广义纯度、熵和对数负性的经典类比量

Bogar D´ıaz,[1,2,3,*] Diego Gonzalez,[4,†] Marcos J. Hern´andez,[5,‡] and J. David Vergara[5,§]

[1] *Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, Avenida de la Universidad 30, 28911 Leganés, Spain*

[2] *Grupo de Teorías de Campos y Física Estadística. Instituto Gregorio Millán (UC3M), Unidad Asociada al Instituto de Estructura de la Materia, CSIC, Serrano 123, 28006 Madrid, Spain*

[3] *Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT) CSIC-UAM-UC3M-UCM C. Nicolás Cabrera 13-15 28049 Madrid Spain*

[4] *Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica - Instituto Politécnico Nacional (ESIME - IPN), Mexico 07738 CDMX*

[5] *Departamento de Física de Altas Energías Instituto de Ciencias Nucleares Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 70-543, Ciudad de México, 04510, México*

arXiv:2305.02887v1 [quant-ph] 4 May 2023

近期有研究提出了纯度、线性量子熵和冯·诺依曼熵在经典可积系统中的经典类比量，适用于相应量子系统处于高斯态的情形。我们将这些结果推广，为经典可积系统给出了广义纯度、Bastiaans-Tsallis 熵、R´enyi 熵和对数负性的经典类比量。这些经典类比量完全由经典协方差矩阵表征。我们精确计算了线性耦合谐振子、广义谐振子链以及一维振子环形晶格这几种情形下的经典类比量。在所有这些系统中，只要系统处于高斯态，经典类比量就能复现其量子对应物的结果。在此背景下，我们的结果表明，高斯态的量子信息可以由经典信息复现。

I. 引言

近年来，出现了许多量化量子效应的方法；其中值得一提的有协方差矩阵 [1]，纯度 [2]，冯·诺依曼熵[3]，R´enyi 熵 [4], Bastiaans-Tsallis 熵 [5, 6],对数负性 [7]，Berry 相位 [8]，以及量子几何张量 [9]。这些量各自都具有实用价值，因为它们能够轻易辨别量子现象的特定特征。例如，冯·诺依曼熵刻画了量子态的混合程度。此外，R´enyi 熵是对冯·诺依曼熵的自然推广：通过一个正实数α将其变形为参数化熵，以类似于概率分布高阶矩的方式刻画纠缠谱的不同方面。此外，R´enyi 熵还得到了多种应用 [10]。特别是，这些熵被广泛用作信息论[1]，统计力学中的技术工具[11],；最近，通过将最大熵原理应用于 R´enyi 熵，人们发展出了一种量子热力学的广义表述 [12]。此外，Rényi 熵对于定义多重分形现象也至关重要 [13]。另一方面，Bastiaans-Tsallis 熵分别由 Bastiaans 在量子光学背景下 [5] 以及 Tsallis 在统计力学中 [6]独立提出。这些熵通过一个状态所缺失的信息量来量化其混合度，并且是一种非可加性量。此外，它还是描述非广延统计力学 [14], 的基本工具；非广延统计力学成功描述了大量现象，其范围从光学晶格中的反常输运等光学现象 [15, 16] 到重离子碰撞 [17, 18]。Tsallis 熵的其他应用包括认识到参数 $\alpha = 1/2$ 是非经典性 [19]的一种自然操作性度量。另一种有趣的纠缠度量是对数负性 [7],，这是量化混合纠缠 [20], 最实用的度量之一，可作为可蒸馏纠缠[21] 的上界，并具有明确无歧义的操作性解释 [22]。此外，它允许对更多样的子系统选择进行分析，以研究它们彼此之间以及通过某种介质产生的纠缠。然而，对数负性并非凸函数，这意味着它在混合过程中可能增加。

另一方面，多年来，人们一直尝试构造量子量的经典类比量，例如 Berry 相位 [23–25], 线性量子熵 [26], 量子几何张量 [27–29], 以及近来提出的量子协方差矩阵、纯度和冯·诺依曼熵 [30]。这些构造旨在探究量子效应在多大程度上可以借助经典力学工具计算，以及这些工具是否能帮助揭示量子效应的新性质。此外，这些经典类比量也旨在探究它们是否比量子对应物更容易计算，至少在某些特定情况下如此。研究发现，对于高斯态，经典类比量能够以惊人的精确度描述大多数量子效应，尽管一些细微差异可以用排序反常来解释 [28]。本文希望在经典可积系统的框架下，通过引入以下对象的经典类比量，拓展并比较这些结果：

* bodiazj@math.uc3m.es
† dgonzalezv@ipn.mx
‡ mhm@ciencias.unam.mx§ vergara@nucleares.unam.mx

广义纯度、R´ényi 熵、Bastiaans-Tsallis 熵以及对数负性。我们将看到，这提供了一种全新且替代性的方法，能够有效描述量子谱的其他基本量。此外，一些量子力学系统具有非微扰效应，可用类 kink 解[31], 类 instanton 解 [32], 流管[33], 畴壁[34], 等来描述。求解这类系统通常始于求得问题的欧几里得版本的精确经典解。因此，我们考虑经典求解方法的想法，或许能够帮助我们了解量子系统的非微扰特性，而这类特性可能无法通过标准微扰过程获得。

本文结构如下。第 II 节中，我们确定全文使用的符号，并简要概述量子纯度、线性量子熵和冯·诺依曼熵，以及文献 [30] 中为经典可积系统引入的这些量的经典类比。我们还在此给出一个示例，以说明这些经典类比量的用法和主要特点。第 III 节中，我们回顾广义纯度、Bastiaans-Tsallis 熵、R´ényi 熵和对数负性的基础知识。对于我们的研究而言，一个关键特点是：如果系统处于高斯态，这些函数完全由量子协方差矩阵确定。考虑到这一点，我们在第 IV 节中为经典可积系统引入广义纯度、Bastiaans-Tsallis 熵、R´ényi 熵和对数负性的经典类比量。与其量子对应物类似，这些经典函数完全由经典可积系统的经典协方差矩阵确定。第 V 节中，我们给出三个示例，说明所引入经典类比量的应用，并将结果与其量子对应物进行比较。第一个示例讨论线性耦合谐振子系统，第二个讨论广义谐振子链，第三个讨论由振子构成的一维环形晶格。在所有这些系统中，对于高斯态，经典类比量与其量子版本一致。最后，第 VI 节给出结论和一些评论。

II. 预备知识

我们首先考虑一个由哈密顿量 $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{q}},\ \hat{\mathbf{p}})$ 描述的量子系统，该系统具有一组相空间算符，$\hat{\mathbf{q}} = \{\hat{\mathbf{q}}^a\}$ 以及 $\hat{\mathbf{p}} = \{\hat{\mathbf{p}}_a\}\,(a = 1,\ \ldots,\ N)$。我们用带帽的粗体字母表示量子算符。对于给定的量子态 $|m\rangle$，量子协方差矩阵 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{\alpha\beta})$ 是一个 $2N \times 2N$ 矩阵，其元素为

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{r}}_\alpha \hat{\mathbf{r}}_\beta + \hat{\mathbf{r}}_\beta \hat{\mathbf{r}}_\alpha \rangle_m - \langle \hat{\mathbf{r}}_\alpha \rangle_m \langle \hat{\mathbf{r}}_\beta \rangle_m \,, \tag{1}$$

其中，$\hat{\mathbf{r}} = \{\hat{\mathbf{r}}_\alpha\} = (\hat{\mathbf{q}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{q}}_N, \hat{\mathbf{p}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{p}}_N)^\intercal (\alpha,\, \beta = 1, \ldots, 2N)$ 是一个 $2N$ 维列向量，并且 $\langle \hat{\mathbf{O}} \rangle_m = \langle m|\hat{\mathbf{O}}|m\rangle$ 表示算符$\mathbf{O}$的期望值。在经典情形中，量子协方差矩阵在经典可积系统中有对应物 [30]。考虑由哈密顿量 $H(q,p)$定义的经典可积系统，该系统具有一组正则坐标和动量，$q = \{q^a\}$ 和 $p = \{p_a\}(a = 1, \ldots, N)$。在维格纳函数形式中，我们考虑波函数 $\psi_m(q) = \langle q|\psi_m\rangle$的WKB近似，其形式为

$$\psi_m(q) = \frac{1}{(2\pi)^N} \left| \det \frac{\partial^2 S(q, I_m)}{\partial q_a \partial I_b} \right| e^{\frac{i}{\hbar} S(q, I_m)} \,, \tag{2}$$

其中，$S(q,\ I_m)$ 是与特定环面 I_m 对应的经典作用量。Following Berry [35], ，我们构造了半经典维格纳函数

$$W_m(q,p) = \frac{1}{(2\pi^2\hbar^2)^N} \int dx\ e^{\frac{i}{\hbar}(S(q+x, I_m) - S(q-x, I_m) - 2p\cdot x)} \left| \det \frac{\partial^2 S(q+x, I_m)}{\partial q_a \partial I_b} \det \frac{\partial^2 S(q-x, I_m)}{\partial q_a \partial I_b} \right| , \tag{3}$$

其方法是取经典极限，在指数中仅保留线性修正，并对相空间坐标进行正则变换，将其转换为作用量—角变量 $I = \{I_a\}$ 和 $\varphi = \{\varphi_a\}\,(a = 1,\ \ldots,\ N)$。在这种情况下，系统的维格纳函数化简为狄拉克δ函数

$$W_m(q,p) = \delta\left(I(q,p) - I_m\right), \tag{4}$$

仅涉及系统的作用变量以及与 m 环面对应的作用值，即$|\psi_m\rangle$量子态。我们将此称为维格纳函数的经典极限。此外，从这个意义上说，我们可以将作用变量视为常数。

使用这一形式体系，文献 [30] 证明，在经典极限下（我们将其记为 $\simeq$）

$$\boldsymbol{\sigma} \simeq \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{cl}} , \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{cl}} = (\sigma^{\mathrm{cl}}_{\alpha\beta})$ 是经典协方差矩阵，其元素为

$$\sigma^{\mathrm{cl}}_{\alpha\beta} = \langle r_\alpha r_\beta \rangle_{\mathrm{cl}} - \langle r_\alpha \rangle_{\mathrm{cl}} \langle r_\beta \rangle_{\mathrm{cl}} \,. \tag{6}$$

这里，$r = \{r_\alpha\} = (q_1,\ \ldots\ldots,\ q_N,\ \ p_1,\ \ldots\ldots, p_N)^\intercal$ 是一个相空间列向量，并且

$$\langle f \rangle_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \mathrm{d}^N\varphi\, f \,, \tag{7}$$

对角变量进行积分（积分元为 $\mathrm{d}^N\varphi = \mathrm{d}\varphi_1 \ldots \mathrm{d}\varphi_N$），即为函数 $f = f\ (\varphi,\ I)$ 关于角变量的经典平均。

关系式 (5) 在 [30] 中被用于定义一些量子物理量的经典类比量，这些量可用来衡量量子态的混合度，并且对于

高斯态可以写成仅依赖于量子协方差矩阵的函数。这些量包括纯度 μ、线性量子熵 S_L 和冯·诺依曼熵 S 。对于由密度算符 $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ 描述的归一化量子态，它们的定义为 [36, 37]

$$\mu\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)=\operatorname{Tr}\hat{\boldsymbol{\rho}}^{2}\,, \tag{8a}$$
$$S_{\mathrm{L}}\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)=1-\mu\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)\,, \tag{8b}$$
$$S\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)=-\operatorname{Tr}\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}\ln\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)\,. \tag{8c}$$

对于纯态 $\hat{\boldsymbol{\rho}}^{2}=\hat{\boldsymbol{\rho}}$，$\mu$ 取最大值 1，且两个熵 S_{L} 和 S 均为零；而对于混态 $\hat{\boldsymbol{\rho}}^{2}\neq\hat{\boldsymbol{\rho}}$，这些量的取值范围为 $0<\mu<1$、$0<S_{\mathrm{L}}<1$ 和 $S>0$。

对于高斯态，式 (8) 中的量仅取决于相应的量子协方差矩阵 [36–45]。事实上，考虑一个 n 模高斯态（n 表示由系统中 N 个自由度的粒子 $a_1,\ldots,a_n$ 构成的子系统的自由度），其约化量子协方差矩阵为 $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$，我们有

$$\mu\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)=\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{n}\frac{1}{\sqrt{\det\boldsymbol{\sigma}_{(n)}}} \tag{9a}$$
$$=\frac{1}{2^{n}}\prod_{k=1}^{n}\nu_k^{-1}\,,$$
$$S_{\mathrm{L}}\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)=1-\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{n}\frac{1}{\sqrt{\det\boldsymbol{\sigma}_{(n)}}}\,, \tag{9b}$$
$$S\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathcal{S}(\nu_k)\,, \tag{9c}$$

其中

$$\mathcal{S}(\nu_k)=\left(\nu_k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\nu_k+\frac{1}{2}\right)-\left(\nu_k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\nu_k-\frac{1}{2}\right)\,, \tag{10}$$

下标 (n) 表示 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$，而 ν_k 是 $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}/\hbar$ 的辛特征值，即它们是非负对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\{\nu_1,\ldots,\nu_n\}$ 的元素；该矩阵与某个适当的辛矩阵 $\boldsymbol{M}$ 一起，使我们能够写成

$$\boldsymbol{M}^{\intercal}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\hbar}\right)\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{0}_{n\times n}\\ \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\,. \tag{11}$$

注意，$\mathcal{S}(\nu_k)=0$ 仅当 $\nu_k=1/2$ 时成立；而在 $n=1$ 的情况下，对于粒子 a_i，我们有 [39]

$$\nu_1=\frac{1}{\hbar}\sqrt{\sigma_{\mathbf{p}_{a_i}\mathbf{p}_{a_i}}\sigma_{\mathbf{q}_{a_i}\mathbf{q}_{a_i}}-\left(\sigma_{\mathbf{q}_{a_i}\mathbf{p}_{a_i}}\right)^{2}}\,. \tag{12}$$

考虑到关系式（5）（$\boldsymbol{\sigma}_{(n)}\simeq\boldsymbol{\sigma}_{(n)}^{\mathrm{cl}}$）、量子函数（9），以及作用变量的玻尔-索末菲量子化规则（按 $\hbar/2\to I_k$ 的含义），纯度（9a）的经典类比量、线性量子熵 (9b) 和冯·诺依曼熵 (9c) 分别定义为 [30]

$$\tilde{\mu}^{\mathrm{cl}}(a_1,a_2,\ldots,a_n):=c_1^{n}\lim_{I_a\to c_1}\frac{1}{\sqrt{\det\boldsymbol{\sigma}_{(n)}^{\mathrm{cl}}}} \tag{13a}$$
$$=\left(\frac{1}{2^{n}}\right)\prod_{k=1}^{n}\tilde{\sigma}_k^{-1}\,,$$
$$\tilde{S}_L^{\mathrm{cl}}(a_1,a_2,\ldots,a_n):=1-c_1^{n}\lim_{I_a\to c_1}\frac{1}{\sqrt{\det\boldsymbol{\sigma}_{(n)}^{\mathrm{cl}}}}\,, \tag{13b}$$
$$\tilde{S}^{\mathrm{cl}}\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right):=\sum_{k=1}^{n}\mathcal{S}^{\mathrm{cl}}(\tilde{\sigma}_k)\,, \tag{13c}$$

其中

$$\mathcal{S}^{\mathrm{cl}}(\tilde{\sigma}_k):=\left(\tilde{\sigma}_k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\tilde{\sigma}_k+\frac{1}{2}\right)$$
$$-\left(\tilde{\sigma}_k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\tilde{\sigma}_k-\frac{1}{2}\right)\,, \tag{14a}$$
$$\tilde{\sigma}_k:=\frac{1}{2c_2}\lim_{I_a\to c_2}\sigma_k^{\mathrm{cl}}\,, \tag{14b}$$

σ_k^{cl} 是 $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}^{\mathrm{cl}}$ 的辛特征值，I_{a_k}是与第 k 个简正模相关的作用变量。注意，$\tilde{\sigma}_k$ 是$1/(2c_2)\lim_{I_k\to c_2}\boldsymbol{\sigma}(n)^{\mathrm{cl}}$ 的辛特征值（类似于 ν_k，它们是 $\boldsymbol{\sigma}(n)/\hbar$的辛特征值）。值得注意的是，$c_1$ 和 c_2 是实数正值常数，在二次哈密顿系统的计算过程中会消失；在量子背景下，这些系统会产生处于基态的高斯态。这是因为，对于这些系统，q 和 p 变量线性依赖于 I_k [的平方根，见 (17)]。接着，将所有 I_k 识别为 c_2后，经典协方差矩阵便与 c_2 [成正比，见 (19)]，因此 $\tilde{\sigma}_k$ 不依赖于 c_2。

在 $n=1$ 的特殊情况下，对于粒子 a_i，我们得到

$$\tilde{\sigma}_1=\frac{1}{2c_2}\lim_{I_a\to c_2}\sqrt{\sigma_{p_{a_i}p_{a_i}}^{\mathrm{cl}}\sigma_{q_{a_i}q_{a_i}}^{\mathrm{cl}}-\left(\sigma_{q_{a_i}p_{a_i}}^{\mathrm{cl}}\right)^{2}}\,. \tag{15}$$

请注意，式 (13a) 和 (14b) 中的极限不仅涉及某个特定的作用变量 I_{a_k}，还涉及所有作用变量。

我们必须指出，计算经典函数（13）不需要预先了解相应的量子系统。此外，这些函数对任何可积系统都有定义。然而，只有当相应的量子系统处于高斯态时，（13）才分别是量子纯度、线性量子熵和冯·诺依曼熵的经典类比量。

示例：广义谐振子链

现在让我们说明如何计算纯度的经典类比量。为此，考虑由 N 个振子 [46] 耦合而成的广义谐振子链（GHOC）。该系统的哈密顿量为

$$H(q,p)=\frac{1}{2}p^{\intercal}p+\frac{1}{2}q^{\intercal}\boldsymbol{K}q+q^{\intercal}\boldsymbol{Y}p\,, \tag{16}$$

其中 $p=(p_1,\ldots,p_N)^{\intercal}$、$q=(q_1,\ldots,q_N)^{\intercal}$、$\boldsymbol{Y}$ 是一个 $N\times N$ 对角矩阵，其对角元素是参数，记为 Y_a；而 $\boldsymbol{K}$ 是一个由参数构成的 $N\times N$ 对称矩阵。

在开始之前，我们先对系统的稳定性作一些一般性说明。首先确定其不动点。由式 (16) 得到的运动方程为

$$\begin{pmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}\,, \tag{17}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y} & \mathbf{1}_{N\times N}\\ -\boldsymbol{K} & \boldsymbol{Y}\end{pmatrix}\,. \tag{18}$$

令 $(\dot{q},\dot{p})=(0,0)$，显然，不动点唯一，位于 $(q^*,p^*)=(0,0)$。为分析该平衡点的稳定性，我们计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ。λ 的特征方程为 $\det(\boldsymbol{M}+\lambda^2\mathbf{1})=0$ 其中 $\boldsymbol{M}:=\boldsymbol{K}-\boldsymbol{Y}^2$。接着，记 $\boldsymbol{M}$的特征值为 ω_a^2，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_a^{(\pm)}=\pm i\omega_a$。若将系统限制为$\boldsymbol{M}>0$，则 ω_a 为实数，且 $\lambda_a^{(\pm)}$为纯虚数。这对应于中心的相图，系统是稳定的。另一方面，若矩阵 $\boldsymbol{M}$ 不是半正定的，则至少有一个虚数ω_a，因此 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个正特征值和一个负特征值，从而形成不稳定的双曲系统。因此，条件 $\boldsymbol{M}>0$ 可保证系统稳定。下文中我们考虑 $\boldsymbol{M}>0$。

为计算纯度的经典类比，我们首先进行正则变换 $q=q'$,$p=p'-\boldsymbol{Y}q$，随后进行形式为 $Q=\boldsymbol{S}\,q'$，$P=\boldsymbol{S}\,p'$ 的正则变换，其中 $\boldsymbol{S}$ 满足对角化矩阵 $\boldsymbol{M}$，即 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{\Omega}^2$，其中$\boldsymbol{\Omega}=\mathrm{diag}(\omega_1,\ldots,\omega_N)$。因此，总正则变换可写为 $q=\boldsymbol{S}Q$, $p=\boldsymbol{S}P-\boldsymbol{Y}\boldsymbol{S}Q$。用新变量 (Q,P) 表示，哈密顿量 (16) 可写为

$$H(Q,P)=\frac{1}{2}P^{\intercal}P+\frac{1}{2}Q^{\intercal}\boldsymbol{\Omega}^2Q\,. \tag{19}$$

由 (19) 可知，ω_a 是系统的正规频率。

用作用-角变量（I,ϕ）表示时，新变量（Q,P）可写为 $Q_a=\sqrt{\frac{2I_a}{\omega_a}}\sin\phi_a$, $P_a=\sqrt{2I_a\omega_a}\cos\phi_a$，因此

$$q_a=\sum_b S_{ab}\sqrt{\frac{2I_b}{\omega_b}}\sin\phi_b\,, \tag{20a}$$

$$p_a=\sum_b\left(S_{ab}\sqrt{2I_b\omega_b}\cos\phi_b-Y_aS_{ab}\sqrt{\frac{2I_b}{\omega_b}}\sin\phi_b\right)\,. \tag{20b}$$

利用 (7) 和 (20)，经典协方差矩阵 (6) 各元素中涉及的项为

$$\langle q_aq_b\rangle_{\mathrm{cl}}=\left(\boldsymbol{S}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{S}^{\intercal}\right)_{ab}\,, \tag{21a}$$

$$\langle q_ap_b\rangle_{\mathrm{cl}}=\left(\boldsymbol{S}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{S}^{\intercal}\boldsymbol{Y}\right)_{ab}\,, \tag{21b}$$

$$\langle p_ap_b\rangle_{\mathrm{cl}}=\left(\boldsymbol{S}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{S}^{\intercal}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{S}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{S}^{\intercal}\boldsymbol{Y}\right)_{ab}\,, \tag{21c}$$

$$\langle q_a\rangle_{\mathrm{cl}}=\langle p_a\rangle_{\mathrm{cl}}=0\,, \tag{21d}$$

其中 $\boldsymbol{I}=\mathrm{diag}(I_1,\ldots,I_N)$。注意，由于哈密顿量 (16) 中的项 $q^{\intercal}\boldsymbol{Y}p$，我们有 $\langle q_ap_b\rangle_{\mathrm{cl}}\neq 0$，并且在 (21c) 中还有附加项 $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{S}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{S}^{\intercal}\boldsymbol{Y}$。考虑到所有作用变量均等于某个常数 c_1，即对所有 $a=1,\ldots,N$，都有 $I_a\to c_1$，经典协方差矩阵可写为

$$\lim_{I_a\to c_1}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{cl}}=c_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}^{-1/2} & -\boldsymbol{M}^{-1/2}\boldsymbol{Y}\\ -\boldsymbol{Y}\boldsymbol{M}^{-1/2} & \boldsymbol{M}^{1/2}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{M}^{-1/2}\boldsymbol{Y}\end{pmatrix}\,, \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{M}^{-1/2}$ 是矩阵 $\boldsymbol{M}^{1/2}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{S}^{\intercal}$ 的逆矩阵。

利用舒尔补不难证明，式 (22) 的行列式为 c_1^{2N}。根据式 (13a)，整个系统的经典纯度类比为 1，这与量子框架得出的结果相同。一般而言，为了计算由系统中前 m $(m\leq N)$ 个振子组成的子系统的纯度，我们需要相应的约化协方差矩阵，该矩阵通过从式 (22) 中提取相应的 $m\times m$ 块子矩阵得到。约化协方差矩阵 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{cl}}_{(m)}$ 可以写为

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{cl}}_{(m)}=c_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{D} & -\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y}_{red}\\ -\boldsymbol{Y}_{red}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{Y}_{red}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y}_{red}\end{pmatrix}\,, \tag{23}$$

其中，$\boldsymbol{A}$和 $\boldsymbol{D}$分别是 $\boldsymbol{M}^{1/2}$和 $\boldsymbol{M}^{-1/2}$的分块矩阵，

$$\boldsymbol{M}^{1/2}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{\intercal} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\,, \tag{24a}$$

$$\boldsymbol{M}^{-1/2}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{E}^{\intercal} & \boldsymbol{F}\end{pmatrix}\,, \tag{24b}$$

以及 $\boldsymbol{Y}_{red}=\mathrm{diag}(Y_1,\ \ldots\ldots,\ Y_m)$。

利用式 (13a) 和式 (23)，m 振子的纯度的经典类比结果为

$$\tilde{\mu}^{\mathrm{cl}}(a_1,\ldots,a_m)=\frac{1}{\sqrt{\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{D}}}\,, \tag{25}$$

这里我们利用舒尔补简化了行列式。请注意，尽管矩阵 $\boldsymbol{Y}_{red}$ 并未显式出现在这一结果中，纯度的经典类比仍取决于参数 Y_a，这是通过涉及 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的频率 ω_a 体现的。下面我们将证明，这一结果与量子纯度式 (9a) 的预测完全一致。

在进入量子框架之前，我们考虑式 (16) 的一个特例，并给出纯度的经典类比的显式表达式。我们取由以下哈密顿量描述的两个耦合广义谐振子系统。

$$H(q,p) = H_1 + H_2 + \frac{1}{2} Z \left(q_1 - q_2\right)^2 , \tag{26}$$

其中

$$H_a(q_a,p_a) = \frac{1}{2}\left(p_a^2 + Y_a\left(q_a p_a + p_a q_a\right) + X_a q_a^2\right) . \tag{27}$$

在这种情况下，矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} X_1 + Z & -Z \\ -Z & X_2 + Z \end{pmatrix} , \tag{28a}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} X_1 + Z - Y_1^2 & -Z \\ -Z & X_2 + Z - Y_2^2 \end{pmatrix} , \tag{28b}$$

因此矩阵 $\boldsymbol{S}$ 是

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} , \tag{29}$$

其中，$\tan\theta = \frac{\gamma}{|\gamma|}\left(\gamma^2+1\right) - \gamma$ with $\gamma := \frac{X_2 - X_1 + Y_1^2 - Y_2^2}{2Z}$。这里，我们考虑了 $X_2 - X_1 + Y_1^2 - Y_2^2 \neq 0$ and $Z \neq 0$。此外，正规频率为

$$\omega_1 = \sqrt{X_1 - Y_1^2 + Z - Z\tan\theta}\,, \tag{30a}$$

$$\omega_2 = \sqrt{X_2 - Y_2^2 + Z + Z\tan\theta}\,. \tag{30b}$$

有了这些矩阵，并利用式 (21)，我们可以计算经典协方差矩阵 (22)。结果为

$$\lim_{I_a \to c_1} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{cl}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{qq}^{\mathrm{cl}} & \boldsymbol{\sigma}_{qp}^{\mathrm{cl}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{pq}^{\mathrm{cl}} & \boldsymbol{\sigma}_{pp}^{\mathrm{cl}} \end{pmatrix} , \tag{31}$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma}_{qq}^{\mathrm{cl}} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{\cos^2\theta}{\omega_1} + \frac{\sin^2\theta}{\omega_2} & \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right)\sin\theta\cos\theta \\ \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right)\sin\alpha\cos\theta & \frac{\sin^2\theta}{\omega_1} + \frac{\cos^2\theta}{\omega_2} \end{pmatrix} , \tag{32a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{qp}^{\mathrm{cl}} = \boldsymbol{\sigma}_{pq}^{\mathrm{cl}\,\intercal} = c_1 \begin{pmatrix} Y_1\left(\frac{\cos^2\theta}{\omega_1} + \frac{\sin^2\theta}{\omega_2}\right) & Y_2\left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right)\sin\theta\cos\theta \\ Y_1\left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right)\sin\theta\cos\theta & Y_2\left(\frac{\sin^2\theta}{\omega_1} + \frac{\cos^2\theta}{\omega_2}\right) \end{pmatrix} , \tag{32b}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{pp}^{\mathrm{cl}} = c_1 \begin{pmatrix} \omega_1\cos^2\theta + \omega_2\sin^2\theta + Y_1^2\left(\frac{\cos^2\theta}{\omega_1} + \frac{\sin^2\theta}{\omega_2}\right) & \left((\omega_1 - \omega_2) + Y_1 Y_2\left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right)\right)\sin\theta\cos\theta \\ \left((\omega_1 - \omega_2) + Y_1 Y_2\left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right)\right)\sin\theta\cos\theta & \omega_1\sin^2\theta + \omega_2\cos^2\theta + Y_2^2\left(\frac{\sin^2\theta}{\omega_1} + \frac{\cos^2\theta}{\omega_2}\right) \end{pmatrix} . \tag{32c}$$

结合式（25）和式（31），我们得到单粒子子系统的纯度的经典类比。

$$\tilde{\mu}^{\mathrm{cl}}(a_1) = \sqrt{\frac{\omega_1\omega_2}{\left(\omega_1\cos^2\theta + \omega_2\sin^2\theta\right)\left(\omega_2\cos^2\theta + \omega_1\sin^2\theta\right)}}\,. \tag{33}$$

注意，如果 $\omega_1 = \omega_2$，则（33）化简为 $\tilde{\mu}(a_1) = 1$。然而，在这种情况下，γ 是虚数，因为满足条件 $Z \neq 0$，也就是说，振子之间存在耦合。γ 是虚数意味着相应的量子哈密顿量是非厄米的。此类系统的量子化已采用 PT对称性[47, 48], 完成，并且人们发现，纠缠在这一情境下具有不同的性质 [49, 50]。在广义一般情形下，$\omega_1 \neq \omega_2$，由式（33）可得 $\tilde{\mu}(a_1) < 1$，因此该系统的量子对应物处于纠缠态。

现在我们转向量子框架。量

哈密顿量 (16) 的量子对应物是

$$\hat{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{q}},\hat{\mathbf{p}})=\frac{1}{2}\hat{\mathbf{p}}^{\intercal}\hat{\mathbf{p}}+\frac{1}{2}\hat{\mathbf{q}}^{\intercal}\boldsymbol{K}\hat{\mathbf{q}}+\frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{q}}^{\intercal}\boldsymbol{Y}\hat{\mathbf{p}}+\hat{\mathbf{p}}^{\intercal}\boldsymbol{Y}\hat{\mathbf{q}}\right). \tag{34}$$

进行与导出式（19）类似的变换后，哈密顿量（34）可对角化为 ˆ<стые id='1'>H(ˆQ, ˆP) = $\frac{1}{2}$ˆP ˆP + $\frac{1}{2}$ˆ Q Ω^2 ˆQ。为了计算基态（高斯态）的量子协方差矩阵分量（1），将算符 ˆ ˆ Q 和P 写成通常的升降算符的组合会比较方便。这样得到的量子协方差矩阵与经典协方差矩阵（22）相同，只是以 $\hbar/2$ 替换了常数 c_1。利用这一结果及式（9a）， m 个量子振子的量子纯度结果等于（25）。这表明，经典量 $\tilde{\mu}^{\mathrm{cl}}$ 能够得出与其量子对应物 μ相同的数学结果。

III. 广义纯度与熵，以及对数负性

A. 广义纯度与熵

量子物理量 (8) 可以按如下方式推广：对于给定的量子态 ˆ$\boldsymbol{\rho}$，广义纯度、Bastiaans-Tsallis 熵和 R´enyi 熵 [4] 对于 $\alpha\geq 0$ 分别定义为 [5, 6, 43, 51]

$$\mu_\alpha\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)=\mathrm{Tr}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}^{\alpha}, \tag{35a}$$

$$S_\alpha\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)=\frac{1-\mathrm{Tr}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}^{\alpha}}{\alpha-1}, \tag{35b}$$

$$H_\alpha\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)=\frac{\ln\left(\mathrm{Tr}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}^{\alpha}\right)}{1-\alpha}, \tag{35c}$$

分别为。关于这些推广，有几点说明。首先，注意到 Tr ˆ $\boldsymbol{\rho}^{\alpha}$ = (||ˆ$\boldsymbol{\rho}$||$_\alpha$)$^\alpha$ ，其中 || ||$_\alpha$ 是 Schatten α-范数 [43, 52] ，并且在任意大的 α 的渐近极限下，Tr ˆ$\boldsymbol{\rho}^{\alpha}$ 仅是 ˆ$\boldsymbol{\rho}$ 的最大特征值的函数。其次，当 $\alpha=2$时，(35a) 化为纯度 (8a)。第三，对于 $\alpha=2$，(35b) 给出线性熵 (8b)，而在 $\alpha\to 1$ 的极限下，它化为冯 · 诺依曼熵 (8c)。第四，在 $\alpha\to 1$ 的极限下，(35c) 变为冯·诺依曼熵 (8c)。第五，在 $\alpha\to\infty$ 的极限下， S_α 趋于一个平凡的恒为零函数，失去关于量子态的全部信息，而 H_α 收敛于最小熵，即 R´enyi 熵 [53, 54]这一族中最小的熵度量。第六，对于给定的量子态， S_α 是 α 的单调递减函数。

对于与由粒子 $a_1,\ldots,a_n$ 构成的子系统相关联的 a n 模高斯态，(35) 可以写成仅依赖于协方差矩阵 $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$ 的函数。事实上，它们由 [12, 51, 55] 给出

$$\mu_\alpha\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)=\prod_{k=1}^{n}g_\alpha(\nu_k), \tag{36a}$$

$$S_\alpha\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)=\frac{1-\prod_{k=1}^{n}g_\alpha(\nu_k)}{\alpha-1}, \tag{36b}$$

$$H_\alpha\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)=\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(g_\alpha(\nu_k)\right)}{1-\alpha}, \tag{36c}$$

其中 ν_k 是 $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}/\hbar$的辛特征值，并且

$$g_\alpha(\nu_k)=\frac{1}{\left(\nu_k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}-\left(\nu_k-\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}. \tag{37}$$

注意， $g_\alpha(1/2)=1$ 当且仅当所有特征值都满足 $\nu_k=1/2$时成立，这意味着 $\mu_\alpha=1$， $S_\alpha=0$，以及 $H_\alpha=0$。

B. 对数负性

现在我们关注由 N 个耦合谐振子组成的系统中高斯态的对数负性。我们首先考虑一组 $m=n_1+n_2\leqslant N$ 个振子，并将其分为两组：其中一组包含n_1 个振子，另一组包含 n_2 个振子。假设位置与动量之间不存在关联，则与这m 个振子相关的量子协方差矩阵（我们称之为约化协方差矩阵 $\boldsymbol{\mu}$）可以通过从整个系统的量子协方差矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 中选取与这 m 个振子对应的行和列得到。在此条件下，矩阵 $\boldsymbol{\mu}$ 具有如下形式

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_q & \mathbf{0}_{m\times m}\\ \mathbf{0}_{m\times m} & \boldsymbol{\mu}_p\end{pmatrix}, \tag{38}$$

其中 $\boldsymbol{\mu}_q$ 和 $\boldsymbol{\mu}_p$ 是 $m\times m$ 矩阵。现在考虑关于由 n_2 个振子组成的群的 $\boldsymbol{\mu}$ 的偏转置 $\boldsymbol{\mu}^{\Gamma}$，其定义为

$$\boldsymbol{\mu}^{\Gamma}:=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{P}, \tag{39}$$

其中， $\boldsymbol{P}$是一个由以下内容给出的对角矩阵。

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_{m\times m} & \mathbf{0}_{m\times m}\\ \mathbf{0}_{m\times m} & \boldsymbol{P}_p\end{pmatrix}, \tag{40}$$

其中， $\boldsymbol{P}_p=\mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1)$。 $\boldsymbol{P}_p$的元素对于属于含有 n_1 个振子的组的振子取值为 1，而对于属于含有 n_2 个振子的组的振子取值为-1 。不难验证，相对于由 n_2 个振子组成的组进行部分转置，其效果是改变与这些振子相对应的动量的符号。

为了计算对数负性，我们还需要辛矩阵$\boldsymbol{\Omega}$ = ($\Omega_{\alpha\beta}$)，其各元素由以下公式给出。

$$\Omega_{\alpha\beta}:=-i\left[\hat{\mathbf{r}}_\alpha,\hat{\mathbf{r}}_\beta\right], \tag{41}$$

且具有分块矩阵形式

$$\boldsymbol{\Omega}=\hbar\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{1}_{N\times N}\\ -\mathbf{1}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N}\end{pmatrix}. \tag{42}$$

因此，对于 m 个振子组成的集合，其对应的辛矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 形式如下

$$\boldsymbol{\Sigma}:=\hbar\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{1}_{m\times m}\\ -\mathbf{1}_{m\times m} & \mathbf{0}_{m\times m}\end{pmatrix}. \tag{43}$$

利用式（39）、（43），并考虑链的基态，对数负性 $E_{\mathcal{N}}$（用于衡量 n_1 与 n_2 两组振子之间的纠缠）可表示为 [7]

$$E_{\mathcal{N}}=-\sum_{k=1}^{2m}\log_2\left[\min\left(1,\mid\lambda_k\mid\right)\right], \tag{44}$$

其中，λ_k（$k=1$、.....、$2m$）是矩阵的特征值

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{i}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}^{\Gamma}. \tag{45}$$

事实上，若 $E_{\mathcal{N}}$ 为正，则 n_1 与 n_2 两组振子处于纠缠态。用矩阵 $\boldsymbol{\mu}_q$ 和 $\boldsymbol{\mu}_p$ 表示，对数负性可写为 [22]

$$E_{\mathcal{N}}=-\sum_{j=1}^{m}\log_2\left[\min\left(1,\tilde{\lambda}_j\right)\right], \tag{46}$$

其中，$\tilde{\lambda}_j$ 是矩阵 $\boldsymbol{\mu}_q\boldsymbol{P}_p\boldsymbol{\mu}_p\boldsymbol{P}_p/\hbar^2$ 的特征值。

在结束本节之前，值得指出的是，复合系统中另一种有用的纠缠度量是负性 $\mathcal{N}$ [7]，它与对数负性的关系为

$$\mathcal{N}=\frac{2^{E_{\mathcal{N}}}-1}{2}. \tag{47}$$

IV. 经典类比量

A. 广义纯度与熵

在本小节中，我们在经典可积系统的框架下，为高斯态（36）定义广义纯度和熵的经典类比量。这里考虑一个子系统，它由一个具有 N 个自由度的经典可积系统中的 n 个粒子 a_1，a_2，.. .，a_n 组成；该系统已用作用-角变量（φ，I）表示。

我们首先为子系统（a_1，a_2，.....，a_n）引入函数 g_α 的经典类比。考虑到（37）、量子 $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$ 和经典 $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}^{\mathrm{cl}}$ 协方差矩阵的关系（5），即 $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}\simeq\boldsymbol{\sigma}_{(n)}^{\mathrm{cl}}$，以及作用变量的玻尔-索末菲量子化规则（其含义为 $\hbar/2\to I_a$），定义 g_α 的经典类比如下:

$$g_\alpha^{\mathrm{cl}}\left(\tilde{\sigma}_k\right):=\frac{1}{\left(\tilde{\sigma}_k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}-\left(\tilde{\sigma}_k-\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}, \tag{48}$$

其中 $\tilde{\sigma}_k$ 由（14b）给出。注意，（48）可由（37）直接将 ν_i 替换为 $\tilde{\sigma}_k$ 得到；也就是说，我们只是改变了函数的定义域，就像在定义（14a）中的函数 $\mathcal{S}^{\mathrm{cl}}$ 时所做的那样。

借助函数 g_α^{cl}，我们将广义纯度、Bastiaans-Tsallis 熵和 R´ényi 熵的经典类比量 定义为 $\alpha\geq 0$

$$\tilde{\mu}_\alpha^{\mathrm{cl}}\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right):=\prod_{k=1}^{n}g_\alpha^{\mathrm{cl}}(\tilde{\sigma}_k), \tag{49a}$$

$$\tilde{S}_\alpha^{\mathrm{cl}}\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right):=\frac{1-\prod_{k=1}^{n}g_\alpha^{\mathrm{cl}}(\tilde{\sigma}_k)}{\alpha-1}, \tag{49b}$$

$$\tilde{H}_\alpha^{\mathrm{cl}}\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right):=\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(g_\alpha^{\mathrm{cl}}(\tilde{\sigma}_k)\right)}{1-\alpha}, \tag{49c}$$

分别。我们指出，函数（49）无需借助量子框架中的任何先验知识；正如我们将通过示例所展示的，它们得出的数学结果与其量子对应物完全相同。另请注意，函数（49）适用于任意可积系统，但只有当相应的量子系统处于高斯态时，它们才对应于广义纯度、Bastiaans-Tsallis 熵和 R´ényi 熵的经典类比量。

值得注意的是

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to1}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(g_\alpha^{\mathrm{cl}}(\tilde{\sigma}_k)\right)}{1-\alpha}&=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-\prod_{k=1}^{n}g_p^{\mathrm{cl}}(\tilde{\sigma}_k)}{\alpha-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\mathcal{S}^{\mathrm{cl}}(\tilde{\sigma}_k),\end{aligned} \tag{50}$$

then

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to1}\tilde{S}_\alpha^{\mathrm{cl}}\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)&=\lim_{\alpha\to1}\tilde{H}_\alpha^{\mathrm{cl}}\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)\\&=\tilde{S}^{\mathrm{cl}}\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right),\end{aligned} \tag{51}$$

在极限 $\alpha\to1$ 下，我们的 Bastiaans-Tsallis、$\tilde{S}_\alpha^{\mathrm{cl}}$ 和 R´enyi、$\tilde{H}_\alpha^{\mathrm{cl}}$ 熵的经典类比量成为冯·诺依曼熵（13c）的经典类比，这与量子情形完全类似。

B. 高斯态的对数负性

为了建立对数负性（44）（或（46））的经典类比，我们考虑一个由 N 个耦合谐振子构成的经典可积系统。与量子情形一样，我们关注由 $m=n_1+n_2\leqslant N$ 个振子组成的一个集合，其中包含一组 n_1 个振子和另一组 n_2 个振子。此外，我们还假设位置与动量之间不存在关联。在这些考虑的基础上，我们首先引入与 m 个振子相关的约化经典协方差矩阵 $\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{cl}}$，该矩阵通过减去相应的行和列.....

对应于经典协方差矩阵 $\boldsymbol{\sigma}^{\rm cl}$ 中的 m 振子。于是，矩阵 $\boldsymbol{\mu}^{\rm cl}$ 具有如下形式。

$$\boldsymbol{\mu}^{\rm cl}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_q^{\rm cl} & \mathbf{0}_{m\times m}\\ \mathbf{0}_{m\times m} & \boldsymbol{\mu}_p^{\rm cl}\end{pmatrix}, \tag{52}$$

其中，$\boldsymbol{\mu}_q^{\rm cl}$和 $\boldsymbol{\mu}_p^{\rm cl}$是 $m\times m$ 矩阵。在这种情况下，我们也可以定义相对于 n_2 振子的群的 $\boldsymbol{\mu}^{\rm cl}$ 的部分转置（$\boldsymbol{\mu}^{\rm cl}$）$^{\Gamma}$，即

$$(\boldsymbol{\mu}^{\rm cl})^{\Gamma}:=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\mu}^{\rm cl}\boldsymbol{P}, \tag{53}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 由式 (40) 给出。

另一方面，辛普利克矩阵$\boldsymbol{\Omega}$的经典类比（记为$\boldsymbol{\Omega}^{\rm cl}$）可以通过将对易子 $[\,,\,]$ 替换为泊松括号 $\mathrm{i}\hbar\{\,,\,\}$得到。由此，我们得到如下关系

$$\boldsymbol{\Omega}\simeq\hbar\boldsymbol{\Omega}^{\rm cl}, \tag{54}$$

其中，$\boldsymbol{\Omega}^{\rm cl}$ =($\Omega_{\alpha\beta}^{\rm cl}$) 是经典辛矩阵，其各个元素定义如下:

$$\Omega_{\alpha\beta}^{\rm cl}:=\{r_\alpha,r_\beta\}\,. \tag{55}$$

利用 $\{q_a,p_b\}=\delta_{ab}$，不难看出，

$$\boldsymbol{\Omega}^{\rm cl}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{1}_{N\times N}\\ -\mathbf{1}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N}\end{pmatrix}. \tag{56}$$

因此，对于这组 m 个振子，约化经典辛矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}^{\rm cl}$ 可以写为

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\rm cl}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{1}_{m\times m}\\ -\mathbf{1}_{m\times m} & \mathbf{0}_{m\times m}\end{pmatrix}. \tag{57}$$

利用式（53）和（57），自然可以将对数负性（44）的经典类比定义为

$$E_{\mathcal{N}}^{\rm cl}=-\sum_{k=1}^{2m}\log_2\left[\min\left(1,\mid\lambda_k^{\rm cl}\mid\right)\right], \tag{58}$$

其中，$\lambda_k^{\rm cl}$ 是矩阵的特征值

$$\boldsymbol{B}^{\rm cl}=\frac{\mathrm{i}}{2c_4}\lim_{I_a\to c_4}(\boldsymbol{\Sigma}^{\rm cl})^{-1}(\boldsymbol{\mu}^{\rm cl})^{\Gamma}\,. \tag{59}$$

这里，c_4 是一个辅助的实正数。我们对（58）作几点评论。首先，值得注意的是，$E_{\mathcal{N}}^{\rm cl}$ 是一个纯粹的经典量，因为其定义无需借助量子框架。其次，取极限 $I_a\to c_4$ 后，（59）中的（任意）常数 c_4 便会消失，因此 $E_{\mathcal{N}}^{\rm cl}$ 不依赖于这个常数。第三，按照与推导（46）完全类似的步骤（参见文献 [22]），对数负性的经典类比可以用 $\boldsymbol{\mu}_q^{\rm cl}$和$\boldsymbol{\mu}_p^{\rm cl}$ 表示为

$$E_{\mathcal{N}}^{\rm cl}=-\sum_{j=1}^{m}\log_2\left[\min\left(1,\tilde{\lambda}_j^{\rm cl}\right)\right], \tag{60}$$

其中，$\tilde{\lambda}_j^{\rm cl}$是该矩阵的特征值

$$\tilde{\boldsymbol{B}}^{\rm cl}=\frac{1}{(2c_4)^2}\lim_{I_a\to c_4}\boldsymbol{\mu}_q^{\rm cl}\boldsymbol{P}_P\boldsymbol{\mu}_p^{\rm cl}\boldsymbol{P}_P. \tag{61}$$

注意，利用 $E_{\mathcal{N}}^{\rm cl}$ 还可以引入负性 $\mathcal{N}$的经典类比。参照式（47），我们将负性定义为经典类比量

$$\mathcal{N}^{\rm cl}=\frac{2^{E_{\mathcal{N}}^{\rm cl}}-1}{2}. \tag{62}$$

由于 $\mathcal{N}^{\rm cl}$与 $E_{\mathcal{N}}^{\rm cl}$存在显然的关系，下一节中我们仅给出对 $E_{\mathcal{N}}^{\rm cl}$的数值检验。

V. 示例

本节给出一些示例，以说明所提出经典函数的应用。在小节 V A 中，我们计算线性耦合谐振子系统的广义纯度、Bastiaans-Tsallis 熵和 Rényi 熵的经典类比量，并将其与系统基态下对应的量子结果进行比较。在小节 V B 中，我们考虑由哈密顿量（26）给出的广义谐振子链这一特殊情形，并将广义纯度和熵与其经典类比量进行比较。最后，在小节 V C 中，对于处于若干种构型的振子环形晶格，我们计算对数负性（58）的经典类比，并将其与对应的量子结果进行比较。

我们将在这些例子中看到，当系统的量子对应物处于高斯态时，我们的经典方法与其量子对应物给出的结果完全相同。

A. 线性耦合谐振子

考虑由两个耦合谐振子组成的系统，其哈密顿量描述为

$$H(q,p)=\frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2+Aq_1^2+Bq_2^2+Cq_1q_2\right), \tag{63}$$

其中，A，B和 C是实参数，满足 A，$B>0$，$A\neq B$ 和 $4AB-C^2\geq 0$。该系统已被广泛用于量子纠缠分析 [56, 57], ，其特点之一是，在某些参数取值下会呈现出极强的量子纠缠 [2, 58, 59]。最近，[30] 该系统也被用于研究纯度、线性量子熵和冯·诺依曼熵的经典类比量，结果发现，这些经典函数给出的结果与其量子对应物相同。此外，该模型还被用于研究量子几何张量的经典类比 [28]。有趣的是，与所研究的经典

函数相比， [30], 研究表明，经典度量张量无法给出其量子对应物的完整参数结构，原因在于量子排序反常。

使用相应的作用-角变量（φ_a， I_a）（$a = 1$， 2），系统的经典协方差矩阵 $\boldsymbol{\sigma}^{\rm cl}$ 的各分量为 [30]

$$\sigma_{qq}^{\rm cl} = \begin{pmatrix} \frac{I_1\cos^2\beta}{\omega_1} + \frac{I_2\sin^2\beta}{\omega_2} & \left(\frac{I_2}{\omega_2} - \frac{I_1}{\omega_1}\right)\sin\beta\cos\beta \\ \left(\frac{I_2}{\omega_2} - \frac{I_1}{\omega_1}\right)\sin\beta\cos\beta & \frac{I_1\sin^2\beta}{\omega_1} + \frac{I_2\cos^2\beta}{\omega_2} \end{pmatrix}, \tag{64a}$$

$$\sigma_{pp}^{\rm cl} = \begin{pmatrix} I_1\omega_1\cos^2\beta + I_2\omega_2\sin^2\beta & (I_2\omega_2 - I_1\omega_1)\sin\beta\cos\beta \\ (I_2\omega_2 - I_1\omega_1)\sin\beta\cos\beta & I_1\omega_1\sin^2\beta + I_2\omega_2\cos^2\beta \end{pmatrix}, \tag{64b}$$

$$\sigma_{qp}^{\rm cl} = \mathbf{0}_{2\times 2}\,, \tag{64c}$$

其中 ω_1 和 ω_2 是正规频率

$$\omega_1 := \sqrt{A - \frac{C}{2}\tan\beta}\,, \qquad \omega_2 := \sqrt{B + \frac{C}{2}\tan\beta}\,, \tag{65}$$

且 $\tan 2\beta = C/(B-A)$。

在这种情况下，子系统包括：每个振子 {1}和 {2}；以及完整系统 {1,2}。对于子系统 {1}，相应的 $\tilde{\sigma}_1$ [见式（14b）]，其表达式为

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\cos^2\beta}{\omega_1} + \frac{\sin^2\beta}{\omega_2}\right)\left(\omega_1\cos^2\beta + \omega_2\sin^2\beta\right)}\,, \tag{66}$$

用原始参数表示，可化简为

$$\tilde{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{AB}{4AB - C^2}}\,, \tag{67}$$

并且，由于子系统{1} 和 {2}之间具有对称性，子系统 {2} 的辛特征值满足 $\tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_1$。注意，在非耦合情形下， $C = 0$， $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = 1/2$，于是对于所有 $\alpha > 1$，广义纯度和熵的经典对应量分别为 1 和 0，这意味着振子在相空间中彼此分离。此外，完整系统 $\{1,2\}$的辛特征值为 $\sigma_1 = 1/2 = \sigma_2 = \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2$，这意味着完整系统是纯态，正如预期。

利用（49）和（67），我们计算由（49）定义的、针对 $\alpha \to 1$和 $\alpha = 0.9$，2，4，8，16，32，64 的广义纯度和熵的经典类比量。此外，为了便于说明，我们令 $AB = 100$。图1展示了经典类比量关于耦合常数 C 的数值结果，其中通过选择 $AB = 100$，该常数可以取区间（-20，20）内的值。由于这些函数关于 $C \to -C$ 对称，我们只绘制区域 $[0, 20)$。下面对此作一些评论：i）这些图展示了我们已经.....

关于 $C = 0$ 情况的说明。ii) 我们纳入了 $\alpha = 2$ 情况，因此图1 (a) 包含了纯度的类比。iii) 我们在图1 (b) 和 (c) 中纳入了极限 $\alpha \to 1$，该极限对应于冯·诺依曼熵，其定义为

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{\rm cl}(1) &= \left(\sqrt{\frac{AB}{4AB-C^2}} + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\sqrt{\frac{AB}{4AB-C^2}} + \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \left(\sqrt{\frac{AB}{4AB-C^2}} - \frac{1}{2}\right)\ln\left(\sqrt{\frac{AB}{4AB-C^2}} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \tilde{S}^{\rm cl}(2)\,, \end{aligned} \tag{68a}$$

$$\tilde{S}^{\rm cl}(1,2) = 0\,. \tag{68b}$$

这一经典类比已在 [30]中讨论。iv) 在图 1 (b) 和 (c) 中，我们插入了子图，以说明广义熵的经典类比量的整体行为。v) 我们可以观察到广义熵的一些一般特征；例如，在图 1 (b) 中，我们观察到 Tsallis 熵是关于 α 的单调递减函数，而图 1 (c) 则展示了 Rényi 熵的凹性行为。

现在考虑量子情形。利用哈密顿量（63）的量子对应形式，基态的量子协方差矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 对基态而言的分量为

$$\sigma_{qq} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \frac{\cos^2\beta}{\omega_1} + \frac{\sin^2\beta}{\omega_2} & \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1}\right)\sin\beta\cos\beta \\ \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1}\right)\sin\beta\cos\beta & \frac{\sin^2\beta}{\omega_1} + \frac{\cos^2\alpha}{\omega_2} \end{pmatrix}, \tag{69a}$$

$$\sigma_{pp} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_1\cos^2\alpha + \omega_2\sin^2\beta & (\omega_2 - \omega_1)\sin\beta\cos\beta \\ (\omega_2 - \omega_1)\sin\beta\cos\beta & \omega_1\sin^2\beta + \omega_2\cos^2\beta \end{pmatrix}, \tag{69b}$$

$$\sigma_{qp} = \mathbf{0}_{2\times 2}\,. \tag{69c}$$

考虑到玻尔-索末菲量子化规则 $I_a \to \hbar/2$，可以直接证明，由此得到的经典和量子协变矩阵（64）和（69）完全相同。因此，子系统的广义纯度和熵（36）与根据经典函数（49）确定的结果相同。这证实了我们的经典类比量能够得出与其量子版本相同的数学结果。

B. 广义谐振子链

在本小节中，我们继续以广义谐振子链为例，其哈密顿量见式 (26)。对于这个系统，我们已经计算出经典协方差矩阵和纯度的经典类比。现在，我们将重点讨论广义纯度、Bastiaans-Tsallis 熵和 R´enyi 熵的经典类比量，它们可利用式 (49) 和约化

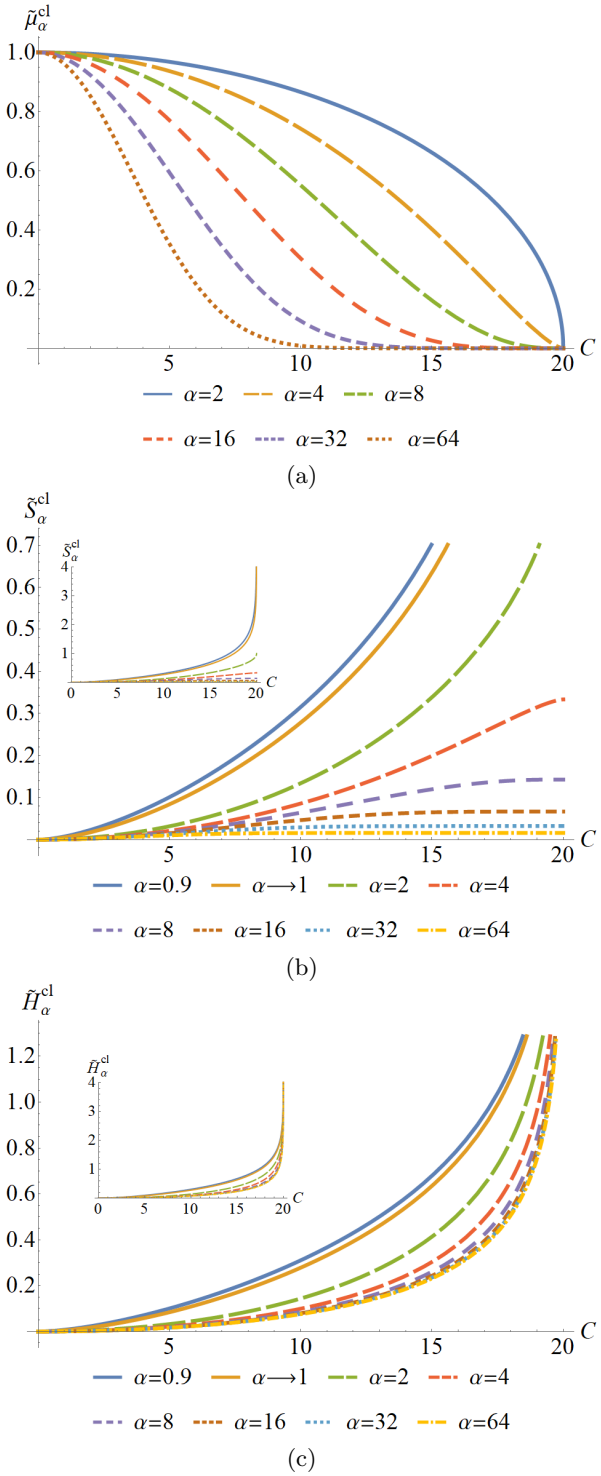


图1. 对于不同的 α 值，经典类比量随 C 变化的曲线：(a) 广义纯度，(b) Bastiaans-Tsallis 熵，以及 (c) R´enyi 熵。

协方差矩阵 (32) 的辛特征值计算得出。辛特征值的函数形式与式 (66) 相同，但其中的正则频率由式 (30) 给出。我们不会明确列出这些经典量的表达式，而是绘制它们在 $\alpha = 0.9,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64$ 和 $\alpha \to 1$ 随参数 Y_2 的变化。其余参数取为 $X_1 = X_2 = 2$、$Z = 1$ 和 $Y_1 = 0$。这一选择意味着 Y_2 的取值范围为 $(-\sqrt{8/3}, \sqrt{8/3})$（超出此范围时，正规频率含有虚部）。由于这些函数关于 $Y_2 \to -Y_2$ 对称，我们只绘制区域 $[0, \sqrt{8/3})$。结果如图2所示。请注意，R´enyi 熵的经典类比量始终是凹函数（见图2.c），而 Bastiaans-Tsallis 熵的相应类比量则不是（见图2.b）。一方面，对于 $\alpha > 1$，在极限 $Y_2 \to \sqrt{8/3}$ 下，广义纯度的经典类比量趋于零（见图2.a），而 R´enyi 熵的经典类比量发散，Bastiaans-Tsallis 熵的经典类比量则趋于 $1/(\alpha - 1)$。另一方面，对于 $0 < \alpha \leq 1$ 和 $Y_2 \to \sqrt{8/3}$，R´enyi 熵和 Bastiaans-Tsallis 熵的经典类比量都发散。值得注意的是，我们发现，所有这些通过经典方法得到的结果，都与量子方法所得结果一致。

C. 一维环形晶格振子

最后，为结束本节，我们想展示对一维环形晶格上由 N 个相同振子组成的系统中两组 n_1 和 n_2 振子的对数负性经典类比（60）的数值检验。所考虑系统的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\left[p_a^2 + kq_a^2 + \kappa\,(q_a - q_{a+1})^2\right], \qquad (70)$$

采用周期性边界条件 $q_1 \equiv q_{N+1}$。该系统已在研究集体算符 [62]，之间的对数负性 [22, 60, 61]，纠缠 [62]，以及电路复杂度 [63]的背景下得到考察。值得注意的是，哈密顿量 (70) 是哈密顿量 (16) 的一个特例，即 $\boldsymbol{Y} = 0$ 且 $\boldsymbol{K}$ 为如下所示的 $N \times N$ 对称循环矩阵的情形。

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} k+2\kappa & -\kappa & 0 & \cdots & -\kappa \\ -\kappa & k+2\kappa & -\kappa & \cdots & 0 \\ 0 & -\kappa & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\kappa \\ -\kappa & 0 & \cdots & -\kappa & k+2\kappa \end{pmatrix}. \qquad (71)$$

该矩阵可以正交对角化，因此可表示为 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{U}$，其中 $\boldsymbol{U}$ 是一个正交矩阵，$\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{diag}\,(\omega_1, \ldots, \omega_N)$，其中 $\omega_1, \ldots, \omega_N$ 为系统的正规频率。

为了研究对数负性的经典类比，我们现在考虑一组由两组 n_1 和 n_2 个振子组成的 $m = n_1 + n_2 \leqslant N$ 个振子。在

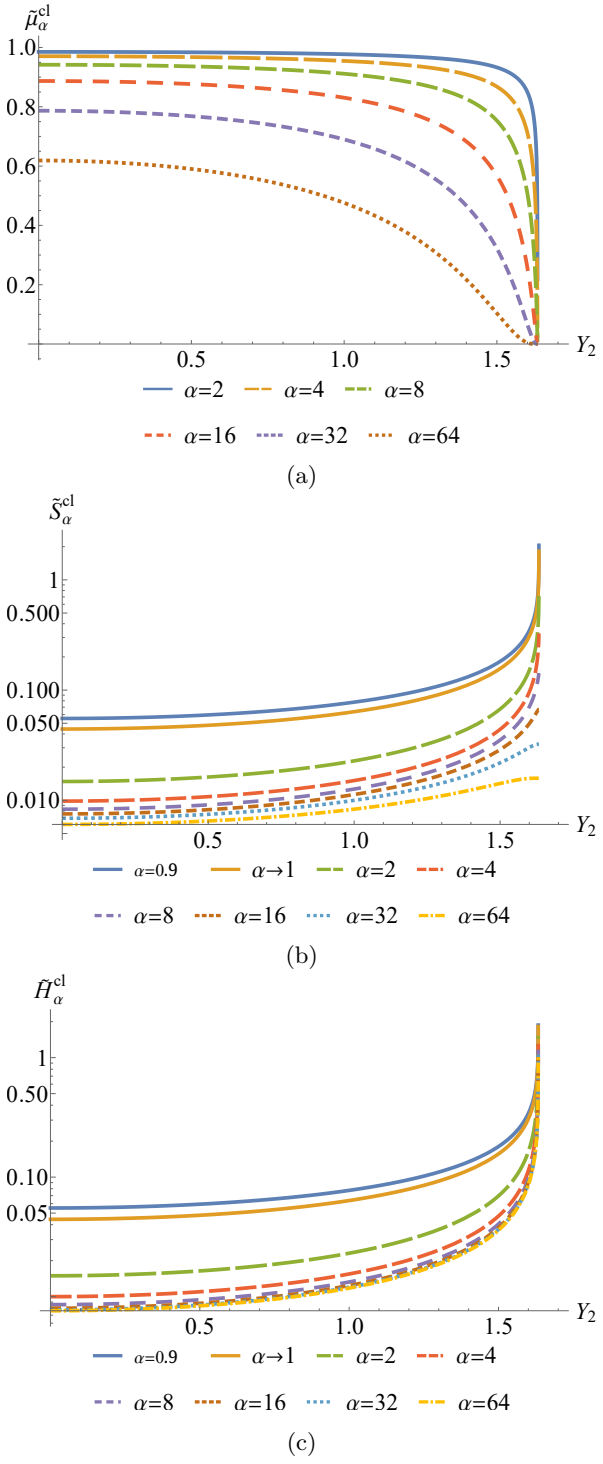


图2. 对于不同的 α取值，经典类比量随 Y_2 变化的曲线：(a) 广义纯度，(b) Bastiaans-Tsallis 熵，以及 (c) R´enyi 熵。

这种情况下，这组 m 个振子的约化 $2m \times 2m$ 经典协方差矩阵 $\boldsymbol{\mu}^{\rm cl}$ 可直接从该系统的 $2N \times 2N$ 经典协方差矩阵 $\boldsymbol{\sigma}^{\rm cl}$ 得到

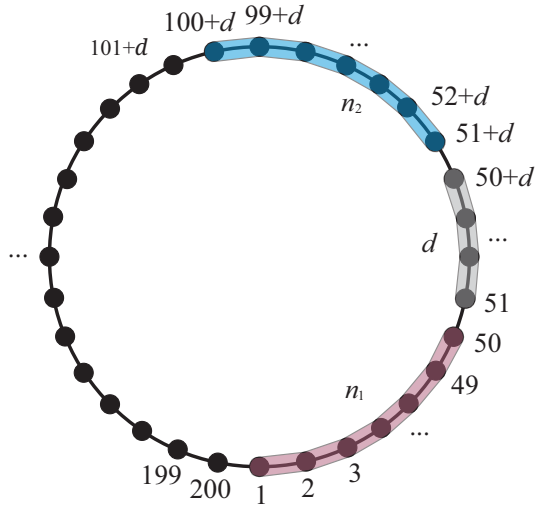


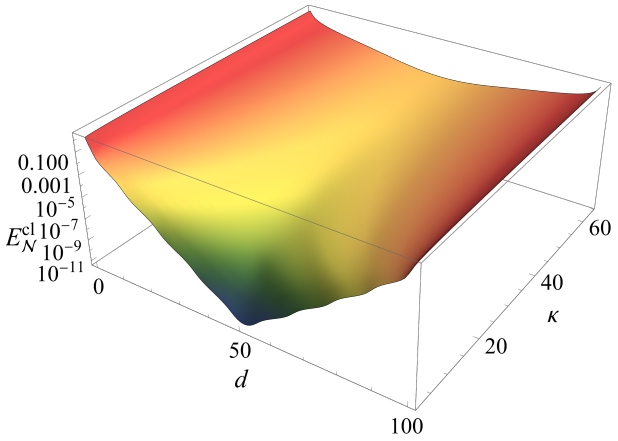
图3. 第一种情况所用装置的示意图。由 $N = 200$ 个振子构成的环形晶格中，两个互不相交的组分别包含 $n_1 = 50$ 个和 $n_2 = 50$ 个振子。两组之间隔着 d 个振子。

系统，

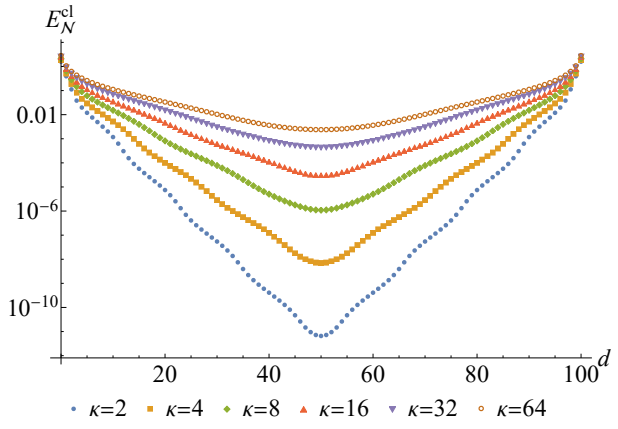
$$\boldsymbol{\sigma}^{\rm cl} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^{\intercal}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{U} & \mathbf{0}_{N\times N} \\ \mathbf{0}_{N\times N} & \boldsymbol{U}^{\intercal}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{I}\boldsymbol{U} \end{pmatrix}, \tag{72}$$

通过减去对应的 m 个振子的行和列。这里，$\boldsymbol{I} = \mathrm{diag}\,(I_1, \ldots, I_N)$ 是一个对角矩阵，其元素为作用变量I_α。由得到的矩阵 $\boldsymbol{\mu}^{\rm cl}$，我们可以读出矩阵 $\boldsymbol{\mu}_q^{\rm cl}$ 和 $\boldsymbol{\mu}_p^{\rm cl}$，然后针对每种考察的情形，构造由式 (61) 给出的矩阵 $\tilde{\boldsymbol{B}}^{\rm cl}$。需要指出的是，尽管构造过程中涉及辅助常数 c_4，所得矩阵 $\tilde{\boldsymbol{B}}^{\rm cl}$ 并不依赖于它。得到 $\tilde{\boldsymbol{B}}^{\rm cl}$ 后，我们通过简单的数值计算求出经典对数负性 (60)。

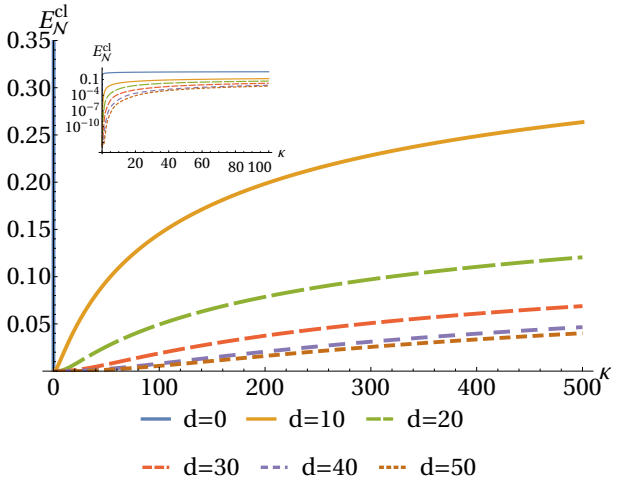
我们首先考虑一个由 $N = 200$ 个振子组成的系统，其中包含两个彼此不相连的振子组，分别由 $n_1 = 50$ 个和 $n_2 = 50$ 个振子组成，两组之间相隔 d 个振子。振子 51 至 $50 + d$ 和 $101 + d$ 至 200 不属于这两个组。图3展示了这一设置的示意图。



(a)



(b)



(c)

图4. 两组 $n_1 = n_2 = 50$ 振子的对数负性经典类比，这些振子嵌入由 $N = 200$ 个振子组成的谐链中，且具有 $k = 0.1$。 d 是两组振子之间的振子数量，如图3所示。

在图4(a)中，我们以 d 和耦合常数 κ为变量，在对数刻度上绘制了对数负性的经典类比，其中 $k = 0.1$。从该图中我们可以看出，给定 κ的一个值，经典类比-对数负性的经典类比在$d = 0$ 和 $d = 100$处取得最大值，而当 $d = 50$ 时取得最小值，这对应于最对称的情形。在图4(b)中，我们绘制了对于某些 κ值，对数负性经典类比随 d 变化的关系，并采用对数刻度，因此可以更清楚地观察到这一点。在该图中，我们还可以看到， $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 从 $d = 0$ 到 $d = 50$ 以近似指数形式下降。该结果与 [22] 中关于群组间距对对数负性影响的结果一致。注意，由于设置具有对称性， $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 从 $d = 50$ 到 $d = 100$ 以近似指数形式增加。我们还可以看到， $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 的最小值（位于 $d = 50$处）会随着 κ 的增加而增加。从图4(c)中可以看到，对于不同的 d值，对数负性经典类比相对于 κ的变化规律。在这里我们看到，$E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 会随着 κ 的增加而增加，这是预期的结果。可以验证，这些由对数负性经典类比得到的结果与使用公式（46）给出的对数负性所得到的结果完全相同。

现在，我们将这种方法应用于一个系统，以此进行说明：该系统包含环形晶格中的两个相邻（$d = 0$）群组，分别由 $n_1 \leq 100$ 和 $n_2 = 100 - n_1$ 个振子组成，晶格共有 $N = 200$ 个振子。请注意，通常情况下，这两个群组的大小不同（$n_1 \neq n_2$），而整个集合的大小固定为$m = n_1 + n_2 = 100$；振子101至200不属于这两个群组。图5展示了这一设置。在这种情况下，我们固定 $k = 0.0001$。

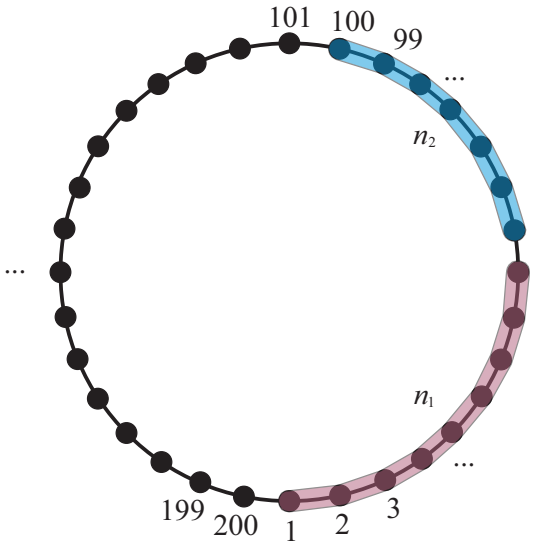


图5. 第二种情况所考虑设置的示意图。由 n_1 个和 $n_2 = 100 - n_1$ 个振子组成的两个相邻群组，位于含有 $N = 200$ 个振子的环形晶格中。

数值计算得到了图6(a)所示的结果，其中展示了对数负性经典类比随 κ 和 n_1变化的图像。注意，当 n_1 保持不变时，经典函数 $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$随 κ增大。这一行为在

图6(b)中可以看得更加清楚，图中还显示，对于 $n_1 = 50$ ($n_1 = n_2$)， $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 的值大于对应的 $n_1 \neq 50$ ($n_1 \neq n_2$)的值。在图6(c)中，我们绘制了 n_1 小于 $\kappa = 2$, 64时，对数负性经典类比随 n_1 变化的函数图像。可以看到， $n_1 = 0$ ($n_2 = 100$)和 $n_1 = 100$ ($n_2 = 0$)时， $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 取得最低值，而对称构型 $n_1 = 50 (= n_2)$时， $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 取得最高值。群体大小 n_1 和 n_2 对 $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 的这种影响，与非对称二分链中 [22] 所发现的情况类似：具有 $n_1 = n_2$ 的 $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 值为具有 $n_1 \neq n_2$时的值提供了一个上界。另一方面，在长度为 n_1、 n_2 的两个相邻区间中，对于长度为 N的有限系统，其对数负性为 [60, 61]

$$E_{\mathcal{N}} = \frac{b_1}{4} \ln \left[\frac{N}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi n_1}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi n_2}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi (n_1+n_2)}{N}\right)} \right] + b_2, \qquad (73)$$

其中 b_1 和 b_2 是常数。将 $N = 200$ 和$n_2 = 100 - n_1$ 代入此表达式后，对数负性化简为

$$E_{\mathcal{N}} = \frac{b_1}{4} \ln \left[\frac{100}{\pi} \sin\left(\frac{\pi n_1}{100}\right) \right] + b_2. \qquad (74)$$

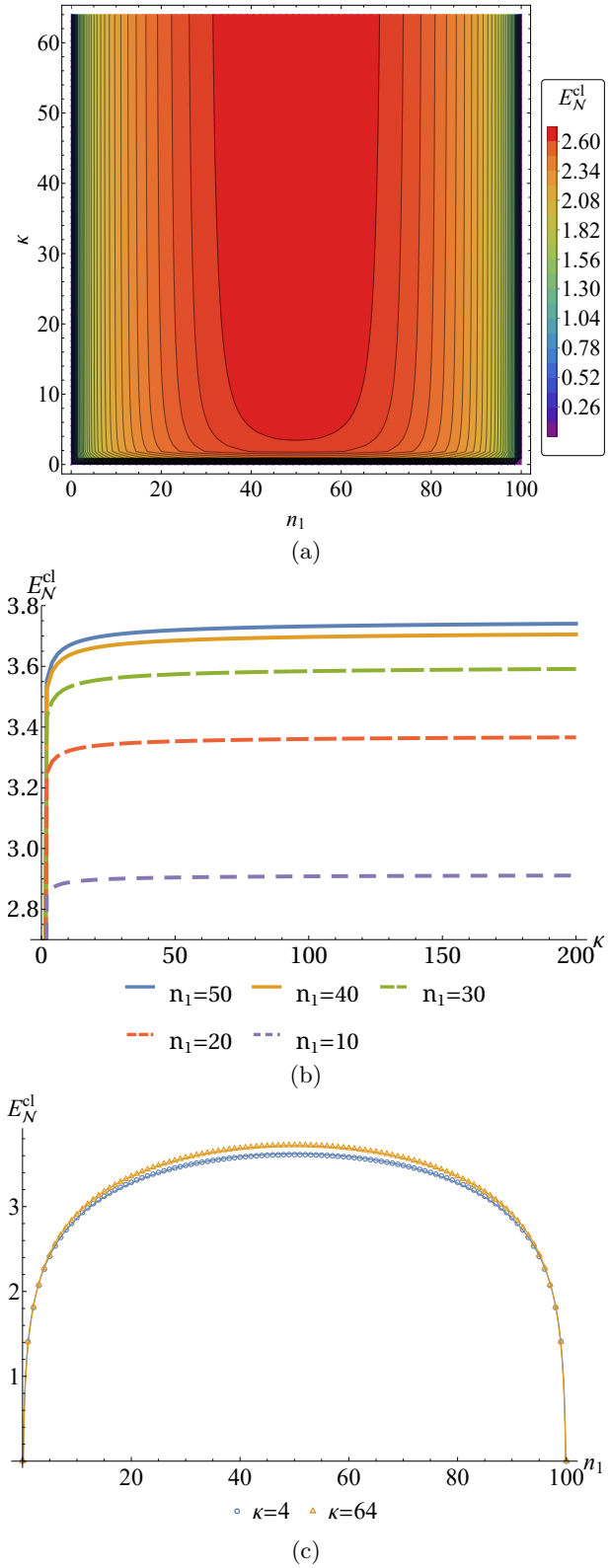


图6. 含有 $k = 0.0001$ 的 $N = 200$ 个振子的谐振链中，两个大小分别为 n_1 和 $n_2 = 100 - n_1$ 的相邻群组的对数负性经典类比。(c) 中的连续曲线是使用公式 (74) 得到的拟合结果。

在图 6(c) 中，我们还绘出了由式 (74) 给出的 $E_{\mathcal{N}}$，将其作为一个函数-

对 n_1 的拟合，其中 $b_1 = 2.5834, b_2 = 1.3864$ （蓝色实线）和 $b_1 = 2.7464, b_2 = 1.3448$（橙色实线）分别与 $\kappa = 4$ 和 $\kappa = 64$的数据吻合良好。这证实了我们的经典方法所作的预测。此外，我们验证了在此情形下，使用经典函数 $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 得到的数值结果与使用对数负性 $E_{\mathcal{N}}$得到的结果相同。值得注意的是，在量子背景下，式 (74)（或 (73)）中的 b_1 是中心荷，可视为系统自由度的一种度量。这意味着，按照我们的经典方法得到的 b_1值对应于中心荷，因为在这种情况下， $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 与其量子对应物得出的结果相同。一般而言，对于高斯态， $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$与 $E_{\mathcal{N}}$ 给出的结果相同，因此经典方法也可用于计算中心荷。不过，要理解常数 b_1 在经典框架中的作用，还需要进一步分析。

最后，第三种情况旨在研究嵌入由 N 个振子组成的谐振链中的两个相邻且大小相等的组 $n_1 = n_2 = 10$ 。该设置如图 7 所示，其中也清楚地表明，振子 21 至N 不属于这两个组。

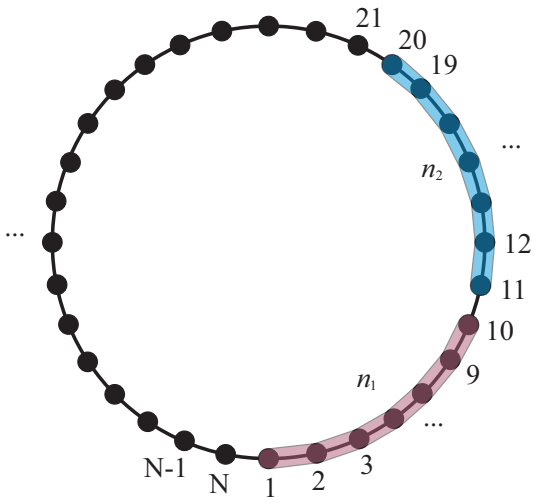


图7. 第三种情形所用设置的示意图。由 N 个振子组成的环形晶格中，包含分别由 $n_1 = 10$ 个和 $n_2 = 10$ 个振子组成的两个相邻群组。

在图 8(a) 中，我们展示了对数负性经典类比作为 N 和 κ 的函数的数值结果。从该图中，我们可以看到两个特征。首先， $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 随 κ 增加，这在前两种情况下也出现过，并且是预期的。其次，对于 κ 的固定值， $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 会随着 N 增加而减小，并且当 N 较大时渐近趋近于一个有限常数值。在图 8(b) 中，对于耦合常数 κ 的不同取值，我们明确展示了这一行为。此外，从该图中我们可以看到， $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 所趋近的值取决于 κ 。

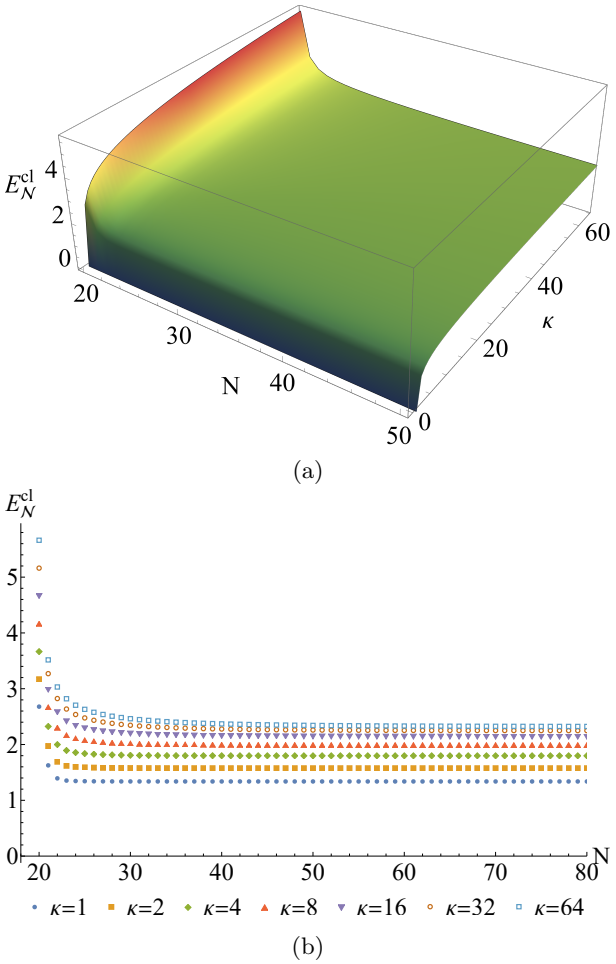


图 8. 在具有 $k = 0.1$ 的 N 个振子组成的谐波链中，两个大小相同的相邻群组 $n_1 = n_2 = 10$ 的对数负性经典类比。

为了进一步了解这一点，我们在图9中展示了 $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$随 κ 的变化情况，其中系统大小固定为 $N = 500$个振子；在本例中，这一数量足够大，可以避免有限尺寸效应（见图8(b)）。我们看到，当N较大时， $E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}}$ 会随 κ 增大而增大，并且表现为

$$E_{\mathcal{N}}^{\mathrm{cl}} \sim 2.458 - \frac{2.149}{\kappa^{0.641} + 0.875}. \qquad (75)$$

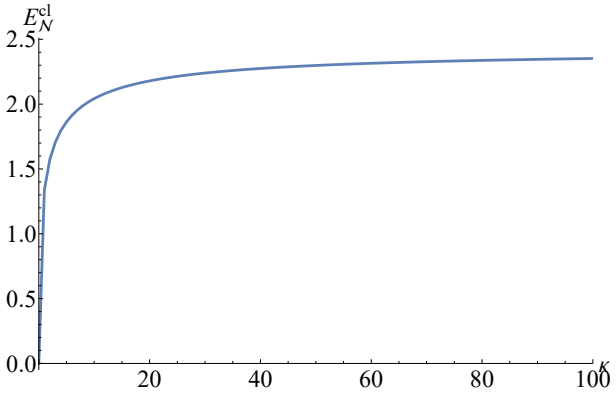


图9. 固定的$N = 500$ 振子链中，两个相邻群组各含 $n_1 = n_2 = 10$ 个振子时的对数负性经典类比。

总结这一情形时，我们指出，图8和图9中报告的结果与对数负性给出的结果完全相同。因此，我们在所考虑的三种情形中得到的结果证实，实际上， E_N^{cl}可以视为由 N 个耦合谐振子组成的系统中高斯态的对数负性经典类比。

VI. 结论

本文中，我们考虑经典可积系统，并引入四种用于衡量纠缠的量子物理量的全新经典类比量：广义纯度、R´enyi 熵、Bastiaans-Tsallis 熵和对数负性。这些经典类比量将经典系统的所有作用变量都等同于一个实数正常数，该常数会在计算结束时消失。我们通过示例表明，对于高斯态，这些经典类比量都能精确复现量子结果。对于非高斯态，这些结果基本上无法复现，因为协方差矩阵并不能完全确定这些态。

对于线性耦合谐振子，根据我们在第V节中的结果，我们发现，与广义熵相比，广义纯度对振子耦合常数变化更加敏感，这从实验角度来看或许值得关注。另一方面，对于巴斯蒂安斯-塔利斯和 R´ényi 熵，我们发现，与冯·诺依曼熵相比，它们在 $\alpha > 1$ 下的增长微乎其微。但对于 $\alpha < 1$，这些熵对参数增长的敏感程度远高于冯诺依曼熵。

对于广义振子链，广义熵和纯度的结果与线性耦合振子的情况相似，因为只需取相应的频率（30），就能重现这些结果。此外，系统变为纯态有两种可能：一种是系统变为非耦合状态，另一种是某些自耦合参数为虚数。后一种可能性意味着需要考虑非厄米系统 [47, 48], ，这表明量子纠缠在非厄米系统[49, 50], 中具有不同的特征，而这种情况在我们的经典语境中已经出现。

对于对数负性，我们从算例中观察到，经典类比（60）与量子情形给出的结果相同，而且只需利用经典信息便可轻松计算。就此而言，我们的经典类比能够重现高斯态的全部量子信息。我们还将本方法的预测与 [60, 61] 对有限系统所得的结果进行了比较，发现二者高度吻合。一个引人注目的结果是，对于高斯态，可以从经典情形中得到中心荷的数值。这也是我们方法的另一项优势。

鉴于这些结果，我们的经典类比量可以作为估计量子效应的初步参考；此外，将我们的结果推广到非可积系统（例如计算广义分形维数） [64]也将是值得的。进一步而言，沿着 [65],所述思路，将这些经典类比量推广到其他种类的态（如非高斯态）或许也会很有意义；在该思路中，纯度等量可以用维格纳函数表示，而我们对其已有出色的经典类比。

致谢

本工作部分ĺðšu DGAPA-PAPIIT 资助，资助编号为 IN105422；同时还ĺðšu MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的 PID2020-116567GB-C22 和 CEX2019-000904-S 项目资助。Bogar D´ıaz 感谢由马德里卡洛斯三世大学和欧盟地平线 2020 研究与创新计划根据玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议第 801538 号共同资助的 CONEX-Plus 计划所提供的支持。

[1] S. Amari, *Information Geometry and Its Applications*, 应用数学科学（施普林格日本，2016年）。

[2] G. Jaeger, *Quantum Information: An Overview*（SpringerNew York，2007）。

[3]J. von Neumann 和 R. Beyer， *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*，Goldstine 印刷材料（普林斯顿大学出版社，1955年）。[4] A. R´enyi， *Probability Theory*（北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1970年）。[5] M. J. Bastiaans，部分相干光的新型不确定性关系，《美国光学学会杂志 A》1，711（1984年）。[6] C. Tsallis，部分相干光的新型不确定性关系，《统计物理学杂志》52，479 1988年( )。[7] G. Vidal 和 R. F. Werner，可计算的纠缠度量，《物理评论 A 》 65，032314 （ 2002 年）。[8] M. V. Berry，绝热变化伴随的量子相位因子，伦敦皇家学会会刊。A. 数学与物理科学 392，45（1984年）。[9] J. P. Provost 和 G. Vallee，量子态流形上的黎曼结构，Commun. Math. Phys. 76，289 1980年( )。[10] M. M¨uller-Lennert、F. Dupuis、O. Szehr、S. Fehr 和 M. Tomamichel，关于量子 R´enyi 熵：一种新的推广及其若干性质，《数学物理杂志》54，122203（2013年）。[11] E. Lenzi、R. Mendes 和 L. da Silva，基于 Rényi 熵的统计力学，Physica A：统计力学及其应用 280，337（2000年）。[12] I. Kim，量子态的 R´enyi α 熵的闭式表达：高斯态与一类非高斯态，《物理评论 E》97，062141（2018年）。[13] P. Jizba 和 T. Arimitsu，R´enyi 熵的可观测性，《物理评论 E》69，026128（2004年）。[14] C. Tsallis，*Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*（Springer 纽约，2009年）。[15] E. Lutz，光学晶格中的反常扩散与 Tsallis 统计，《物理评论 A》67，051402（2003年）。[16] P. Douglas、S. Bergamini 和 F. Renzoni，耗散光学晶格中的可调 Tsallis 分布，《物理评论快报》96，110601（2006年）。[17] G. Wilk 和 Z. W-lodarczyk，基本粒子碰撞与重离子碰撞中的幂律，《欧洲物理杂志 A》40，299（2009年）。[18] V. Khachatryan（CMS 合作组）， pp 碰撞中能量为 $\sqrt{s} = 7$ TeV 的带电强子的横向动量和赝快度分布，《物理评论快报》105，022002（2010年）。[19] A. Carmi 和 E. Cohen，量子力学协方差矩阵的意义，《熵》20，10 3390 20070500 2018年。/e ( )。[20] R. Horodecki、P. Horodecki、M. Horodecki 和 K. Horodecki，量子纠缠，《现代物理评论》81，865（2009年）。[21] K. Audenaert、M. B. Plenio 和 J. Eisert，正部分转置保持操作下的纠缠成本，《物理评论快报》90，027901（2003年）。[22] K. Audenaert、J. Eisert、M. B. Plenio 和 R. F. Werner，谐振链的纠缠性质，《物理评论 A》66，042327（2002年）。[23] J. H. Hannay，可积哈密顿量绝热往返过程中的角变量 holonomy，《物理学杂志 A：数学与通论》18，221（1985年）。[24] S. Chaturvedi、M. S. Sriram 和 V. Srinivasan，相干态的 Berry 相位，《物理学杂志 A：数学与通论》20

，L1071（1987 年）。

[25] Z. Yong-de 和 M. Lei，相干态的 Berry 相位，《Il Nuovo Cimento B (1971-1996)》105, 1343 (1990). [26] J. Gong 和 P. Brumer，平滑哈密顿系统中的内禀退相干动力学：量子—经典对应，《物理评论 A》68, 022101 (2003). [27] D. Gonzalez、D. Guti´errez-Ruiz 和 J. D. Vergara，量子度量张量的经典类比，《Phys. Rev. E》99, 032144 (2019). [28] J. Alvarez-Jimenez、D. Gonzalez、D. Guti´errez-Ruiz 和 J. D. Vergara，量子系统参数空间的几何：经典视角，《Annalen der Physik》532, 1900215 (2020). [29] D. Gonzalez、D. Guti´errez-Ruiz 和 J. D. Vergara，阿贝尔与非阿贝尔量子几何张量的相空间表述，《Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical》53, 505305 (2020). [30] B. D´ıaz、D. Gonz´alez、D. Guti´errez-Ruiz 和 J. D. Vergara，协方差矩阵、纯度、线性熵和冯·诺依曼熵的经典类比量，《物理评论 A》105, 062412 (2022). [31] J. Evslin 和 H. Guo，作为量子态的激发 kink，《The European Physical Journal C》81, 936 (2021). [32] V. I. Belinicher、C. Providencia 和 J. da Providencia，Lipkin–Meshkov–Glick 模型中自旋隧穿的瞬子图像，《Journal of Physics A: Mathematical and General》30, 5633 (1997). [33] B. Gertjerenken 和 M. Holthaus，特洛伊准粒子，《New J ournal of Physics》16, 093009 (2014). [34] R. Moreno、V. Carvalho-Santos、D. Altbir 和 O. Chubykalo-Fesenko，详细考察圆柱形磁性纳米线中的畴壁类型、宽度及临界直径，《J ournal of Magnetism and Magnetic Materials》542, 168495 (2022). [35] M. V. Berry，相空间中的半经典力学：对 Wigner 函数的研究，《Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences》287, 237 (1977). [36] M. de Gosson，*Symplectic Geometry and Quantum Me-chanics*，《Operator Theory: Advances and Applications》（Birkh¨auser Basel，2006年）。[37] L. Diosi，*A Short Course in Quantum Information Theory: An Approach From Theoretical Physics*，《Lecture Notes in Physics》（Springer Berlin Heidelberg，2011年）。[38] G. S. Agarwal，熵、Wigner 分布函数与耦合谐振子系统趋于平衡的过程，《物理评论 A》3, 828 (1971). [39] A. S. Holevo、M. Sohma 和 O. Hirota，量子高斯信道的容量，《物理评论 A》59, 1820 (1999). [40] V. V. Dodonov，混合量子态的纯度与熵界不确定性关系，《Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics》4, S98 (2002). [41] M. G. A. Paris、F. Illuminati、A. Serafini 和 S. De Siena，高斯态的纯度：测量方案及噪声信道中的时间演化，《物理评论 A》68, 012314 (2003). [42] T. Golubeva 和 Y. Golubev，纯度与协方差矩阵，《J ournal of Russian Laser Research》35, 47 (2014). [43] A. Serafini， *Quantum Continuous Variables: A Primer of Theoretical Methods*（CRC Press，Taylor & Francis Group，2017年）。[44] M. de Gosson，论混合高斯态的纯度与熵，载于 *Landscapes of Time-Frequency Analysis*，P. Boggiatto、E. Cordero、M. de Gosson 编，

H. G. Feichtinger、F. Nicola、A. Oliaro 和 A. Tabacco（Springer International Publishing，Cham，2019年），第145–158页。[45] T. F. Demarie，高斯态纠缠熵的教学性介绍，《European Journal of Physics》**39**, 035302 (2018). [46] D. Chruscinski 和 A. Jamiolkowski，*Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics* 36 ，第卷（Springer Science & Business Media，New York，2012年）。[47] C. M. Bender 和 S. Boettcher，具有 PT 对称性的非厄米哈密顿量中的实谱，《Phys. Rev. Lett.》**80**, 5243 (1998). [48] N. Moiseyev，*Non-Hermitian Quantum Mechanics*（Cambridge University Press，2011年）。[49] S.-L. Chen、G.-Y. Chen 和 Y.-N. Chen，通过局域 $\mathcal{PT}$对称操作增强纠缠，《Phys. Rev. A》**90**, 054301 (2014). [50] S. Gopalakrishnan 和 M. J. Gullans，非厄米量子力学中的纠缠与纯化转变，《Phys. Rev. Lett.》**126**, 170503 (2021). [51] G. Adesso、S. Ragy 和 A. R. Lee，连续变量量子信息：高斯态及更多，《Open Systems & Information Dynamics》**21**, 1440001 (2014). [52] R. Bhatia，*Matrix Analysis*（Springer-Verlag Berlin，1997年）。[53] A. Wehrl，熵的诸多面向，《Reports on Mathematical Physics》**30**, 119 (1991). [54] N. Linden、M. Mosonyi 和 A. Winter，Rényi 熵不等式的结构，《Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences》**469**, 20120737 (2013). [55] G. Adesso、A. Serafini 和 F. Illuminati，《连续变量系统中的极值纠缠与混合度》，《物理评论 A》**70**，022318（2004年）。[56] Y. S. Kim 和 M. E. Noz，《耦合振子、纠缠振子与洛伦兹协变谐振子》，J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7**，S458（2005年）。[57] J. P. Paz 和 A. J. Roncaglia，《同一环境中两个振子之间纠缠的动力学》，Phys. Rev. Lett. **100**，220401（2008年）。[58] D. N. Makarov，《耦合谐振子及其量子纠缠》，Phys. Rev. E **97**，042203（2018年）。[59] D. Han、Y. S. Kim 和 M. E. Noz，《费曼的宇宙其余部分的说明性示例》，《美国物理学杂志》**67**，61（1999年）。[60] P. Calabrese、J. Cardy 和 E. Tonni，《量子场论中的纠缠负性》，Phys. Rev. Lett. **109**，130502（2012年）。[61] P. Calabrese、J. Cardy 和 E. Tonni，《扩展系统中的纠缠负性：一种场论方法》，《统计力学杂志：理论与实验》**2013年**，P02008（2013年）。[62] J. Kofler、V. Vedral、M. S. Kim 和 i. c. v. Brukner，《线性谐振子链中集体算符之间的纠缠》，Phys. Rev. A **73**，052107（2006年）。[63] R. A. Jefferson 和 R. C. Myers，《量子场论中的电路复杂度》，J. High Energy Phy. **2017年**，107（2017年）。[64] O. Zmeskal、P. Dzik 和 M. Vesely，《分形系统的熵》，《计算机与应用数学》**66**，135（2013年）。[65] M. Walschaers，《非高斯量子态及其探寻之处》，PRX Quantum **2**，030204（2021年）。