arXiv:2305.02872v1 [math.DS] 4 May 2023

自由群上的移位之间的有限期望有限编码

JAMES O'QUINN

可测动力系统中一些最核心、研究最深入的例子是伯努利移位，其理论与动力熵密切相关。Ornstein 同构定理指出，整数上的伯努利移位在共轭意义下由其熵分类。自 Ornstein 于 1970年 提出该定理的原始证明以来，人们投入了大量兴趣和努力，以各种方式对其加以推广。

首先，可以尝试证明能够对更广泛的一类群上的移位进行分类。这方面已经取得了很大进展。事实上，Ornstein 和 Weiss [8] 将 Ornstein 的定理推广到了可 amen 群上的伯努利移位。Bowen [1] 开创了 sofic 群熵理论，Kerr 和 Li [5] 又对其进行了改进，使我们能够区分 sofic 群上的移位。结合 Seward [12], 基于 Bowen [2], 的研究所得的一项结果，我们得知，sofic 群上的伯努利移位由其基熵分类。

扩展奥恩斯坦同构定理的另一种方式，是将按共轭分类替换为一种更强的等价形式。其中一种强化形式是伯努利移位的有限等价，它由称为有限编码的映射的存在性来定义。粗略地说，如果两个伯努利移位之间存在一个共轭映射（称为有限编码同构），并且该映射对几乎每个点的像，都由一种算法确定，而该算法在每一步都通过有限编码块实现，那么这两个伯努利移位就是有限等价的。移位之间映射的编码信息本质上是拓扑性的：乘积拓扑中的基本开集，是由共享给定有限编码块的点组成的集合。这意味着，拓扑动力学理论中使用的一些工具和技术，可以应用于有限编码的研究。一个关键结果是 Keane 和 Smorodinsky [4] 的定理：整数上的具有相等熵的伯努利移位是有限等价的，从而强化了奥恩斯坦同构定理。

问题是：有限等价这一概念可以细化到什么程度，同时仍适用于熵相等的伯努利移位? Schmidt [11] 沿着 Parry 和 Schmidt [9], 的研究指出，若进一步假设码长的期望有限，则这些移位必须具有等价分布。设 $\mathbb{Z} \curvearrowright (X_p,\mu_p)$ 和 $\mathbb{Z} \curvearrowright (X_q,\mu_q)$ 是初始分布分别为 p 和 q 的伯努利移位，并设 $\phi : (X_p,\mu_p) \to (X_q,\mu_q)$ 是一个有限编码（即保测共轭，且几乎处处也是 X_p上的连续函数）。因此，对几乎处处的 $x \in X_p$，存在正整数 a 和 m，使得若 $x' \in X_p$ 满足对所有 $-m \le i \le a$都有 $x_i = x'_i$，则有 $\phi(x)_0 = \phi(x')_0$。令 $a(x)$ 和 $m(x)$ 表示对于给定的 $x \in X_p$，能够保证上述性质成立的最小正整数。若 ϕ 满足 $\int \Big(a(x) + b(x)\Big) d\mu_p(x) < \infty$，则称其具有有限期望码长。$\phi$ 具有有限期望码长的一个主要技术推论，是 Krieger 在 [6]中提出的如下观察：对几乎处处的 $x \in X_p$，我们可以找到一个 $m \in \mathbb{N}$（分别是 $a \in \mathbb{N}$），使得若 $x' \in X_p$ 满足 $x_i = x'_i$（对于 $i \in [-m,\infty)$（分别是 $i \in (\infty, a]$），则对所有 $i \in [0,\infty$（分别是 $i \in (-\infty, 0)$），都有 $\phi(x)_i = \phi(x)_i$。利用信息余循环——这是对经典信息函数的一个扰动式扩展，该信息函数由 [3], 引入——Parry 和 Schmidt 在 [9] 中证明，存在 X_p 的一个正测度子集，在该子集上，某个群所产生的相对信息

由 X_p 的有限支撑置换生成，在有限同构作用下保持不变。Schmidt 证明，这一性质可以扩展到 X_p的所有元素；这是在某个置换意义下 p 与 q 相等的关键。

最近，Seward [12] 将 Keane 和 Smorodinsky 的结果推广到了所有可数无限群，重新引起了人们对有限编码理论的一些兴趣。本文旨在将 Schmidt 关于具有有限期望码长的有限编码的结果推广到自由群。乍看之下，可 amen 群似乎是应用 [11] 中所述技术最自然的背景，因为贝塔函数的定义采用了渐近平均；然而，前一段所述技术的根基实际上在于自由性。自由性使得我们能够在群中实现一种类似图灵机的方案：我们可以在群内选取一个无限集合，使得平移只会将一个元素移出该集合。因此，信息余循环告诉我们，在空间中平移一个点，只会使其相对于该集合的相对信息改变一个符号。这又使我们能够得到贝塔函数的一个公式，类似于 [11], 中的公式，即对移位迭代上的信息余循环取渐近平均。此外，Krieger 对 [6] 中观察结果的证明依赖于逐点遍历定理，而该定理只适用于可 amen 群。下文的命题 1.3 将给出 Kreiger 这一观察结果的另一种证明，不使用逐点遍历定理，也不借助任何其他与 amen 性有关的工具。

致谢。作者衷心感谢 David Kerr 提供的宝贵意见与建议。本研究部分由德国研究联合会（DFG）通过德国卓越战略资助——EXC 2044——390685587，明斯特数学中心（Mathematics M¨unster）——动力学——几何——结构；德国研究联合会（DFG）——项目编号 427320536——SFB 1442；以及 ERC 高级资助项目 834267 - AMAREC 资助。

1. Finitary Codings

设 F_ℓ 为由 ℓ 个生成元生成的自由群，并将这组生成元记作 S。我们在 F_ℓ 上定义词长函数 $|\cdot|$ 如下：给定一个词 $g \in F_\ell \setminus \{e\}$，令 $|g| = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \exists g_1, \dots, g_m \in S \cup S^{-1}$，使得 $g = g_1 \dots g_m\}$ 且 $|e| = 0$。令 $r \in \mathbb{N}$，并将 F_ℓ 中词长至多为 r 的所有词的集合记作 $B(r)$。定义 $p = [P_1, \dots, P_m]$ 为一个向量，其各项均为严格正实数，且总和为 1。在集合 $\{1, \dots, m\}$ 上使用概率测度 $P(i) = P_i$（对每个 $i \in \{1, \dots, m\}$），便得到一个概率空间。令所有 $g \in F_\ell$ 均满足 $P_g = P$，则可得到另一个配备乘积概率测度 $\mu_p = \prod_{g \in F_\ell} P^g$ 的概率空间 $X_p = \{1, \dots, m\}^{F_\ell}$。我们将使用以下记号表示 X_p 中的基本开集（柱集）：给定某个 $A \subset F_\ell$ 以及一个集合 $\{i_g\}_{g \in A}$，其中对所有 $g \in A$ 均有 $i_g \in \{1, \dots, m\}$，令每个 $h \in A\}$ 的 $[i_g \mid g \in A] = \{x \in X_p \mid x_h = i_h$。令 $(gx)_h = x_{g^{-1}h}$（对所有 $x \in X_p$ 及所有$g, h \in F_\ell$），便得到一个保概率测度作用 $F_\ell \curvearrowright (X_p, \mu_p)$。令 $\alpha_p = \{[i_g \mid g \in \{e\}] \colon i_g \in \{1, \dots, m\}\}$，其中 e 是 F_ℓ 中的空词（单位元）。我们称 α_p 为 X_p 的单位分割。本文余下部分固定一个 $a \in S$，并令 $W_a = \{wa \in F_\ell \colon |wa| = |w| + 1\} \cup \{e\}$。可见， W_a 是以一个 a 结尾的约化词的集合。我们将 $F_\ell \curvearrowright (X_p, \mu_p)$ 在 W_a 上的过去代数 $\mathcal{A}_{p,a}$ 定义为由 $\{g^{-1}\alpha_p \mid g \in W_a\}$ 生成的子-σ-代数。

我们也可以将 X_p 视为一个拓扑空间。事实上，我们可以赋予 X_p 由子基 $\{[i_g \mid g \in \{h\} \mid h \in F_\ell$ 和 $i_g \in \{1, \dots, m\}\}$生成的拓扑，在此拓扑下，它是一个康托尔集（除非 p 是平凡的）。

令 $q = [Q_1, \dots, Q_n]$ 为另一个概率向量。它诱导出一个伯努利移位 $F_\ell \curvearrowright (X_q, \mu_q)$，其单位元划分为 α_{q_0}。令 $\mathcal{A}_{q,\ a}$ 为由 $\{g^{-1}\alpha_q \mid g \in W_a\}$生成的子-$\sigma$-代数。我们还赋予 X_q 由子基 $\{[i_g \mid g \in \{h\}] \mid h \in F_\ell$ 和 $i_g \in \{1, \dots, n\}\}$生成的拓扑。

定义 1.1. 若可测映射 $\phi : (X_p,\mu_p) \to (X_q,\mu_q)$ 满足存在零测集 $E \subset X_p$，使得 ϕ 在集合 $X_p \backslash E$ 上的限制是连续映射，则称其为有限编码。因此，对于几乎每个 $x \in X_p$，$\phi(x)_e$ 由球 $B(r) \subset F_\ell$ 以如下方式确定：存在一个依赖于 x 的 $r \in \mathbb{N}$，使得若 $x' \in X_p$ 满足对每个$g \in B(r)$ 都有 $x'_g = x_g$，则 $\phi(x)_e = \phi(x')_e$。令 $^r\phi(x)$为使 $B(r)$能够确定$\phi(x)_e$的最小半径 r。若一个有限同构是共轭且为保测双射，并且 ϕ 和 ϕ^{-1} 均为有限编码，则称其为有限同构。最后，若有限同构 ϕ 满足有限期望，即设 $^v\!p(x) = |B(^r\phi(x))|$时，有 $\int v_\phi(x)d\mu_p < \infty$ 且 $\int v_{\phi^{-1}}(x)d\mu_q < \infty$。

定义 1.2. 给定一个有限编码 $\phi : X_p \to X_q$，我们可以按以下方式定义函数 $m_\phi : X_p \to \mathbb{Z}$和 $a_\phi : X_p \to \mathbb{Z}$：

$$m_\phi(x) = \sup_{g \in W_a} (r_\phi(g^{-1}x) - |g|) \text{ and}$$

$$a_\phi(x) = \sup_{g \in F_\ell \backslash W_a} (r_\phi(g^{-1}x) - |g|).$$

函数 m_ϕ 和 a_ϕ 最早由 [9] 引入，作为函数 m^* 和 a^*，其构想源自 [6]。这一构想是，对于某个点 $x \in X_p$，m_ϕ（分别是 a_ϕ）确定以 F_ℓ 中的单位元为中心的球的最小半径，使得对于所有$g \in W_a$（分别是 $g \in F_\ell \setminus W_a$），都能据此确定 $\phi(x)_g$。下一个命题表明，这一性质对几乎处处的 $x \in X_p$成立。

命题 1.3. 若 $\phi : X_p \to X_q$ 是一个具有有限期望的有限同构，则函数 m_ϕ 和 a_ϕ 几乎处处有限。

证明。首先证明 m_ϕ几乎处处有限。令 $A = \bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{g \in W_a} \{x \mid r_\phi(g^{-1}x) - |g| > i\}$。只需证明 $\mu_p(A) = 0$。取定 $\epsilon > 0$。证明的下一部分分两种情况进行：当 $\ell = 1$ 时，以及当 $\ell > 1$时。

情形 1：$\ell = 1$。

设 a 是 F_ℓ的生成元。由于 ϕ 的期望有限，我们有 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_p(\{x \mid ^v\!\phi(x) > n\}) = \int v_\phi(x)d\mu_p < \infty$。由于 $F_\ell \curvearrowright X_p$ 是保测的，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $\mu_p(\{x \mid ^v\!\phi(a^{-n}x) > n\}) = \mu_p(\{x \mid v_\phi(x) > n\})$。因此，存在一个 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $N > 3$ 并且

$$\sum_{n=N}^{\infty} \mu_p(\{x \mid v_\phi(a^{-n}x) > n\}) = \sum_{n=N}^{\infty} \mu_p(\{x \mid v_\phi(x) > n\}) < \epsilon.$$

现在证明 $A \subset \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x \mid v_\phi(a^{-n}x) > n\}$。反设存在一个 $y \in A$ 使得 $y \notin \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x \mid v_\phi(a^{-n}x) > n\}$。由于 $y \in A$，存在一个整数 $k > N$ 使得 $^r\!\phi(a^{-k}x) - k > N$。由于 $y \notin \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x \mid v_\phi(a^{-n}x) > n\}$，我们有 $^v\!\phi(a^{-k}y) \leq k$。然而，$^v\!\phi(x) = 2r_\phi(x) - 1$，这意味着 $2(k+N) - 1 < v_\phi(a^{-k}y) \leq k$，矛盾。因此 $A \subset \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x \mid v_\phi(g_n^{-1}x) > n\}$。现在继续讨论第二种情形。

情况 2：$\ell > 1$。

令 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 W_a 的一个枚举，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $|g_n| \leq |g_{n+1}|$。例如，可以先任意排列给定词长的所有单词，再依次枚举各词长对应的排列，从而得到这样的枚举。事实上，这些就是唯一满足条件的枚举。由此得到的枚举具有如下性质：对所有 $n \in \mathbb{N}$，$n \leq (2\ell - 1)^{|g_n|+1}$。事实上，我们可以看出，对所有 $n \in \mathbb{N}$，$|g_n| \leq |g_{n+1}|$ 成立，这意味着该枚举也必须保持词长不变。因此，给定单词 g的枚举序号不超过 W_a 中词长至多为 $|g|$的所有可能单词的数量，而该数量不超过 $(2\ell - 1)^{|g|+1}$。由于 ϕ 具有有限期望，我们有 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_p(\{x \mid v_\phi(x) >$

$n\}) = \int v_\phi(x) d\mu_p < \infty$。由于 $F_\ell \curvearrowright X_p$ 是保测的，我们有 $\mu_p(\{x \mid v_\phi(g_n^{-1}x) > n\}) = \mu_p(\{x \mid v_\phi(x) > n\})$。因此，存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得 $N > 3$，并且

$$\sum_{n=N}^{\infty} \mu_p(\{x \mid v_\phi(g_n^{-1}x) > n\}) = \sum_{n=N}^{\infty} \mu_p(\{x \mid v_\phi(x) > n\}) < \epsilon.$$

现在将证明 $A \subset \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x \mid v_\phi(g_n^{-1}x) > n\}$。反设存在一个 $y \in A$，使得 $y \notin \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x \mid v_\phi(g_n^{-1}x) > n\}$。由于对所有 $k \in \mathbb{N}$ 和 $y \in A$，都有 $k \leq (2\ell-1)^{|g_k|+1}$，我们可以找到一个 k，使 $|g_k|$，进而使 $r_\phi(g_k^{-1}y)$ 尽可能大。因此，我们可以找到一个足够大的 k，使 $\log_{2\ell-1}((2\ell-1)^{r_\phi(g_k^{-1}y)} - 1)$ 尽可能接近 $r_\phi(g_k^{-1}y)$。因此，由于 $y \in A$，我们可以找到一个足够大的整数 $k > N$，使得，

(1) $r_\phi(g_k^{-1}y) - |g_k| > N$
(2) $r_\phi(g_k^{-1}y) - \log_{2\ell-1}((2\ell-1)^{r_\phi(g_k^{-1}y)} - 1) \leq \log_{2\ell-1}(\frac{2\ell}{2\ell-2})$.

注意，利用 F_ℓ 中球的基数的常用公式可得 $v_\phi(y) = 1 + \frac{2\ell}{((2\ell-1)^{r_\phi(y)}-1)\ 2\ell-2}$。根据假设，$v_\phi(g_k^{-1}y) \leq k$，这意味着

$$\begin{aligned}
N + |g_k| &\overset{(1)}{\leq} r_\phi(g_k^{-1}y) \\
&\overset{(2)}{\leq} \log_{2\ell-1}((2\ell-1)^{r_\phi(g_k^{-1}y)} - 1) + \log_{2\ell-1}(\frac{2\ell}{2\ell-2}) \\
&\leq \log_{2\ell-1}(v_\phi(g_k^{-1}y)) \\
&\leq \log_{2\ell-1}(k) \qquad\qquad \text{since } y \notin \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x \mid v_\phi(g_n^{-1}x) > n\} \\
&\leq |g_k| + 1
\end{aligned}$$

这就导出了矛盾。因此，$A \subset \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x \mid v_\phi(g_n^{-1}x) > n\}$。

因此，在这两种情形下，我们都有如下结论：

$$\mu_p(A) \leq \mu_p\Big(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{x \mid v_\phi(g_n^{-1}x) > n\}\Big) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \mu_p(\{x \mid v_\phi(g_n^{-1}x) > n\}) < \epsilon.$$

这证明了 m^* 几乎处处有限。证明 a^* 几乎处处有限的方法类似，只需稍作修改。对于 $\ell = 1$ 的情形，只需将 W_a 替换为 $F_\ell \setminus W_a$，证明就与上述方法相同。对于 $\ell > 1$ 的情形，我们可以用与之前相同的方法枚举 $F_\ell \setminus W_a$，只是这次得到的性质是：对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $n \leq 3(2\ell-1)^{|g_n|+1}$。取与上文相同的 N 和 k，我们得到 $N + |g_k| \leq |g_k| + 1 + \log_{2\ell-1} 3$，这仍然导出了矛盾。□

命题 1.3 的主要技术用途将在下面的推论中详细说明。

推论 1.4. 如果 $\phi\colon X_p \to X_q$ 是一种具有有限期望的有限编码，则以下结论成立：

(1) 对于几乎处处的 $x \in X_p$，存在一个以单位元为中心的球 $B \subset F_\ell$，使得如果 $x' \in X_p$ 具有以下性质：对于所有 $g \in B \cup W_a$，均有 $x'_g = x_g$，那么对于所有 $g \in W_a$，均有 $\phi(x')_g = \phi(x)_g$。(2) 对于几乎处处的 $x \in X_p$，存在一个以单位元为中心的球 $B \subset F_\ell$，使得如果 $x' \in X_p$ 具有以下性质：对于所有 $g \in B \cup F_\ell \setminus W_a$，均有 $x'_g = x_g$，那么对于所有 $g \in F_\ell \setminus W_a$，均有 $\phi(x')_g = \phi(x)_g$。

2. Conditional Information Functions

在本节中，我们将定义通过可测划分，利用子-σ-代数对测度空间进行因子化而得到的条件信息函数。在本节中，设 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 为概率空间。以下定义和事实可见于 [7] 和 [3]。

定义 2.1. α 是由 X 中互不相交的可测子集组成的集合；如果 $\bigsqcup_{A\in\alpha} A = X$，且满足以下分离性质，则称其为可测划分：

- 存在一个可数的可测集族 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中每个集合都是 α 中若干集合的并，使得对于不同的 A_1、$A_2 \in \alpha$，存在一个 $n\in\mathbb{N}$，使得要么$A_1 \subset B_n$ 且 $A_2 \subset X\setminus B_n$，要么反之。

请注意，上述定义的可测划分不一定是可数的。此外，我们将划分中包含某个特定 $x\in X$ 的集合称为 α 中 x 的原子。

定义 2.2. 可测划分 α 诱导出 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 的因子空间 $(X_\alpha,\mathcal{F}_\alpha,\mu_\alpha)$，其中 $X_\alpha = \alpha$，$\mathcal{F}_\alpha$ 是由所有作为 α 中若干集合之并的 $\mathcal{F}$-可测集生成的 σ-代数，而 μ_α 是 μ 在 $\mathcal{F}_\alpha$ 上的限制。它还诱导出一个因子投影 $N_\alpha : X \to X_\alpha$，将 X 中的点映射到 α 中包含该点的集合。

以下定理在 [7]中称为定理1.14。

定理2.3。设 α 是概率空间（X，$\mathcal{F}$，μ）上的可测划分，且 N_α是因子空间（X_α，$\mathcal{F}_\alpha$，μ_α）对应的投影。对于 μ_α-几乎处处的 $A\in\alpha$，存在 $\mathcal{F}$ 上的概率测度 $\mu^\alpha(\cdot|A)$，使得：

(1) $\mu^\alpha(X\setminus N_\alpha^{-1}(A)\,|A) = 0$。(2) 对任意 $F\in\mathcal{F}$，$A\to\mu^\alpha(F|A)$ 是一个 $\mathcal{F}_\alpha$-可测函数，在 X_α上几乎处处有定义。(3) 对任意 $F\in\mathcal{F}$，有

$$\begin{aligned}\mu(F) &= \int_{X_\alpha} \mu^\alpha(F|A)\,d\mu_\alpha(A)\\ &= \int_X \mu^\alpha(F|N_\alpha(x))\,d\mu(x).\end{aligned}$$

本文中使用这些条件测度的主要目的，是将一个测度空间分解到某个子σ-代数之上。我们可以通过从给定的子σ-代数构造一个可测划分来实现这一点。下面将详细说明这一过程，不过首先需要给出一个定义和两个定理。

定义 2.4. 设 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 是一个概率空间。若可测集的可数集族 Γ 满足以下两个条件，则称其为 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 的基：

(1) 对于任意两个不同的点 x_1，存在一个集合 $B\in\Gamma$，使得要么 $x_1\in B$ 和 $x_2\notin B$，要么反之。(2) 由 Γ 生成的 σ-代数的完备化是 $\mathcal{F}$。

以下定理见于 [7]。

定理 2.5。（Rokhlin）如果 α 是具有基的概率空间 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 的可测划分，那么因子空间 $(X_\alpha,\mathcal{F}_\alpha,\mu_\alpha)$ 也具有基。

定理 2.6. 如果 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 是具有基的概率空间，且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个子 σ-代数，那么 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 也具有基。

注 2.7. 给定 $\mathcal{F}$ 的一个子-σ 代数 $\mathcal{A}$，我们可以通过以下方式从 $\mathcal{A}$ 得到 X 的一个可测划分 α：令 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个可数基，并定义 α 为如下划分

$\hat{}\hat{}\hat{}$ 由形如 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ 的集合组成，其中 $A_n = A_n$ 或 $A_n = X \setminus A_n$。这给出了 X 上唯一的可测划分，除 X 中的一个零测集外，该划分与 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的选择无关；也就是说，给定两个由 $\mathcal{A}$ 中的集合组成的可测划分 α 和 β，存在一个零测集 N，使得 $\{A \setminus N \mid A \in \alpha\} = \beta$。该划分中包含给定 $x \in X$ 的原子记作 $[x]_{\mathcal{A}}$。此外，我们用 $\mu^{\mathcal{A}}$ 表示由 $\mathcal{A}$ 诱导的 μ 的条件测度 $\{\mu^{\alpha}(\cdot|A)\}_{A\in\alpha}$ 族，并用 $N_{\mathcal{A}}$ 表示相应的投影。

定义 2.8. 设给定两个 $\mathcal{F}$ 的子-σ-代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$。我们将 $\mathcal{B}$ 关于 $\mathcal{A}$ 且相对于 μ 的条件信息定义为函数

$$I_\mu(\mathcal{B}|\mathcal{A})(x) = -\log \mu^{\mathcal{A}}([x]_{\mathcal{B}} \mid [x]_{\mathcal{A}}),\ x \in X.$$

我们也可以定义条件期望。

定义 2.9. 给定 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 的一个子-σ-代数 $\mathcal{A}$，我们可以将 $f \in L^1(X,\mathcal{F},\mu)$ 的 $\mathcal{A}$ 的条件期望定义为函数

$$E(f|\mathcal{A})(x) = \int f d\mu^{\mathcal{A}}(\cdot|[x]_{\mathcal{A}})$$

在 μ-几乎处处有定义。

3. The Information Cocycle

本节将定义信息余循环，这是我们在有限编码下将一个移位的过去代数中的条件信息传递到另一个移位的过去代数时所使用的主要工具。我们重新采用第 1 节和第 2 节中的记号与约定。

定义 3.1。若对几乎处处的 $x \in X_p$，$|\{g \in F_\ell \mid V(x)_g \neq x_g\}| < \infty$，则称自同构 V: $X_p \to X_p$ 是局部有限的。记 L_p 为 (X_p,μ_p) 的所有局部有限自同构构成的群。记 G_p 为由 L_p 和 F_ℓ生成的群。设 a 是 F_ℓ 的一个生成元，设 $L_{p,\,a}$是 L_p 的子群，使得当 $V \in L_{p,\,a}$时，对几乎处处的 $x \in X_p$，只要 $g \in W_a \setminus \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 就有 $V(x)_g = x_g$。由 (X_p,μ_p) 的子-σ-代数 $\mathcal{A}$ 所条件化的信息余循环 J 是如下函数

$$J(\mathcal{A},V) = I_{\mu_p}(\mathcal{A}|V^{-1}\mathcal{A}) - I_{\mu_p}(V^{-1}\mathcal{A}|\mathcal{A}) - \log E\left(\frac{d\mu_p V^{-1}}{d\mu_p}|\mathcal{A}\right)\circ g$$

其中 $V \in G_p$, I 是条件信息函数，E 是条件期望，如 [3]所给出。容易看出，J 满足以下余循环方程:

$$J(\mathcal{A},VW) = J(\mathcal{A},V)\circ W + J(\mathcal{A},W)$$

几乎处处成立于 X_p上。

下一个命题给出了计算信息余循环的一些有用公式。

命题 3.2. 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 a 是 F_ℓ的一个标准生成元。那么，关于过去代数 $\mathcal{A}_{p,\,a}$的条件信息余循环满足以下公式:

$$J(\mathcal{A}_{p,a},a^n)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} I_{\mu_p}(\mathcal{A}_{p,a}|a^{-1}\mathcal{A}_{p,a})(a^i x) = \sum_{i=0}^{n-1} -\log(P_{x_{a^i}}) \tag{1}$$

对于 μ_p-几乎处处的 $x \in X_p$。此外，给定 $V \in L_{p,\,a}$，我们有对于 μ_p-几乎处处的 $x \in X_p$ 满足

$$J(\mathcal{A}_{p,a},V)(x) = \log\left(\prod_{g\in W_a}\frac{P_{(Vx)_g}}{P_{x_g}}\right). \tag{2}$$

证明。为了得到方程 (1)，只需证明 $J(\mathcal{A}_{p,\ a}, a)(x) = -\log(P_{x_e})$，因为可以递归地将余循环恒等式与该方程结合使用，从而得到 $J(\mathcal{A}_{p,\ a}, a^n)(x)$，$n > 1$ 的公式。由于按 a 平移是保测变换，我们有

$$J(\mathcal{A}, a) = I_{\mu_p}(\mathcal{A}|a^{-1}\mathcal{A}) - I_{\mu_p}(a^{-1}\mathcal{A}|\mathcal{A}).$$

不难看出，$a^{-1}\mathcal{A}$ 是由集合 $\{g^{-1}\alpha_p \mid g \in W_a\}$生成的 $\mathcal{A}$ 的子σ代数。令 $x \in X_p$。我们有 $[x]_{a^{-1}\mathcal{A}} = \{y \in X_p \mid y_g = x_g \ \forall g \in W_a\}$ 和 $[x]_{\mathcal{A}} = \{y \in X_p \mid y_g = x_g \ \forall g \in W_a \cup \{e\}\}$。因此，我们有 $[x]_{\mathcal{A}} \subset [x]_{a^{-1}\mathcal{A}}$。这意味着$I_{\mu_p}(a^{-1}\mathcal{A}|\mathcal{A}) = -\log\ \mu_p^{\mathcal{A}}([x]_{a^{-1}\mathcal{A}} \mid [x]_{\mathcal{A}}) = 0$。另一方面，我们可以看到$I_{\mu_p}(\mathcal{A}|a^{-1}\mathcal{A}) = -\log \mu_p^{-\mathcal{A}}([x]_{\mathcal{A}} \mid [x]_{a^{-1}\mathcal{A}}) = -\log(P_{x_e})$。

为证明 (2)，令 $V \in L_{p,a}$，并令 $x \in X_p$，使得存在一个 $n \in \mathbb{N}$，满足$a^n V a^{-n}[x]_{\mathcal{A}_{a,\ p}} = [x]_{\mathcal{A}_{a,p}}$。因此，我们可以对 $a^n V a^{-n}$ 应用余循环恒等式，得到以下方程:

$$(*) \qquad J(\mathcal{A}_{p,a}, V)(x) = -J(\mathcal{A}_{p,a}, a^n)(Vx) - J(\mathcal{A}_{p,a}, a^{-n})(a^n x).$$

对 $aa^{-1} = e$ 应用余循环恒等式并使用方程 (1)，可得:

$$(**) \qquad J(\mathcal{A}_{p,a}, a^{-1})(x) = \log(P_{x_{a^{-1}}})$$

and

$$(***) \qquad J(\mathcal{A}_{p,a}, a^{-n})(x) = \sum_{i=0}^{n-1} J(\mathcal{A}_{p,a}, a^{-1})(a^{-i}x).$$

因此,

$$\begin{aligned}
J(\mathcal{A}_{p,a}, V)(x) &\overset{(*)}{=} -J(\mathcal{A}_{p,a}, a^n)(Vx) - J(\mathcal{A}_{p,a}, a^{-n})(a^n x) \\
&\overset{(***)}{=} -\sum_{i=0}^{n-1} I_{\mu_p}(\mathcal{A}_{p,a}|a^{-1}\mathcal{A}_{p,a})(a^i V x) - \sum_{i=0}^{n-1} J(\mathcal{A}_{p,a}, a^{-1})(a^{-i}x) \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \log(P_{V(x)_{a^i}}) - \sum_{i=0}^{n-1} \log(P_{x_{a^{n-i}}}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\log(P_{V(x)_{a^i}}) - \log(P_{x_{a^i}})) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \log\left(\frac{P_{V(x)_{a^i}}}{P_{x_{a^i}}}\right) \\
&= \log\left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{P_{V(x)_{a^i}}}{P_{x_{a^i}}}\right).
\end{aligned}$$

所以，我们得到 $J(\mathcal{A}_{p,a}, V)(x) = \log\left(\prod_{g\in W_a} \frac{P_{(Vx)}}{P_{x_g}}^{g}\right)$ 对于 μ_p-几乎处处的 $x \in X_p$。

□

命题 3.3。存在一个可测的（余边界）映射 $f\colon X_p \to \mathbb{R}$，使得

$$J(\mathcal{A}_{p,a}, g) = J(\mathcal{A}_{q,a}, \phi g \phi^{-1}) \circ \phi + f \circ g - f \text{ a.e.}$$

对每个 $g \in G_p$。

证明。由 [3], 中的定理 3.5 可知，只需证明

$$I_{\mu_p}(\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,a}|\mathcal{A}_{p,a}) + I_{\mu_p}(\mathcal{A}_{p,a}|\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,a}) < \infty$$

在 X_p 上几乎处处成立。事实上，令 S 为由命题 1.3 给出的 X 的子集，使得m_ϕ(x) $< \infty$ 且 $m_{\phi^{-1}}$(x) $< \infty$ 且 m_p(S) $= 1$。首先，将证明 $I(\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,a}|\mathcal{A}_{p,a})$ 在 S 上 $< \infty$。为此，对每个 $x \in S$，找出同时位于 $[x]_{\mathcal{A}_{p,a}}$ 和 $[x]_{\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,a}}$ 中的公共圆柱集即可。事实上，由于 $m_\phi(x) < \infty$，存在一个以单位元为中心的球 $B \subset F_\ell$，以及一个对所有 $g \in B \cup W_a\}$ 均成立的圆柱集 $C = \{y \in X_p | y_g = x_g$，使得对于每个 $y \in C$， $\phi(y)_g = \phi(x)_g$ 对所有 $g \in W_a$均成立。这意味着 $C \subset [x]_{\mathcal{A}_{p,a}}$ 且 $C \subset \phi^{-1}[\phi(x)]_{\mathcal{A}_q,}$ $_a = [x]_{\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,a}}$。此外，当 m_p 以 $[x]_{\mathcal{A}_{p,a}}$ 为条件时， C 具有非零测度。因此， $I(\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,a}|\mathcal{A}_{p,a}) < \infty$。

现在，我们将证明对每个 $x \in S$，都有 $I(\mathcal{A}_{p,\ a}|\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,\ a}) < \infty$。为此，我们可以沿用证明第一部分中使用的相同技巧，这次利用 ϕ^{-1} 也具有有限期望这一事实。事实上，给定一个 $x \in S$，我们可以找到一个以单位元为中心的球 $B \subset F_\ell$ 和一个柱集 $C = \{y \in X_q \mid y_g = \phi(x)_g$，使得对 X_q 中的所有 $g \in B \cup W_a\}$，都有 $\phi^{-1}C \subset \phi^{-1}[\phi(x)]_{\mathcal{A}_{q,\ a}} = [x]_{\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,\ a}}$，并且 $\phi^{-1}C \subset [x]_{\mathcal{A}_{p,\ a}}$。利用 [3], 中的性质 (2.11)，我们得到

$$\mu_p^{\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,a}}(\phi^{-1}C|[x]_{\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,a}}) = (\phi^{-1}\mu_{p,a})^{\mathcal{A}_{q,a}}(C|[\phi(x)]_{\mathcal{A}_{q,a}}) > 0.$$

最后一个不等式成立，因为 ϕ 是非奇异的。 □

现在，我们将在 X_p 中找到一个正测度集，在该集合上，由命题 3.3 给出的余边界因子 f 几乎处处为常数。

设 C 是 X_p 中的一个柱集，其定义在以单位元为中心、半径为 N 的球 B_N 上。设 $H_C^+ = \{h \in L_p \mid (hx)_g = x_g$ 对所有 $g \in B_N \cup (F_\ell \setminus W_a)$ 以及几乎处处的 $x \in X_p\}$ 都成立，并且 $H_C^- = \{h \in L_p \mid (hx)_g = x_g$ 对所有 $g \in W_a \cup B_N$ 以及几乎处处的 $x \in X_p\}$ 都成立。最后，设 $H_C = H_C^+ \cdot H_C^-$。

在下一个命题中，我们将使用弱混合作用的以下刻画。关于弱混合的更多内容，参见 []。

定义 3.4. 设 G 是一个群，$(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是一个概率空间，且 $G \curvearrowright (X, \mathcal{A}, \mu)$ 是一个保概率测度作用。若对每个 $\epsilon > 0$ 以及每个有限 $\Omega \subset \mathcal{A}$，都存在一个 $g \in G$ 使得，则称 $G \curvearrowright X$ 是弱混合的。

$$|\mu(gA \cap B) - \mu(A)\mu(B)| < \epsilon$$

只要 $A, B \in \Omega$。

命题 3.5. 设 μ_C 是由 $\mu_C(A) = {}^{\mu_p(A)}\ {}_{\mu_p(C)}$ 定义在 C 上的概率测度，对所有可测 $A \subset C$ 均成立。 H_C 在 (C, μ_C) 上的作用是弱混合的。

证明. 首先，我们将证明，弱混合定义中的条件对 C 中的有限个柱集成立。然后，我们可以在测度意义下，用有限个柱集近似 C 中的任意有限个可测集，从而得到弱混合定义中的条件对 C 中所有可测集均成立。

设 $\Omega = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ 为 C中的一个有限柱集族，使得对于每个$k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，都存在一个有限集 $A_k \subset F_\ell$和 $\{i_g^k\}_{g \in A_k} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$，使得 $C_k = [i_g^k \mid g \in A_k]$。设 B' 为 F_ℓ 中以单位元为中心的最小球，使得对于每个$k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，都有 $A_k \subset B'$。按以下方式定义 $h^+ \in H_C^+$。首先，对于每个$g \in (B' \setminus B_N) \cap W_a$，我们选择一个 $h_g \in W_a \setminus B'$，使得仅当对于所有g， $h_g = h_{g'}$ 时，才有 $g = g'$ $g' \in (B' \setminus B_N) \cap W_a$。然后，对于 $x \in C$，我们令

$$h^+(x)_f = \begin{cases} x_{h_f} & \text{if } f \in (B' \setminus B_N) \cap W_a \\ x_g & \text{if } f = h_g \text{ for some } g \in (B' \setminus B_N) \cap W_a \\ x_f & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，以类似方式定义 $h^- \in H_C^-$。对于每个 $g \in (B' \setminus B_N) \cap (F_\ell \setminus W_a)$，选取一个 $h_g \in (F_\ell \setminus W_a) \setminus B'$，使得对于不同的 g、$g' \in (B' \setminus B_N) \cap (F_\ell \setminus W_a)$，有 $h_g \neq h_{g'}$。对于所有 $x \in C$，令

$$h^-(x)_f = \begin{cases} x_{h_f} & \text{if } f \in (B' \setminus B_N) \cap (F_\ell \setminus W_a) \\ x_g & \text{if } f = h_g \text{ for some } g \in (B' \setminus B_N) \cap (F_\ell \setminus W_a) \\ x_f & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此我们有 $h = h^+h^- \in H_C$，并且对于任意给定的 $j,k \in \{1,2,\dots,n\}$，

$$hC_j \cap C_k = \{x \mid x_{h_g} = i_g^j \text{ for all } g \in A_j \setminus B_N \text{ and } x_f = i_f^k \text{ for all } f \in A_k\}.$$

因此，

$$\mu_C(hC_j \cap C_k) = \prod_{g \in A_j \setminus B_N} P_{i_g^j} \prod_{g \in A_k \setminus B_N} P_{i_g^k} = \mu_C(C_j)\mu_C(C_k).$$

现在，令 $\epsilon > 0$，并令 Ω 为 C 的任意有限可测子集族。注意，在 C 中由 F_ℓ 的有限多个元素定义的柱集生成了继承自 X_p 的 C 的 σ-代数。这意味着存在一个有限集族 Ω'，其中的柱集是在 C 中由 F_ℓ 的有限多个坐标定义的，使得对于每个 $A \in \Omega$，我们都能找到一个 $C_A \in \Omega'$，满足 $\mu_C(C_A \triangle A) < \frac{\epsilon}{100}$。因此存在一个 $h \in H_C$，使得对于任意 $C_1, C_2 \in \Omega'$，我们有

$$\mu_C(hC_1 \cap C_2) = \mu_C(C_1)\mu_C(C_2).$$

令 A，$B \in \Omega$，并取 $C_A, C_B \in \Omega'$，使得 $\mu_C(C_A \triangle A) < \frac{\epsilon}{100}$ 且 $\mu_C(C_B \triangle B) < \frac{\epsilon}{100}$。由于 μ_p 是保测的，不难看出

$$\begin{aligned} |\mu_C(hA \cap B) - \mu_C(A)\mu_C(B)| &= |\mu_C(hA \cap B) - \mu_C(hC_A \cap C_B) \\ &\qquad + \mu_C(C_A)\mu_C(C_B) - \mu_C(A)\mu_C(B)| \\ &\leq |\mu_C(hA \cap B) - \mu_C(hC_A \cap C_B)| \\ &\qquad + |\mu_C(C_A)\mu_C(C_B) - \mu_C(A)\mu_C(B)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

注 3.6。命题 1.3 表明，存在一个正整数 M 和一个柱集 $C \subset X_p$，定义在 F_ℓ 中以单位元为中心、半径为 M 的球 B 上，使得

$$D = C \cap \{x \mid a^*(x) \leq M \text{ and } m^*(x) \leq M\}$$

具有正测度。

命题 3.7。 f 在 D上几乎处处为常数。

证明。选择 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得对于每个 $\epsilon > 0$，$A_\epsilon = \{x \mid f(x) - \alpha \mid < \epsilon\} \cap D$ 都具有正测度，并令 $B_\epsilon = D \setminus A_\epsilon$。反设存在某个 $\epsilon > 0$，使得 $\mu_{\mathbf{P}}(B_\epsilon) > 0$。根据命题 3.4，$H_C$ 在 C 上的作用是弱混合的，因此也是遍历的。因此，存在自同构 $V^+ \in H_C^+$ 和 $V^- \in H_C^-$，令 $V = V^+V^-$，从而得到 $\mu_p(VA_\epsilon \cap B_\epsilon) > 0$。令 $A = A_\epsilon \cap C^{-1}B_\epsilon$。我们断言，$J(\mathcal{A}_{p,a}, V) = V(\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,a}, V) = 0$。这就完成了证明，因为根据命题 3.3，对于几乎处处的 $x \in A$，我们有 $f(Vx) = f(x)$，这与 f 在 A_ϵ 和 B_ϵ 上取不同值相矛盾。

对于所有 $x \in D$，我们有 $m(x) \leq M$，因此推论 1.4 表明，对于所有 $g \in W_a$ 以及几乎处处的 $X \in D$，$\phi(V^-x)_g = \phi(x)_g$。由命题 3.2 中的方程 (2)，我们有 $J(\mathcal{A}_{p,a}, V^-) = 0$，并且 $J(\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,a}, V^-) = J(\mathcal{A}_{q,a}, \phi V^-\phi^{-1}) \circ \phi = 0$ 在 A 上几乎处处成立。现在，令 $x' \in A' = V^-A$。由于

$a_\phi \le M$，我们得到 $\phi(x')_g = \phi(V^+x')_g$，对于 $g \in F_\ell \setminus W_a$ 以及几乎处处的 $x \in A'$，这由推论 1.4 得出。由于 V^+ 是保测的，我们得到 $J(\mathcal{A}_{p,\ a}, V) = J(\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,\ a}, V) = 0$。因此，余循环方程给出

$$J(\mathcal{A}_{p,a}, V) = J(\mathcal{A}_{p,a}, V^+) \circ V^- + J(\mathcal{A}_{p,a}, V^-) = 0$$

and

$$J(\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,a}, V) = J(\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,a}, V^+) \circ V^- + J(\phi^{-1}\mathcal{A}_{q,a}, V^-) = 0$$

对几乎处处的 $x \in A$。 □

4. Tail Equivalence

在上一节中，我们证明了余边界映射 f 在集合 D上为常数，由此得到关系

$$J(\mathcal{A}_{p,a}, V) = J(\mathcal{A}_{q,a}, \phi V \phi^{-1}) \circ \phi$$

对几乎处处的 D，对每个 $V \in G_p$都成立。在本节中，我们将证明，这样的公式在比 D更大的集合上成立：所有与 D中的某个点尾等价的点所构成的集合。令 $f(x) = b$ 对几乎处处的 $x \in D$成立。我们定义 $A = \{x \in X_p \mid f(x) = b\}$。

命题 4.1. 若 $V \in H_C^+ \cup H_C^-$，则 $\mu_p(VD \setminus A) = 0$。

证明。首先，假设 $V \in H_C^-$。对几乎处处的 $x \in D$，我们有 $(Vx)_g = x_g$ 对所有$g \in W_a \cup B$都成立。由于 $m_\phi(x) \le M$，根据推论 1.4，对几乎处处的 $x \in D$ 和所有 $g \in W_a$，有 $\phi(V(x))_g = \phi(x)_g$。命题 3.2 中的方程 (2) 表明

$$J(\mathcal{A}_{p,a}, V)(x) = J(\mathcal{A}_{q,a}, \phi V \phi^{-1})(\phi(x)) = 0$$

在 D 上几乎处处成立，而命题 3.3 和命题 3.6 表明，对于几乎所有的 $x \in D$，$f(V(x)) = f(x) = b$。因此，$\mu_p(VD \setminus A) = 0$。

现在假设 $V \in H_C^+$。因此，对于所有 $g \in (F_\ell \setminus W_a) \cup B$，我们有 $(Vx)_g = x_g$，并且由于$a_\phi(x) \le M$，对于所有 $g \in F_\ell \setminus W_a$，$(\phi(V(x))_g = \phi(x)_g$。由此可见，$V$只是置换了由 $\mathcal{A}_{p,a}$得到的可测划分中的原子。因此我们得到

$$J(\mathcal{A}_{p,a}, V)(x) = \log \frac{d\mu_p V}{d\mu_p}(x) = \log \frac{d\mu_q \phi V \phi^{-1}}{d\mu_q}(\phi(x)) = J(\mathcal{A}_{q,a}, \phi V \phi^{-1})(\phi(x))$$

对于几乎处处的 $x \in D$，这也表明 $f(V(x)) = f(x)$ 在 D 上几乎处处为 $= b$。因此命题成立。□

推论 4.2. 存在一个零测集 $E \subset D$，使得对于每个 $x \in D \setminus E$、每个整数 $n \ge 0$ 以及每个满足 $x_g = x_g$ 的 $x' \in X_p$，若该条件对所有 $g \notin \{a^k \mid -M-n < k < -M\}$（或对所有 $g \notin \{a^k \mid M < k < M+n\}$）均成立，则有 $x' \in A$。

证明。固定 $n \ge 0$。定义子群 $H_+^n \subset H_C^+$ 和 $H_-^n \subset H_C^-$，使得

$$H_-^n = \{h \in H_C^- \mid (hx)_g = x_g \text{ for all } g \ne a^k \text{ for some } -M-n < k < -M \text{ and for all } x \in X_p\}$$

and

$$H_+^n = \{h \in H_C^+ \mid (hx)_g = x_g \text{ for all } g \ne a^k \text{ for some } M < k < M+n \text{ and for all } x \in X_p\}$$

对于每个 $x \in X_p$。由于这些子群都是有限的，命题 4.1 表明，存在一个零测集 $E_n \subset D$，使得对于每个 $V \in H_+^n \cup H_-^n$ 和每个 $x \in D \setminus E_n$，$V(x) \in A$。因此，集合 $E = \cup_{n \ge 1} E_n$ 将满足所需的性质。□

5. The Beta Function

在本节中，我们将介绍一个不变量，它将使我们能够证明我们的伯努利移位具有相同的权重：贝塔函数。以下贝塔函数的定义归功于 Tuncel [13]，其使用了 [14] 中给出的压力定义。关于贝塔函数的另一种表述，参见 [10]。

定义 5.1. 设 (X, d) 是一个紧致度量空间，且 $T\colon X \to X$ 是一个同胚。给定某个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\epsilon > 0$，若一个集合 $E \subset X$ 满足：对于任意 $x, y \in E$，其中 $x \neq y$，都存在某个整数 i，使得 $0 \leq i \leq n-1$ 且 $d(T^i x, T^i y) > \epsilon$，则称其为 (n, ϵ)-分离集。给定一个连续函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$，我们通过方程定义 f 相对于 T 的压力 $\mathcal{P}_T(f)$：

$$\mathcal{P}_T(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left[\sup_E \sum_{x \in E} e^{\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)} \right]$$

其中 E 遍历 X 中所有 (n, ϵ)-分离集。

对于连续函数 $f, g\colon X \to \mathbb{R}$，有以下结论：
(1) $\mathcal{P}_T(f) = \sup_\mu (h(\mu) + \int f d\mu)$，其中 μ 遍历 X 上所有 T-不变的 Borel 概率测度，且 $h(\mu)$ 是 T 关于 μ [13] 的熵。注意，这是变分原理的一种形式。(2) $\mathcal{P}_T(f + g \circ T - g) = \mathcal{P}_T(f)$。

定义 5.2. 设 $F_\ell \curvearrowright (X_p, \mu_p)$ 是自由群 F_ℓ 上概率向量为 p 的伯努利移位。固定一个生成元 $a \in F_\ell$，并定义 $T\colon X_p \to X_p$ 为映射 $T(x) = a^{-1}x$。我们通过公式 $\beta_{p,\,a}(t) = \mathcal{P}_T(-tI_{\mu_p})$ 定义贝塔函数 $\beta_{p,\,a}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，其中 I_{μ_p} 是与过去代数 $\mathcal{A}_{p,\,a}$ 相关联的条件信息函数。

将命题 3.2 中的方程 (1) 与引理 3 结合，可得贝塔函数的以下公式：

$$\beta_{p,a}(t) = \lim_{n \to \infty} \left(\int \exp((1-t) J(\mathcal{A}_{p,a}, T^n)) d\mu_p \right)^{\frac{1}{n}}.$$

以下定理以推论 8 的形式出现在 [10] 中。

定理 5.3. 贝塔函数 $\beta_{p,\,a}$ 是解析的，即处处无限可微，并且在每一点附近都可以表示为泰勒级数。

命题 5.4. 对于由向量 $p = [P_1, \ldots, P_m]$ 定义的伯努利移位 $F_\ell \curvearrowright (X_p, \mu_p)$，贝塔函数满足以下公式：

$$\beta_{p,a}(t) = P_1^t + \cdots + P_m^t$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$。

证明。令 $t \in \mathbb{R}$。则

$$\begin{aligned}
\beta_{p,a}(t) &= \lim_{n\to\infty} \left(\int \exp((1-t)J(\mathcal{A}_{p,a}, T^n))d\mu_p \right)^{1/n} \\
&\overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\int \exp\left((1-t)\sum_{i=0}^{n-1} -\log(P_{x_{a^i}})\right)d\mu_p(x) \right)^{1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int \prod_{i=0}^{n-1} P_{x_{a^i}}^{t-1} d\mu_p(x) \right)^{1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{\sigma\in\{1,\dots,m\}^{\{0,\dots,n-1\}}} ((P_{\sigma(0)}\cdots P_{\sigma(n-1)})^{t-1} P_{\sigma(0)}\cdots P_{\sigma(n-1)}) \right)^{1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{\sigma\in\{1,\dots,m\}^{\{0,\dots,n-1\}}} (P_{\sigma(0)}\cdots P_{\sigma(n-1)})^{t} \right)^{1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} ((P_1^t + \cdots + P_m^t)^n)^{1/n} \\
&= P_1^t + \cdots + P_m^t.
\end{aligned}$$

□

下一个命题表明，命题 5.4 中给出的伯努利移位的贝塔函数公式为我们提供了一个不变量。

命题 5.5。设 $p = [P_1, \dots, P_m]$ 和 $q = [Q_1, \dots, Q_n]$。如果

$$P_1^t + \cdots + P_m^t = Q_1^t + \cdots + Q_n^t$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$，则 $m = n$ 存在一个置换 $\pi \in \mathrm{Sym}(1,\dots,n)$，使得 $P_{\pi(i)} = Q_i$ 当 $1 \le i \le n$ 时。

证明。令 $k \in \mathbb{N}$，并设 $p_k = P_1^k + \cdots + P_m^k$ 和 $q_k = Q_1^k + \cdots + Q_n^k$。根据假设，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $p_k = q_k$。令 $e_{k,p}$ 和 $e_{k,q}$ 分别表示对每个 $k \in \mathbb{N}$，在 p 和 q 上定义的 k 次初等对称多项式。根据牛顿恒等式，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，$p_k = q_k$ 成立意味着 $e_{k,p} = e_{k,q}$。由于多项式 $\prod_i^m (x - P_i)$ 和 $\prod_{i=1}^n (x - Q_i)$ 可展开为 $\sum_{k=0}^m (-1)^k e_{k,p} x^{n-k}$ 和 $\sum_{k=0}^n (-1)^k e_{k,q} x^{n-k}$，因此有 $\prod_i^m (x - P_i) = \prod_{i=1}^n (x - Q_i)$。这意味着这些多项式具有相同的根，且重数也相同，因此 q 只是 p 中各项的一个排列。□

6. The Main Theorem

现在我们来到了主要定理。证明中，我们将利用尾等价说明，可以把定义 $\beta_{p,\,a}$ 的方程中的积分限制在一个正测度子集上；在该子集上，相应过去代数上的移位的信息余循环在经 ϕ 共轭后相同。这足以证明 p 和 q 的贝塔函数相等。首先，回顾由概率向量 p 和 q 分别给出的伯努利移位 $F_\ell \curvearrowright (X_p, \mu_p)$ 和 $F_\ell \curvearrowright (X_q, \mu_q)$ 的以下事实。固定一个生成元 $a \in F_\ell$，并假设 $\phi : (X_p, \mu_p) \to (X_q, \mu_q)$ 是一个具有有限期望的有限同构。令 C 为备注 3.5 中给出的柱集，令 D 为 C 中满足 $a_\phi, m_\phi \le M$ 的正测度子集。命题 3.3 给出了一个可测的 $f : X_p \to \mathbb{R}$，它满足命题 3.3 中的余边界方程，并且在 A 上为常数。

定理 6.1。设 $F_\ell \curvearrowright (X_p,\mu_p)$ 和 $F_\ell \curvearrowright (X_q,\mu_q)$ 是由两个概率向量 p 和 q 给出的伯努利移位，并假设它们之间存在一个具有有限期望的有限同构。那么， p 和 q 除了分量排列顺序外相等。

证明中，我们需要以下技术引理。

引理 6.2. 若 $n \geq 1$ 和 $A = \{x \in X_p \mid f(x) = b\}$，则存在一个 $t_0 > 0$，使得

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\int_{A\cap a^n A} \exp\left(tJ(\mathcal{A}_{p,a}, a^{-n}) \right) d\mu_p \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{X_p} \exp\left(tJ(\mathcal{A}_{p,a}, a^{-n}) \right) d\mu_p \right)^{\frac{1}{n}} = \beta_{p,a}(1-t)$$

对所有 $t > t_0$均成立。

证明. 首先，我们将 X_p 划分为由尾等价关系所诱导的等价类。事实上，令 M 为注 3.6 中给出的整数，并选取某个 $n > 2M$。令$\mathcal{B}$ 为由以下集合生成的子-σ-代数

$$\bigcup_{g\in F_\ell \setminus \{a^k \mid M<k<M+n\}} g^{-1}\alpha_p.$$

根据注 2.7， $\mathcal{B}$ 将 X_p 分解为一个可测划分 $\{[x]_{\mathcal{B}}\}_{x\in X_p}$ 和一族条件测度 $\mu_p^{\mathcal{B}}$。事实上，每个 $[x]_{\mathcal{B}}$ 都是有限集，且每个条件测度 $\mu_p^{\mathcal{B}}(\cdot|[x]_{\mathcal{B}})$ 都是一个原子测度，使得

$$\mu_p^{\mathcal{B}}(\{y\}|[x]_{\mathcal{B}}) = \prod_{k=M+1}^{M+n-1} P_{y_{a^k}}$$

对于每个 $y \in [x]_{\mathcal{B}}$。令 $E \subset D$ 为推论 4.2 给出的零测集。注意，如果 $x \in D \setminus E$，则有 $[x]_{\mathcal{B}} \subset A$。此外，对于每个 $n \geq 1$，如果 $x \in a^n(D \setminus E)$，则有 $a^{-n}[x]_{\mathcal{B}} \subset A$。因此

$$(*) \qquad \mu_p^{\mathcal{B}}(A \cap a^n A \mid [x]_{\mathcal{B}}) = 1 \text{ for a.e. } x \in D \cap a^n D.$$

我们回顾一下， C 是一个柱集，存在一个以单位元为中心、半径为 M 的球 $B \subset F_\ell$，使得对于所有 $g \in B$，只要 $x, y \in C$，就有 $x_g = y_g$。令 $(i_g)_{g\in B} \subset \{1,\dots,m\}$ 为定义 C 的 B 上的元组。注意，由于我们选择了 $n > 2M$，$\mu_p(D \cap a^n D) = \mu_p(D)^2$。这意味着我们可以找到一个 $t_0 > 0$，使得

$$(**) \qquad \mu_p(D \cap a^n D) = \mu_p(D)^2 \geq \Big(\prod_{k=-M}^{M} P_{i_{a^k}} \Big)^t$$

对所有 $t > t_0$ 均成立。因此，对所有 $t > t_0$:

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap a^n A} \exp tJ(\mathcal{A}_{p,a}, a^{-n}) d\mu_p &\overset{\text{Thm 2.3}}{=} \int \int_{A\cap a^n A} \exp tJ(\mathcal{A}_{p,a}, a^{-n}) d\mu_p^{\mathcal{B}}(\cdot|[x]_{\mathcal{B}}) d\mu_p(x) \\
&\overset{(*)}{\geq} \int_{D\cap a^n D} \int \exp tJ(\mathcal{A}_{p,a}, a^{-n}) d\mu_p^{\mathcal{B}}(\cdot|[x]_{\mathcal{B}}) d\mu_p(x) \\
&= \int_{D\cap a^n D} \Big[\sum_{y\in[x]_{\mathcal{B}}} \Big(\prod_{k=M+1}^{n-m-1} P_{y_{a^k}} \Big)^{1-t} \Big(\prod_{k=-M}^{M} P_{i_{a^k}} \Big)^{-t} \Big] d\mu_p(x) \\
&= \mu_p(D \cap a^n D) \Big(\prod_{k=-M}^{M} P_{i_{a^k}} \Big)^{-t} \int_{x_p} \exp\left(tJ(\mathcal{A}_{p,a}, a^{-(n-2M)}) \right) d\mu_p \\
&\overset{(**)}{\geq} \int_{x_p} \exp\left(tJ(\mathcal{A}_{p,a}, a^{-(n-2M)}) \right) d\mu_p.
\end{aligned}$$

由上一个公式可得，

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{A\cap a^nA}\exp\left(tJ(\mathcal{A}_{p,a},a^{-n})\right)d\mu_p\right)^{\frac{1}{n}} &\geq \limsup_{n\to\infty}\left(\int_{x_p}\exp\left(tJ(\mathcal{A}_{p,a},a^{-(n-2M)})\right)d\mu_p\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{x_p}\exp\left(tJ(\mathcal{A}_{p,a},a^{-n})\right)d\mu_p\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= \beta_{a,p}(1-t).\end{aligned}$$

Thus

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{A\cap a^nA}\exp\left(tJ(\mathcal{A}_{p,a},a^{-n})\right)d\mu_p\right)^{\frac{1}{n}} = \beta_{a,p}(1-t)$$

成立，因为反向不等式由测度的单调性可得。 □

现在，我们已准备好证明主定理。

证明. 只需证明，对于每个 $t\in\mathbb{R}$、 $\beta_p(t)=\beta_q(t)$。事实上，假设对所有 $t\in\mathbb{R}$都有 $\beta_p(t)=\beta_q(t)$，根据命题 5.4，我们得到对所有 $t\in\mathbb{R}$ 都有 $P_1^t+\cdots+P_m^t=Q_1^t+\cdots+Q_n^t$。这意味着根据命题 5.5， p 和 q 仅通过一个排列而不同。

命题 3.3 和命题 3.6 意味着

$$J(\mathcal{A}_{p,a},a^{-n})(x)=J(\mathcal{A}_{q,a},a^{-n})(\phi(x))$$

对于每个 $n\geq 1$，在 $A\cap a^{-n}A$ 上几乎处处成立。此外，引理 6.2 保证存在一个 $t_0>0$，使得对于每个 $t>t_0$

$$\begin{aligned}\beta_{p,a}(1-t) &= \limsup_{n\to\infty}\left(\int_{A\cap a^nA}\exp\left(tJ(\mathcal{A}_{p,a},a^{-n})\right)d\mu_p\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= \limsup_{n\to\infty}\left(\int_{\phi(A)\cap a^n\phi(A)}\exp\left(tJ(\mathcal{A}_{q,a}),a^{-n}\right)\right)d\mu_q\Bigg)^{\frac{1}{n}}\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\left(\int\exp\left(tJ(\mathcal{A}_{q,a},a^{-n})\right)d\mu_q\right)^{\frac{1}{n}} = \beta_{q,a}(1-t).\end{aligned}$$

由对称性可知，对于所有 $t>t_0$， $\beta_{p,\ a}(1-t)=\beta_{q,\ a}(1-t)$。 β函数的解析性（定理 5.3）意味着，对于所有 $t\in\mathbb{R}$， $\beta_{p,\ a}(t)=\beta_{q,\ a}(t)$。□

References

1. Lewis Bowen, *Measure conjugacy invariants for actions of countable sofic groups*, 《美国数学会杂志》23（2010），第2期，217–245页。MR 25522522. Lewis Bowen, *Every countably infinite group is almost Ornstein*, 《~~动力系统~~与群作用》，《当代数学》，第567卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012年，67–78页。MR 29319103. Roger Butler 和 Klaus Schmidt, *An information cocycle for groups of nonsingular transformations*, 《概率论与相关领域杂志》69（1985），第3期，347–360页。MR 7876034. Michael Keane 和 Meir Smorodinsky, *Bernoulli schemes of the same entropy are finitarily isomorphic*, 《数学年刊》（第2辑）109（1979），第2期，397–406页。MR 5289695. David Kerr 和 Hanfeng Li, *Entropy and the variational principle for actions of sofic groups*, 《数学发明》186（2011），第3期，501–558页。MR 28540856. Wolfgang Krieger, *On the finitary isomorphisms of Markov shifts that have finite expected coding time*, 《概率论与相关领域杂志》65（1983），第2期，323–328页。MR 7221357. Nathaniel F. G. Martin 和 James W. England, *Mathematical theory of entropy*, 《数学及其应用百科全书》，第12卷，Addison-Wesley 出版公司，马萨诸塞州雷丁，1981年；前言由 James K. Brooks 撰写。MR 6123188. Donald S. Ornstein 和 Benjamin Weiss, *Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma*, 《美国数学会通报》（新辑）2（1980），第1期，161–164页。MR 551753

9. William Parry 和 Klaus Schmidt, *Natural coefficients and invariants for Markov-shifts*, 《数学发明》76（1984），第 1 期，15–32 页。MR 739621。William Parry 和 Selim Tuncel, *On the classification of Markov chains by finite equivalence*, 《遍历理论与动力系统》1（1981），第 3 期，303–335 页（1982）。MR 662472。Klaus Schmidt, *Invariants for finitary isomorphisms with finite expected code lengths*, 《数学发明》76（1984），第 1 期，33–40 页。MR 739622。Brandon Seward, *Bernoulli shifts with bases of equal entropy are isomorphic*, 即将发表于《现代动力学杂志》。预印本（2003），可见 https://arxiv.org/abs/1805.08279。

13 *Conditional pressure and coding* **39** 1981 1 2, 101 112 617293 。Selim Tuncel, , 《以
14 色列数学杂志》（），第 - 期，– 页。MR。Peter Walters, *A variational principle for the pressure of continuous transformations*, 《美国数学杂志》97（1975），第 4 期，937–971 页。MR 390180