arXiv:2305.02856v1 [stat.AP] 4 May 2023

相似凸体的粒径分布的体视学测定

Thomas van der Jagt[1], Geurt Jongbloed[1], 和 Martina Vittorietti[2]

[1]代尔夫特应用数学研究所、代尔夫特理工大学。[2]经济、企业与统计科学系，巴勒莫大学。

摘要

考虑一种含有三维粒子的不透明介质。所有粒子均为形状相同的凸体，但大小各异。粒子在介质中随机分布并随机取向，无法直接观测。对该介质进行平面截面可得到一个样本，其中包含所截粒子的二维截面轮廓面积。本文所关注的分布是潜在的三维粒径分布，并针对该分布给出了可识别性结果。此外，本文还提出了该尺寸分布的非参数估计量，证明了该估计量具有一致性，并通过模拟研究评估了其性能。

1 引言

在经典的 Wicksell 微粒问题中， [1] 球体随机分布于一个不透明物体内。问题在于，如何利用平面截面中观察到的圆形轮廓来估计球体的尺寸分布。这个问题的研究动机源于解剖学和天文学。在解剖学领域，人们关注的是所谓的滤泡，因为在尸检研究中，可以在器官切片中观察到滤泡。这些滤泡近似呈球形，因此与其相交后形成的截面轮廓也近似为圆形。由此，我们可能会想知道滤泡半径的分布情况。材料科学领域也存在类似的问题。钢的所谓微观结构中一个重要特征是晶粒。了解三维晶粒的尺寸分布，有助于研究晶粒尺寸分布与金属力学性能之间的关系。与获取钢的微观结构三维信息相比，通过观察金属的平面横截面获取二维信息要简单得多。因此，人们希望利用二维观测来估计三维信息。这些问题属于体视学领域，该领域致力于根据低维样本估计高维信息。

我们研究 Wicksell 问题的一种推广。具体而言，我们考虑随机分布在不透明物体中且朝向随机的三维粒子，即凸体。凸体是具有非空内部的紧凸集。这些粒子的形状均相同且已知，但尺寸各不相同。粒子无法被直接观测；我们只能观测这些粒子在平面截面上的二维截面轮廓。我们要解决的统计问题是

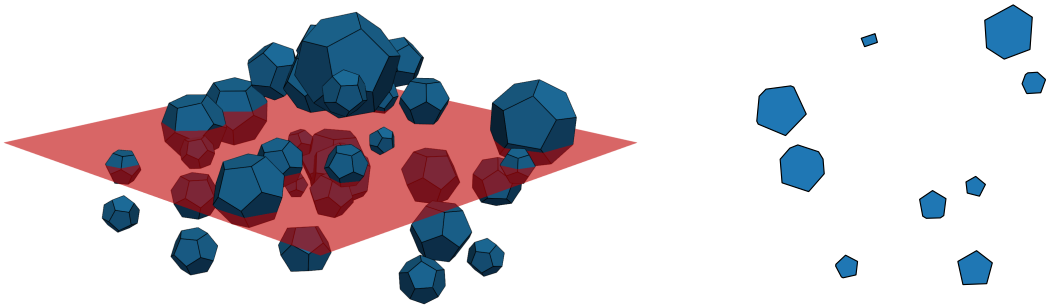

图 1：左：与平面相交的凸十二面体随机空间系统。右：观测到的截面轮廓。

利用截面轮廓观测面积的样本，估计粒子的尺寸分布。图 1 展示了这一问题设置的示意图。在这个具体例子中，每个粒子都是一个凸十二面体。

文献 [2]概述了球形情形下尺寸分布的估计量。球体以外的形状也曾受到研究。文献 [3] 考察了立方体粒子的情形。文献 [4] 研究了这一问题的一种变体：粒子为随机多面体，因此在这种情形下，并非所有粒子都具有相同的形状。文献 [5]考察了由定向圆柱体构成的系统。

本文的主要贡献如下。针对本文所研究的问题，一个关键见解是，我们可以将粒子的形状与尺寸分离开来：观测到的面积可以解释为两个独立随机变量的乘积，其中一个与粒子尺寸有关，另一个与已知的粒子形状有关。只有在少数特殊情形下，才能明确得知与形状有关的随机变量的密度函数，因此我们采用文献 [6] 提出的模拟程序，该程序可用于以任意精度对其进行近似。

利用该形状相关的分布作为组成部分，我们设计了一种最大似然程序，用于估计粒子的尺寸分布；该程序可用于一大类可能的形状。此外，我们证明了所得估计量的相合性，并提供了可用于计算该估计量的算法。此外，我们通过一项小型模拟研究评估了所提出的估计量，在该研究中，我们重点考察了粒子形状为凸多面体的情形。

本文结构如下。第 2 节介绍必要的符号和定义。第 3 节推导描述该问题的一个积分方程。借助该方程，我们在第 4 节得到一个可识别性结果，指出轮廓面积分布唯一确定三维尺寸分布。第 5 节定义所谓偏倚尺寸分布的一个估计量。第 6 节证明该估计量的相合性。第 7 节讨论计算所提出估计量的算法。第 8 节说明如何通过偏倚尺寸分布估计粒径分布。第 9 节进行一些模拟，并在文末第 10 节给出结论。

2 预备知识

本节介绍必要的符号，并汇总本文其余部分所需的一些初步结果。我们考虑一个随机分布的粒子系统，其中每个粒子都是一个凸物体。形式上，凸物体是一个具有非空内部的凸紧集。给定一个 $\lambda > 0$ 和一个集合 $A \subset \mathbb{R}^3$，λ 与 A 的数乘定义为：$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$。令 SO(3) 表示 3 阶旋转群。它包含所有 3×3旋转矩阵，即行列式为 1 的正交矩阵。要准确描述粒子的随机平面截面所指为何，需要先给出一些定义。$\mathbb{R}^3$ 中的球面为：$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$。$\mathbb{R}^3$ 中的上半球为：$S^2_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_3 \geq 0\}$。令 σ_2 表示 S^2上的球面测度，也称为 S^2上的球面勒贝格测度。在对（某个子集的）S^2 积分时，记号 $\mathrm{d}\theta$ 应理解为 $\mathrm{d}\sigma_2(\theta)$。$\mathbb{R}^3$ 中的一个平面可通过单位法向量 $\theta \in S^2_+$ 及其到原点的有向距离 $s \in \mathbb{R}$ 参数化：

$$T_{\theta,s} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, \theta \rangle = s\}, \tag{1}$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中通常的内积。

我们定义均匀随机（IUR）平面与给定凸物体在 $\mathbb{R}^3$ 中相交的含义。IUR 平面的概念由 [7], 引入；我们遵循 [8] 第 5.6 节中的定义。

定义 1（均匀随机平面）。定义与给定凸物体 $K \subset \mathbb{R}^3$ 相交的均匀随机平面 T 为$T = T_{\Theta,\, S}$其中（Θ，S）具有联合概率密度 f_K：$S^2_+ \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$，其定义如下：

$$f_K(\theta, s) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi \bar{b}(K)} & \text{if } K \cap T_{\theta,s} \neq \emptyset \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

¯其中 $T_{\theta,\, s}$ 如式 (1) 所示，且 b（K）是 K 的平均卡尺直径，或平均宽度：

$$\bar{b}(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2_+} L(p_\theta(K)) \mathrm{d}\theta.$$

这里，p_θ（K）表示 K 在经过原点且方向为 θ 的直线上的正交投影。L（p_θ（K））是该正交投影的长度，也可称为 K 在方向 θ 上的宽度。K 的凸性保证 L（p_θ（K））是一个区间的长度。

宽泛地说，这意味着对于一条经过 K 的均匀随机平面，任何与 K 有非空交集的平面出现的概率都相同。我们需要以下引理，它在 [7] 中作为命题1出现：

引理1. 假设 $Q \subset \mathbb{R}^3$ 是一个凸物体，$K \subset Q$ 是另一个凸物体。设 T 是一条与 Q 相交的均匀随机平面，则：

1. 相交概率：

$$\mathbb{P}(T \cap K \neq \emptyset) = \frac{\bar{b}(K)}{\bar{b}(Q)}.$$

*2. Cond*附加性质：已知 T 与 K 相交，即 $T \cap K \neq \emptyset$，T 是与 K 相交的均匀随机平面。

当凸物体 K 被均匀随机平面击中时，我们会得到一个面积随机的截面。令G_K 表示与这种随机面积相关的累积分布函数（CDF）。它有时被称为截面积分布。 G_K 中的累积分布函数在 [6], 中进行了研究，我们收集了以下性质：

定理 1. 设 $K \subset \mathbb{R}^3$ 为一个凸体， T 为击中 K的均匀随机平面。随机变量 $Z := \mathrm{area}(K \cap T)$ 的分布函数为 G_K。令 G_K^S 表示 $\sqrt{Z}$的分布函数。以下性质成立：

1. 运动不变性： G_K 和 G_K^S 在对 K进行平移和旋转时保持不变。*2.* 凸体的缩放：对于所有 $\lambda > 0$、 $z \in \mathbb{R}$， $G_{\lambda K}(z) = G_K\left(\frac{z}{\lambda^2}\right)$ 。*3.* 绝对连续性：若 K 严格凸，或为满足每条边至多平行于另一条边的多面体，则 G_K 和 G_K^S 具有勒贝格密度。*4.* 初始单调性：若 G_K^S 具有勒贝格密度 g_K^S，则 g_K^S 在$(0, \tau_K)$上单调不减，其中 $\tau_K > 0$为某个值。

特别需要指出的是，对于一大类凸体， G_K 具有勒贝格密度。对于所有凸体，G_K 是否相对于勒贝格测度绝对连续，仍是一个未解决的问题。我们将在第 5 节定义粒径分布的估计量。届时，定理 1 中的平方根变换为何与此相关便会明了。

3 立体学积分方程的推导

本节将对模型进行形式化描述，并推导一个立体学积分方程。正如引言中所述，体视学旨在根据低维样本估计高维信息。本节中的立体学方程直接关联三维粒径分布与观测到的二维截面轮廓面积分布。我们将推导观测截面面积的密度 f_A 的表达式。 [9] 第 16 章中还给出了这一密度的另一种推导。该推导有两个目的：一是帮助直观理解这一问题，二是利用该方程定义估计量。

设 $Q \subset \mathbb{R}^3$ 为包含随机分布粒子的凸不透明物体。 Q 与随机平面的交集会产生一组观测到的截面轮廓面积样本。暂且假设 Q 只包含一个粒子，即凸物体 K_1。假设 K_1 与一个已知的凸物体 $K \subset \mathbb{R}^3$ 相似，我们将其称为参考粒子。这意味着存在一个旋转 $M \in$ SO(3)、一个点 $x \in \mathbb{R}^3$ 和一个标量 $\Lambda > 0$，使得 $K_1 = \Lambda MK + x := \{\Lambda Mk + x : k \in K\}$。我们将标量 Λ 称为 K_1的尺寸，它服从一个未知的尺寸分布，其累积分布函数为 H ，概率密度函数为 h。因此，尺寸表示相对于参考粒子的缩放比例，而参考粒子的尺寸为 1。平均尺寸记为：

$$\mathbb{E}(\Lambda) = \int_0^\infty \lambda h(\lambda) \mathrm{d}\lambda,$$

并且我们假设 $0 < \mathbb{E}(\Lambda) < \infty$ 始终成立。设 T是一个与 Q相交的均匀随机平面。令 $B := \{T \cap K_1 \neq \emptyset\}$ 表示事件： K_1 与 T相交。根据引理1，在已知 K_1 的尺寸为 λ 的条件下， K_1 与 T 相交的概率为：

$$\mathbb{P}(B|\Lambda = \lambda) = \frac{\bar{b}(\lambda K)}{\bar{b}(Q)} = \lambda \frac{\bar{b}(K)}{\bar{b}(Q)}. \tag{2}$$

这里，我们利用了这样一个事实： $b(\lambda K) = \lambda b(K)$ 和 $b(K)$ 在 K的旋转和平移下保持不变。虽然 Λ 取自 H，但出现在平面截面中的粒子尺寸服从与 H不同的分布。也就是说， $\Lambda|B$ 并非按照 H分布。注意，式（2）中的概率与 λ成正比；根据贝叶斯法则， $\Lambda|B$的密度记为 h^b，可计算如下：

$$h^b(\lambda) := f_{\Lambda|B}(\lambda) = \frac{\mathbb{P}(B|\Lambda=\lambda)h(\lambda)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|\Lambda=\lambda)h(\lambda)}{\int_0^\infty \mathbb{P}(B|\Lambda=\lambda)h(\lambda)\mathrm{d}\lambda} = \frac{\lambda h(\lambda)}{\mathbb{E}(\Lambda)}.$$

本文中，我们将 h^b 称为与 h相关联的长度偏倚尺寸分布的密度。令 H^b 为与 h^b 对应的累积分布函数，并注意到 H 和 H^b 之间的关系如下：

$$H^b(\lambda) = \frac{\int_0^\lambda x\mathrm{d}H(x)}{\int_0^\infty x\mathrm{d}H(x)} \quad \text{and} \quad H(\lambda) = \frac{\int_0^\lambda \frac{1}{x}\mathrm{d}H^b(x)}{\int_0^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}H^b(x)}, \quad \lambda \geq 0. \tag{3}$$

我们将 H^b 称为长度偏倚尺寸分布函数，或称为 H的长度偏倚版本。关于长度偏倚分布以及更一般的尺寸偏倚分布的详细综述，可参阅 [10]。作者还证明了长度偏倚分布具有以下一般性质：若 $\Lambda_b \sim H^b$和 $\Lambda \sim H$，则有： $\mathbb{P}(\Lambda_b \geq \lambda) \geq \mathbb{P}(\Lambda \geq \lambda)$。因此，由于 H^b 是平面截面中出现的粒子的尺寸分布，这意味着较大的粒子更有可能出现在横截面中。

现在，我们可以推导由截面平面截中 K_1 所产生的观测截面面积的分布。在已知 K_1 被截中的条件下，令 $A := \text{面积}(K_1 \cap T)$。根据引理1中的均匀随机平面的条件性质，已知 T 截中 K_1 时，它是截中 K_1的均匀随机平面。因此，若尺寸为 λ 的 K_1出现在截面平面中，其截面面积服从 $G_{\lambda K}$ 所给出的分布。利用条件概率法则可得：

$$F_A(a) := \mathbb{P}(A \leq a|B) = \int_0^\infty \mathbb{P}(A \leq a|B, \Lambda=\lambda) f_{\Lambda|B}(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty G_{\lambda K}(a)\mathrm{d}H^b(\lambda).$$

利用定理 1 的第 2 点， F_A 可写为：

$$F_A(a) = \int_0^\infty G_K\left(\frac{a}{\lambda^2}\right)\mathrm{d}H^b(\lambda) = \frac{1}{\mathbb{E}(\Lambda)}\int_0^\infty G_K\left(\frac{a}{\lambda^2}\right)\lambda\mathrm{d}H(\lambda). \tag{4}$$

假设现在我们随机放置并定向互不重叠的粒子 $K_1, K_2, \ldots$于 Q中，每个粒子都与 K相似。更具体地说，粒子的中心服从齐次泊松点过程分布。至于方向，粒子的所有方向都等可能且相互独立。粒子的大小 $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$根据 H 独立同分布。用均匀随机平面与 Q 相交，可得到一个来自 F_A 、由观测截面积组成的独立同分布样本 $A_1, \ldots, A_n$，其中 n 是某个随机变量。设 K 为一个凸物体，使得 G_K 具有密度 g_K，回顾定理 1。设 $a_{\max}$ 为 K的最大可能截面积，使得 g_K的支撑集为 $(0, a_{\max})$。那么， F_A 具有如下密度：

$$f_A(a) = \frac{1}{\mathbb{E}(\Lambda)}\int_{\sqrt{\frac{a}{a_{\max}}}}^\infty g_K\left(\frac{a}{\lambda^2}\right)\frac{1}{\lambda}\mathrm{d}H(\lambda). \tag{5}$$

立体学方程 (5) 直接关联三维粒子的尺寸与观测到的二维截面轮廓的面积。

例 1（Wicksell微粒问题）。将参考粒子 $K = B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ 选为半径为 *1* 的球体。于是：$g_K(z) = 1/(2\pi\sqrt{1 - z/\pi})$，$0 < z < \pi$。我们可以将 H 解释为三维球体半径的分布函数。注意，球体的任意平面截面都是圆盘。给定 $A \sim f_A$ 集合 $A = \pi R^2$，观测到的圆半径的密度满足：$f_R(r) = f_A(\pi r^2)\, 2\pi r$, $r > 0$。将其与 *(5)* 结合可得：

$$f_R(r) = \frac{1}{\mathbb{E}(\Lambda)} \int_r^\infty \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}} \frac{2\pi r}{\lambda} \mathrm{d}H(\lambda) = \frac{r}{\mathbb{E}(\Lambda)} \int_r^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - r^2}} \mathrm{d}H(\lambda),$$

这对应于著名的 *Wicksell*积分方程 *[1]*。

注 1. 通过恰当选择参考粒子，可以将尺寸分布直接关联到一种更便于处理的分布。例如，如果参考粒子的直径为 *1*，那么尺寸分布就对应于粒子直径的分布。若选择体积为 *1* 的参考粒子，则尺寸为 λ 的粒子体积为 λ^3。此时，体积分布函数由 $F_V(x) = \mathbb{P}(\Lambda^3 \leq x) = H(x^{\frac{1}{3}})$ 给出。

推导出的立体学方程在不同假设下同样成立。可以通过选取一个各向同性典型粒子来定义粒子的随机系统，然后利用 $\mathbb{R}^3$ 上的平稳点过程确定粒子的位置。该模型也称为胚粒模型。相关参考资料见 [2]，中的第 6.5 节和第 10.5 节，以及 [11] 和 [3]。因此，无需将粒子限制在不透明物体内，也无需通过泊松点过程来确定粒子的位置。

在这种情况下，令 N_V 表示单位体积内三维粒子的期望数量，这对应于点过程的强度参数。用一个平面与粒子系统相交，令 N_A 表示单位面积内观测到的二维截面轮廓的期望数量。结合众所周知的立体学方程（ [2] 中的定理 10.1）：

$$N_A = N_V \bar{\bar{b}} \quad \text{with} \quad \bar{\bar{b}} := \bar{b}(K) \int_0^\infty \lambda \mathrm{d}H(\lambda),$$

以及（4），得到:

$$N_A(1 - F_A(a)) = N_V \bar{b}(K) \int_0^\infty \lambda(1 - G_{\lambda K}(a)) \mathrm{d}H(\lambda). \tag{6}$$

（6）的一个稍微更一般版本的推导可见于 [12]的第6章。我们特别提及（6），因为它在文献中的出现频率高于（5）。

为了更好地理解这个问题，可以应用一种变换。我们对 (4) 应用平方根变换。对于 $A \sim F_A$，令 $S = \sqrt{A}$，使得 $S \sim F_S$ 和 $F_S(s) = F_A(s^2)$ 对于 $s \in \mathbb{R}$ 成立。与定理 1 中一样，令 $Z \sim G_K$，则 $\sqrt{Z} \sim G_K^S$ 和 $G_K^S(z) = G_K(z^2)$ 对于 $z \in \mathbb{R}$ 成立。令 $s \in \mathbb{R}$，则有：

$$F_S(s) = \int_0^\infty G_K^S\left(\frac{s}{\lambda}\right) \mathrm{d}H^b(\lambda). \tag{7}$$

这个表达式可以看作是两个独立随机变量乘积所对应的分布函数。这一关键见解将在下面的引理中得到精确表述。

引理 2。考虑分布函数 H 及其长度偏倚版本 H^b。设 $Z \sim G_K$和 $\Lambda_b \sim H^b$ 满足 Z，且 Λ_b^2 独立。令 $A = Z\Lambda_b^2$。那么，$A \sim F_A$、F_A、G_K 和 H^b 之间的关系由 *(4)* 给出。

证明。 设 X, Y, Z 为非负随机变量，其累积分布函数分别为 F_X, F_Y和 F_Z。若$X = YZ$ 满足 Y，且 Z 独立，则它们的分布函数之间有如下关系：

$$F_X(x) = \int_0^\infty F_Y\left(\frac{x}{z}\right) \mathrm{d}F_Z(z).$$

将其与（7）比较，结果显而易见。 □

让我们进一步直观地理解引理 2。注意，定理 1 的第 2 点意味着，对于给定的尺寸 $\lambda > 0$，如果 $Z \sim G_K$，那么 $Z\lambda^2 \sim G_{\lambda K}$。由于截面平面中粒子的尺寸按照 H^b 分布，这暗示了引理 2 中给出的关系。

因此，这个问题主要涉及两个方面。首先，横截面中出现的粒子尺寸分布是实际尺寸分布的长度偏倚版本。其次，在某种意义上，我们可以将粒子的共同形状与其尺寸分离。从 H^b 中随机抽取一个尺寸，并独立地对参考粒子进行一次均匀随机截面采样，即可根据引理 2 给出的关系得到一个来自 F_A 的样本。

4 粒子尺寸分布的可识别性

在本节中，我们给出模型的一个一般性可识别性结果。这意味着，在适当的条件下，给定一个已知的参考粒子，不存在两个不同的尺寸分布能够产生相同的观测截面积分布。为了得到这一结果，我们需要使用梅林–斯蒂尔切斯变换，下文中我们也将其称为梅林变换。在研究独立随机变量之和时，特征函数会自然地出现；而在研究独立随机变量的乘积时，梅林变换则更为适用。我们总结了梅林变换的一些性质，详细内容请参阅 [13] 和 [14]中的第 7.8 节。我们注意到，针对这一问题使用梅林变换的做法在 [15]中已有探讨。由于作者推导了密度 h 的一个反演公式，并且对式（5）中的密度 f_A 的研究仅涉及一个归一化常数，因此他们得到了一个略有不同的表达式。本节中的可识别性结果是新的，此前尚未针对这一背景推导出可识别性的充分条件。

定义 2（梅林–斯蒂尔切斯变换）。 给定一个非负随机变量 X，其累积分布函数为 F， X 的梅林–斯蒂尔切斯变换定义为：

$$\mathcal{M}_X(s) = \mathbb{E}(X^{s-1}) = \int_0^\infty x^{s-1} \mathrm{d}F(x),$$

对于 $s \in \mathbb{C}$，只要积分绝对收敛。

特别要注意的是，每当对于某个 $c \in \mathbb{R}$， $\int x^{c-1}\mathrm{d}F(x) < \infty$ 时，梅林变换便对所有 $s = c + it$, $t \in \mathbb{R}$ 存在。因此，梅林变换的存在对应于分布的矩存在。令 $\mathsf{St}(\alpha, \beta) := \{s \in \mathbb{C} : \alpha < \mathsf{Re}(s) < \beta\}$ 表示平行于虚轴的开条带。类似地，$\mathsf{St}[\alpha, \beta] := \{s \in \mathbb{C} : \alpha \le \mathsf{Re}(s) \le \beta\}$ 表示闭条带。若我们找到 $\alpha < \beta$，使得 X 的梅林变换在 $\mathsf{St}[\alpha, \beta]$ 上绝对收敛，那么 $\mathcal{M}_X$ 在 $\mathsf{St}(\alpha, \beta)$ 上解析。取尽可能小的 α 和尽可能大的 β，这个开条带称为 $\mathcal{M}_X$ 的解析条带。梅林变换按以下意义唯一确定一个分布：

引理3（梅林变换的唯一性）。设 $X \sim F_1$ 和 $Y \sim F_2$。假设 $\mathcal{M}_X$ 和 $\mathcal{M}_Y$在$\mathrm{St}[\alpha,\beta]$, $0 \le \alpha < \beta$ 上绝对收敛。如果 $c \in (\alpha,\beta)$ 且 $\mathcal{M}_X(c+it) = \mathcal{M}_Y(c+it)$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$都成立，则 $F_1 = F_2$。

证明见附录 A。对于累积分布函数具有勒贝格密度的情形， [16] 中的定理 8 证明了类似的结论。最后，我们回顾梅林卷积定理。设X， Y， Z为非负随机变量，满足 $X = YZ$，其中 Y和 Z 相互独立。对于任意满足以下条件的$s \in \mathbb{C}$： $\mathcal{M}_Y(s)$和 $\mathcal{M}_Z(s)$有限:

$$\mathcal{M}_X(s) = \mathbb{E}\left(X^{s-1}\right) = \mathbb{E}\left((YZ)^{s-1}\right) = \mathbb{E}\left(Y^{s-1}\right)\mathbb{E}\left(Z^{s-1}\right) = \mathcal{M}_Y(s)\mathcal{M}_Z(s).$$

收集了这些性质后，我们现在陈述可识别性结果。

定理 2 (可识别性)。 假设给定密度 f_A、 g_K ，使得对于某个累积分布函数 H， f_A 可以表示为式 *(5)* 的形式。

1. 如果 $\int_0^\infty z^{-\alpha} g_K(z)\mathrm{d}z < \infty$ 对于某个 $\alpha > 0$成立，那么在$(0,\infty)$ 上只有一个满足（*5*）的分布函数 H 。 *2.* 假设 $\int_0^\infty x^{1+\delta}\mathrm{d}H(x) < \infty$对于某个 $\delta > 0$成立。那么，在$(0,\infty)$ 上只有一个满足（*5*）的分布函数 H 。

证明。 我们首先考虑定理的陈述 1。令 $\Lambda_b \sim H^b$，其中 H^b 如 (3) 中所示，并令$\Lambda \sim H$。令 $Z \sim g_K$ 和 $A \sim f_A$。我们首先确定所关注随机变量的梅林变换在哪些条带上是解析的。由于 $\mathbb{E}(\Lambda_b^{-1}) = 1/\mathbb{E}(\Lambda)$ 且 $\mathbb{E}(\Lambda_b^0) = 1$ ，我们得到$\mathcal{M}_{\Lambda_b}$在 St(0,1) 上是解析的。注意， $1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1 \iff 0 < \mathrm{Re}(2s-1) < 1$。因此:

$$\mathcal{M}_{\Lambda_b^2}(s) = \mathbb{E}\left(\Lambda_b^{2s-2}\right) = \mathcal{M}_{\Lambda_b}(2s-1),$$

对于所有 $s \in \mathrm{St}(1/2,1)$，$\mathcal{M}_{\Lambda_b^2}$在 $\mathrm{St}(1/2,1)$ 上是解析的。选取 $\alpha > 0$，使得 $\mathbb{E}(Z^{-\alpha}) < \infty$。由于 g_K具有有界支撑集， Z的所有非负矩均存在，因此 $\mathcal{M}_Z$在 $\mathrm{St}(1-\alpha,\infty)$ 上是解析的。根据引理 2 和梅林卷积定理，我们得到:

$$\mathcal{M}_A(s) = \mathcal{M}_Z(s)\mathcal{M}_{\Lambda_b^2}(s),$$

对所有 $s \in \mathrm{St}(1-\alpha,\infty) \cap \mathrm{St}(1/2,1) = \mathrm{St}(\max\{1-\alpha,1/2\},1)$。此外，这也意味着 $\mathcal{M}_A$在 $\mathrm{St}(\max\{1-\alpha,1/2\},1)$ 上是解析的。令 $c \in (\max\{1-\alpha,1/2\},1)$。定义:

$$L_Z := \{c+it : t \in \mathbb{R},\ \mathcal{M}_Z(c+it) \neq 0\}, \quad \text{and} \quad L := \{c+it : t \in \mathbb{R}\}.$$

对于所有 $s \in L_Z$，我们得到： $\mathcal{M}_A(s)/\mathcal{M}_Z(s) = \mathcal{M}_{\Lambda_b^2}(s)$。定义 f： $L_Z \to \mathbb{C}$，使得 $f(s) = \mathcal{M}_A(s)/\mathcal{M}_Z(s)$。注意， f 在 L_Z 上是解析的，因为 $s \mapsto \mathcal{M}_{\Lambda_b^2}(s)$ 在直线 L 上是解析的。因此，存在 f 到 L 的唯一解析延拓。该解析延拓的唯一性意味着：$f(s) = \mathcal{M}_{\Lambda_b^2}(s)$，对所有 $s \in L$ 均成立。假设 $\bar{H}$ 也满足 (5)，其中 $\bar{H}^b$ 表示其长度偏倚版本，且 $\bar{\Lambda}_b \sim \bar{H}^b$。然后，按照前面相同的步骤，我们得到： $f(s) = \mathcal{M}_{\bar{\Lambda}_b^2}(s)$，对所有$s \in L$均成立。根据引理3， Λ_b^2 和 $\bar{\Lambda}_b^2$ 具有相同的累积分布函数。因此，对所有 $x \in \mathbb{R}$:

$$H^b(x) = \mathbb{P}(\Lambda_b^2 \le x^2) = \mathbb{P}(\bar{\Lambda}_b^2 \le x^2) = \bar{H}^b(x).$$

由 (3) 可知，这也意味着 $H = H$。

定理第二个陈述的证明与此类似，我们仅指出其中的差异。设 $\delta > 0$ 满足 $\mathbb{E}(\Lambda^{1+\delta}) < \infty$。注意到 $\mathbb{E}(\Lambda_b^{-1}) = 1/\mathbb{E}(\Lambda)$ 且 $\mathbb{E}(\Lambda_b^{\delta}) \mathbb{E}\ \Lambda^{\delta+1}\ /\mathbb{E}\ \Lambda$ $\mathcal{M}_{\Lambda_b}$ $0\ 1+\delta$ $\mathcal{M}_{\Lambda_b^2}$ ( ) ( )。由此可知，在 St(,) 上是解析的，而在 St$(1/2, 1+\delta/2)$ 上也是解析的。显然， $\mathcal{M}_Z$ 在 St$(1, \infty)$ 上是解析的。因此， $\mathcal{M}_A$ 在 St$(1/2, 1+\delta/2) \cap$ St$(1, \infty) =$ St$(1, 1+\delta/2)$ 上是解析的。在这种情况下，我们取 $c \in (1, 1+\delta/2)$，其余证明与前述相同。

□

由此可得：

推论 1. 在以下情况下，分布函数 H 是可识别的：

1. Wicksell 微粒问题。*2.* G_K^S 具有有界密度 g_K^S。

证明。 回忆例 1 中 g_K 的表达式。于是：

$$\int_0^{\pi} z^{-\frac{1}{2}} g_K(z)\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi\sqrt{z}\sqrt{1-\frac{z}{\pi}}}\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

通过代入 $t = z/\pi$，并将所得积分识别为常数与 Beta 分布密度的乘积的积分，即可计算该积分。因此，定理 2 的条件 1 得到满足。若 G_K^S 具有密度 g_K^S，且满足 $g_K^S \le B$，则：

$$\int_0^{a_{\max}} z^{-\frac{1}{4}} g_k(z)\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{a_{\max}}} z^{-\frac{1}{2}} g_k^S(z)\mathrm{d}z \le B\int_0^{\sqrt{a_{\max}}} z^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}z = 2B(a_{\max})^{\frac{1}{4}}.$$

因此，在这种情况下，定理 2 的条件 1 也得到满足。 □

Wicksell 问题的可识别性是一个经典结果；在这种情况下，也存在一个广为人知的显式逆关系。

注 2。 定理 *2* 中的条件：$\int_0^{\infty} x^{1+\delta}\mathrm{d}H(x) < \infty$，其中 $\delta > 0$，也可由假设 $H(M) = 1$（其中 $M > 0$）推出。回顾第 *3* 节中式 *(5)* 的推导，显然，由于粒子包含在物体 Q内，其尺寸必然存在上限。这是体视学问题中的典型假设。

请注意，定理 2 的证明还给出了一个（相当隐式的）关于 H^b 的反演公式。假设 H^b 连续。令 c 如定理 2 的证明中所述。由于解析函数的零点都是孤立的，对于几乎所有 $t \in \mathbb{R}$， $\mathcal{M}_Z($ $c + it) \neq 0$。按照引理 3 的证明，使用梅林反演公式：

$$H^b\left(\sqrt{x}\right) = \mathbb{P}\left(\Lambda_b^2 \le x\right) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\mathcal{M}_A(s)}{\mathcal{M}_Z(s)}\frac{x^{-s+1}}{s}\mathrm{d}s, \quad x \ge 0. \tag{8}$$

H 随后可通过 (3) 得到。

5 Es长度偏倚粒径分布的估计量

本节提出一种用于长度偏倚尺寸分布 H^b 的估计量。该估计量借鉴了 [17], 针对 Wicksell微粒问题所采用的方法。根据引理 2 的随机分数解释，首先估计 H^b 似乎是一个自然的中间步骤。我们注意到，在体视学中，偏倚或加权分布十分常见，另见 [11]第 7.5 节。

我们假设参考粒子 K 已知，并且满足定理 1 中的某个条件，因此 G_K^S 具有密度 g_K^S。需要强调的是，这也意味着我们认为 g_K^S 是已知的。虽然只有极少数形状的 g_K^S具有已知的显式表达式，但在 [6] 中提出了一种蒙特卡罗模拟方案，可用于任意精确地近似这种密度。为了了解这些密度的形态，请参见图 2，其中给出了立方体、十二面体和四面体对应密度的近似值。这些近似值是基于大小为 $N = 10^7$的样本，通过带边界修正的核密度估计量计算得到的。

回顾平方根变换及其得到的表达式（7）。由于 G_K^S 具有密度g_K^S，因此 F_S 具有密度 f_S，其表达式为:

$$f_S(s) = \int_0^\infty g_K^S\left(\frac{s}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda}\mathrm{d}H^b(\lambda). \tag{9}$$

请注意， g_K^S 的支撑集为 $(0, \sqrt{a_{\max}})$，因此积分区域的下限实际上为 $s/\sqrt{a_{\max}}$。

假设我们有一个观测截面积样本： $A_1, \ldots\ldots, A_n \overset{\text{独立同分布}}{\sim} f_A$。设 $S_i = \sqrt{A_i}$，则$S_1, \ldots\ldots, S_n \overset{\text{独立同分布}}{\sim} f_S$，其中 f_S如式（9）所示。现在，设 $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$是 $S_1, \ldots\ldots, S_n$的次序统计量的一次实现。我们利用式（9）通过非参数极大似然来隐式定义 H^b的一个估计量。为此，我们考虑 H^b的一大类分布函数。

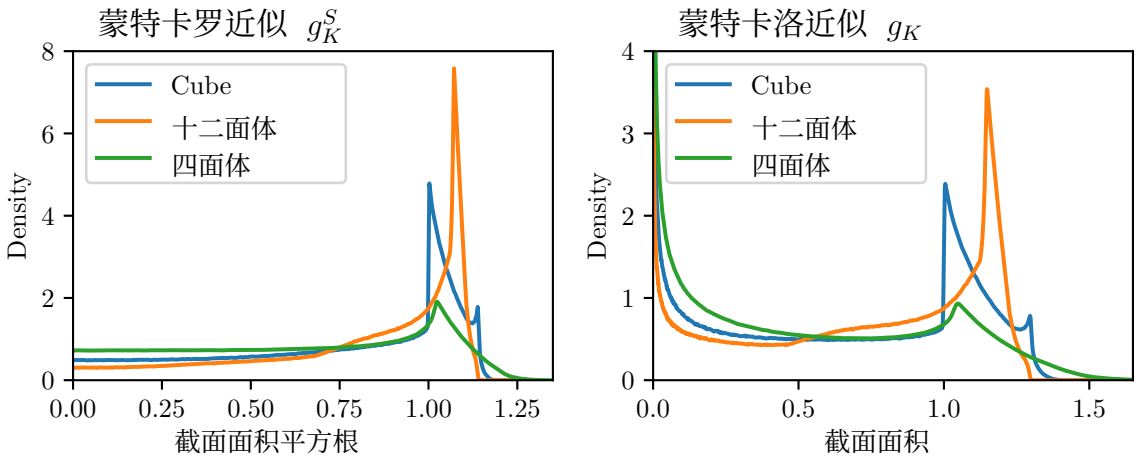

图 2：左：针对不同形状 K 的 g_K^S 的蒙特卡罗近似。右：通过 $g_K(z) = g_K^S(\sqrt{z})/(2\sqrt{z})$ 得到的 g_K 的近似值。

设 $\mathcal{F}^+$ 为 $(0, \infty)$ 上所有分布函数构成的类。定义：

$$\mathcal{F}_n^+ = \{F \in \mathcal{F}^+ : F \text{ is constant on } [s_{i-1}, s_i), i \in \{1, \ldots, n\}, \text{with } F(s_0) = 0\},$$

对于某个 $0 < s_0 < s_1$。这意味着 $\mathcal{F}_n^+$ 包含所有跳跃位置限制在观测值 s_i 上的分段常数分布函数。请注意，随着 $n \to \infty$，观测到的 s_i 在 f_S 的支撑集中变得稠密，类 $\mathcal{F}_n^+$ 也会扩展到所有与 f_S 具有相同支撑集的分布函数所构成的类。

备注 3。如果 $H^b(M) = 1$ 对某个 $M > 0$ 成立，那么 f_S 的支撑集为 $(0, M\sqrt{a_{max}})$。选择参考粒子 K 的尺寸时，$a_{max} \geq 1$ 这一点很重要。这是由筛选族 $\mathcal{F}_n^+$ 的选择所导致的。于是，随着 n 趋于无穷，$\mathcal{F}_n^+$ 会扩展到也包含真实累积分布函数 H^b 的分布函数类，因为 $M\sqrt{a_{max}} \geq M$。取一个非常大的 K 意味着 a_{max} 很大，使得 $M\sqrt{a_{max}}$ 远大于 M。这样一来，s_i 在 $[0, M]$ 中会相当稀疏，这同样不可取。为了便于解释 H，回顾备注 *1*，我们选择体积为 *1* 的 K。对于模拟中考虑的形状，我们观察到 $a_{max} \geq 1$。

对于 $H^b \in \mathcal{F}_n^+$，我们定义（按 $\frac{1}{n}$ 缩放的）对数似然：

$$L(H^b) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(f_S(s_i)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \left(\int_0^\infty g_K^S \left(\frac{s_i}{\lambda} \right) \frac{1}{\lambda} \mathrm{d}H^b(\lambda) \right). \tag{10}$$

对于 H^b，最大似然估计量（MLE）$\hat{} H_n^b$ 定义为对数似然L的最大化器，其表达式为：

$$\hat{H}_n^b \in \underset{H^b \in \mathcal{F}_n^+}{\arg\max} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \left(\sum_{j=1}^{n} g_K^S \left(\frac{s_i}{s_j} \right) \frac{1}{s_j} (H^b(s_j) - H^b(s_{j-1})) \right). \tag{11}$$

以下定理表明，该估计量定义良好，并给出了其唯一性的充分条件：

定理 3 ($\hat{} H_n^b$**的存在性与唯一性)**。在 $\mathcal{F}_n^+$ 中，对数似然 L 总是存在最大化器。若矩阵 $A = (\alpha_{i,j})$（其中 $\alpha_{i,j} = g_K^S(s_i/s_j)/s_j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$）为满秩，则该最大化器唯一。

证明。对于 $H^b \in \mathcal{F}_n^+$，定义：$\beta_j = H^b(s_j)$，并记 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^\mathsf{T}$。考虑闭凸集：

$$\mathcal{C} := \{\beta \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \beta_n \leq 1\}. \tag{12}$$

最大化问题 (11) 等价于最大化 $l : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，其中 l 定义为：

$$l(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} (\beta_j - \beta_{j-1}) \right), \tag{13}$$

其中 $\alpha_{i,\,j} = g_K^S(s_i/s_j)/s_j$ 和 $\beta_0 = 0$。集合 $\mathcal{C}$ 是闭且有界的，因此是紧集。由于 l 在 $\mathcal{C}$上连续，它存在最大值。现在我们证明，l 严格凹当且仅当 $A = (\alpha_{i,\,j})$ 满秩。严格凹性也意味着最大化器的唯一性

作为最大化器。固定 $\beta \in \mathcal{C}$ 使得 $l(\beta) > -\infty$。令 $j,\ k \in \{1,\dots,n\}$，计算 l 的偏导数和海森矩阵，得到：

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j} l(\beta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j+1}}{\sum_{q=1}^{n} \alpha_{i,q}(\beta_q - \beta_{q-1})} \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta_j \partial \beta_k} l(\beta) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j+1})(\alpha_{i,k} - \alpha_{i,k+1})}{\left(\sum_{q=1}^{n} \alpha_{i,q}(\beta_q - \beta_{q-1})\right)^2} =: H_{j,k}(\beta). \tag{15}$$

此处，我们对所有 $i \in \{1,\dots,n\}$ 设定 $\alpha_{i,n+1} = 0$。由于 $l(\beta) > -\infty$，因此（14）和（15）中不会出现除以零的情况。注意，对于 $k \in \{1,\dots,n\}$，以下关系成立：

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{k,j}(\beta_j - \beta_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{k,j}\beta_j - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{k,j+1}\beta_j = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{k,j} - \alpha_{k,j+1})\beta_j.$$

利用这一事实，我们证明：当且仅当 A 满秩时，l 的海森矩阵为负定。令$\gamma \in \mathbb{R}^n$，并设定 $\gamma_0 = 0$，则：

$$\begin{aligned}
\gamma^\mathsf{T} H(\beta)\gamma &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} H_{j,k}(\beta)\gamma_j\gamma_k \\
&= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j+1})(\alpha_{i,k} - \alpha_{i,k+1})\gamma_j\gamma_k}{\left(\sum_{q=1}^{n} \alpha_{i,q}(\beta_q - \beta_{q-1})\right)^2} \\
&= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\gamma_j - \gamma_{j-1})\right)^2}{\left(\sum_{q=1}^{n} \alpha_{i,q}(\beta_q - \beta_{q-1})\right)^2}
\end{aligned}$$

显然，$H(\beta)$ 为负半定。注意，以下关系成立：

$$\gamma^\mathsf{T} H(\beta)\gamma = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\gamma_j - \gamma_{j-1}) = 0, \quad \text{for all } i \in \{1,\dots,n\}. \tag{16}$$

通过 $x_j = \gamma_j - \gamma_{j-1}$、$j \in \{1,\dots,n\}$ 定义 $x \in \mathbb{R}^n$。考虑矩阵 $A = (\alpha_{i,j})$，则（16）右端可写为 $Ax = 0$。由于 $\gamma_0 = 0$：$\gamma = 0 \iff x = 0$。因此，当且仅当 $Ax = 0 \iff x = 0$ 时，海森矩阵为负定，这对应于 A 满秩。 □

回想一下，g_K^S 的支撑集为 $(0,\ \overline{\sqrt{a_{\max}}})$。假设我们选择参考粒子，使得对于某个较小的 $\epsilon > 0$，有$\overline{\sqrt{a}}_{\max} = 1 + \epsilon$。那么，$g_K^S(1) > 0$，从而确保 A 的对角线上包含正值。只要对所有 $i > j$ 都有 $s_i/s_j > 1 + \epsilon$，A 就是一个上三角矩阵，因为对角线下方的所有元素均为零。众所周知，这类矩阵都是满秩的。如果 $\epsilon > 0$ 足够小，那么以高概率对所有 $j \in \{1,\dots,n\}$ 都有 $s_{j+1}/s_j > 1 + \epsilon$，因此最大似然估计以高概率唯一。为方便起见，我们将 $\hat{}\, H_n^b$ 称为最大似然估计，尽管我们并不总能保证其唯一性。请特别注意下一节中的相合性结果：最大似然估计的相合性应理解为任意一列最大似然估计量的相合性。

由定理 3 的证明可知，可通过最大化 l 来计算 $\hat{}\, H_n^b$。由于 l 是凹函数，因此可以高效地计算 $\hat{}\, H_n^b$，我们将在第 7 节讨论这一点。

6 最大似然估计量的相合性 r

本节将证明， H^b 的最大似然估计 ˆ H_n^b (11) 是一致强相合的。为此，我们将该问题转化为一个反卷积问题。反卷积问题此前已得到相当广泛的研究，例如参见 [18] 和 [19]。我们利用反卷积问题中关于估计量的一些结果，证明最大似然估计的相合性。在反卷积问题中，通常会对所谓的噪声核作出假设，以确保相合性。对于这个问题，这意味着要对密度 g_K^S 作出假设。

我们首先将估计 H^b 的问题重新表述为一个反卷积问题。回顾引理 2，对于 $S \sim f_S$、$\sqrt{Z} \sim g_K^S$ 和 $\Lambda_b \sim H^b$，我们有： $S =^d \sqrt{Z}\Lambda_b$，其中 $\sqrt{Z}$ 和 Λ_b 相互独立。现在进行对数变换，定义： $Y = \log(S)$、$\epsilon = \log(\sqrt{Z})$ 和 $X = \log(\Lambda_b)$。Y 和 ϵ 的密度与 S 和 $\sqrt{Z}$ 的密度之间存在如下关系： $f_Y(y) = f_S(e^y)e^y$， $f_\epsilon(z) = g_K^S(e^z)e^z$。$X$ 的分布函数由 $F_X(x) = H^b(e^x)$ 给出。由此我们得到：

$$Y \stackrel{d}{=} X + \epsilon,$$

其中， X 和 ϵ 相互独立。注意， f_Y 是 f_ε 和 F_X的卷积：

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(y-x)\mathrm{d}F_X(x) =: (f_\varepsilon * \mathrm{d}F_X)(y). \tag{17}$$

在这种情形下， F_X 是我们关注的分布函数。我们没有来自F_X的直接观测，存在来自已知分布 ϵ的加性噪声。令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{R}$上所有分布函数构成的类。定义：

$$\mathcal{F}_n = \{F \in \mathcal{F} : F \text{ is constant on } [y_{i-1}, y_i), \text{ for } i \in \{1, \ldots, n\}, \text{with } F(y_0) = 0\}.$$

观测到的次序统计量 $s_1, \ldots, s_n$ 也经过了变换： $y_i = \log(s_i)$， $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$。我们按照之前的方法，对数似然可写为：

$$\tilde{L}(F) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left(f_Y(y_i)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon\left(y_i - x\right)\mathrm{d}F_X(x)\right).$$

ˆ F_n 的最大似然估计量（针对 F_X ）定义如下：

$$\hat{F}_n \in \underset{F_X \in \mathcal{F}_n}{\arg\max}\, \tilde{L}(F_X). \tag{18}$$

现在我们证明，可以假设 ˆ $H_n^b(x) = \hat{}F_n(\log(x))$。两个问题的似然关系如下。令 $F_X \in \mathcal{F}_n$，定义 $H^b(x) = F_X(\log(x))$，使得 $H^b \in \mathcal{F}_n^+$。于是：

$$\begin{aligned}
\tilde{L}(F_X) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left(\sum_{j=1}^{n} f_\epsilon\left(\log(s_i) - \log(s_j)\right)\left(F_X(\log(s_j)) - F_X(\log(s_{j-1}))\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left(\sum_{j=1}^{n} g_K^S\left(\frac{s_i}{s_j}\right)\frac{s_i}{s_j}(H^b(s_j) - H^b(s_{j-1}))\right) \\
&= L(H^b) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(s_i).
\end{aligned}$$

如果我们找到一个分布函数，使其中一个问题的似然更大，就能立即得到另一个问题中似然同样有所提升的分布函数。因此，确实存在通过以下关系相联系的最大似然估计量：$\hat{}\ H_n^b(x) = \hat{}F_n(\log(x))$。$\hat{}$估计量 F_n 由 [18] 研究，并证明在对 f_ε施加某些条件时具有强一致一致性。由于：这一结果可用于证明$\hat{}\ H_n^b$的强一致一致性。

$$\sup_{x>0}|\hat{H}_n^b(x) - H^b(x)| = \sup_{x>0}|\hat{F}_n(\log(x)) - F_X(\log(x))| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|\hat{F}_n(x) - F_X(x)|.$$

现在说明我们对 f_ϵ 所要求的假设。我们假设它属于 $\mathcal{G}$ 上半连续函数类，这些函数在某个紧区间上具有有界变差，并且在该区间之外是单调的。令 $V_a^b(f)$ 表示函数 f 在区间 $[a,b]$，$a<b$上的全变差。类 $\mathcal{G}$ 可写为：

$$\mathcal{G} = \Big\{ g:\mathbb{R}\to[0,\infty) : g \text{ is an upper semicontinuous density such that } \exists M>0 \\ \text{with } V_{-M}^{M}(g)<\infty \text{ and } g \text{ is monotone on } (-\infty,-M] \text{ and } [M,\infty)\Big\}.$$

这对应于关于 g_K^S 的以下假设：

引理 4。假设 g_K^S 在其支撑集上是上半连续的，并且具有有界变差。那么，由 $f_\epsilon(z) = g_K^S(e^z)e^z$ 给出的密度 f_ϵ： $\mathbb{R}\to[0,\infty)$ 属于 $\mathcal{G}$。

该引理的证明见附录 A。现在我们汇集一些引理，以获得关于 F_n 的相合性结果。以下结果可在 [18], 中作为推论 1 找到：

$\hat{}$ $\hat{}\hat{}$**引理 5**。令 F_n 为式（*18*）中定义的 F_X 的最大似然估计。假设 $f_\epsilon \in \mathcal{G}$。令 $f_n := f_\epsilon * \mathrm{d}F_n$，$f_Y := f_\epsilon * \mathrm{d}F_X$，则几乎处处有：

$$\lim_{n\to\infty}\|\hat{f}_n - f_Y\|_{L_1} = \lim_{n\to\infty}\int\Big|\hat{f}_n(s) - f_Y(s)\Big|\,\mathrm{d}s = 0.$$

The fo 以下引理是 [18]中引理3的推广。证明见附录。 A.

引理 6. 设 f_ε 是 $\mathbb{R}$ 上的一个勒贝格密度。设 $(F_n)_{n\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个分布函数序列，弱收敛于一个分布函数 F_X。那么，对于 $f_n := f_\epsilon * \mathrm{d}F_n$ 和 $f_Y := f_\epsilon * \mathrm{d}F_X$：

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f_Y\|_{L_1} = 0.$$

We 现在陈述以下定理，其证明与 [18] 中定理 3 的证明非常相似。

定理 4 ($\hat{}$ F_n的相合性)。设 $f_\epsilon \in \mathcal{G}$。假设具有该 f_ϵ 的反卷积问题是$\hat{}$可识别的。那么，以概率 *1*，$\lim_{n\to\infty}F_n(x) = F_X(x)$ 对每个 x 都成立，其中 F_X 连续。若 F_X 连续，则以概率 *1*：

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\hat{F}_n - F_X\right\|_\infty = 0.$$

证明。设 $(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间，其上存在一列 $Y_1, Y_2, \ldots$ 独立同分布随机变量，$\hat{}\ \hat{}$ 按照式 (17) 中的 f_Y 分布。令 $f_n := f_\epsilon * \mathrm{d}F_n$。由引理 5 可知，存在一个集合 $\hat{}\ \Omega_0 \in \mathcal{A}$，使得 $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$，且对所有 $\omega \in \Omega_0$，都有 $\|f_n(\cdot, \omega) - f_Y(\cdot)\|_{L_1} \to 0$，当 $n \to \infty$时成立。固定 $\omega \in \Omega_0$，并任取一个子序列 $(n_l)_{l\geq 1} \subset (n)_{n\geq 1}$。根据 Helly选取原理，存在一个更细的子序列 $(n_k)_{k\geq 1} \subset (n_l)_{l\geq 1}$，使得 $\hat{}\ F_{n_k}(\cdot, \omega)$ 弱收敛到一个 $\hat{}$ 分布函数 F。由引理 6 可知，这意味着 f_{n_k} 在 L_1中收敛到 $f_\epsilon * \mathrm{d}F$。由于 $\hat{}$ 整个序列 f_n 在 L_1 中收敛到 $f_\epsilon * \mathrm{d}F_X$，根据反卷积问题的可识别性可得 $F = F_X$。因此，最大似然估计量的每个子序列都包含一个更细的子序列，该子序列弱收敛到 F_X。这意味着整个序列弱收敛到 F_X。最后，利用序列中所有分布函数的单调性、 F_X以及 F_X的连续性，可得一致收敛结果。

□

现在来看$\hat{}\ H_n^b$的相合性结果，我们需要确保 g_K^S 满足引理 4中的条件。如果 g_k^S 满足这些条件，那么其有界性意味着，根据推论 1，该问题是可识别的。注意，原问题中的可识别性意味着相应反卷积问题中的可识别性。

推论2 ($\hat{}\ H_n^b$的相合性)。假设 g_K^S 在其支撑集上上半连续且有有界变差。那么，以概率 *1*，$\lim_{n\to\infty} \hat{}\ H_n^b(\lambda) = H^b(\lambda)$ 对每个 λ 都成立，其中 H^b 是连续的。如果 H 连续，那么 H^b也连续，并且以概率 *1*：

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \hat{H}_n^b - H^b \right\|_\infty = 0.$$

7 算法

本节介绍若干用于计算最大似然估计量$\hat{}\ H_n^b$(11)的算法。由于 $\mathcal{F}_n^+$ 上的分布函数是离散的，因此可以用概率向量来描述。令 $\mathcal{P}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$中的概率向量类：

$$\mathcal{P}_n = \left\{ (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ and } p_i \geq 0 \text{ for all } i \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

分布函数 $H^b \in \mathcal{F}_n^+$ 可以与概率向量 $p \in \mathcal{P}_n$ 相关联，该概率向量定义为 $p_j = H^b(s_j) - H^b(s_{j-1})$（回顾： $H^b(s_0) = 0$）。我们可以通过以下方式在概率向量和分布函数之间进行转换：

$$H^b(s_j) = \sum_{i=1}^j p_i, \quad \text{and} \quad p_j = H^b(s_j) - H^b(s_{j-1}). \tag{19}$$

7.1 期望最大化（EM）

期望最大化算法最早在 [20] 中得到了深入研究。它通常用于参数化设定，但也可用于非参数估计。由于易于实现，且适用于不完整数据模型，因此尤其具有吸引力。对于将期望最大化算法应用于我们的问题，我们遵循 [21] 中对该算法的描述。作者介绍了与我们所面临问题类似的问题所适用的期望最大化算法。他们考虑的问题类别如下。

假设我们要估计一个分布函数 F。我们无法直接观测来自 F 的样本 X。相反，我们观测到 $Y = T(X,\ C)$，其中 $X \sim F$ 和 C 是与 X 独立的某个随机变量。显然，根据引理 2，估计 H^b 的问题属于这一类问题，其中 $T(x,\ c) = xc$ 和 $C \sim g_K^S$。假设我们有一个关于累积分布函数 H^b 的初始估计 $H_0^b \in \mathcal{F}_n^+$。令 $p^{(0)}$ 为式 (19) 中对应的概率向量。令 X_1、.....、$X_n \sim H^b$。 [21] 展示了在其一般框架下，期望最大化算法可得出以下更新规则：

$$p_j^{(k+1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{p^{(k)}}\left(X_i = s_j | s_1, \ldots, s_n\right). \tag{20}$$

我们使用符号 $\mathbb{P}_p$ 表示与概率向量p相关联的概率测度。对于我们的"随机分数"设定，我们使用贝叶斯法则得到：

$$\mathbb{P}_{p^{(k)}}\left(X_i = s_j | s_1, \ldots, s_n\right) = \frac{g_K^S\left(\frac{s_i}{s_j}\right)\frac{1}{s_j}p_j^{(k)}}{\sum_{q=1}^{n} g_K^S\left(\frac{s_i}{s_q}\right)\frac{1}{s_q}p_q^{(k)}}.$$

将其代入式（20）可得：

$$p_j^{(k+1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{i,j}}{\sum_{q=1}^{n}\alpha_{i,q}p_q^{(k)}}p_j^{(k)}, \quad \text{with: } \alpha_{i,j} = g_K^S\left(\frac{s_i}{s_j}\right)\frac{1}{s_j}. \tag{21}$$

在经过适当次数的迭代后终止期望最大化算法，我们便可通过 (19) 从 $p^{(k)}$ 得到 $\hat{}\, H_n^b$。例如，当连续迭代不再显著改变对数似然时，可以终止期望最大化算法。我们不为期望最大化算法提供具体的停止准则，因为我们不会直接使用它。我们只以混合形式将其与迭代凸下包络算法（ICM）结合使用，该算法将在下一节中介绍。对于 ICM 算法和混合 ICM-EM 算法，我们会提供明确的终止条件。

7.2 迭代凸小化（ICM）

ICM 算法最初在 [19]中被提出。我们所讨论的 ICM 版本在 [22]中进行了描述，有时也称为修正的 ICM 算法。这种对 ICM 的修正确保了算法在相当一般的条件下能够收敛。该算法旨在最小化闭凸锥上的凸函数 ϕ：

$$\mathcal{C}_+ := \{\beta \in \mathbb{R}^n : 0 \le \beta_1 \le \beta_2 \le \cdots \le \beta_n\}.$$

回顾公式（13），计算估计量 $\hat{}\, H_n^b$ 等价于求解以下优化问题：

$$\hat{\beta} \in \arg\max_{\beta\in\mathcal{C}} l(\beta) = \arg\max_{\beta\in\mathcal{C}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}(\beta_j - \beta_{j-1})\right). \tag{22}$$

对于 $\beta_j = H^b(s_j)$ 和 $\hat{}\, \beta = (\hat{}\, H_n^b(s_1)\ldots, \hat{}\, H_n^b(s_n))$。由（22）可知，对于任何满足$\beta_n < 1$的 $\beta \in \mathcal{C}_+$，将 $\beta_n = 1$设为该值即可提高似然，因为$\alpha_{i,j} \ge 0$。因此，我们可以采用约束 $\beta_n = 1$，而不是 $\beta_n \le 1$。我们通过拉格朗日乘子来实现这一点。定义 the

凸函数 $\phi:\ \mathcal{C}_+ \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 为:

$$\phi(\beta) = -l(\beta) + \beta_n = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}(\beta_j - \beta_{j-1})\right) + \beta_n.$$

由此，我们纳入了约束，拉格朗日乘子等于 1。此外，由于 $\beta \in \operatorname{argmin}_{\beta\in\mathcal{C}_+}\phi(\beta)$，$\hat{}$ 问题现在写成了凸最小化问题。因此，可以使用 ICM 算法来计算最大似然估计。假设我们有某个初始估计 $\beta^{(0)}$。ICM 的思路是在迭代 k 中，用以下二次型对 ϕ 进行局部近似:

$$\phi_{(k)}(\beta) = \left(\beta - \beta^{(k)} + W\left(\beta^{(k)}\right)^{-1}\nabla\phi\left(\beta^{(k)}\right)\right)^{\mathsf{T}} W\left(\beta^{(k)}\right)\left(\beta - \beta^{(k)} + W\left(\beta^{(k)}\right)^{-1}\nabla\phi\left(\beta^{(k)}\right)\right). \tag{23}$$

符号 $\nabla\phi$ 用于表示 ϕ 的梯度，即 ϕ 的偏导数向量。矩阵 W 是一个对角矩阵，其对角线元素通常选为 ϕ 的海森矩阵的对角线元素:

$$W\left(\beta^{(k)}\right) = \operatorname{diag}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta_j^2}\phi\left(\beta^{(k)}\right)\right)$$

在 ICM 算法中，对 $\phi_{(k)}$ 关于 $\mathcal{C}_+$ 进行最小化，而不是关于 ϕ，以获得 $\beta^{(k+1)}$ 的候选 β。如果该候选 β 使 ϕ 充分减小，则接受该候选，并令 $\beta^{(k+1)} = \beta$。否则，执行线搜索以获得 $\beta^{(k+1)}$，它由 β 和 $\beta^{(k)}$ 的凸组合给出。算法的精确描述见附录B。我们指出，最小化 (23) 等价于计算单调回归函数的加权最小二乘估计量。此计算可以高效完成，详情请参见 [22]。ϕ 的偏导数与 l 的偏导数之间的关系如 (14) 和 (15) 所示，具体为:

$$\frac{\partial}{\partial\beta_j}\phi(\beta) = -\frac{\partial}{\partial\beta_j}l(\beta) + \mathbb{1}\{j=n\} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2}{\partial\beta_j^2}\phi(\beta) = -\frac{\partial^2}{\partial\beta_j^2}l(\beta).$$

对于迭代凸下包络，我们采用以下停止准则：满足以下条件时即停止:

$$\max_{j\in\{1,\dots,n\}}\left|\beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k-1)}\right| < \varepsilon, \tag{24}$$

连续 10 次迭代。在模拟中，我们设定 $\varepsilon = 10^{-4}$。该准则的含义是，当概率质量的最大变化量低于 ε 并连续 10 次迭代时，即停止。需要指出的是，如果迭代凸下包络非常缓慢地趋近最优解，该准则可能并不适用。在模拟（第 9 节）中，这并不是问题。

7.3 迭代条件众数-期望最大化混合方法

在 [21] 中，有人提出将 ICM 与期望最大化结合成一种混合算法。其思想是，该混合算法的一次迭代首先执行一次 ICM 算法迭代，随后执行一次期望最大化算法迭代。如果从远离最大似然估计的位置开始，ICM 算法在初始阶段似乎较慢；而接近最优值时，它的收敛速度很快。另一方面，

期望最大化算法在开始阶段似乎更快，但接近最优值时却难以收敛。此外，在执行一次 ICM 步骤后再执行期望最大化步骤时，ICM 可确保许多 p_j 都为零。由（21）可知，期望最大化算法永远不会将这样的 p_j 设为正值，因此期望最大化算法只需在更低维的空间中运行。在实践中，混合 ICM-EM 算法似乎兼具两种算法的优点，并且比 ICM 和期望最大化算法都更快。例如，在 [17] 和 [21] 中的模拟中就观察到了这一点。与 ICM 一样，采用相同的终止条件（ 24 ）。

8 似然估计量的正则化

本节介绍如何使用最大似然估计 $\hat{} H_n^b$ 来估计 H，即我们关注的分布函数。乍看之下，将 $\hat{} H_n^b$ 代入方程 (3) 中的 H^b 似乎是合理的。遗憾的是，模拟表明，这样得到的 H 估计效果很差。第 9 节将详细介绍如何进行模拟。目前，图 3 展示了一次模拟运行的结果。该模拟对应于每个粒子都是十二面体 $n = 1000$，且 H 对应于标准指数分布的情形。对于这个 H， H^b 对应于伽马分布。图 3 (a) 显示，$\hat{} H_n^b$ 与 H^b 非常相似。与此同时，我们从图 3 (b) 中看到，将 $\hat{} H_n^b$ 代入方程 (3) 中的 H^b ，会导致对 H 的估计效果很差。这是由于 $\hat{} H_n^b$ 在零附近的行为所造成的。

我们提出一种正则化技术来解决这个问题。令 $t_n > 0$，将 $\hat{} H_n^b$ 截断于 t_n，得到：

$$\hat{H}_n^b(\lambda; t_n) := \begin{cases} \frac{\hat{H}_n^b(\lambda) - \hat{H}_n^b(t_n)}{1 - \hat{H}_n^b(t_n)} & \text{if } \lambda \geq t_n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

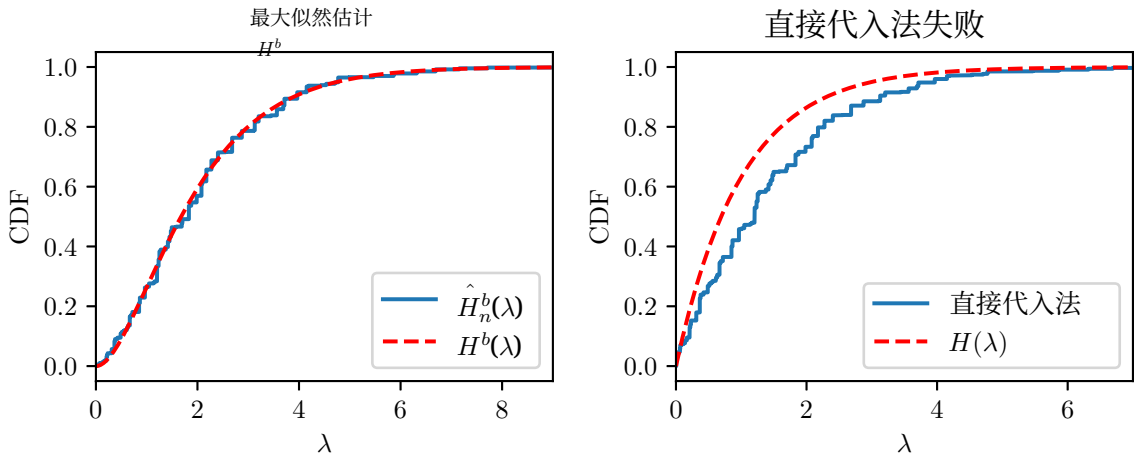

图 3：左： H^b 的最大似然估计。右： H 的直接代入估计。

将 $\hat{}\, H_n^b$ 的截断版本代入 (3)，可得：

$$\hat{H}_n(\lambda; t_n) := \frac{\int_0^{\lambda} \frac{1}{x} \mathrm{d}\hat{H}_n^b(x; t_n)}{\int_0^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}\hat{H}_n^b(x; t_n)} = \begin{cases} \frac{\int_{t_n}^{\lambda} \frac{1}{x} \mathrm{d}\hat{H}_n^b(x)}{\int_{t_n}^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}\hat{H}_n^b(x)} & \text{if } \lambda \geq t_n \\ 0 & \text{if } 0 \leq \lambda < t_n \end{cases}. \tag{25}$$

因此，我们引入一个新参数 t_n，并将其称为截断参数。在下面的引理中，我们将证明，对于截断参数 t_n 的适当选择，一列收敛于 H^b 的近似累积分布函数可以通过去偏处理，从而获得对 H 的良好近似。

引理 7。设 H 是 $(0, \infty)$ 上的连续累积分布函数，具有有限的一阶矩，其长度偏倚版本为 H^b。设 $(t_n)_{n \geq 1}$, $t_n > 0$ 是一个序列，满足 $\lim_{n \to \infty} t_n = 0$。设 $(H_n^b)_{n \geq 1}$ 是一个累积分布函数序列。假设 H_n^b 以至少 t_n 的速率一致收敛至 H^b，即：$||H_n^b - H^b||_\infty = o(t_n)$。定义：

$$H_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{\int_{t_n}^{\lambda} \frac{1}{x} \mathrm{d}H_n^b(x)}{\int_{t_n}^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}H_n^b(x)} & \textit{if } \lambda \geq t_n \\ 0 & \textit{if } 0 \leq \lambda < t_n \end{cases},$$

然后：$\lim_{n \to \infty} ||H_n - H||_\infty = 0$。

证明见附录 A。引理 7 表明，截断是对 H 进行相合估计的一种可行方法。注意，在引理 7 中，我们可以取 $t_n = \sqrt{\|H_n^b - H^b\|_\infty}$。在实践中，该结果无法直接应用于 $\hat{}\, H_n^b$，因为量 $\|\hat{}\, H_n^b - H^b\|_\infty$ 未知。我们为 t_n 提出一条经验法则。令 $s \in \mathbb{R}$，并定义：

$$\hat{F}_n^S(s; t) := \int_0^{\infty} G_K^S\left(\frac{s}{\lambda}\right) \mathrm{d}\hat{H}_n^b(\lambda; t) \tag{26}$$

$$\bar{F}_n^S(s) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{s_i \leq s\}.$$

请注意，$\hat{}F_n^S(\cdot;\, t)$ 是由偏倚尺寸分布 $\hat{}\, H_n^b(\cdot;\, t)$ 所诱导的观测到的截面面积平方根的分布函数。也就是说，如果 $\hat{}\, H_n^b(\cdot;\, t)$ 是真实的偏倚尺寸分布，那么 $\hat{}F_n^S(\cdot;\, t)$ 就是相应的观测到的截面面积平方根的分布。我们对 t_n 提出如下选择：

$$\hat{t}_n := \underset{t \in \{s_1, \ldots, s_n\}}{\arg\min} \int_0^{\infty} |\hat{F}_n^S(s; t) - \bar{F}_n^S(s)| \mathrm{d}s. \tag{27}$$

因此，$\hat{}\, t_n$ 最小化了由估计的（偏倚）尺寸分布所诱导的观测到的截面面积平方根的累积分布函数与观测到的截面面积平方根的经验累积分布函数之间的 L^1-距离。为便于计算，我们在 $\{s_1, \ldots, s_n\}$ 上进行最小化。

9 模拟

在前几节中，我们介绍了最大似然估计 $\hat{}\, H_n^b$，并证明在合理假设下，它是 H^b 的相合估计量。此外，我们还介绍了一种正则化技术，可利用最大似然估计一致地估计尺寸分布函数 H。本节将展示一些模拟结果，以评估这些估计量对于 H^b 和 H 的表现。

模拟所用的代码可在 https://github.com/thomasvdj/pysizeunfolder 找到。原则上，使用这段代码，可以针对参考粒子 K 所对应的任意凸多面体执行模拟和估计过程。

首先，我们描述如何针对给定的H 和选定的参考粒子 K，生成观测截面积的独立同分布样本。引理 2 表明，只需抽取 $Z \sim G_K$ ，并独立地抽取 $\Lambda_b \sim H^b$，然后设定 $A := Z\Lambda_b^2$。 A 可视为一个随机截面积，重复这些步骤 n 次，即可得到一个服从 f_A分布的独立同分布样本 $A_1, \ldots, A_n$。取平方根即可得到观测到的截面面积平方根样本。文中介绍了一种生成经过 K 的均匀随机平面的抽样方案，见 [7], ；有关从 G_K中抽样的方法，参见 [6] 。最后，我们考虑一些适用于 H的常见参数分布；对于这些选择， H^b 对应于其他一些常见参数分布。因此，从 H^b 中抽样很简单。下面列出 H 的几种选择及其对应的 H^b:

1. 指数分布：对于 H ，我们考虑标准指数分布，使得H^b 对应于伽马分布。

$$H(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}, \text{ and } H^b(\lambda) = 1 - (\lambda + 1)e^{-\lambda}, \ \lambda \geq 0.$$

2. 对数正态分布：对于 H ，我们考虑参数为 μ 和 σ 的对数正态分布。对于这个 H， H^b 对应于参数为 $\mu + \sigma^2$ 和 σ 的对数正态分布。我们设定 $\mu = 2$， $\sigma = 1/2$。

$$H(\lambda) = \Phi\left(\frac{\log(\lambda) - \mu}{\sigma}\right), \text{ and } H^b(\lambda) = \Phi\left(\frac{\log(\lambda) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right), \ \lambda > 0.$$

这里， Φ 表示标准正态分布的累积分布函数。

对于模拟，我们考虑以下粒子形状：十二面体、立方体和四面体。至于参考粒子 K 的具体选择，我们对每种形状进行缩放，使其体积为 1。请注意，十二面体的每条边都恰好与另一条边平行，而四面体没有任何平行边。因此，根据定理 1，这些形状的 G_K 具有勒贝格密度。立方体则不属于这种情况。对于立方体，我们可以考虑一个经过扰动的立方体，即将其每个面稍微倾斜；所得形状没有任何平行边。请注意，我们依赖于对 g_K^S 的蒙特卡罗近似；关于为何将这种密度近似过程应用于立方体是合理的，尽管定理 1 并未涵盖立方体，请参见 [6] 中的进一步讨论。

现在我们已经介绍了独立同分布样本的模拟，接下来讨论估计量的计算。对于给定的 n、 H 和粒子形状，我们生成一个包含 n 个观测到的（平方根）截面面积的样本。使用混合 ICM-EM 算法计算最大似然估计 $\hat{}H_n^b$ 。计算最大似然估计需要能够在给定点上计算 g_K^S 。如前所述，通常没有 g_K^S 的显式表达式，因此我们使用 [6] 中所述的蒙特卡罗模拟方案来近似 g_K^S （回想一下图 2）。为了估计 H ，我们按照式（25）计算 $\hat{}$ $H_n(\cdot, \hat{}t_n)$，其中 $\hat{}$ t_n按式（27）计算。在本节中，我们始终将这个估计量简称为 $\hat{}$ H_n。请注意，计算 $\hat{}$ t_n 需要 G_K^S，而它同样没有显式表达式。因此，与 g_K^S 类似，我们使用 G_K^S的蒙特卡罗近似。在这种情况下，我们使用基于同一组样本的经验分布函数来近似 g_K^S。

我们按以下方式进行重复模拟。对于 n 的各种取值，我们生成一个包含 n 个观测截面积的样本。对于每组 n、 H 和形状，均重复这一过程 100 次。

粒子。立方体的模拟结果如图4所示。这些结果对应于$n = 1000$。每条蓝线对应100个估计值中的一个，每个估计值均基于一个大小为 $n = 1000$的不同样本。黑线是所有估计值的逐点平均值。其他形状的进一步模拟结果汇总于表1、表2和表3中。我们将估计值的误差量化为真实 H^b 与$\hat{} \ H_n^b$之间的上确界距离，对于 H的估计值的误差，也采用类似的方法。平均误差则是对估计值产生的100个误差取平均值所得。对于这100个误差，还给出了2.5%和97.5%分位数。

下面讨论表1、表2和表3的内容。正如预期，随着 n 增加，对于所有选定的形状和尺寸分布，无论是对 H 还是 H^b的估计，平均误差都会减小。比较固定 n和固定尺寸分布下的平均上确界误差，可以清楚地看出，十二面体的误差最小，其次是立方体，最后四面体的平均误差最大。对于估计 H 的平均误差以及

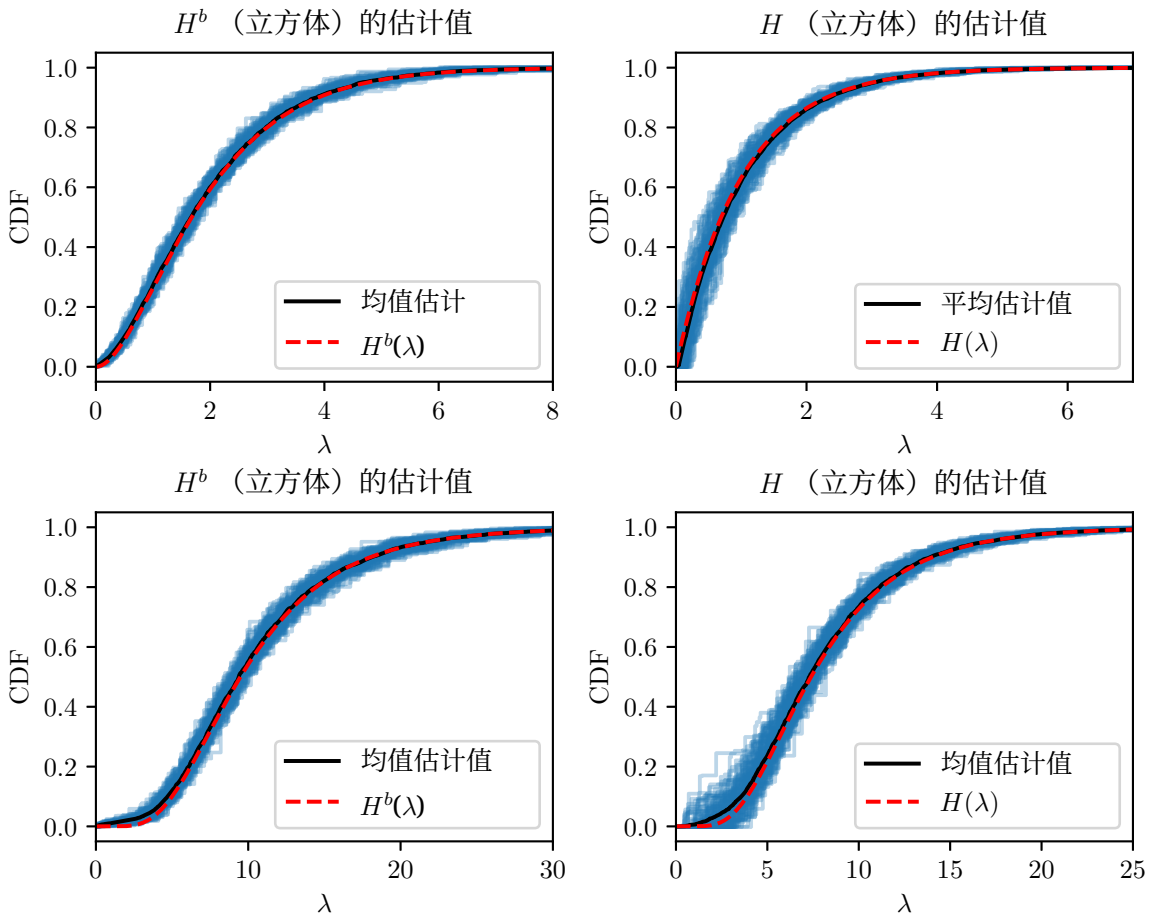

图4：立方体的模拟结果， $n = 1000$。左上： H^b 为伽马分布。右上： H 为指数分布。左下： H 为对数正态分布。右下：H 为对数正态分布。

H^b，情况也是如此。请注意，与估计 H^b 相比，估计 H 会增大上确界误差，相应的平均上确界误差也更大。这些较大的误差在图4中也很明显。我们注意到，对于某些实际应用，估计 H^b 可能已经足够。

表1：十二面体的模拟结果。

		$\|\hat{H}_n^b - H^b\|_\infty$		$\|\hat{H}_n - H\|_\infty$	
n	H	平均误差	（2.5%，97.5%）	平均误差	（2.5%，97.5%）
1000	指数分布	0.0577	(0.038, 0.076)	0.118	(0.064, 0.20)
1000	对数正态分布	0.0657	(0.045, 0.10)	0.0924	(0.057, 0。18)
2000	指数分布	0.0452	(0.032, 0.063)	0.0972	(0.054, 0。17)
2000	对数正态分布	0.0528	(0.034, 0.081)	0.0783	(0.044, 0.13)
5000	指数分布	0.0318	(0.024, 0.045)	0.0687	(0。036, 0。14)
5000	对数正态分布	0.0380	(0.027, 0.054)	0.0586	(0.037, 0.097)
10000	指数分布	0.0260	(0.019, 0.035)	0.0578	(0.029, 0.12)
10000	对数正态分布	0.0298	(0.023, 0.040)	0.0478	(0.028, 0.086)

表2：立方体的模拟结果。

		$\|\hat{H}_n^b - H^b\|_\infty$		$\|\hat{H}_n - H\|_\infty$	
n	H	平均误差	(2.5%, 97.5%)	平均误差	(2.5%, 97.5%)
1000	指数分布	0.0647	(0.045, 0.094)	0.134	(0.073, 0.23)
1000	对数正态分布	0.0794	(0.055, 0.12)	0.107	(0.062, 0.17)
2000	指数分布	0.0509	(0。036, 0。070)	0.107	(0.059, 0.19)
2000	对数正态分布	0.0630	(0.043, 0.087)	0.0911	(0.050, 0。17)
5000	指数分布	0.0394	(0.029, 0.053)	0.0787	(0.043, 0.13)
5000	对数正态分布	0.0460	(0.033, 0.059)	0.0672	(0.040, 0.11)
10000	指数分布	0.0308	(0.022, 0.042)	0.0620	(0。036, 0。096)
10000	对数正态分布	0.0368	(0.028, 0.047)	0.0544	(0.031, 0.091)

表3：四面体的模拟结果。

		$\|\hat{H}_n^b - H^b\|_\infty$		$\|\hat{H}_n - H\|_\infty$	
n	H	平均误差	(2.5%, 97.5%)	平均误差	（2.5%，97.5%）
1000	指数分布	0.0948	(0.062, 0.15)	0.197	(0.090, 0.39)
1000	对数正态分布	0.110	(0.078, 0.15)	0.163	（0。091，0。30 ）
2000	指数分布	0.0792	(0.058, 0.10)	0.153	(0.085, 0.28)
2000	对数正态分布	0.0930	(0.069，0.13)	0.134	(0.082, 0.24)
5000	指数分布	0.0602	(0.046, 0.080)	0.120	(0.061, 0.25)
5000	对数正态分布	0.0761	(0.058, 0.093)	0.0997	(0.068, 0.15)
10000	指数分布	0.0514	(0.038, 0.064)	0.101	(0.054, 0.20)
10000	对数正态分布	0.0643	(0.048, 0.083)	0.0805	(0.059, 0.11)

表 4：算法的平均运行时间和平均迭代次数。

	ICM		迭代条件众数-期望最大化	
n	时间 (s)	#迭代次数	时间 (s)	# 迭代次数
1000	3.99	314	0.511	26.4
2000	27.6	502	2.42	30.7
5000	415	784	25.8	62.5

最后，我们简要讨论计算 $\hat{} H_n^b$ 的算法在计算效率方面的表现。我们将十二面体作为粒子的形状，并将前文介绍的对数正态分布作为 H 。表 4 展示了 ICM 和 ICM-EM 算法的平均运行时间和迭代次数，这些数据是对 10 次模拟运行取平均得到的。表中未列出期望最大化算法，因为在模拟中，它比其他算法慢了几个数量级。显然，ICM-EM 比 ICM 快得多。

10 总结

本文研究了经典 Wicksell 微粒问题的一种推广，即将粒子形状从球体推广到任意凸形状。特别是，对于粒径分布累积分布函数 H 的估计问题，我们推导出了一个可识别性结果。我们还通过梅林变换得到了一个反演公式。针对偏倚尺寸分布 H^b ，我们提出了一种非参数最大似然估计量，并证明该估计量一致强相合。此外，这种估计量在实际应用中可以高效计算。在一项模拟研究中，对于各种粒子形状和粒径分布，我们提出的 H^b 和 H 估计量表现良好。

A 附录：证明

引理*3*的证明。该结果几乎可由 [13], 中的定理7.8.2直接得出，该定理是一个梅林反演定理。设 $X \sim F_1$ 和 $Y \sim F_2$。根据假设， $\mathcal{M}_X$ 和 $\mathcal{M}_Y$ 在 St(α， β) 上解析，其中 $0 \leq \alpha < \beta$。令 $c \in (\alpha, \beta)$，并假设对所有 $t \in \mathbb{R}$， $\mathcal{M}_X(c+it) = \mathcal{M}_Y(c+it)$。令$x > 0$，由 [13] 中的定理7.8.2可得：

$$\bar{F}_1(x) := \frac{1}{2}(F_1(x+) + F_1(x-)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} -\mathcal{M}_X(s) \frac{x^{-s+1}}{s} \mathrm{d}s$$

$$\bar{F}_2(x) := \frac{1}{2}(F_2(x+) + F_2(x-)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} -\mathcal{M}_Y(s) \frac{x^{-s+1}}{s} \mathrm{d}s.$$

这里： $F(x+) := \lim_{h\downarrow 0} F(x+h)$ 和 $F(x-) := \lim_{h\uparrow 0} F(x+h)$。注意，对于 x 的连续性点 F_1， $F_1(x) = F_1(x)$。由于累积分布函数右连续，我们得到： $F_1(x) = F_1(x+)$ 和 $F_2(x) = F_2(x+)$。因此，只需证明 $F_1 = F_2$。由于对于所有$t \in \mathbb{R}$， $\mathcal{M}_X(c+it) = \mathcal{M}_Y(c+it)$:

$$\bar{F}_1(x) - \bar{F}_2(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} -(\mathcal{M}_X(s) - \mathcal{M}_Y(s)) \frac{x^{-s+1}}{s} \mathrm{d}s = 0,$$

至此，证明完成。 □

引理 4 的证明。 f_ϵ 是上半连续的，因为它是一个上半连续函数与一个连续函数的乘积和复合。根据定理 1，g_K^S 在 $(0,\ \tau_K)$ 上非递减，其中某个 $0 \le \tau_K \le \sqrt{a_{\max}}$。选取足够大的 $M > \sqrt{a_{\max}}$，使得 $e^{-M} < \tau_K$。于是立即可得，对于 $z \in [M, \infty)$，$f_\epsilon(z) = 0$，并且 f_ϵ 在 $(-\infty,\ -M]$ 上单调递增。接下来只需证明 f_ϵ 在 $[-M, M]$ 上有界变差。令 $-M < z_0 < z_1 < \cdots < z_m < M$为 $[-M, M]$的任意一个分割。于是有:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} |f_\epsilon(z_i) - f_\epsilon(z_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{m} |g_K^S(e^{z_i})e^{z_i} - g_K^S(e^{z_i})e^{z_{i-1}} + g_K^S(e^{z_i})e^{z_{i-1}} - g_K^S(e^{z_{i-1}})e^{z_{i-1}}| \\ &\le ||g_K^S||_\infty \sum_{i=1}^{m} |e^{z_i} - e^{z_{i-1}}| + e^M \sum_{i=1}^{m} |g_S(e^{z_i}) - g_S(e^{z_{i-1}})| \\ &\le ||g_K^S||_\infty e^M + e^M V_0^{\sqrt{a_{\max}}}\left(g_K^S\right) < \infty.\end{aligned} \tag{28}$$

注意，式（28）中的第一项求和是望远镜求和。在最后一步中，我们利用了 g_K^S 有界且在其支撑集上有有界变差这一事实。由于上述计算对 $[-M, M]$ 的任意分割均成立，我们得到：$V_{-M}^{M}\ (f_\epsilon) < \infty$，至此证明完成。 □

引理 6 的证明。由于 $f_\epsilon \ge 0$ 是勒贝格密度，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在一个有界连续概率密度函数 f_ϵ^m，使得 $||f_\epsilon^m - f_\epsilon||_{L^1} \le 1/m$（见附录 A 中的引理 8）。令 $m \in \mathbb{N}$，则:

$$\begin{aligned}||f_n - f_Y||_{L_1} &= \int \left| \int f_\epsilon(z-x) - f_\epsilon^m(z-x) + f_\epsilon^m(z-x)\mathrm{d}(F_n - F_X)(x) \right| \mathrm{d}z \\ &\le \int \left| \int f_\epsilon(z-x) - f_\epsilon^m(z-x)\mathrm{d}(F_n - F_X)(x) \right| \mathrm{d}z \\ &\quad + \int \left| \int f_\epsilon^m(z-x)\mathrm{d}(F_n - F_X)(x) \right| \mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{29}$$

利用三角不等式和富比尼定理，式（29）中的第一项有如下上界:

$$\begin{aligned}&\int \left| \int f_\epsilon(z-x) - f_\epsilon^m(z-x)\mathrm{d}F_n(x) \right| \mathrm{d}z + \int \left| \int f_\epsilon(z-x) - f_\epsilon^m(z-x)\mathrm{d}F_X(x) \right| \mathrm{d}z \\ &\le \int \int |f_\epsilon(z-x) - f_\epsilon^m(z-x)|\,\mathrm{d}z\mathrm{d}F_n(x) + \int \int |f_\epsilon(z-x) - f_\epsilon^m(z-x)|\,\mathrm{d}z\mathrm{d}F_X(x) \\ &\le 2||f_\epsilon^m - f_\epsilon||_{L^1} \le \frac{2}{m}.\end{aligned}$$

式（29）中的第二项可写为:

$$\int \left| \int f_\epsilon^m(z-x)\mathrm{d}(F_n - F_X)(x) \right| \mathrm{d}z = ||\varphi_{n,m} - \varphi_m||_{L^1},$$

其中 $\varphi_{n,m}$ 和 φ_m 定义如下:

$$\varphi_{n,m}(z) = \int f_\epsilon^m(z-x)\mathrm{d}F_n(x), \quad \text{and} \quad \varphi_m(z) = \int f_\epsilon^m(z-x)\mathrm{d}F_X(x).$$

由于 f_ϵ^m是一个概率密度，因此对于所有 $n \in \mathbb{N}$， φ_m 和$\varphi_{n,m}$ 也都是概率密度。根据 f_ϵ^m的连续性以及 F_n 弱收敛到 F_X，我们得到 $\varphi_{n,m}$ 在 $n \to \infty$时逐点收敛到 φ_m。根据 Scheff´e 定理，概率密度逐点收敛到另一个概率密度意味着这些密度也在 L^1中收敛。综合所有结果可得：

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f_Y||_{L_1} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{m} + ||\varphi_{n,m} - \varphi_m||_{L^1} = \frac{2}{m}.$$

令 $m \to \infty$，我们便得到所需结果。 □

引理 8. 设 f 是 $\mathbb{R}$上的勒贝格密度，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个有界连续概率密度函数 g，使得 $\|g - f\|_{L^1} < \varepsilon$。

证明. 回想一下，紧支撑连续函数空间在 L^1中稠密。对于 $n \in \mathbb{N}$，取一个连续、紧支撑且非负的函数 g_n，使得 $\|g_n - f\|_{L^1} \leq 1/(n+1)$。根据反三角不等式：

$$|\|g_n\|_{L^1} - 1| = |\|g_n\|_{L^1} - \|f\|_{L^1}| \leq \|g_n - f\|_{L^1} \leq \frac{1}{n+1}. \tag{30}$$

定义： $\tilde{g}_n = g_n / \|g_n\|_{L^1}$。注意，根据 (30)， $\|g_n\|_{L^1} > 0$。因此， $\tilde{g}_n$ 是一个有界连续概率密度函数。综合以上所有结果：

$$\begin{aligned}
\|\tilde{g}_n - f\|_{L^1} &= \frac{1}{\|g_n\|_{L^1}} \int |g_n(x) - f(x) + f(x) - \|g_n\|_{L^1} f(x)| \, \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{\|g_n\|_{L^1}} \left(\|g_n - f\|_{L^1} + |\|g_n\|_{L^1} - 1| \cdot \|f\|_{L^1} \right) \\
&\leq \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

由于这对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，我们便得到所需结果。 □

引理 7 的证明. 我们首先注意到以下事实：

$$\sup_{0 \leq \lambda < t_n} |H_n(\lambda) - H(\lambda)| = \sup_{0 \leq \lambda < t_n} H(\lambda) = H(t_n). \tag{31}$$

现在让我们假设 $\lambda \geq t_n$。根据定义：

$$H(\lambda) - H_n(\lambda) = \frac{\int_0^\lambda \frac{1}{x} \mathrm{d}H^b(x) \int_{t_n}^\infty \frac{1}{x} \mathrm{d}H_n^b(x) - \int_{t_n}^\lambda \frac{1}{x} \mathrm{d}H_n^b(x) \int_0^\infty \frac{1}{x} \mathrm{d}H^b(x)}{\int_0^\infty \frac{1}{x} \mathrm{d}H^b(x) \int_{t_n}^\infty \frac{1}{x} \mathrm{d}H_n^b(x)}. \tag{32}$$

式 (32) 的分子可写为:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_n}^{\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}H_n^b(x)\left(\int_0^{\lambda}\frac{1}{x}\mathrm{d}H^b(x)-\int_{t_n}^{\lambda}\frac{1}{x}\mathrm{d}H_n^b(x)\right)\\
&\quad-\int_{t_n}^{\lambda}\frac{1}{x}\mathrm{d}H_n^b(x)\left(\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}H^b(x)-\int_{t_n}^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}H_n^b(x)\right)\\
=&\int_{t_n}^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}H_n^b(x)\left(\int_{t_n}^{\lambda}\frac{1}{x}\mathrm{d}(H^b-H_n^b)(x)+\int_0^{t_n}\frac{1}{x}\mathrm{d}H^b(x)\right)\\
&\quad-\int_{t_n}^{\lambda}\frac{1}{x}\mathrm{d}H_n^b(x)\left(\int_{t_n}^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}(H^b-H_n^b)(x)+\int_0^{t_n}\frac{1}{x}\mathrm{d}H^b(x)\right).
\end{aligned}\tag{33}$$

回忆: $\mathbb{E}(\Lambda)=\int_0^{\infty}\lambda\mathrm{d}H(\lambda)=1/\int_0^{\infty}(1/x)\mathrm{d}H^b(x)$。将（33）代回（32）得:

$$\begin{aligned}
H(\lambda)-H_n(\lambda)=&\mathbb{E}(\Lambda)\left(\int_{t_n}^{\lambda}\frac{1}{x}\mathrm{d}(H^b-H_n^b)(x)\right)+H(t_n)\\
&-\mathbb{E}(\Lambda)H_n(\lambda)\left(\int_{t_n}^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}(H^b-H_n^b)(x)\right)-H_n(\lambda)H(t_n).
\end{aligned}$$

因此，我们得到以下界:

$$\sup_{\lambda\geq t_n}|H(\lambda)-H_n(\lambda)|\leq 2\mathbb{E}(\Lambda)\sup_{\lambda\geq t_n}\left|\int_{t_n}^{\lambda}\frac{1}{x}\mathrm{d}(H^b-H_n^b)(x)\right|+H(t_n).\tag{34}$$

(34) 中的积分可通过分部积分计算:

$$\begin{aligned}
&\sup_{\lambda\geq t_n}\left|\int_{t_n}^{\lambda}\frac{1}{x}\mathrm{d}(H^b-H_n^b)(x)\right|=\\
&\quad=\sup_{\lambda\geq t_n}\left|\frac{H_n^b(\lambda)-H^b(\lambda)}{\lambda}-\frac{H_n^b(t_n)-H^b(t_n)}{t_n}-\int_{t_n}^{\lambda}\left(H_n^b(x)-H^b(x)\right)\mathrm{d}\frac{1}{x}\right|\\
&\quad\leq 2\frac{\sup_{\lambda\geq t_n}\left|H_n^b(\lambda)-H^b(\lambda)\right|}{t_n}+\sup_{\lambda\geq t_n}\left|H_n^b(\lambda)-H^b(\lambda)\right|\cdot\left|\int_{t_n}^{\lambda}\mathrm{d}\frac{1}{x}\right|\\
&\quad\leq 3\frac{\|H_n^b-H^b\|_{\infty}}{t_n}.
\end{aligned}\tag{35}$$

注意，根据（31），（34）中的界大于 $H(t_n)$，这意味着将上确界改为对 $\lambda\geq 0$ 取值时，该界仍然成立。结合（34）和（35），最终得到:

$$\|H_n-H\|_{\infty}\leq 6\mathbb{E}(\Lambda)\frac{\|H_n^b-H^b\|_{\infty}}{t_n}+H(t_n).\tag{36}$$

当 n 趋于无穷时，根据 H的连续性， $H(t_n)$收敛于零。利用这一点以及 $(H_n^b)_{n\geq 1}$ 以 t_n 的速率一致收敛于 H^b 这一事实（根据假设），(36) 右侧收敛于零。

□

B 附录：算法伪代码

算法 1 期望最大化（期望最大化）

输入：观测到的次序统计量： $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$。输出：最大似然估计 $\hat{} H_n^b$。1: $k := 0$2: $p^{(0)} := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) \in \mathcal{P}_n$3: 当未满足停止准则时，执行循环 4: $p_j^{(k+1)} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{i,j} p_j^{(k)}}{\sum_{q=1}^{n} \alpha_{i,q} p_q^{(k)}}$，其中：$\alpha_{i,j} = g_K^S \left(\frac{s_i}{s_j} \right) \frac{1}{s_j}$5: $k := k + 1$6: 结束循环 7: $\hat{} H_n^b(s_j) := \sum_{i=1}^{j} p_i^{(k)}$ 对于 $j \in \{1, \ldots, n\}$。8: 返回 $\hat{} H_n^b$

算法 2 迭代凸下包络（ICM）

输入：凸函数 ϕ**：** $\mathcal{C}_+ \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$。 $\beta^{(0)}$ **满足** $\phi(\beta^{(0)}) < \infty$。**输出：** ϕ **的一个极小化解。1：** k**：** $= 0$**2：** $\beta^{(0)}$**：** $= (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}) \in \mathcal{C}$**3：当未满足停止准则时，执行 4：** β**：** $= \arg\min_{y \in \mathcal{C}_+} \phi_{(k)}(y)$ ▷ **其中** $\phi_{(k)}$ **如式（23）所示 5：若** $\phi(\beta) < \phi(\beta^{(k)}) + \epsilon \nabla \phi(\beta^{(k)})(\beta - \beta^{(k)})$**，则 6：** $\beta^{(k+1)}$**：** $= \beta$**7：否则 8：** λ**：** $= 1$**，** s**：** $= \frac{1}{2}$**，** z**：** $= \beta$。**9：当** $\phi(z) < \phi(\beta^{(k)}) + (1 - \epsilon) \nabla \phi(\beta^{(k)})(z - \beta^{(k)})$ **（I）或** $\phi(z) > \phi(\beta^{(k)}) + \epsilon \nabla \phi(\beta^{(k)})(z - \beta^{(k)})$ **（II）时，执行 10：若（I）成立，则** λ**：** $= \lambda + s$**11：若（II）成立，则** λ**：** $= \lambda - s$**12：** z**：** $= \beta^{(k)} + \lambda(\beta - \beta^{(k)})$ **13：** s**：** $= \frac{s}{2}$ **14：结束 while 循环 15：** $\beta^{(k+1)}$**：** $= z$**16：** k**：** $= k + 1$**17：结束 while 循环 18：返回** $\beta^{(k)}$

致谢

感谢 Kees Bos、Jilt Sietsma 和 Karo Sedighiani 与我们进行了富有成效的讨论。

参考文献

[1] S. D. Wicksell，“微粒体问题：一项生物统计学问题的数学研究”，《生物统计学》，第 17 卷，第 84–99 页，1925 年。[2] S. N. Chiu、D. Stoyan、W. S. Kendall 和 J. Mecke，随机几何及其应用。John Wiley & Sons, Ltd，2013 年。[3] J. Ohser 和 M. Nippe，“立方体粒子的体视学：尺寸分布的各种估计量”，*J. Microsc.*，第 187 卷，第 22–30 页，1997 年。[4] J. Ohser 和 F. M¨ucklich，“若干类多面体的体视学”，*Adv. Appl. Prob.*，第 27 卷，第 384–396 页，1995 年。[5] K. S. McGarrity、J. Sietsma 和 G. Jongbloed，“将非参数推断应用于双相钢的定向圆柱体体视学模型”，*The Annals of Applied Statistics*，第 8 卷，第 2538–2566 页，2014 年。[6] T. van der Jagt、G. Jongbloed 和 M. Vittorietti，“弦长和截面积分布密度的存在性与近似”，已提交，2023 年。[7] P. Davy 和 R. E. Miles，“不透明空间试样的抽样理论”，*J. R. Stat. Soc.Ser. B Methodol.*，第 39 卷，第 56–65 页，1977 年。[8] A. Baddeley 和 E. B. V. Jensen，面向统计学家的体视学。Chapman and Hall/CRC，2004 年。[9] L. A. Santal´o 和 M. Kac，积分几何与几何概率。Cambridge University Press，2004 年。[10] R. Arratia、L. Goldstein 和 F. Kochman，“一种及所有情况下的大小偏倚”，*Probab. Surv.*，第 16 卷，第 1–61 页，2019 年。[11] J. Ohser 和 F. M¨ucklich，材料科学中的微观结构统计分析。John Wiley & Sons, Inc.，2000 年。[12] V. Bene˘s 和 J. Rataj，随机几何：精选专题。Kluwer Academic Publishers，2004 年。[13] T. Kawata，概率论中的傅里叶分析。Academic Press，1972 年。[14] V. M. Zolotarev，“概率论中的梅林–斯蒂尔切斯变换”，*Theory Probab. Appl.*，第 2 卷，第 433–460 页，1957 年。[15] J. Kisel’´ak 和 G. Baluchov´a，“关于 $\mathbb{R}^3$ 中凸相似体的颗粒尺寸分布”，*J. Math. Imaging Vision*，第 63 卷，第 108–119 页，2021 年。[16] P. L. Butzer 和 S. Jansche，“梅林变换的直接方法”，*J. Fourier Anal.Appl.*，第 3 卷，第 325–376 页，1997 年。[17] G. Jongbloed，“Wicksell问题及相关反卷积问题中的筛选最大似然估计”，*Scand. J. Stat.*，第 28 卷，第 161–183 页，2001 年。

[18] P. Groeneboom、G. Jongbloed 和 S. Michael，“一大类反卷积模型中最大似然估计量的相合性”，加拿大统计学杂志，第 41 卷，第 98–110 页，2013 年。[19] P. Groeneboom 和 J. A. Wellner，信息界与非参数极大似然估计。Birkhäuser 巴塞尔出版社，1992 年。[20] A. P. Dempster、N. M. Laird 和 D. B. Rubin，“通过期望最大化算法从不完整数据中进行最大似然估计”，英国皇家统计学会杂志 *B* 辑（方法论），第 39 卷，第 1–22 页，1977 年。[21] J. A. Wellner 和 Y. Zhan，“一种用于根据删失数据计算非参数最大似然估计量的混合算法”，美国统计学会杂志，第 92 卷，第 945–959 页，1997 年。[22] G. Jongbloed，“用于非参数估计的迭代凸下包络算法”，计算与图形统计学杂志，第 7 卷，第 310–321 页，1998 年。