}_\infty(\mathcal{F}(S))$ [Sei08, I (3h)] 上。

在这一背景下，考虑按照下图所示图案排列的简单闭曲线。



每条作为圆的曲线都确定 Fukaya 范畴中的一个球形对象。辫群表示由扭曲函子生成

$$T_{L_i} : \mathcal{D}_\infty(\mathcal{F}(S)) \to \mathcal{D}_\infty(\mathcal{F}(S)) \qquad T_{L_i}(X) := \mathrm{Cone}(\mathrm{Hom}(L_i, X) \otimes Y \xrightarrow{ev} X).$$

当 L_i 具有非平凡的自旋结构时， T_{L_i} 的作用与 $\mathcal{F}(S)$ 上的德恩扭转一致 [Sei08, Corol- lary 17.18]。对于上面的两条曲线 L_i 和 L_j，相应的德恩扭转根据几何交数分别为 0 或 1 而交换或满足辫关系 [FM12, page 84]。这些对象确定了上面方程 (6.1) 中的之字形代数 C_{n-1}。代数 A_n 可以通过向 $\oplus_i L_i$ [添加一个嵌入区间得到 3]KS02, Figure 3]。

当曲线 $\{L_0, \ldots, L_r\}$ 并非两两横截时，需要谨慎定义 A_∞-结构。一种方法是对与拉格朗日子流形的（同构）哈密顿扰动相关联的所有链复形取极限，这样便可针对任意非横截的集合计算映射 m_r。

$\{L_0, \ldots, L_r\}$ 通过任意由哈密顿同痕得到的横截族。鉴于此，为了计算定理4.4中的 $m_3((i|i+1), (i+1|i), (i|i+1))$，我们对 L_i 和 L_{i+1} 都进行扰动，从而得到同构对象 $\tilde{L_i}$ 和 L_{i+1}。在上图所作的识别下，映射（如 $(i|i+1)$）对应于不同的交点，因此得到下图。这里我们认为，由于我们正在处理 co-】【。

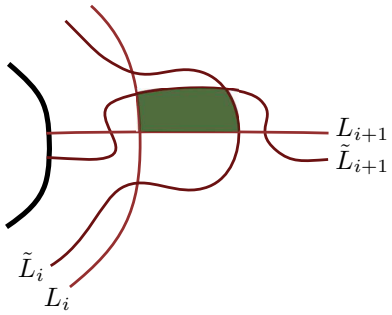


图 1：扰动中的一个圆盘

在特征 2 下的系数中，我们可以定义一个新映射 $\tilde{m}_3$，它统计与绿色圆盘相关的整个模空间。相关说明请参见 [Sei08，注释 13。4]。令 $\tilde{m}_r = 0$ 对于 $r \neq 3$，且 $\delta = \sum_r \tilde{m}_r$，本文的代数部分表明 $(d+\delta)^2 = 0$，因此得到了一个 A_∞-结构。我们期望 δ 可以通过对照方程 (6.2) 对模空间求和来获得几何定义。

参考文献

[Bir74] J. S. Birman。《辫、链环与映射类群》。数学年刊研究丛书第82号。普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿；东京大学出版社，东京，1974年。[BK90] A. I. Bondal 和 M. M. Kapranov。增强三角范畴。《数学文集》，181(5):669–683，1990。英文版：《苏联数学文集》，1991，70(1):93–107。[BW22] S. Barmeier 和 Z. Wang。 A_∞ 扩展 Khovanov 弧代数的形变与 Stroppel 猜想。2022年。arXiv:2211.03354。[CF94] L. Crane 和 I. Frenkel。四维拓扑量子场论、Hopf 范畴与典范基。《数学物理杂志》，35(10):5136–5154，1994。arXiv:hep-th/9405183。[CK14] Y. Chen 和 M. Khovanov。通过弧环的子商构造辫子缠结余边的一个不变量。《基础数学》，225(1):23–44，2014。arXiv:math/0610054。[CS19] B. Cooper 和 J. Sussan。锥构造的预投射类比。《同调与同伦应用》，21(2):171–198，2019。[EQ16] B. Elias 和 Y. Qi。若干小量子群的范畴化 II。《数学进展》，288:81–151，2016。arXiv:1302.5478。[FKS05] I. Frenkel、M. Khovanov 和 O. Schiffmann。Nakajima 簇的同调实现与 Weyl 群作用。《组合数学》，141(6):1479–1503，2005。arXiv:math/0311485。[FM12] B. Farb 和 D. Margalit。《映射类群入门》，普林斯顿数学丛书第49卷。普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，2012年。[Kel94] B. Keller。导出 DG 范畴。《高等师范学校科学年刊》（第4辑），27(1):63–102，1994。[Kel01] B. Keller。 A-无穷代数与模导论。《同调与同伦应用》，3(1):1–35，2001。arXiv:math/9910179。[Kel02] B. Keller。表示论中的 A-无穷代数。载于《代数表示论》第一、二卷，第74–86页。北京师范大学出版社，北京，2002年。

[Kel03] B. Keller。《Koszul 对偶性与余导出范畴》（据 K. Lef`evre）。2003年。可访问 https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/publ/kdc.pdf。[Kel06a] B. Keller。 AA∞代数、模与函子范畴。载于《代数表示论及相关主题的发展》，《当代数学》第406卷，第67–93页。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2006年。arXiv:math/0510508。[Kel06b] B. Keller。关于微分分次范畴。国际数学家大会，II：151–190，2006年。arXiv:math/0601185v5。[Kho16] M. Khovanov。Hopfological 代数与单位根处的范畴化：最初的步骤。《结理论及其分支》，25(3):1640006, 26，2016年。arXiv:math/0509083。[KQ15] M. Khovanov 和 Y. Qi。某些小量子群范畴化的一种方法。《量子拓扑》，6(2):185–311，2015年。arXiv:1208.0616。[KQS17] M. Khovanov、Y. Qi 和 J. Sussan。p-DG 分圆 nilHecke 代数。即将发表于《美国数学学会回忆录》，2017年。arXiv:1711.07159。[KS02] M. Khovanov 和 P. Seidel。箭图、Floer 上同调与辫群作用。《美国数学学会杂志》，15:203–271，2002年。arXiv:math/0006056。[LW23] J. Liu 和 Z. Wang。通过 Ginzburg 代数对之字形代数进行A_∞形变。2023年。arXiv:2301.06757。[Qi14] Y. Qi。Hopfological 代数。《组合数学》，150(1):1–45，2014年。arXiv:1205.1814。[QS16] Y. Qi 和 J. Sussan。素数阶单位根处 Burau 表示的范畴化。《数学精选》（新辑），22(3):1157–1193，2016年。arXiv:1312.7692。[QS17] Y. Qi 和 J. Sussan。素数阶单位根处的范畴化与 Hopfological 有限性。载于《范畴化与高阶表示论》，《当代数学》第683卷，第261–286页。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2017年。arXiv:1509.00438。[QS18] Y. Qi 和 J. Sussan。 p-DG 分圆 nilHecke 代数 II。即将发表于《美国数学学会回忆录》，2018年。arXiv:1811.04372。[RZ03] R. Rouquier 和 A. Zimmermann。导出模范畴的 Picard 群。《伦敦数学学会学报》（第3辑），87(1):197–225，2003年。[Sch11] O. M. Schn¨urer。正分次 DG 代数的完美导出范畴。《应用范畴结构》，19(5):757–782，2011年。arXiv:0809.4782。[Sei08] P. Seidel。Fukaya 范畴与 Picard–Lefschetz 理论。《苏黎世高等数学讲义》。欧洲数学学会，Z¨urich，2008年。[ST01] P. Seidel 和 R. Thomas。凝聚层导出范畴上的辫群作用。《杜克数学杂志》，108(1):37–108，2001年。arXiv:math/0001043。[Str09] C. Stroppel。抛物类 O、Grassmann 流形上的层、Springer 纤维与 Khovanov 上同调。《组合数学》，145:954–992，2009年。arXiv:math/0608234。[Tra08] T. Tradler。A∞代数上的无穷内积。《同伦相关结构杂志》，3:245–271，2008年。arXiv:math/0806.0065。

B.C.：美国爱荷华州艾奥瓦城，爱荷华大学数学系，邮编 52242。邮箱：ben-cooper@uiowa.edu Y. Q.：美国弗吉尼亚州夏洛茨维尔，弗吉尼亚大学数学系，邮编 22904。邮箱：yq2dw@virginia.edu

J. S.：美国纽约州布鲁克林市 CUNY 麦德加·埃弗斯学院数学系，邮编 11225，电子邮箱：jsussan@mec.cuny.edu；纽约市立大学研究生中心数学项目，美国纽约州纽约市，邮编 10016