arXiv:2305.02828v1 [math-ph] 4 May 2023

图像改变算子的几何

C. A. CREMONINI

Abstract. 本文旨在阐明物理学中所谓图像改变算子（PCO）的一些数学层面。具体而言，我们想要说明，PCO 是给定超流形上微分形式（或超形式）复形与积分形式复形之间的上链映射。我们将讨论如何以链同伦构造（超）对称 PCO，并给出一些在物理上具有相关性的应用实例。

Introduction

这篇短文的主要目的是阐明物理学中所谓图像改变算子（下文简称 PCO）的数学含义。PCO 首次由 [FMS] 引入，作为一种在超共形场论中从一种鬼表示转换到另一种鬼表示的手段；每种表示都会导出一个复形，其算子为 BRST 微分。通过对关联函数进行积分来计算弦振幅时，这一手段对于定义有意义的表达式至关重要。最初，这些算子是通过“玻色化”引入的，即用手征玻色子描述费米子。后来人们认识到，这种玻色化的费米子可以解释为玻色鬼场的形式狄拉克 δ 分布。 [Bel], 将这些算子引入超几何，并阐释了从物理学工具到数学工具的转换。具体而言，本文作者展示了如何用（偶）微分形式的狄拉克 δ 函数 $d\theta$来实现积分形式，这与上述对玻色化鬼场的解释相类；在此背景下，文中介绍了几何图像改变算子。超弦理论中已经确立的积分形式与 PCO 的这一实现方式，后来由 [Wit] 重新论述；该文简明介绍了超几何基础，并着眼于积分理论。另一方面，关于超流形、积分形式、积分理论等的严格数学论述，早已在数学界奠定基础。若想快速而深入地了解超几何，可参阅 [Man] 一书；也可参阅较新的 [Noj] ，其中对该主题作了与时俱进的综述，并附有大量基础论文的参考文献（另见 [CNR]）。

在本文中[1], ，我们希望通过以严谨的方式引入图像改变算子的概念，在数学世界与物理世界之间搭建一座桥梁。这一思想源自物理学：PCO 用于从一个鬼真空转到另一个鬼真空，进而从一种物理态的实现转到另一种实现，或者类似地，从一个 BRST 复形转到另一个 BRST 复形。这意味着，可以将 PCO 引入为复形之间的上链映射；在本例中，即微分形式复形与积分形式复形之间的上链映射。我们将明确构造与“时空”图像改变算子相对应的上链映射，并将其与约化子流形嵌入环境超流形的（规范）嵌入联系起来。随后我们将证明，该映射定义了一个拟同构，即限制在上同调上时为同构。特别地，这为超形式上同调与积分形式上同调之间众所周知的同构，提供了一种明确且极具直观性的实现。然后，我们将运用链同伦，对文献中出现的不同 PCO（例如保持某些（超）对称性的 PCO）作出解释。在

[1]我们将尝试遵循 [Man、Wit、Noj]的记号。1

文献中，例如保持某些（超）对称性的 PCO，可用链同伦来解释。这些主题构成了本文的核心。最后，我们将提供一些明确的例子，以及一些具有物理学意义的应用。我们将以对未来发展的展望作为结尾，重点讨论“伪形式”的严格定义（再次参见 [Wit]）；在本文作者看来，这可能会在物理学和数学领域催生有趣的应用。

1. Picture Changing Operators

本节是这些笔记的核心，旨在构造性地介绍图像改变算子及其性质。特别地，给定一个超流形 $\mathcal{SM}$，我们希望说明图像改变算子是微分形式（或超形式）复形与 $\mathcal{SM}$ 上的积分形式复形之间的上链映射。我们将证明以下命题，从而建立物理记号与图像改变算子的数学定义之间的对应关系：

命题 1. 给定一个维数为 $\mathcal{SM} = (m|n)$ 的超流形 $\mathcal{SM}$，图像改变算子（以下简称 PCO）是积分形式分布实现中的一个上同调类 $\mathbb{Y}^{(0|n)} \in H^{(0|n)}(\mathcal{SM}, d_{dR})$；PCO 通过$\wedge$ 乘法和分布的形式关系，使得可以从超形式得到积分形式。PCO 对应于上链映射 $f^{(\bullet)}: (\Omega^{\bullet}(\mathcal{SM}) \quad d_{dR}) \to (\Sigma^{\bullet}(\mathcal{SM}) \quad \delta)$，其中 $\Sigma^{\bullet}(\mathcal{SM}) := \mathcal{B}er(\mathcal{SM}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{SM}}} S^{m-\bullet}\Pi\mathcal{TSM}$ 是积分形式（定义见例如 [Man, Noj]）：

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{SM}} & \xrightarrow{d_{dR}} & \Omega^{(1)}(\mathcal{SM}) & \xrightarrow{d_{dR}} & \dots & \xrightarrow{d_{dR}} & \Omega^{(m)}(\mathcal{SM}) & \xrightarrow{d_{dR}} & \dots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f^{(0)}} & & \downarrow{\scriptstyle f^{(1)}} & & & & \downarrow{\scriptstyle f^{(m)}} & & \\ \dots & \longrightarrow & \Sigma^{(0)}(\mathcal{SM}) & \xrightarrow{\delta} & \Sigma^{(1)}(\mathcal{SM}) & \xrightarrow{\delta} & \dots & \xrightarrow{\delta} & \Sigma^{(m)}(\mathcal{SM}) & \xrightarrow{\delta} & 0 \end{array}$$

特别地，我们有 $\mathbb{Y}^{(0|n)} \in H^{(0|n)}(\mathcal{SM}, d_{dR})$ 对应于 $f^{(\bullet)}$ 是一个拟同构这一事实。最后，通过添加 d_{dR}-正合项来改变类 $\mathbb{Y}^{(0|n)}$ 的代表元，对应于 $f^{(\bullet)}$的链同伦。

证明。我们将尝试以构造性、分步骤的方式组织证明，以便在数学语言与物理语言之间进行衔接。

假设 $\mathcal{SM}$ 是连通的（即 $\mathcal{SM}_{red}$ 是连通的），考虑一个开集 $\mathcal{U}$，它局部可由坐标集 $\{x^i, \theta^\alpha\}, i = 1, \dots, m, \alpha = 1, \dots, n$ 描述；令 $\mathbb{Y}^{(0|m)}_{s.t.}$，也就是物理学文献中所称的“ 时空图像改变算子 ”，定义为

$$\mathbb{Y}^{(0|n)}_{s.t.} = \left(\prod_{\alpha=1}^{n} \theta^\alpha\right)\left(\bigwedge_{\beta=1}^{n} \delta\left(d\theta^\beta\right)\right) = \theta^1 \dots \theta^n \delta\left(d\theta^1\right) \wedge \dots \wedge \delta\left(d\theta^n\right) . \tag{1}$$

这个（$0|n$）形式定义了一个上同调类：根据形式性质 $d\theta^\alpha \delta(d\theta^\alpha) = 0, \forall \alpha = 1, \dots, n$，很容易验证它是闭的；只需检查不存在奇（$-1|n$）形式，其微分等于 (1)，便可轻易验证它不是恰当形式。直观地说，由于德拉姆微分无法产生 θs，因此必须从一开始就将它们全部纳入。也可以通过积分推知它不是恰当形式：可以在一个“肥点”上对 (1) 积分，也就是说，在赋有给定格拉斯曼代数的点上积分，便会立即发现积分不为零。

我们可以证明 (1) 是全局定义的：从一个开集过渡到另一个开集时，考虑一般变换

$$
\begin{aligned}
x^i &\mapsto x'^i = f^i(x,\theta) = f_0^i(x) + O\left(\theta^2\right) \ , \\
\theta^\alpha &\mapsto \theta'^\alpha = \chi^\alpha(x,\theta) = \sum_{\beta=1}^n \chi_\beta^\alpha(x)\,\theta^\beta + O\left(\theta^3\right) \ , \qquad (2)
\end{aligned}
$$

其中，f^i 和 χ^α 分别为偶和奇（由于在（1）中存在（$\prod_{\alpha=1}^n \theta^\alpha$），一般坐标变换中的某些项对我们的目的而言并不重要，因此省略了它们的显式表达式）。相应的 1-形式变换可表示为

$$
\begin{aligned}
dx^i &\mapsto dx'^i = \sum_{j=1}^m \left(\partial_j f_0^i(x)\right) dx^j + O(\theta) \\
d\theta^\alpha &\mapsto d\theta'^\alpha = \sum_{\beta=1}^n \left[\left(d\chi_\beta^\alpha(x)\right)\theta^\beta + \chi_\beta^\alpha(x)\,d\theta^\beta\right] + O\left(\theta^2\right) \ . \qquad (3)
\end{aligned}
$$

变换后的图像改变算子读作

$$
\mathbb{Y}_{s.t.}^{(0|n)} \mapsto \mathbb{Y}_{s.t.}^{\prime(0|n)} = \left(\prod_{\alpha=1}^n \theta'^\alpha\right)\left(\bigwedge_{\beta=1}^n \delta\left(d\theta'^\beta\right)\right) =
$$

$$
= \left(\prod_{\alpha=1}^n \left[\sum_{\beta=1}^n \chi_\beta^\alpha(x)\,\theta^\beta + O\left(\theta^3\right)\right]\right)\left(\bigwedge_{\gamma=1}^n \delta\left(\sum_{\delta=1}^n \left[\left(d\chi_\delta^\gamma(x)\right)\theta^\delta + \chi_\delta^\gamma(x)\,d\theta^\delta\right] + O\left(\theta^2\right)\right)\right) =
$$

$$
= \left(\prod_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \chi_\beta^\alpha(x)\,\theta^\beta\right)\left(\bigwedge_{\gamma=1}^n \delta\left(\sum_{\delta=1}^n \left[\chi_\delta^\gamma(x)\,d\theta^\delta\right]\right)\right) = \left(\det\left(\chi_\beta^\alpha\right)\prod_{\alpha=1}^n \theta^\alpha\right)\left(\frac{1}{\det\left(\chi_\beta^\alpha\right)}\bigwedge_{\beta=1}^n \delta\left(d\theta^\beta\right)\right) =
$$

$$
= \mathbb{Y}_{s.t.}^{(0|n)} \ , \qquad (4)
$$

其中我们使用了 θs 的反对称性以及 $\delta(d\theta)$s 的形式性质。特别地，项 $\left(\det\left(\chi_\beta^\alpha\right)\right)^{-1}$ 的出现源于性质 $\delta(\lambda d\theta) = \frac{1}{\lambda}\delta(d\theta)$，其中不带绝对值（见 [Wit]）。注意，可以去掉关于 $\mathcal{SM}$ 的连通性假设：在这种情况下，可以为 $\mathcal{SM}$ 的每个连通分支定义一个图像改变算子。这简单地反映了同构 $H^{(0|0)}(\mathcal{SM}) \cong H^{(0|n)}(\mathcal{SM})$，其中 $\dim H^{(0|0)}(\mathcal{SM})$ 是 $\mathcal{SM}$ 的连通分支数。

现在，我们构造与时空图像改变算子相对应的上链映射。首先，我们有 $f^{(i)} := 0, \forall i < 0$, $i > m$。给定一个开集 $\mathcal{U}$，其局部由坐标集 $\{x^i, \theta^\alpha\}, i = 1, \ldots, m, \alpha = 1, \ldots, n$ 描述，考虑 $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}\mathcal{SM}$ 的局部生成元集为 $\{\partial_{x^i}, \partial_{\theta^\alpha}\}, i = 1, \ldots, m, \alpha = 1, \ldots, n$，以及张成 $\Pi\mathcal{T}_{\mathcal{U}}^*\mathcal{SM}$ 的（奇偶性改变后的）对偶基 $\{dx^i, d\theta^\alpha\}, i = 1, \ldots, m, \alpha = 1, \ldots, n$。Berezinian 的一个截面由以下元素生成（参见 [Man, Noj]）。

$$
\mathcal{D} := \cdot\left[dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \otimes \partial_{\theta^1} \wedge \ldots \wedge \partial_{\theta^n}\right] \ . \qquad (5)
$$

第一个（非零）映射 $f^{(0)}$ 定义为

$$
\begin{aligned}
&f^{(0)} : \mathcal{O}_{\mathcal{U}} \to \Sigma^{(0)}(\mathcal{U}) \\
&g(x,\theta) \mapsto f^{(0)}(g(x,\theta)) := g(x,\theta)\prod_{\alpha=1}^n \theta^\alpha \mathcal{D} \otimes \bigwedge_{i=1}^m \pi\partial_{x^i} = g_0(x)\prod_{\alpha=1}^n \theta^\alpha \mathcal{D} \otimes \bigwedge_{i=1}^m \pi\partial_{x^i} \ , \qquad (6)
\end{aligned}
$$

其中，$g_0(x) := [g(x,\theta)]_{\theta=0}$ 是通过对 g 模去除由幂零坐标生成的理想后得到的函数，而 π 表示奇偶变换。该映射的构造受到定义嵌入 $i: \mathcal{SM}_{red} \hookrightarrow \mathcal{SM}$ 的短正合序列的启发，该序列在层的层次上写作

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{SM}} \xrightarrow{i^*} \mathcal{O}_{\mathcal{SM}_{red}} \longrightarrow 0 \quad . \tag{7}$$

局部地（在任意开集 $\mathcal{U}$ 上），这意味着 $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}_{\mathcal{U}_{red}} \oplus \mathcal{J}$，其中 $\mathcal{J}$ 是由幂零元生成的理想，而 $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_{red}}$ 由 $\mathcal{O}_{\mathcal{SM}_{red}}$ 得到，即约化层 $\mathcal{O}_{\mathcal{SM}}/\mathcal{J}$。更具体地，对于每个开集 $\mathcal{U}$，映射 $f_{(0)}$ 将 $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ 映射到 $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_{red}} \cdot \prod_{\alpha=1}^{n} \theta^\alpha \mathcal{D} \otimes \bigwedge_{i=1}^{m} \pi\partial_{x^i}$。通过拼接，并注意到截面 $\prod_{\alpha=1}^{n} \theta^\alpha \mathcal{D} \otimes \bigwedge_{i=1}^{m} \pi\partial_{x^i}$ 是全局的，我们可以将其扩展到整个 $\mathcal{O}_{\mathcal{SM}}$。事实上，在一般坐标变换 (2) 下，该截面变为

$$\prod_{\alpha=1}^{n} \theta'^\alpha \mathcal{D}' \otimes \bigwedge_{i=1}^{m} \pi\partial_{x'^i} = \det\left(\chi_\beta^\alpha\right) \prod_{\alpha=1}^{n} \theta^\alpha Ber\left(J\right) \mathcal{D} \otimes \left[\det\left(\partial_j f_0^i\right)\right]^{-1} \bigwedge_{i=1}^{m} \pi\partial_{x^i} =$$

$$= \det\left(\chi_\beta^\alpha\right) \prod_{\alpha=1}^{n} \theta^\alpha \frac{\det\left(\partial_j f_0^i\right)}{\det\left(\chi_\beta^\alpha\right)} \mathcal{D} \otimes \left[\det\left(\partial_j f_0^i\right)\right]^{-1} \bigwedge_{i=1}^{m} \pi\partial_{x^i} = \prod_{\alpha=1}^{n} \theta^\alpha \mathcal{D} \otimes \bigwedge_{i=1}^{m} \pi\partial_{x^i} \ , \tag{8}$$

其中 J 是变换 (2) 的雅可比矩阵，并且由于 $\prod_{\alpha=1}^{n} \theta^\alpha$ 的存在，行列式中所有含有 θ 的项都被舍去。

注。显式形式 (6) 与 (1) 的关系如下：在分布实现中，(5) 可以写成 $\mathcal{D}_{n_\circ} = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \wedge \delta\left(d\theta^1\right) \wedge \ldots \wedge \delta\left(d\theta^n\right)$；随后可以通过作用缩并 $\iota_{\partial_{x_1}} \cdots \iota_{\partial_{x_m}}$（与 $\bigwedge_{i=1}^{m} \pi\partial_{x^i}$ 等同）并乘以 $\prod_{\alpha=1}$ 来得到 (1)$_m$。

备注。在光滑范畴中，序列 (7) 可非典范地分裂（光滑超流形是分裂的，参见 [Bat]），也就是说，可以选取一个投影 $p: \mathcal{SM} \to \mathcal{SM}_{red}$ or；对于映射，可以选取 $p^*: \mathcal{O}_{\mathcal{SM}_{red}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{SM}}$，使得 $\mathcal{O}_{\mathcal{SM}} = \mathcal{O}_{\mathcal{SM}_b} \oplus \mathcal{J}$ 全局成立。在过渡函数的层面上，这意味着可以选取 (2)，使得其中关于 θs 的至少二次项为零。这里我们想强调的是，即便在非分裂情形下，要证明给定的上链映射，或类似地，时空图像改变算子是全局定义的，也不需要这一假设。

其他映射的定义类似；特别地，给定形式 $\Omega^i(\mathcal{SM})$，由 (7) 可得

$$0 \longrightarrow Ker^{(p|0)}\left(i^*\right) \longrightarrow \Omega^{(p|0)}\left(\mathcal{SM}\right) \xrightarrow{i^*} \Omega^{(p)}\left(\mathcal{SM}_{red}\right) \longrightarrow 0 \quad . \tag{9}$$

局部而言，这意味着在开集 $\mathcal{U}$ 上，我们有 $\Omega^{(p|0)}(\mathcal{U}) = \Omega^{(p)}(\mathcal{U}_{red}) \oplus Ker^{(p|0)}(i^*)$，其中 $\Omega^{(p)}(\mathcal{U}_{red})$ 表示约化流形的形式（特别是，仅用 x 和 dx表示），而 $Ker^{(p|0)}(i^*)$ 表示至少关于 θ 或 $d\theta$线性的形式。于是，映射 $f^{(p)}$ 定义为

$$f^{(p)}: \Omega^{(p|0)}\left(\mathcal{U}\right) \to \Sigma^{(p)}\left(\mathcal{U}\right)$$

$$\sum_{i_1 \ldots i_p=1}^{m} g_{i_1 \ldots i_p}\left(x\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} + \eta \mapsto \sum_{i_1 \ldots i_p=1}^{m} g_{i_1 \ldots i_p}\left(x\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \cdot \prod_{\alpha=1}^{n} \theta^\alpha \mathcal{D} \otimes \bigwedge_{i=1}^{m} \pi\partial_{x^i} \ , \tag{10}$$

其中 $\eta \in Ker^{(p|0)}(i^*)$，而“$\cdot$”记号意味着我们仍需使用配对$dx^i\left(\pi\partial_{x_j}\right)=\delta^i_j$来将 (6) 化简为

$$\sum_{i_1\dots i_p=1}^{m} g_{i_1\dots i_p}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\prod_{\alpha=1}^{n}\theta^\alpha\mathcal{D}\otimes\bigwedge_{i=1}^{m}\pi\partial_{x^i}=$$

$$=\frac{(-1)^{pm}}{(m-p)!}\sum_{i_1\dots i_p=1}^{m}\sum_{j_1\dots j_m=1}^{m} g_{i_1\dots i_p}(x)\,\delta^{i_1}_{j_1}\dots\delta^{i_p}_{j_p}\prod_{\alpha=1}^{n}\theta^\alpha\mathcal{D}\otimes\epsilon^{j_1\dots j_pj_{p+1}j_m}\bigwedge_{s=p+1}^{m}\pi\partial_{x^{j_s}}=$$

$$=\frac{(-1)^{pm}}{(m-p)!}\sum_{j_1\dots j_m=1}^{m} g_{j_1\dots j_p}(x)\prod_{\alpha=1}^{n}\theta^\alpha\mathcal{D}\otimes\epsilon^{j_1\dots j_pj_{p+1}j_m}\bigwedge_{s=p+1}^{m}\pi\partial_{x^{j_s}}\ , \tag{11}$$

其中我们记作 $\bigwedge_{i=1}^{m}\pi\partial_{x^i}=\frac{1}{m!}\sum_{j_1\dots j_m=1}^{m}\epsilon^{j_1\dots j_m}\pi\partial_{x_{j_1}}\wedge\ldots\wedge\pi\partial_{x_{j_m}}$。与前面的情况一样，可以通过拼接不同的局部坐标片来实现全局延拓，并回顾一下，$\prod_{\alpha=1}^{n}\theta^\alpha\mathcal{D}\otimes\bigwedge_{i=1}^{n}\pi\partial_{x^i}$是全局定义的，如式 (4) 所示。

为验证式 (10) 定义了一个上链映射，我们必须检查

$$f^{(p+1)}\circ d=\delta\circ f^{(p)}\ ,\ \forall p\in\mathbb{Z}\ , \tag{12}$$

其中 δ是积分形式复形（$\Sigma^\bullet(\mathcal{SM})$ δ）的幂零算子，其定义为（例如参见 [Man, Noj]）

$$\delta:=\sum_{i=1}^{m}\mathcal{L}_{\partial_{x^i}}\otimes\frac{\partial}{\partial\left(\pi\partial_{x^i}\right)}-\sum_{\alpha=1}^{n}\mathcal{L}_{\partial_{\theta^\alpha}}\otimes\frac{\partial}{\partial\left(\pi\partial_{\theta^\alpha}\right)}\ . \tag{13}$$

对于 $p<0$ 和 $p>m$，式 (12) 显然成立，因为在这些情况下，映射 $f^{(p)}$ 恒等于 0。对于 $0\le p\le m$，考虑 $\omega\in\Omega^p(U)$，其局部表达式如式 (10) 所示。我们有

$$d\omega=\sum_{i_1\dots i_p=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\partial_j g_{i_1\dots i_p}(x)\,dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}+d\eta\ . \tag{14}$$

注意到 $\left[dKer^{(p|0)}(i^*)\right]\in Ker^{(p+1|0)}(i^*)$。这引出了以下结论。

$$f^{(p+1)}\circ d\omega=\frac{(-1)^{(p+1)m}}{(m-p-1)!}\sum_{j_1\dots j_m=1}^{m}\partial_{j_1}g_{j_2\dots j_{p+1}}(x)\prod_{\alpha=1}^{n}\theta^\alpha\mathcal{D}\otimes\epsilon^{j_1\dots j_{p+1}j_{p+2}j_n}\bigwedge_{s=p+2}^{n}\pi\partial_{x^{j_s}}\ . \tag{15}$$

另一方面，我们有

$$\delta\circ f^{(p)}\omega=\delta\left[\frac{(-1)^{pm}}{(m-p)!}\sum_{j_1\dots j_m=1}^{m} g_{j_1\dots j_p}(x)\prod_{\alpha=1}^{n}\theta^\alpha\mathcal{D}\otimes\epsilon^{j_1\dots j_pj_{p+1}j_n}\bigwedge_{s=p+1}^{n}\pi\partial_{x^{j_s}}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^{pm}}{(m-p)!}(-1)^m(m-p)\sum_{j_1\dots j_m=1}^{m}\partial_j g_{j_1\dots j_p}(x)\prod_{\alpha=1}^{n}\theta^\alpha\mathcal{D}\otimes\epsilon^{j_1\dots j_pj_{p+1}j_n}\delta^j_{j_{p+1}}\bigwedge_{s=p+2}^{n}\pi\partial_{x^{j_s}}\ . \tag{16}$$

重新命名指标后，我们发现 (15) 和 (16) 是一致的。

现在让我们验证这些映射定义了上同调中的同构：根据上链映射的定义，上循环和上边界都得到了保持。特别地，$f^{(\bullet)}$ 在上同调群之间诱导出线性态射。

$$H(f)^{(p)}:H^p_{d_{dR}}\to H^p_\delta\ , \tag{17}$$

其中，$H^p_{d_{dR}}$ 和 H^p_δ 分别表示超形式复形和积分形式复形的 p 阶上同调群。特别地，我们使用超流形与其约化流形的德拉姆上同调之间众所周知的同构：

$$H^p\left(\mathcal{SM}, d_{dR}\right) \cong H^p\left(\mathcal{SM}_{red}, d_{dR}\right) \ , \ \forall 0 \leq p \leq m \ . \tag{18}$$

这意味着，固定 p 后，不存在可表示为$Ker^{(p|0)}(i^*)$ 中形式的上同调类，因为沿底流形约化后，它们会投影为零。另一方面， $Ker^{(p|0)}(i^*)$ 按构造是 $f^{(p)}$ 的核。这两个事实意味着，

$$\dim H^p\left(\mathcal{SM}, d_{dR}\right) = \dim H(f)^{(p)}\left[H^p\left(\mathcal{SM}, d_{dR}\right)\right] \leq \dim H^p\left(\mathcal{SM}, \delta\right) \ . \tag{19}$$

回想起 $H^p(\mathcal{SM}, d_{dR}) \cong H^p(\mathcal{SM}, \delta)\ \forall p$，由线性性可得 $H(f)^{(p)}$，即上同调中诱导的映射是同构 $\forall p \in \mathbb{Z}$。

现在让我们转到命题的最后一部分：向 $\mathbb{Y}^{(0|n)}$ 添加 d-恰当项，对应于 $f^{(\bullet)}$ 的链同伦。在“物理记号”方面，人们不再考虑时空图像改变算子 (1)，而是通过添加 d-恰当项，采用 $H^{(0|n)}(\mathcal{SM}, d_{dR})$ 的另一个代表元：

$$\mathbb{Y}^{(0|n)}_{new} = \mathbb{Y}^{(0|n)}_{s.t.} + d\Lambda^{(-1|n)} \ . \tag{20}$$

这在许多方面都非常有用；特别是，可以添加恰当项，使所得的图像改变算子明显保留某些（超）对称性。我们将在证明末尾给出一个非常简单的例子。用上链映射的术语来说，如果存在一个映射序列 $h^{(\bullet)}: (\Omega^\bullet(\mathcal{SM}) \ d_{dR}) \to (\Sigma^{\bullet-1}(\mathcal{SM}) \ \delta)$，使得两个上链映射 $f^{(\bullet)}, e^{(\bullet)}: (\Omega^\bullet(\mathcal{SM}) \ d_{dR}) \to (\Sigma^\bullet(\mathcal{SM}) \ \delta)$ 满足，则它们是链同伦的。

$$e^{(p)} - f^{(p)} = \delta \circ h^{(p)} + h^{(p+1)} \circ d \ . \tag{21}$$

在我们的情形中，映射 $f^{(p)}$ 的形式如式 (10) 所示，而映射 $e^{(p)}$ 定义如下：由式 (20)，我们提取出积分形式（采用物理记号） $\Lambda^{(-1|n)}$ 的表达式。根据物理记号与数学记号之间的“对照表”，我们考虑相应的积分形式，记为 $h^{(-1)} \in \Sigma^{(-1)}(\mathcal{SM})$。现在，我们可以考虑作用于 $h^{(-1)}$ 上的微分δ，从而得到 $\delta h^{(-1)} \in \Sigma^{(0)}(\mathcal{SM})$。这一对象定义了一个映射序列

$$\begin{aligned} &(\delta h)^{(p)} : \Omega^{(p)}\left(\mathcal{SM}\right) \to \Sigma^{(p)}\left(\mathcal{SM}\right), \forall p \in \mathbb{Z} \\ &\omega \mapsto (\delta h)^{(p)}(\omega) := \delta h^{(-1)} \circ \omega = \omega \cdot \delta h^{(-1)} \ , \end{aligned} \tag{22}$$

其中，同样，“$\cdot$”表示 ω 中的生成元与 $\delta h^{(-1)}$ 中的生成元之间的配对。不难证明 $(\delta h)^{(p)}$ 满足 (12) $\forall p \in \mathbb{Z}$，也就是说，它定义了一个上链映射。于是，映射 $e^{(p)}$ 定义为 $e^{(p)} := f^{(p)} + (\delta h)^{(p)}, \forall p \in \mathbb{Z}$。利用这一事实即可轻松完成证明，即

$$\delta\left[h^{(p)}(\omega)\right] = \left(\delta h^{(p)}\right)(\omega) + (-1)^{|h^{(p)}|} h^{(p+1)}(d\omega) \ , \tag{23}$$

正如利用两个算子 δ 和 d的定义可以直接验证的那样。注意，$|h^{(p)}| = 1$ 可由 $|\delta h^{(p)}| = |f^{(p)}| = 0$ 和 $|\delta| = 1$得出。

□

1.1. 拟逆算子。在前一个命题中，我们已经证明，与图像改变算子对应的上链映射是超形式复形与积分形式复形之间的拟同构。这意味着我们应该能够构造一个从积分形式复形到超形式复形的上链映射 $Z^{(i)}: \Sigma^{(i)}(\mathcal{SM}) \to \Omega^{(i)}(\mathcal{SM})$，当将其限制到上同调上时，它是与图像改变算子对应的上链映射的逆。这在...中众所周知。

物理学[2] 以及该算符的一种显式形式（记为 Z），可用沿基底奇向量场的缩并所对应的形式海维赛阶跃函数来表示:

$$Z = \circ_{\alpha=1}^{n} Z_\alpha \ , \ Z_\alpha := -i \left[d, \Theta \left(\iota_{\partial_{\theta^\alpha}} \right) \right] \ , \tag{24}$$

其中，海维赛阶跃函数的作用通过其傅里叶表示来理解（更多细节和示例见 [Bel, Wit, CG] ）。该算子与（1）满足以下拟逆恒等式（第一个作用于积分形式，第二个作用于超形式）:

$$Z \mathbb{Y} Z = Z \ , \ \mathbb{Y} Z \mathbb{Y} = \mathbb{Y} \ . \tag{25}$$

从紧凑表达式（24）直接得到一个上链映射并不容易，但只要了解（24）在分布实现中的作用方式，便不难推导出来（例如，见 [CG]）。特别地，我们有 $Z^{(i)} := 0, \forall i > m, i < 0$。对于 $i = m$，在给定开集 $\mathcal{U}$ 上，有

$$\begin{aligned} & Z^{(m)} : \Sigma^{(m)} \left(\mathcal{U} \right) \to \Omega^{(m)} \left(\mathcal{U} \right) \\ & g \left(x, \theta \right) \mathcal{D} \mapsto Z^{(m)} \left(g \left(x, \theta \right) \mathcal{D} \right) := g_{top}(x) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \ , \end{aligned} \tag{26}$$

其中 $g_{top}(x)$ 是 $g(x, \theta)$ 中包含全部奇变量的分量: $g(x, \theta) = g_0(x) + \ldots + g_{top}(x) \ \theta^1 \ldots \theta^n$。对于 $\Sigma^{(m-p)}(\mathcal{U})$ 中的一般积分形式，我们有 $\forall 0 \leq p \leq m$

$$\begin{aligned} & Z^{(m-p)} : \Sigma^{(m-p)} \left(\mathcal{U} \right) \to \Omega^{(m-p)} \left(\mathcal{U} \right) \\ & \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{m} g_{i_1 \ldots i_p} \left(x, \theta \right) \mathcal{D} \otimes \bigwedge_{s=1}^{p} \pi \partial_{x^s} + \eta \mapsto \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{m} g_{i_1 \ldots i_p, top} \left(x \right) \iota_{\partial_{x^{i_1}}} \ldots \iota_{\partial_{x^{i_p}}} \left(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \right) \ , \end{aligned} \tag{27}$$

其中，η 是积分形式中至少包含一个（经过奇偶变换的）奇向量场 $\pi \partial_\theta$ 的部分。注意到.....，方程 (27) 可以进一步简化。

$$\iota_{\partial_{x^{i_1}}} \ldots \iota_{\partial_{x^{i_p}}} \left(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \right) = \sum_{j_1, \ldots, j_m = 1}^{m} \iota_{\partial_{x^{i_1}}} \ldots \iota_{\partial_{x^{i_p}}} \frac{1}{n!} \epsilon_{j_1 \ldots j_m} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_m} =$$

$$= \frac{1}{(m-p)!} \delta_{i_1}^{j_1} \ldots \delta_{i_p}^{j_p} \epsilon_{j_1 \ldots j_m} dx^{j_{p+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{j_m} \ .$$

很容易从定义式（10）和（26）看出，这些映射满足

$$f^{(p)} \circ Z^{(p)} \circ f^{(p)} = f^{(p)} \ , \ Z^{(p)} \circ f^{(p)} \circ Z^{(p)} = Z^{(p)} \ , \ \forall p \in \mathbb{Z} \ , \tag{28}$$

分别作用于超形式和积分形式时。类似地，可以立即看出，当限制在上同调上时，上链映射 (26) 是上链映射 (10) 的逆映射。

注。当证明（10）定义了超形式与积分形式上链复形之间的拟同构时，我们明确使用了众所周知的结果 $H^p(\mathcal{SM}, d_{dR}) \cong H^p(\mathcal{SM}, \delta) \forall p$。这里，我们想强调，无需依赖该结果，也可以通过直接构造其拟逆（28）来证明（10）是拟同构。这可以视为对两个复形上同调同构的一种替代性、构造性证明（概要）。

[2]老实说，据我们所知，我们称为“逆算子”的算子是在物理学中先于另一种算子引入的。

1.2. 示例：超对称 PCO。这里我们想展示一个简单的例子，在这个例子中，我们可以引入与 PCO 对应且保持物理理论重要对称性的上链映射。考虑由 $\mathcal{SM} \coloneqq \frac{ISO}{}(1,2|1)\, SO(1,2)$ 给出的陪集流形 $\mathcal{SM}$，即 $d=3, N=1$ 平直超空间。特别地，我们将构造一个~~显式具有超~~对称性的 PCO。

陪集代数 $\mathfrak{iso}(1,2|1)\, \mathfrak{so}(1,2)$ 由 $\mathfrak{so}(1,2)$ 的向量表示中的三个偶向量 $\{P_a\}_{a=0}^{2}$ 和其旋量表示中的两个奇向量 $\{D_\alpha\}_{\alpha=1}^{2}$ 生成（通常称为“超导数”）；唯一的非平凡对易关系为 [3]（我们用 $[\cdot,\cdot]$ 表示分次对易子）

$$[D_\alpha, D_\beta] = -2\gamma^a_{\alpha\beta} P_a \ , \tag{29}$$

其中对重复指标求和。在对偶侧，我们可以引入奇 Maurer-Cartan形式 $\{V^a\}_{a=0}^{2}$ 和偶 Maurer-Cartan形式 $\{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^{2}$，它们满足 Maurer-Cartan方程

$$dV^a = \psi^\alpha \gamma^a_{\alpha\beta} \psi^\beta \ , \ d\psi^\alpha = 0 \ . \tag{30}$$

给定一组偶局部坐标 $\{x^a\}_{a=0}^{3}$ 和奇局部坐标 $\{\theta^\alpha\}_{\alpha=1}^{2}$，向量场的完整基为 $\left\{\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a}\right\}_{a=0}^{2}$ 和 $\left\{\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}\right\}_{\alpha=1}^{2}$。非整体生成元 P_a 和 D_α 可表示为

$$P_a = \partial_a \ , \ D_\alpha = \partial_\alpha - \theta^\beta \gamma^a_{\alpha\beta} \partial_a \ . \tag{31}$$

余切空间由 $\{dx^a\}_{a=0}^{2}$ 和 $\{d\theta^\alpha\}_{\alpha=1}^{2}$ 生成，而 Maurer-Cartan形式则为

$$V^a = dx^a + \theta^\alpha \gamma^a_{\alpha\beta} d\theta^\beta \ , \ \psi^\alpha = d\theta^\alpha \ . \tag{32}$$

于是我们可以将超对称生成元[4] 引入为

$$Q_\alpha = \partial_\alpha + \theta^\beta \gamma^a_{\alpha\beta} \partial_a \ . \tag{33}$$

可以立即验证以下性质（我们用 $\mathcal{L}_X$ 表示沿向量场 X 的李导数）：

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = 2\gamma^a_{\alpha\beta} P_a \ , \ [Q_\alpha, D_\beta] = 0 \ , \ \mathcal{L}_{Q_\alpha} V^a = \left(d\iota_{Q_\alpha} - \iota_{Q_\alpha} d\right) V^a = 0 = \mathcal{L}_{Q_\alpha} \psi^\beta \ ; \tag{34}$$

第一个性质表明，两个超对称性给出一个平移（即具有超平移代数）；第二个性质反映了超场的超导数仍然是一个超场；第三和第四个性质表明，形式的 Maurer-Cartan基明显具有超对称性（即沿奇向量Q_α 的基生成元的李导数为零）。特别地，根据莱布尼茨法则，我们立即得到，任何仅由 Maurer-Cartan 形式构造的对象都将自动具有超对称性。考虑 $(0|2)$-积分形式（数值因子是为了后续使用）

$$\mathbb{Y}^{(0|2)}_{susy} = -\frac{1}{8} V^a \wedge V^b \wedge \gamma^{c\alpha\beta} \epsilon_{abc} \iota_\alpha \iota_\beta \delta\left(\psi^1\right) \wedge \delta\left(\psi^2\right) \ , \tag{35}$$

[3]我们用 γ^a 表示一组实对称狄拉克矩阵的基：$\gamma^0 = -Id$、$\gamma^1 = \sigma^3$、$\gamma^2 = -\sigma^1$、σ^i 为泡利矩阵。[4]关于超对称生成元的定义，文献中存在不同约定，我们遵循 [WB]。

我们声称它是一个图像改变算子，其含义如上一节所定义。该积分形式（差一个数值因子）对应于如下定义的上链映射

$$
\begin{aligned}
& e^{(p)} : \Omega^{(p|0)}\left(\mathcal{SM}\right) \to \Sigma^{(p)}\left(\mathcal{SM}\right) \\
& \omega \mapsto \omega \cdot \mathcal{D} \otimes \sum_{a=0,1,2} \sum_{\alpha,\beta=1,2} \pi P_a \wedge \pi D_\alpha \wedge \pi D_\beta \gamma^{a\alpha\beta} \ , \ \forall p \in \mathbb{Z} \ ,
\end{aligned} \tag{36}
$$

其中 $\mathcal{D} ..= [V^1 \wedge V^2 \wedge V^3 \otimes D_1 \wedge D_2]$。证明 (35) 是图像改变算子最简单的方法，是说明它与 (1)（在 $n = 2$ 的情况下）相差一个恰当项。为此，只需像 (32) 中那样将 Maurer-Cartan形式展开到完整基上（我们省略“∧”符号）：

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{Y}^{(0|2)}_{susy} = -\frac{1}{8}\left(dx^a + \theta^\alpha \gamma^a_{\alpha\beta} d\theta^\beta\right)\left(dx^b + \theta^\gamma \gamma^b_{\gamma\delta} d\theta^\delta\right)\gamma^{c\epsilon\zeta}\epsilon_{abc}\iota_\epsilon\iota_\zeta\delta\left(d\theta^1\right)\delta\left(d\theta^2\right) = \\
& = \theta^1\theta^2\delta\left(d\theta^1\right)\delta\left(d\theta^2\right) + d\left[\frac{1}{2}dx^0\theta^1\theta^2\iota_2^2\delta\left(d\theta^1\right)\delta\left(d\theta^2\right) + \frac{1}{2}dx^0\theta^1\theta^2\iota_1^2\delta\left(d\theta^1\right)\delta\left(d\theta^2\right) + \right. \\
& -\frac{1}{4}dx^0dx^1\theta^1\iota_1^2\iota_2\delta\left(d\theta^1\right)\delta\left(d\theta^2\right) - \frac{1}{4}dx^1dx^2\theta^2\iota_1^2\iota_2\delta\left(d\theta^1\right)\delta\left(d\theta^2\right) - \frac{1}{4}dx^1dx^2\theta^1\iota_1\iota_2^2\delta\left(d\theta^1\right)\delta\left(d\theta^2\right) + \\
& \left. + \frac{1}{4}dx^2dx^0\theta^2\iota_1^2\iota_2\delta\left(d\theta^1\right)\delta\left(d\theta^2\right) - \frac{1}{4}dx^2dx^0\theta^1\iota_1\iota_2^2\delta\left(d\theta^1\right)\delta\left(d\theta^2\right)\right] = \\
& = \mathbb{Y}^{(0|2)}_{s.t.} + d\Lambda^{(-1|2)} \ .
\end{aligned} \tag{37}
$$

从这个表达式中，我们可以立即读出一个以 $\Lambda^{(-1|2)}$ 表示的、介于 (36)（相差一个比例因子）与 (1) 之间的链同伦：

$$
\begin{aligned}
h^{(-1)}\left(\bullet\right) := \bullet \cdot \mathcal{D} \otimes \Big[& \theta^1\theta^2\pi\partial_{x^1} \wedge \pi\partial_{x^2} \otimes \left(\left(\pi\partial_{\theta^2}\right)^{\wedge 2} + \left(\pi\partial_{\theta^1}\right)^{\wedge 2}\right) - \frac{1}{2}\left(\theta^1\pi\partial_{x^2} \otimes \left(\pi\partial_{\theta^1}\right)^{\wedge 2}\pi\partial_{\theta^2} + \right. \\
& + \theta^2\pi\partial_{x^0} \otimes \left(\left(\pi\partial_{\theta^1}\right)^{\wedge 2} \wedge \pi\partial_{\theta^2} + \pi\partial_{\theta^1} \wedge \left(\pi\partial_{\theta^2}\right)^{\wedge 2}\right) + \\
& \left. - \theta^2\pi\partial_{x^1}\left(\pi\partial_{\theta^1}\right)^{\wedge 2} \wedge \pi\partial_{\theta^2} + \theta^1\pi\partial_{x^1} \otimes \pi\partial_{\theta^1} \wedge \left(\pi\partial_{\theta^2}\right)^{\wedge 2}\right) \Big] \ .
\end{aligned} \tag{38}
$$

构造保持某些对称性的上链映射这一点，与物理学密切相关。下面我们将介绍两个可能的应用领域。

流变学，或群流形方法。超引力和超弦（场）理论是超几何的应用领域。在这些理论中，有多种构造拉格朗日量的方法，其中之一是流变学（参见书籍 [CDF]）。其过程大致如下：首先，为理论中定义在某个超流形 $\mathcal{SM}$ （例如真空情况下的超群或超陪集）上的场内容（即“超多重态”）定义 Bianchi恒等式，并施加“流变约束”，即要求其满足与约化到底流形相容的若干条件。根据这些数据，可以构造一个形式拉格朗日量 $\mathcal{L} \in \Omega^{(\dim_0 \mathcal{SM}|0)}$。为了构造作用量，特别是建立一致的变分原理，需要从 $\mathcal{L}$构造出 $\mathcal{SM}$ 的 Berezinian 的一个截面，而这可以通过图像改变算子 $\mathbb{Y}^{(0|\dim_1 \mathcal{SM})} \in H^{(0|\dim_1 \mathcal{SM})}(\mathcal{SM})$ 来实现。这个数据表示约化子流形 $\mathcal{SM}_{red} \hookrightarrow \mathcal{SM}$ 嵌入的庞加莱对偶，而对代表元的选择可以调节最终得到的作用量和自由度。特别地，如果 $d\mathcal{L} = 0$ （当理论具有有限个辅助场时，这一条件成立），并且 $\partial\mathcal{SM} = \emptyset$，那么所有代表元都会导出相同的作用量：

$$
S\left[\mathcal{L}, \tilde{\mathbb{Y}}^{(0|\dim_1 \mathcal{SM})} = \mathbb{Y}^{(0|\dim_1 \mathcal{SM})} + d\Lambda^{(-1|\dim_1 \mathcal{SM})}\right] - S\left[\mathcal{L}, \mathbb{Y}^{(0|\dim_1 \mathcal{SM})}\right] =
$$

$$= \int_{\mathcal{SM}} \mathcal{L} \wedge d\Lambda^{(-1|\dim_1 \mathcal{SM})} = \int_{\mathcal{SM}} (-1)^{|\mathcal{L}|} d\left(\mathcal{L} \wedge \Lambda^{(-1|\dim_1 \mathcal{SM})}\right) = 0 \ , \tag{39}$$

这是斯托克斯定理的结果。在这些情况下，选择图像改变算子可以显式保留所需的（超）对称性，而改变代表元则会在同一理论的不同实现之间建立联系。这表明，同一理论和相同的自由度可能以多个副本的形式包含在同一个超形式拉格朗日量中，从而允许图像改变算子从中选取不同但等价的子扇区。一个典型例子是（超）陈-西蒙斯理论；完整分析可见例如 [CG]。

如果 $d\mathcal{L} \neq 0$，或者在存在边界的情况下，不同的图像改变算子会产生不同的理论。在这些情况下，所保留的（超）对称性的选择将决定所得作用量可能具有的（超）对称性。这类理论的一个近期实例可见于 [ACDG]。

威尔逊算子，或（高阶）全纯环。（超）威尔逊算子，即（高阶）全纯环，是另一个适合运用图像改变算子的代数方法来处理不变性，尤其是由奇元素生成的对称性的领域。我们先回顾这些算子的定义：设 $\mathcal{SM}$ 为一个超流形，$\Sigma \hookrightarrow \mathcal{SM}$ 为一个子流形（一条线、一个曲面等），我们定义与（可能是超或高阶）联络 A 及 Σ 相关联的威尔逊算子如下：

$$\mathcal{W} \coloneqq \mathrm{Tr} P \exp\left(\int_{\Sigma} A^*\right) \ , \tag{40}$$

其中 Tr 表示规范群上的迹，P 是路径/曲面等上的序关系，而 A^* 是 A 在 Σ 上的拉回。利用嵌入 $\Sigma \hookrightarrow \mathcal{SM}_{red} \hookrightarrow \mathcal{SM}$，可以将指数改写为联络 A 在整个超流形 $\mathcal{SM}$ 上的积分：

$$\int_{\Sigma} A^* = \int_{\mathcal{SM}} A \wedge \mathbb{Y}_{\Sigma \hookrightarrow \mathcal{SM}_{red}} \wedge \mathbb{Y}_{\mathcal{SM}_{red} \hookrightarrow \mathcal{SM}} \ . \tag{41}$$

积分形式 $\mathbb{Y}_{\Sigma \hookrightarrow \mathcal{SM}_{red}} \wedge \mathbb{Y}_{\mathcal{SM}_{red} \hookrightarrow \mathcal{SM}}$ 对应于两个映射的复合：一个是由嵌入 $\Sigma \hookrightarrow \mathcal{SM}_{red}$ 的庞加莱对偶（通常意义下，即针对流形）定义的映射，另一个是描述嵌入 $\mathcal{SM}_{red} \hookrightarrow \mathcal{SM}$ 的映射，如上一节所述。由于这两个映射都是上链映射，它们的复合相对于嵌入 $\Sigma \hookrightarrow \mathcal{SM}$也是上链映射；正如我们在前一个例子中讨论的那样，接着可以利用链同伦来构造保持某些对称性的上链映射。这尤其有用，因为可以通过这些上链映射的对称性来研究（40）的对称性，其主要优势是将一个困难的几何问题化简为一个更容易的代数问题。这在研究“BPS算子”的分类时可能会很有用；所谓BPS算子，即破坏部分超对称性的算子。它也可用于其他微妙任务，例如为这些算子实现“卡帕对称性”（CGP、CGP2]中的一些具体例子已对此作了展示）。

1.2.1. 关于对称 PCO 的评论。寻找一些保持对称性的 PCO 可能相当困难，但在某些情况下，由于它与 Chevalley-Eilenberg（上）同调有关，可以将问题简化。特别是，如果考虑特征为零的域 $\mathbb{K}$ 上的半单李代数 $\mathfrak{g}$，那么任意上同调类 $\omega \in H^p(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$ 都包含一个 $\mathfrak{g}$-不变余循环（证明见原论文 [CE] ）。这可以很容易地推广到李超代数；关于李超代数上同调的广泛论述可见于书籍 [Fu]。最近，文献 [CCGN] 和 [CG2] 引入了李超代数背景下积分形式及其上同调的概念：通过模仿它们在几何背景下的定义，

代数积分形式（取值于给定模 V）定义为与“哈 Haar Berezinian” $\mathcal{D}$ 张量积的链，其取值位于 V：

$$C_\bullet(\mathfrak{g},\mathcal{D}\otimes V)\equiv\Sigma^\bullet(\mathfrak{g},V):=\mathcal{D}\otimes S^{\dim_0\mathfrak{g}-\bullet}\Pi\mathfrak{g}\ . \tag{42}$$

若考虑 $V=\mathbb{K}$，且 $\mathfrak{g}$ 是幺模的（更多细节见 [CCGN, CG2] ），则模 $\mathcal{D}$ 是平凡的（即它在 $\mathfrak{g}$ 下不变），并且积分形式上同调的计算与同调一致。同样，上文引用的定理仍然成立，因此可以选取一个 $\mathfrak{g}$ 不变的同调类与 Haar Berezinian 张量积；这意味着所定义的积分形式在 $\mathfrak{g}$ 下不变。

如果李超代数 $\mathfrak{g}$ 是给定李超群 G 的局部版本，那么前述构造可用于生成适用于 G 的 $\mathfrak{g}$ 不变形式；该代数由左不变向量场（例如）生成，其对偶即为 Maurer-Cartan形式，而由左不变向量场和 Haar Berezinian 构成的积分形式（在幺模情形下，Haar Berezinian 同时左不变和右不变）自动具有左不变性。在积分形式的分布实现中，这些形式对应于仅由 Maurer-Cartan形式构造的分布，尤其是不显含局部坐标的分布。随后，可以使用简单的代数工具来构造与所考虑流形的对称性相容的 PCO。在上面的例子中，式（36）中的 PCO 由同调类 $\pi P_a\wedge\pi D_\alpha\wedge\pi D_\beta\gamma^{a\alpha\beta}$ 构造，因此可以保证其在 Q 生成元作用下的不变性。也可以反向运用这一过程，判断能否仅用 Maurer-Cartan形式构造对称的 PCO；若不能，则可知其原因。例如，对于 $d=11,N=1$ 平直超空间，即 $\mathcal{SM}:=\frac{ISO}{}(1,10|1)\,SO(1,10)$，其对应的陪集李超代数为 $\mathfrak{g}:=\frac{\mathfrak{iso}}{}(1,10|1)\,\mathfrak{so}(1,10)$，不存在上同调类 $\omega\in\Sigma^0(\mathfrak{g})\equiv\Omega^{(0|32)}(\mathfrak{g})$，因此我们先验地知道，无法仅由 Maurer-Cartan形式构造 PCO。

这一构造的重要性在物理学中有着广泛体现，其中一个著名实例便是超弦理论的 Green-Schwarz 构造（见 [GSW]）。作用量定义为一个 sigma 模型作用量加上一个 Wess-Zumino 项：

$$S=-\frac{1}{2}\int_\Sigma(V^\mu)^*\wedge\star(V^\nu)^*\,\eta_{\mu\nu}+S_2=-\frac{1}{2}\int_\Sigma\sqrt{h}h^{ij}\Pi_i^\mu\Pi_j^\nu\eta_{\mu\nu}+S_2\ ,\ \Pi_i^\mu=\partial_iX^\mu-i\bar\theta^A\Gamma^\mu\partial_i\theta^A\ , \tag{43}$$

其中 $X^\mu\colon\Sigma\to\mathcal{SM},\mu=0,\dots,\dim_0\mathcal{SM}-1$ 是从二维流形 Σ（“世界面”）到目标超流形 $\mathcal{SM}$的映射，目标超流形取为超闵可夫斯基空间，具有 N =0、1、2 个超荷（$A=0,\dots,N$ 是一个 R- 对称性指标），且 $\dim_0\mathcal{SM}=3$、 4、 6、 10。作用量的第二项（要使作用量具有“κ 对称性”，从而实现偶-奇自由度的匹配，换言之，使其在世界面上具有超对称性，这是必需的）在 Σ 上积分时表达式相当复杂，并且很难检验其超对称性性质（在目标空间中）。相反，按照上述方式构造它则非常容易：可以考察目标空间中超平移 $\mathfrak{g}$ 的李代数上同调[5]，并立即看到，在所考虑的维数情况下，存在一个三形式 $\Omega^{(3)}(\mathfrak{g})\ni\omega=V^\mu\Gamma_\mu\psi^A\psi^A$，使得 Wess-Zumino 项可以写成

$$S_2=c\int_\Lambda\omega^*\ ,\ \partial\Lambda=\Sigma\ , \tag{44}$$

其中，我们用 ω^* 表示 ω 在边界为世界面的流形 $\Lambda\,\Sigma$ 上的拉回，而 c 是给定的系数。在这种情况下，不仅

[5]我们在这里借用了这个名称，因为我们处理的是一个陪集（超庞加莱群模掉洛伦兹群），因此应当谈论相对李代数上同调。

拉格朗日量第二项的超对称性由构造保证，而且某些维度中这类项的存在性也由李超代数上同调分类。

2. Future developments: Pseudoforms

本节将为未来的发展奠定思想基础；这里只作概述，严格的定义留待后续分析。特别是，我们想讨论伪形式以及与之相关的 PCO：在 [Wit], 中，作者回顾了积分形式的分布式实现方式。积分形式被引入为一个 Clifford-Weyl 代数的模，该代数由给定超流形上的微分形式与缩并定义（积分形式复形通过对 Berezinian层中的一个形式——即被称为“产生算子”的缩并所作用的“基态”——施加缩并而引入；该基态会被任何形式乘法湮灭）。类似地，他将超形式引入为该代数的一个不等价模（此时，超形式复形通过对基态 1 施加由 1-形式乘法实现的作用而引入，这些乘法被视为产生算子；基态 1 会被任何缩并湮灭）。最后，通过引入一个会被某些缩并和某些形式乘法湮灭的基态，定义了第三类模。这些基态定义了新的形式复形：对基态施加“互补”的缩并或形式乘法即可得到这些复形；其中的形式称为伪形式，并以含有非极大且非零数量、且支撑在偶形式 $d\theta$s 上的狄拉克 δ 函数的形式来实现。

从几何观点来看，伪形式尚未得到充分理解，例如，它们并不张量地变换：考虑 $\mathbb{R}^{(0|2)}$ 的基本例子，我们可以写出一个支撑在 $d\theta^1$ 上的伪形式，如下所示

$$\omega = \delta\left(d\theta^1\right) \ . \tag{45}$$

如果考虑变换 $d\theta^1 \mapsto d\theta^1 + d\theta^2$，我们会得到一个形式幂级数 a s

$$\delta\left(d\theta^1\right) \mapsto \delta\left(d\theta^1 + d\theta^2\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(d\theta^2)^p}{p!} \delta^{(p)}\left(d\theta^1\right) \ , \tag{46}$$

其中 $\delta^{(p)}(d\theta) \equiv \left(\iota_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\right)^p \delta(d\theta)$。不过，最近在 [CG2], 中，伪形式已在一个简化的背景下——李超代数中——得到严格引入。给定一个李超代数 $\mathfrak{g}$，$\dim\ \mathfrak{g} = (m|n)$，以及一个李子超代数 $\mathfrak{h}$，$\dim \mathfrak{h} = (p|q)$，可以引入两个与 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 的 Berezinian $\mathfrak{h}$-模相关联的无限维 $\mathfrak{g}$-模：

$$V_{\mathfrak{h}}^{(p|q)} := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \left(S^i \Pi\mathfrak{h} \otimes \mathcal{B}er\left(\mathfrak{h}\right)\right) \otimes S^i \Pi\mathfrak{k}^* \quad , \quad V_{\mathfrak{k}}^{(m-p|n-q)} := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \left(S^i \Pi\mathfrak{k} \otimes \mathcal{B}er\left(\mathfrak{k}\right)\right) \otimes S^i \Pi\mathfrak{h}^* \ . \tag{47}$$

这些模对应于与给定子结构 $\mathfrak{h}$ 相关联的伪形式，可用于构造两个伪形式复形。在 [CG2] 中，目标是将 Chevalley-Eilenberg 上同调扩展到伪形式复形，并将 Hochshild-Serre谱序列的构造扩展到伪形式复形；研究还发现了一些有趣的特征。例如，由于伪形式模是无限维的，李代数上同调中的一些经典定理无法推广到伪形式，例如上同调类与不变量之间的关系（这一关系在有限维模的情形下确实成立）。

在代数语境中构造伪形式的思路非常简单：伪形式是子结构的积分形式。这一点在 [Man], 和 [Wit] 中已有所体现。这里，我们着重阐述这一核心思想，将其具体实现留待今后发展：

考虑一个超流形 $\mathcal{SM}$，即由一个拓扑空间 $|\mathcal{SM}|$ 和一个（超交换）函数环层 $\mathcal{O}_{\mathcal{SM}}$ 构成的数据。假设给定一个子流形 $\mathcal{Y}$，那么我们就有一个子集 $|\mathcal{Y}| \subseteq |\mathcal{SM}|$ 及其结构层 $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$。我们可以将理想层 $\mathcal{J}_{\mathcal{Y}}$ 定义为 $\mathcal{O}_{\mathcal{SM}}$ 的子层，其中包含所有在 $\mathcal{U} \cap \mathcal{Y}$ 上取值为零的函数，对所有开集 $\mathcal{U}$ 均如此。于是我们得到如下层的短正合序列

$$0 \to \mathcal{J}_{\mathcal{Y}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{SM}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \to 0 \ . \tag{48}$$

可以在 $\mathcal{Y}$ 上引入积分形式，而我们的想法是将其扩展解释为 $\mathcal{SM}$中的伪形式。在 PCO 的层面上，我们的想法是以类似于前几节所述的方式，定义一个与层 $\mathcal{J}_{\mathcal{Y}}$相关联的 PCO，并定义一个与 $\mathcal{Y}$的约化流形 $\mathcal{Y}_{red}$ 相关联的 PCO。为 $\mathcal{SM}$ 定义的 PCO 应当与这两个 PCO 的链复合有关。就分布实现而言，这意味着将 $\mathcal{SM}$ 上的 PCO 分解为乘积 $\mathbb{Y}_{\mathcal{SM}} = \pm \mathbb{Y}_{\mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{SM}} \wedge \mathbb{Y}_{\mathcal{Y}}$（相差一个符号）。

目前尚不清楚在对 $\mathcal{SM}$ 和 $\mathcal{Y}$ 作何种假设的条件下才能展开这一论证；正如本节开头所述，这留待今后进一步研究。

Acknowledgements

我感谢 P.A. Grassi、B. Jurˇco、S. Noja 和 R. Noris 的帮助，以及他们对稿件提出的许多建议。我也感谢 A. Caddeo 与我多次讨论 PCO 在物理上的相关性。我谨此感谢 GACR 提供 EXPRO 19-28628X 项目资助。

References

[ACDG]L. Andrianopoli、C. A. Cremonini、R. D'Auria、P. A. Grassi、R. Matrecano、R. Noris、L. Ravera 和 M. Trigiante，《超空间方法中的 M5 膜》，《物理评论D》106 (2022) 第2期，2，doi:10.1103/PhysRevD.106.026010[Bat] M. Batchelor，《超流形的结构》，《美国数学会汇刊》253 (1979) 329-338[Bel] A. Belopolsky，《超几何与超弦理论中的图像改变算子》，[arXiv:hep-th/9706033[hep-th]]。[CNR] S. L. Cacciatori、S. Noja 和 R. Re，《超流形上的泛德拉姆／斯宾塞双复形》，《数学文献》27，489-518 (2022)[CDF] L. Castellani、R. D'Auria 和 P. Fre，《超引力与超弦：几何视角》，第1、2、3卷，新加坡：世界科学出版社 (1991) 1375-2162[CCGN] R. Catenacci、C. A. Cremonini、P. A. Grassi 和 S. Noja，《李超代数上同调：形式、积分形式与陪集超空间》，[arXiv:2012.05246 [hep-th]] 已被《李理论杂志》接收[CE] C. Chevalley、S. Eilenberg，《李群与李代数的上同调理论》，《美国数学会汇刊》63 (1948) 85[CG] C. A. Cremonini 和 P. A. Grassi，《超陈-西蒙斯理论：巴塔林-维尔科维斯基形式体系与 A_∞代数》，《物理评论D》102 (2020) 第2期，025009[CG2] C. A. Cremonini 和 P. A. Grassi，《广义余循环与超p膜》，[arXiv:2206.03394 [hep-th]]。[CGP] C. A. Cremonini、P. A. Grassi 和 S. Penati，《通过积分形式构造超对称威尔逊环》，《高能物理学杂志》04 (2020)，161，doi:10.1007/JHEP04(2020)161[CGP2] C. A. Cremonini、P. A. Grassi 和 S. Penati，《超空间中的曲面算子》，《高能物理学杂志》11 (2020)，050，doi:10.1007/JHEP11(2020)050[FMS] D. Friedan、E. J. Martinec 和 S. H. Shenker，《共形不变性、超对称性与弦理论》，《核物理B》271 (1986)，93-165，doi:10.1016/0550-3213(86)90356-1[Fu] D. Fuks，《无限维李代数的上同调》，(1986) 施普林格，纽约，纽约州[GSW] M. B. Green、J. H. Schwarz 和 E. Witten，《超弦理论：第1卷，导论》，剑桥数学物理专著，978-0-521-35752-4 (1988)[Man]Y. I. Manin，《规范场论与复几何》，德国柏林：施普林格 (1988) 295页。（数学科学基础丛书，289）[Noj] S. Noja，《超流形上形式的几何》，《微分几何及其应用》，第88卷 (2023) 101999

[WB] J. Wess 和 J. Bagger，《超对称性与超引力》，普林斯顿大学出版社，1992年，ISBN 978-0-691-02530-8[Wit] E. Witten，《超流形与积分笔记》，《纯粹与应用数学季刊》15（2019年）第1期，第3–56页 电子邮箱：carlo.alberto.cremonini@gmail.com

Faculty of Mathematics and Physics, Mathematical Institute, Charles University Prague, Sokolovska49/83, 186 75 Prague