arXiv:2305.02891v1 [math.MG] 4 May 2023

通过度量空间中的周长极小化实现 BV 延拓集的逼近

JESSE KOIVU、DANKA LUČIĆ 和 TAPIO RAJALA

摘要。我们证明，在度量测度空间中，每个有界区域都可以由闭的 BV 延拓集从内部按测度逼近。这些延拓集是通过极小化周长与该区域和集合之差的测度之和得到的。根据已有结果，在 PI 空间中，极小化子具有局部拟极小曲面的开代表。我们给出一个 PI 空间中的例子，表明极小化子的开代表未必是 aBV 延拓区域，也未必是局部约翰区域。

1. 引言

本文研究完备可分度量测度空间 X 中 BV 延拓集的存在性。所谓 BV 延拓集，是指满足以下条件的集合 E：定义在 E 上的任意可积且全变差有限的函数，都可以延拓到整个空间 X，且其 BV 范数的增幅不超过某个常数倍。 BV 延拓集和 Sobolev 延拓集在分析中十分有用，因为借助延拓，我们可以将原本只适用于全局定义函数的工具，也用于仅定义在延拓集上的函数。并非空间中的每个区域都是延拓集，因此，当所考虑的是定义在任意区域 Ω 上的函数时，通常先从内部用延拓集逼近 Ω，再将函数限制在该集合上，然后将其延拓为全局定义的函数。这个过程立即引出一个问题：什么时候可以从内部用延拓区域（或集合）逼近一个区域?

在欧几里得情形下，这个问题早已有了答案。例如，根据 Calderón 和 Stein 的研究 [7, 20] 我们知道， $\mathbb{R}^n$ 中的 Lipschitz 区域是 $W^{1,\,p}$延拓区域，对任意 $p \geq 1$都成立。 $\mathbb{R}^n$ 中的任意有界区域，都可以从内部和外部轻松地用 Lipschitz 区域逼近。后来人们发现，在更抽象的 PI 空间情形下（即满足局部庞加莱不等式 [14]的倍增度量测度空间；见第4节），Lipschitz 区域的良好替代是均匀区域。在 [4] 中，研究者证明了 p-PI 空间中的均匀区域是 $N^{1,\,p}$延拓区域；对于 Newton 索博列夫空间，这一结论对 $1 \leq p < \infty$成立。而在[17] 中，研究者证明了 1-PI 空间中的有界均匀区域是 BV 延拓区域。最后， [19] 证明，在倍增拟凸度量空间中，可以从内部和外部用均匀区域逼近区域。由于 PI 空间是拟凸的 [9, 15],，我们可以得出结论：在 PI 空间中，可以用延拓区域逼近区域。

近年来，人们对不满足 PI 假设的度量测度空间 (X,d ₥) 上的分析越来越感兴趣。然而， BV-函数的延拓性似乎仅在以下情况下得到研究。

日期：2023年5月5日。2000 数学主题分类。主要分类 30L99。次要分类 46E35、26B30。

一些特定情形，例如无限维高斯情形 [5]。我们继续研究一般度量测度空间，并在定理 3.4 中表明，即使没有 PI 假设，仍然可以从内部逼近区域 Ω，借助闭集 BV-延拓集。尚不清楚类似于通过一致区域进行逼近的方法是否适用于一般度量测度空间。因此，我们采取一种完全不同的方法，通过对泛函 $A \mapsto \mathrm{Per}(A) + \lambda \mathfrak{m}(\Omega \setminus A)$ 进行极小化来获得延拓集，其中参数 $\lambda > 0$较大。第 3 节包含定理 3.4 的证明以及关于极小化过程的评注。在此之前，第 2节回顾并证明关于 BV-函数和有限周长集的预备结果。第 4 节将极小化方法与具有局部拟极小边界的区域联系起来，并且还表明，在 PI 空间中，泛函的极小化子的开代表，以及相应的具有局部拟极小边界的区域，不一定是 BV-延拓区域，也不一定是局部 John 区域。论文的最后部分，即第 5 节，列出由我们的延拓结果提出的开放问题。

2. 预备知识

我们始终假设 $(\mathrm{X}, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ 是一个度量测度空间，其中 (X, d) 是一个完备且可分的度量空间，$\mathfrak{m}$ 是一个在有界集上有限的博雷尔测度。X 的所有博雷尔子集组成的集合记为 $\mathscr{B}(\mathrm{X})$。我们将中心为 $x \in \mathrm{X}$、半径为 $r > 0$ 的开球和闭集球定义为

$$B_r(x) := \{y \in \mathrm{X} : \mathsf{d}(x, y) < r\} \quad \text{and} \quad \bar{B}_r(x) := \{y \in \mathrm{X} : \mathsf{d}(x, y) \leq r\},$$

分别地。我们将用 $\mathrm{LIP}(\mathrm{X})$ 表示 X 上所有利普希茨函数组成的空间，并用 $\mathrm{Lip}(f)$ 表示 $f \in \mathrm{LIP}(\mathrm{X})$ 的（全局）利普希茨常数。对于任意 $f \in \mathrm{LIP}(\mathrm{X})$ 和 $E \subset \mathrm{X}$，我们定义 $\mathrm{Lip}(f; E) := \mathrm{Lip}(f|_E)$。有了这一记号，函数 $f \in \mathrm{LIP}(\mathrm{X})$ 的 *渐近 Lipschitz 常数*（或 渐近斜率）是一个函数 $\mathrm{lip}_a(f) \colon \mathrm{X} \to [0, +\infty)$，定义为

$$\mathrm{lip}_a(f)(x) := \inf_{r>0} \mathrm{Lip}\big(f; B_r(x)\big) \quad \text{for every } x \in \mathrm{X}.$$

还需注意，$\mathrm{lip}_a(f) \leq \mathrm{Lip}(f)$。给定一个开集 $A \subset \mathrm{X}$，我们称函数 $f \colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$在 A 上是局部利普希茨的，如果对于每个 $x \in A$，都存在 $r > 0$，使得 $B_r(x) \subseteq A$ 且$f|_{B_r(x)}$ 是利普希茨函数。我们用 $\mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(A)$ 表示 A 上所有局部利普希茨函数构成的空间。

有界变差函数。接下来，我们回顾有界变差函数空间（简称 BV 函数）的定义，以及与 BV 函数相关的全变差（测度）的一些刻画。以下内容基于 [11]。

定义 2.1（全变差）。设 $(\mathrm{X}, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ 为一个度量测度空间。考虑 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m})$。给定一个开集 $A \subset \mathrm{X}$，我们定义

$$|Df|_{\mathrm{X}}(A) := \inf \left\{ \liminf_{n\to\infty} \int_A \mathrm{lip}_a(f_n) \, \mathrm{d}\mathfrak{m} : \, f_n \in \mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(A), \, f_n \to f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m}_{|A}) \right\}.$$

我们按如下方式将 $|Df|_{\mathrm{X}}$ 扩展到所有博雷尔集：给定 $B \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$，我们定义

$$|Df|_{\mathrm{X}} := \inf \{|Df|_{\mathrm{X}}(A), B \subset A, A \text{ is an open set}\}.$$

通过这一构造，$|Df|_{\mathrm{X}}\colon \mathscr{B}(\mathrm{X}) \to [0,\infty)$ 是一个博雷尔测度，称为全变差测度，它对应于 f ([18, 定理 3。4]根据定义可知，给定一个开集 $A \subset \mathrm{X}$

$$f_n \to f \quad \text{in } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m}_{|A}) \qquad \Rightarrow \qquad |Df|_{\mathrm{X}}(A) \le \varliminf_{n\to\infty} |Df_n|_{\mathrm{X}}(A).$$

给定一个博雷尔集 $B \subset \mathrm{X}$ 和 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m}_{|B})$，我们引入以下记号：

$|Df|_B :=$ f 在度量测度空间 $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mathfrak{m}_{|B})$ 中计算的全变差测度。

定义 2.2（空间 $\overset{\circ}{BV}(B)$ 和 $BV(B)$）。设 $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mathfrak{m})$ 是一个度量测度空间。令 $B \subset \mathrm{X}$ 为博雷尔集。我们定义

$$\overset{\circ}{BV}(B) := \{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m}_{|B}) : |Df|_B(B) < +\infty \},$$
$$BV(B) := \{ f \in L^1(\mathfrak{m}_{|B}) : |Df|_B(B) < +\infty \}.$$

我们在空间 $\overset{\circ}{BV}(B)$ 上赋予半范数，并在空间 $BV(B)$ 上赋予范数，其定义为

$$\|f\|_{\overset{\circ}{BV}(B)} := |Df|_B(B) \quad \text{and} \quad \|f\|_{BV(B)} := \|f\|_{L^1(\mathfrak{m}_{|B})} + |Df|_B(B),$$

分别。

注 2.3. 以下关于整个空间全变差测度的刻画对我们的目的很有用。由 [11, 定理 4.5.3] 可得

$$|Df|_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}) := \inf \left\{ \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathrm{X}} \mathrm{lip}_a(f_n)\, \mathrm{d}\mathfrak{m} : f_n \in \mathrm{LIP}(\mathrm{X}),\ f_n \to f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m}) \right\}.$$

一般来说，计算全变差测度时不能只考虑全局利普希茨函数：考虑 $A = (0,1) \cup (1,2) \subset \mathbb{R}$ 和 $f = \chi_{(0,1)}$。

我们将使用以下一种利普希茨延拓版本，其中渐近 Lipschitz 常数保持不变。

命题 2.4 ([12, 定理 1。1])。设 (X, d) 是一个度量空间，$C \subset \mathrm{X}$ 是其子集，$g\colon C \to \mathbb{R}$ 是一个利普希茨函数。那么，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个 $(\mathrm{Lip}(g) + \varepsilon)$-利普希茨函数 $f\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$，其在 C 上的限制与 g 一致，并且满足

$$\mathrm{lip}_a(g)(x) = \mathrm{lip}_a(f)(x) \qquad \textit{for every } x \in C.$$

此外，若 g 有界（分别地，具有有界支撑），则可以将 f 选为有界（分别地，具有有界支撑）。

结合命题 2.4 与注释 2.3 可得以下结论。

推论 2.5. 设 $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mathfrak{m})$ 是一个度量测度空间。设 $B \subset \mathrm{X}$ 为闭集，并定义 $Y = (B, \mathrm{d}|_{B\times B}, \mathfrak{m}|_B)$。则 $BV(B) = BV(Y)$，且全变差测度 $|Df|_B$ 与 $|Df|_Y$ 在 B 的博雷尔子集上相等，对每个 $f \in BV(B)$ 均成立。此外，

$$|Df|_B(B) = \inf \left\{ \varliminf_{n\to\infty} \int_B \mathrm{lip}_a(f_n)\, \mathrm{d}\mathfrak{m} : f_n \in \mathrm{LIP}(\mathrm{X}),\ f_n \to f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m}_{|B}) \right\}. \tag{1}$$

证明。由命题 2.4 可知，每个 $f \in \mathrm{LIP}(B)$ 都可以延拓为 $\mathrm{LIP}(\mathrm{X})$ 中的一个元素，且不改变其在 B上的渐近 Lipschitz 常数。因此（考虑到注记 2.3），我们得到

$$|Df|_B(\mathrm{X}) = |Df|_Y(Y), \tag{2}$$

因此 $BV(B) = BV(Y)$（参见 [12, 定理 3。1]）。

现在，取 $A \subset X$ 为开集。由于每个 $f \in \mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(A)$ 都可以限制为 $\mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(B \cap A)$ 的一个元素，我们得到

$$|Df|_Y(B \cap A) \leq |Df|_B(A). \tag{3}$$

根据全变差测度的定义，不等式（3）可扩展到所有博雷尔集 $A \subset \mathrm{X}$。最后，由（2）并注意到 $|Df|_Z$对于任意度量测度空间都是有限博雷尔测度（Z， d_Z， $\mathfrak{m}_Z$），对于所有博雷尔集 $A \subset \mathrm{X}$，我们有

$$|Df|_B(\mathrm{X}) \leq |Df|_Y(B) = |Df|_Y(A \cap B) + |Df|_Y(B \setminus A) \leq |Df|_B(A) + |Df|_B(\mathrm{X} \setminus A) = |Df|_B(\mathrm{X})$$

从而得到等式

$$|Df|_Y(A \cap B) = |Df|_B(A).$$

等式（1）由在上述等式中取 $A = B$ 得到，结合注2.3 和命题2.4。□

我们定义博雷尔子集 $B \subset \mathrm{X}$ 上有限周长集的概念。

定义 2.6（博雷尔子集 B 上的有限周长集）。 设 $(\mathrm{X}, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ 为度量测度空间，且 $B, E \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$。我们将 E 的周长 定义在 B 上为

$$\mathrm{Per}_B(E) := |D\chi_E|_B(B).$$

若 E 在 B 上的周长有限，则称其具有有限周长，即量 $\mathrm{Per}_B(E)$ 有限。此外，对每个 $F \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$，我们定义量 $\mathrm{Per}_B(E; F) := |D\chi_E|_B(B \cap F)$。

为简化记号，当 B 等于整个（底）空间 X 时，我们通常用 $\mathrm{Per}(E)$ 代替 $\mathrm{Per}_{\mathrm{X}}(E)$。

延拓集与延拓性质。

定义 2.7（BV-延拓集）。 若集合 $B \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ 为 BV-延拓集，则存在$C > 0$ 和映射 $E_B \colon BV(B) \to BV(\mathrm{X})$，使得对每个 $f \in BV(B)$，以下条件均成立：

i) $\|E_B f\|_{BV(\mathrm{X})} \leq C\|f\|_{BV(B)}$; ii) $E_B f|_B = f$.

给定一个 BV-延拓集 B，我们将 E_B 的算子范数定义为

$$\|E_B\| := \inf\left\{c \geq 0 : \|E_B f\|_{BV(\mathrm{X})} \leq c\|f\|_{BV(B)} \text{ holds for all } f \in BV(B)\right\}.$$

定义 2.8（有限周长集的延拓性质）。 设 $B \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$。如果对于完整 BV-范数， B 具有有限周长集合的延拓性质，则称存在$C > 0$，使得对于任意满足 $\mathrm{Per}_B(E) < +\infty$的 $E \subset B$，存在 $E \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$，并满足以下两个性质：

i) $\mathfrak{m}(\widetilde{E}) + \mathrm{Per}(\widetilde{E}) \leq C\big(\mathfrak{m}(E) + \mathrm{Per}_B(E)\big)$

ii) $\mathfrak{m}(E \Delta (\widetilde{E} \cap B))=0$.

3. 从内部通过 BV 延拓集进行逼近

本节证明本文的主要结果，即定理 3.4，根据该定理，我们可以从内部通过闭集 BV-延拓集来估计区域。在证明中，我们需要以下两个结果。第一个结果将 BV-函数的可延拓性与有限周长集的可延拓性联系起来。在欧几里得情形中，该结果由 Burago 和 Maz'ya [6]得到。随后，Baldi 和 Montefalcone [3]将其推广到 PI 空间。周长延拓与 BV-延拓同 $W^{1,1}$-延拓之间的联系，已在欧几里得空间中的 [13] 进行了详细研究，随后又在一般度量测度空间中的 [8]得到了研究。在 [8, 命题 3.4] 中，证明了与我们所需最为接近的延拓结果。其中证明了：一个博雷尔集是 BV-延拓集，当且仅当它对于具有完整范数的有限周长博雷尔集具有延拓性质。由于在我们的证明中需要保持在闭集这一类中，因此我们只能使用开集来检验周长延拓，所以需要对这一结果作一处小的修改。

命题 3.1。 设 (X,d $\mathfrak{m}$) 为一个度量测度空间。博雷尔子集 $\Omega \subset \mathrm{X}$ 具有 BV 的延拓性质，当且仅当它对于带完整范数的有限周长开集具有延拓性质。

证明。 既然已有由 [8, 命题 3.4], 给出的 BV延拓与博雷尔集的周长延拓之间的等价性，我们只需证明：对开集的周长延拓蕴含对 $BV(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 中函数的 BV延拓。为此，取 $f \in BV(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$。根据全变差的定义，存在一列开集 $U_n \supset \Omega$ 以及函数 $f_n \in \mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(U_n)$，使得 $f_n \to f$ 属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m}|_\Omega)$，并且

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \mathrm{lip}_a(f_n)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = |Df|_\Omega(\Omega).$$

现在，根据假设，我们可以将每个相对开集 $A_{n,\,t} = \{x \in \Omega :\ f_n(x) > t\}$ 扩张为一个 Borel˜集 $A_{n,\,t} \subset \mathrm{X}$，使得

$$\mathfrak{m}(\tilde{A}_{n,t}) + \mathrm{Per}_{\mathrm{X}}(\tilde{A}_{n,t}) \le C\left(\mathfrak{m}(A_{n,t}) + \mathrm{Per}_\Omega(A_{n,t})\right),$$

其中， $C > 0$ 是由开集具有扩˜张性质这一假设给出的常数。˜如 [8, 命题 3.4], 的证明所示，这意味着我们可以得到 $f_n \in BV(\mathrm{X})$ 的一个扩张，它是 f_n 的扩张，并满足

$$\|\tilde{f}_n\|_{BV(\mathrm{X})} \le C\|f_n\|_{BV(\Omega)}.$$

应用 Mazur引理（详情参见 [8, 命题 3.4] 的证明）可知，˜我们也能得到 $f \in BV(\mathrm{X})$ 的一个扩˜张，它是 f 的扩˜张，并满足

$$\|\tilde{f}\|_{BV(\mathrm{X})} \le C\|f\|_{BV(\Omega)}.$$

证明至此完成。 □

下一个引理解释了为什么我们的方法仅适用于闭集。稍后在例3.3中，我们将看到，该引理的结论对一般集合 $B \subset \mathrm{X}$并不成立。

引理 3.2. 设(X，d $\mathfrak{m}$) 为一个度量测度空间。给定闭集 $B \subset \mathrm{X}$ 以及 $A \subset B$ 上的一个有限周长集合，则有

$$\mathrm{Per}(A) + \mathrm{Per}(B \setminus A) \le \mathrm{Per}(B) + 2\mathrm{Per}_B(A).$$

证明。 设 $(f_i)_i \subset \mathrm{LIP(X)}$ 满足

$$f_i \to \chi_B \text{ in } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m}) \quad \text{and} \quad \lim_{i\to\infty} \int_{\mathrm{X}} \mathrm{lip}_a(f_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \mathrm{Per}(B). \tag{4}$$

由于 B 是闭集，根据推论 2.5 存在一个序列 $(g_i)_i \subset \mathrm{LIP(X)}$ 使得

$$g_i \to \chi_A \text{ in } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m}_{|B}) \quad \text{and} \quad \liminf_{i\to\infty} \int_B \mathrm{lip}_a(g_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \mathrm{Per}_B(A). \tag{5}$$

对于固定的 $i \in \mathbb{N}$，我们于是有

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{\mathrm{X}\setminus B} f_j \,\mathrm{lip}_a(g_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = 0.$$

因此，在取（重新标记的）$(f_i)_i$ 的一个子序列后，我们可以假设娱乐主管

$$\lim_{i\to+\infty} \int_{\mathrm{X}\setminus B} f_i \,\mathrm{lip}_a(g_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = 0. \tag{6}$$

现在注意到， $f_i\, g_i \to \chi_A$ 和 $f_i\ (1-g_i) \ \to \chi_{B\setminus A}$ 属于 L^1_{loc}（$\mathfrak{m}$），并且

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{X}} \mathrm{lip}_a(f_i\, g_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \int_{\mathrm{X}} \mathrm{lip}_a(f_i\,(1-g_i))\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \\
&\le \int_{\mathrm{X}} (f_i \,\mathrm{lip}_a(g_i) + g_i \,\mathrm{lip}(f_i))\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \int_{\mathrm{X}} (f_i \,\mathrm{lip}_a(1-g_i) + (1-g_i)\,\mathrm{lip}_a(f_i))\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \\
&= 2\int_{\mathrm{X}} f_i \,\mathrm{lip}_a(g_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \int_{\mathrm{X}} \mathrm{lip}_a(f_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.
\end{aligned}$$

考虑到 (6，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Per}(A) + \mathrm{Per}(B\setminus A) &\le \liminf_{i\to\infty} 2\int_{\mathrm{X}} f_i \mathrm{lip}_a(g_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \int_{\mathrm{X}} \mathrm{lip}_a(f_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \\
&= \liminf_{i\to\infty} 2\int_{B} f_i \mathrm{lip}_a(g_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \int_{\mathrm{X}} \mathrm{lip}_a(f_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \le 2\mathrm{Per}_B(A) + \mathrm{Per}(B),
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由（5）和（4）得出。 □

请注意，如果将闭集 B 替换为一般的博雷尔集，引理 3.2 通常并不成立。这一点可由下面这个简单的例子看出。

例 3.3。 考虑 $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_{\mathrm{Eucl}}, \mathcal{L}^1)$ 作为我们的度量测度空间。令 $B = (0,1)\cup(1,2)$ 且 $A = (0,1)$。于是我们有

$$4 = \mathrm{Per}(A) + \mathrm{Per}(B\setminus A) > \mathrm{Per}(B) + 2\mathrm{Per}_B(A) = 2.$$

定理 3.4. 设(X,d $\mathfrak{m}$) 为一个度量测度空间。设$\Omega \subset \mathrm{X}$ 是一个有界开集。则对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个闭集 $G \subset \Omega$，使得 $\mathfrak{m}(\Omega\setminus G) < \varepsilon$，并且零延拓给出一个从 $BV(G)$ 到 $BV(\mathrm{X})$的有界算子。

证明。 记 $\mathcal{C}_\Omega = \{A \subset \Omega : \ A\text{闭集}\}$。我们考虑以下泛函。对于 $\lambda > 0$，定义 $M_\lambda \colon \mathcal{C}_\Omega \to [0, +\infty]$ 为

$$M_\lambda(A) \coloneqq \mathrm{Per}(A) + \lambda \mathfrak{m}(\Omega \setminus A).$$

我们将证明，对于足够大的 λ，由 M_λ 给出的偏序中存在一个极小元，它将给出所需的集合 G。我们将证明分为几个步骤。

步骤 1：对每个 $\lambda > 0$，有 $\inf_{A\in\mathcal{C}_\Omega} M_\lambda(A) < +\infty$。此外，给定 $\varepsilon > 0$，存在 $\lambda > 0$使得对任意满足 $(A_i^\lambda)_i \subset \mathcal{C}_\Omega$ 的序列 $(A_i^\lambda) \to \inf_{A\in\mathcal{C}_\Omega} M_\lambda(A)$ 当 $i \to +\infty$ 时，我们有

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{1}{\lambda} M_\lambda(A_i^\lambda) < \varepsilon.$$

步骤 1 的证明。对每个 $r > 0$，我们定义

$$B(\partial\Omega, r) \coloneqq \{x \in X : \ \mathrm{dist}(\partial\Omega, x) < r\} \quad \text{and} \quad m_r \coloneqq \mathfrak{m}(\Omega \cap B(\partial\Omega, r)).$$

考虑截断距离函数 $\mathrm{dist}_r(\cdot, \partial\Omega) \coloneqq \mathrm{dist}(\cdot, \partial\Omega) \wedge r$。由余面积公式可得

$$|D\mathrm{dist}_r(\cdot, \partial\Omega)|(\Omega) = \int_0^r \mathrm{Per}(\{\mathrm{dist}_r(\cdot, \partial\Omega) > s\}; \Omega)\, \mathrm{d}s = \int_0^r \mathrm{Per}(\Omega \setminus B(\partial\Omega, s))\, \mathrm{d}s.$$

此外，$|D\mathrm{dist}_r(\cdot, \partial\Omega)|(\Omega) = |D\mathrm{dist}_r(\cdot, \partial\Omega)|(\Omega \cap B(\partial\Omega\ r)) \le \mathfrak{m}(\Omega \cap B(\partial\Omega\ r)) = m_r$。结合上述结果，可得存在 $s \in [0, r]$ 使得

$$\mathrm{Per}(\Omega \setminus B(\partial\Omega, s)) \le \frac{m_r}{r},$$

证明了该论断的第一部分。现在令 $\varepsilon > 0$。取 $r > 0$ 充分小，使得 $m_r = \mathfrak{m}(B(\partial\Omega\ r)\cap\Omega) < \frac{\varepsilon}{2}$。注意，对任意 $\lambda > 0$，我们有 $\lim_{i\to\infty} M_\lambda(A_i^\lambda) \le \frac{m_r}{r} + \lambda m_r$，因此取 $\lambda > \frac{1}{r}$ 后，我们得到

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{\lambda} M_\lambda(A_i^\lambda) \le \frac{m_r}{\lambda r} + m_r < 2m_r < \varepsilon.$$

这证明了步骤 1 的结论。 □

接下来，我们将考虑 $\mathcal{C}_\Omega$ 的以下子集（由于步骤 1，该子集非空）：

$$\mathcal{C}_{\Omega,\lambda} \coloneqq \{A \in \mathcal{C}_\Omega \ : \ M_\lambda(A) < +\infty\}.$$

现在考虑一个偏序 $A \prec_\lambda B$ 于 $\mathcal{C}_{\Omega,\ \lambda}$ 定义为

$$A \prec_\lambda B \quad \text{if and only if} \quad \mathfrak{m}(A \setminus B) = 0 \text{ and } M_\lambda(A) \le M_\lambda(B).$$

步骤 2：对于每个 $\lambda > 0$ 和 $C \in \mathcal{C}_{\Omega,\ \lambda}$，集合 $\{A \in \mathcal{C}_{\Omega,\lambda} : \ A \prec_\lambda C\}$ 关于偏序 $\prec_\lambda$ 具有一个极小元素。

步骤 2 的证明。根据佐恩引理，只需证明任意一条链 $(A_i^\lambda)_{i\in I} \subset \{A \in \mathcal{C}_{\Omega,\lambda} : \ A \prec_\lambda C\}$都包含一个下界。通过在链中归纳地选取元素，使得 $\mathfrak{m}(A_i^\lambda \setminus A_j^\lambda) > 0$，我们可以假设 $I = \mathbb{N}$。此外，我们可以假设对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都有 $A_{i+1}^\lambda \subset A_i^\lambda$。我们声称

$$A^\lambda = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^\lambda$$

给出了这个下界。显然，对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都有 $A^\lambda \subset A_i^\lambda$，因此只需证明对所有 $i \in \mathbb{N}$，$M_\lambda(A^\lambda) \leq M_\lambda(A_i^\lambda)$。为验证后者，注意到由测度的连续性可得$\mathfrak{m}(A^\lambda) = \lim_{i\to+\infty} \mathfrak{m}(A_i^\lambda)$。因此，$\chi_{A_i^\lambda} \to \chi_{A^\lambda}$ 属于 $L^1(X)$，故由周长的下半连续性，还有 $\mathrm{Per}(A^\lambda) \leq \liminf_{i\to+\infty} \mathrm{Per}(A_i^\lambda)$，从而证明了这一断言。□

现在我们证明，对于任意 $\lambda > 0$ 以及关于 $\prec_\lambda$ 的极小元 $G_\lambda \in \mathcal{C}_{\Omega,\,\lambda}$，从 G_λ 出发的零延拓给出了一个有界算子。给定任意博雷尔集 $B \subset X$，以下我们将从 $BV(B)$ 到 $BV(X)$ 的零延拓算子记为 E_B。

步骤 3：任取 $\lambda > 0$ 和 $C \in \mathcal{C}_{\Omega,\,\lambda}$。令 $G_{\lambda,\,C}$ 为 $\{A \in \mathcal{C}_{\Omega,\lambda}$ 中关于偏序 $\prec_\lambda$ 的一个极小元：$A \prec_\lambda C\}$。那么我们有 $\|E_{G_\lambda}\| < +\infty$。

步骤 3 的证明。 根据命题 3.1，我们只需检验，对 $G_{\lambda,\,C}$ 中有限周长开集的示性函数，零延拓是有界的。因此，设 $A \subset G_{\lambda,\,C}$ 为相对开集，且 $\mathrm{Per}_{G_{\lambda,\,C}}(A) < +\infty$。那么，根据 $G_{\lambda,\,C}$ 的极小性以及 $\mathfrak{m}((G_{\lambda,\,C} \setminus A) \setminus G_{\lambda,\,C}) = 0$ 这一事实，我们有

$$\mathrm{Per}(G_{\lambda,C}) + \lambda\mathfrak{m}(\Omega \setminus G_{\lambda,C}) \leq \mathrm{Per}(G_{\lambda,C} \setminus A) + \lambda\mathfrak{m}(\Omega \setminus (G_{\lambda,C} \setminus A)), \tag{7}$$

并根据引理 3.2

$$\mathrm{Per}(G_{\lambda,C} \setminus A) + \mathrm{Per}(A) \leq \mathrm{Per}(G_{\lambda,C}) + 2\mathrm{Per}_{G_{\lambda,C}}(A). \tag{8}$$

因此，结合（7）和（8），我们得到

$$\mathrm{Per}(A) \leq 2\mathrm{Per}_{G_{\lambda,C}}(A) + \lambda\mathfrak{m}(A),$$

因此，对于示性函数，$\|E_{G_{\lambda,C}}\| \leq \max\{2, \lambda + 1\}$。 □

现在，我们已经准备好将上述三个步骤中得到的结果结合起来，从而证明该定理的结论。

步骤 4。 固定 $\varepsilon > 0$。存在一个闭集 $G \subset \Omega$ 使得

$$\mathfrak{m}(\Omega \setminus G) < \varepsilon \quad \text{and} \quad \|E_G\| < +\infty.$$

步骤 4 的证明。 令 λ（取决于 ε）满足步骤 1 的断言，并固定任意一个极小序列 $(A_i^\lambda)_{i\in\mathbb{N}}$。那么，当 $i \in \mathbb{N}$ 足够大时，我们有 $\frac{1}{\lambda}M_\lambda(A_i^\lambda) < \varepsilon$，从而 $A_i^\lambda \in \mathcal{C}_{\lambda,\,\Omega}$。令$G_{\lambda,\,A_i^\lambda}$为集合 $\{A \in \mathcal{C}_{\Omega,\lambda}$: $A \prec_\lambda A_i^\lambda\}$ 中关于偏序 $\prec_\lambda$ 的一个极小元素，其存在性已在步骤 2 中得到证明。由步骤 3 我们知道，$G_{\lambda,\,A_i^\lambda}$是一个 BV-延拓集，因此只需验证 $\mathfrak{m}(\Omega \setminus G_{\lambda,\,A_i^\lambda}) < \varepsilon$。为验证这一点，注意到，根据 $G_{\lambda,\,A_i^\lambda}$ 的极小性，有

$$\mathfrak{m}(\Omega \setminus G_{\lambda,A_i^\lambda}) \leq \frac{1}{\lambda}M_\lambda(G_{\lambda,A_i^\lambda}) \leq \frac{1}{\lambda}M_\lambda(A_i^\lambda) < \varepsilon.$$

T这证明了步骤 4（以及定理本身）关于 $G = G_{\lambda,\,A_i^\lambda}$ 的结论。 □

□

通过用开集从外部逼近可测集，定理 3.4 给出了以下推论。

推论 3.5。 设 (X,d $\mathfrak{m}$) 为一个度量测度空间，且令 $F \subset \mathrm{X}$ 为一个有界博雷尔集。则对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个闭集 $G \subset \mathrm{X}$，使得 $\mathfrak{m}(F \Delta G) < \varepsilon$，并且零延拓给出一个从 $BV(G)$ 到 $BV(\mathrm{X})$的有界算子。

注 3.6。 推论 3.5 的一个更强版本，即要求此外还满足 $G \subset F$，并不成立。反例可通过取 F 为 $\mathbb{R}$ 中配备勒贝格测度的胖康托尔集来给出。

我们以本 节的一个例子作结，其中集合 G没有开代表 .

例 3.7。 令 $X = \mathbb{R}^2$ 配备欧几里得距离。我们定义 $\Omega = Q \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$，其中$Q = (0,1) \times (-1, 0)$ 和 T_n 定义如下。首先定义一个底边长度为 1 的三角形:

$$T = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\, y < x < 1 - y\big\}.$$

注意， T 包含底边，但不包含三角形的另外两条边。接着我们定义

$$T_n = \big(2^{-2n+1} T + (2^{-2n+1}, 0)\big) \quad \text{and} \quad S = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n.$$

Let

$$w(x, y) = \begin{cases} \min\big\{1, \operatorname{dist}\big((x, y), \mathbb{R} \times \{-1, 0\}\big)\big\}, & (x, y) \text{ with } y \in [-1, 0] \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，定义

$$\mathfrak{m} = w\mathcal{L}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \delta_{x_n},$$

w这里 $x_n = (2^{-2n+1} + 2^{-2n}, 0)$ 是三角形 T_n 底边的中心点。

步骤 1： 我们来证明，可以将泛函 M_λ 相对于立方体 $\overline{Q}$ 和三角形 T_n进行分解。首先注意，对于所有 $A \subset \Omega$ 我们都有

$$\mathfrak{m}(\Omega \setminus A) = \mathfrak{m}(Q \setminus A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(T_n \setminus A).$$

为了证明泛函 M_λ 的周长部分也分裂，我们接下来证明，对于有限周长集 $A \subset \Omega$，有 $\mathrm{Per}(A \cap \mathbb{R}^2_+; \mathbb{R}^2_+) = \mathrm{Per}(A; \mathbb{R}^2_+)$，其中 $\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ 是闭上半平面。我们通过证明以下不等式链来完成这一点

$$\begin{aligned} \mathrm{Per}(A) &= \mathrm{Per}(A; \mathbb{R}^2_+) + \mathrm{Per}(A; \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2_+) \\ &\geq \mathrm{Per}(A \cap \mathbb{R}^2_+; \mathbb{R}^2_+) + \mathrm{Per}(A; \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2_+) \geq \mathrm{Per}(A). \end{aligned} \tag{9}$$

链式不等式（9）中的等号由次可加性得出。我们首先证明不等式 $\mathrm{Per}(A \cap \mathbb{R}^2_+; \mathbb{R}^2_+) \leq \mathrm{Per}(A; \mathbb{R}^2_+)$。为此，我们定义

$$\phi_i(x) = \min\big\{0, 1 - 2i \operatorname{dist}(x, \{0\} \times \mathbb{R})\big\}$$

并称 U_i 为 $\frac{1}{i}$的 $\mathbb{R}^2_+$邻域。由此我们得到取值于 $[0,1]$ 的 $\phi_i \in \mathrm{LIP}(\mathbb{R}^2)$，使得 $\mathrm{spt}(\phi_i) \subset U_i$, $\phi_i \rightharpoonup \chi_{\mathbb{R}^2_+}$ 属于 $L^1(\mathfrak{m})$，并且

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{lip}_a(\phi_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \to 0.$$

进一步，令 $f_i \in \mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(U_i)$ 满足 $f_i \rightharpoonup \chi_A$ 且 $\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{lip}_a(f_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \to \mathrm{Per}(A;\,\mathbb{R}^2_+)$。我们可以假设 f_i 取值于 $[0,1]$。现在令 $g_i = f_i\phi_i$，则有 $g_i \rightharpoonup \chi_{A\cap\mathbb{R}^2_+}$，并且 g_i 是 $\mathrm{Per}(A\cap\mathbb{R}^2_+;\mathbb{R}^2_+)$ 的一个利普希茨函数可容许序列。根据莱布尼茨法则，我们现在得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{lip}_a(g_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} &\le \int_{\mathbb{R}^2} |\phi_i|\mathrm{lip}_a(f_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \int_{\mathbb{R}^2} |f_i|\mathrm{lip}_a(\phi_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\\ &\le \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{lip}_a(f_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{lip}_a(\phi_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \to \mathrm{Per}(A;\mathbb{R}^2_+).\end{aligned}$$

因此，我们有 $\mathrm{Per}(A\cap\mathbb{R}^2_+;\mathbb{R}^2_+) \le \mathrm{Per}(A;\,\mathbb{R}^2_+)$。

接下来，我们证明第二个不等式 $\mathrm{Per}(A\cap\mathbb{R}^2_+;\mathbb{R}^2_+) + \mathrm{Per}(A;\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}^2_+) \ge \mathrm{Per}(A)$。为此，我们令 ϕ_i 与之前相同。此外，设 $f_i \rightharpoonup \chi_A$ 为一列 $\mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}^2_+)$ 函数，使得 $\int \mathrm{lip}_a(f_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \to \mathrm{Per}(A;\,\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}^2_+)$，并令 $g_i \rightharpoonup \chi_{A\cap\mathbb{R}^2_+}$ 为一列 $\mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(U_i)$ 函数，使得 $\int \mathrm{lip}_a(g_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \to \mathrm{Per}(A\cap\mathbb{R}^2_+;\,\mathbb{R}^2_+)$。我们再次可以假设 f_i 和 g_i 的取值属于 $[0,1]$。因此，我们可以设定 $h_i = \phi_i g_i + (1-\phi_i)f_i$，并且满足 $h_i \rightharpoonup \chi_A$。现在，再次利用与之前类似的逼近方法，并应用莱布尼茨法则，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{lip}_a(h_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} &\le \int |\phi_i|\mathrm{lip}_a(g_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \int |g_i|\mathrm{lip}_a(\phi_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \int |1-\phi_i|\mathrm{lip}_a(f_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \int |f_i|\mathrm{lip}_a(1-\phi_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\\ &\le \int \mathrm{lip}_a(g_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + 2\int \mathrm{lip}_a(\phi_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \int \mathrm{lip}_a(f_i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\\ &\to \mathrm{Per}(A\cap\mathbb{R}^2_+;\mathbb{R}^2_+) + \mathrm{Per}(A;\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}^2_+),\end{aligned}$$

由此即可得出所声称的不等式。现在 $\mathrm{Per}(A\cap\mathbb{R}^2_+;\mathbb{R}^2_+) = \mathrm{Per}(A;\mathbb{R}^2_+)$。注意，由于$\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}^2_+$ 是一个开集，我们有

$$\mathrm{Per}(A;\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}^2_+) = \mathrm{Per}(A\setminus\mathbb{R}^2_+;\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}^2_+).$$

我们回顾一下，周长测度具有以下局部性性质：给定一个开集$U\subset\mathbf{X}$以及有限周长集 E、$F\subset\mathbf{X}$，使得 $\mathfrak{m}(U\cap(E\Delta F)) = 0$，则有

$$\mathrm{Per}(E;U) = \mathrm{Per}(F;U). \tag{10}$$

<escape>考虑到 $\overline{T}_n$ 是两两不相交的紧集，并结合（10），可以很容易地验证</escape>

$$\mathrm{Per}(A\cap\mathbb{R}^2_+;\mathbb{R}^2_+) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Per}(A\cap\overline{T}_n;\overline{T}_n).$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Per}(A) &= \mathrm{Per}(A;\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}^2_+) + \mathrm{Per}(A;\mathbb{R}^2_+)\\ &= \mathrm{Per}(A\setminus\mathbb{R}^2_+;\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}^2_+) + \mathrm{Per}(A\cap\mathbb{R}^2_+;\mathbb{R}^2_+)\\ &= \mathrm{Per}(A\setminus\mathbb{R}^2_+;\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}^2_+) + \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Per}(A\cap\overline{T}_n;\overline{T}_n).\end{aligned}$$

步骤 2：设 G_λ 是 M_λ的极小化者。我们希望证明，当 $\lambda>0$ 和 $n>0$足够大时， G_λ将包含点 x_n中的一个，但按测度意义而言，不包含相应的三角形 T_n，即$\mathfrak{m}(G_\lambda\cap T_n)=0$。这意味着 G_λ 没有开代表。

尽管下文并不严格需要，我们首先注意到，只要 $\lambda>0$ 足够大，$\overline{Q}\subset G_\lambda$ 。接下来，我们将把 G_λ 位于三角形 T_n 内的部分沿直线 $[0,1]\times\{0\}$ 反射。令 $\widetilde{G}_{\lambda,\,n}=(G_\lambda\cap T_n)\cup\{(x,y)\subset\mathbb{R}^2\colon (x,-y)\in G_\lambda\cap T_n\}$。现在我们进行估计。

$$\begin{aligned}\mathrm{Per}(G_\lambda\cap\overline{T}_n,\overline{T}_n) &\geq \frac{1}{2}\mathrm{Per}_{\mathrm{euc}}(\widetilde{G}_{\lambda,n};\mathbb{R}^2)\\ &\geq C\mathcal{L}^2(\widetilde{G}_{\lambda,n})^{\frac{1}{2}}\\ &= C'\mathcal{L}^2(G_\lambda\cap T_n)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Per}_{\mathrm{euc}}$ 表示欧几里得周长。第一个不等式成立，是因为左侧周长定义中的一个可容许 Lipschitz 函数经反射后，将给出右侧欧几里得周长定义中的一个可容许 Lipschitz 函数。第二个不等式则用到了欧几里得等周不等式。现在给定 $\lambda>0$ ，只要$n>0$足够大，使得 $\mathcal{L}^2(G_\lambda\cap T_n)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C'}{\lambda}$，便有 $\mathrm{Per}(G_\lambda\cap\overline{T}_n;\,\overline{T}_n)\geq\lambda\mathcal{L}^2(G_\lambda\cap T_n)$。因此，由于 G_λ是 M_λ的极小化者，根据步骤 1，集合 $G_\lambda\cap\overline{T}_n$是 $\overline{T}_n$内部的极小化者。由此可得 $\mathcal{L}^2(G_\lambda\cap T_n)=0$。由于 $\mathrm{Per}(\{x_n\},\overline{T}_n)=0$且 $\mathfrak{m}(\{x_n\})=2^{-n}$，因此 $G_\lambda\cap\overline{T}_n=\{x_n\}$ 在测度为零的集合意义下成立。具体而言，这意味着 $x_n\in\partial G_\lambda\cap G_\lambda$。由于 $\mathfrak{m}(\{x_n\})=2^{-n}$，极小化者$G_\lambda$ 包含正测度的边界，因此 G_λ不存在开代表。

注意，上述例子有一个闭集代表元，因为我们总可以将集合 G_λ 的边界加到其自身中：Dirac 质量不会增加周长，而其余边界相对于 $\mathfrak{m}$ 是零测集。

4. 关于 PI 空间中准极小集的说明

如引言中所述，在 PI 空间中，我们可以通过一致区域从内部和外部逼近一个区域，而这些一致区域是 BV 和索博列夫函数的延拓区域。因此，这里我们将仅关注如何将我们在第3 节中获得的更一般存在性结果方法与 PI 空间中关于极小化子结构的其他结果联系起来。这里，PI 空间是指一个完备的度量测度空间 $(\mathrm{X},\,\mathrm{d}\,\mathfrak{m})$，其中测度满足倍增条件，且该空间满足局部$(1,\,1)$-庞加莱不等式。回顾一下，如果存在一个常数 $\mathfrak{m}$，使得对于任意 X 中的 $C>0$以及 $x\in\mathrm{X}$ 中的 $r>0$，均有

$$\mathfrak{m}(B(x,2r))\leq C\mathfrak{m}(B(x,r)).$$

如果存在常数 $C > 0$ 和$\lambda \geq 1$，使得对于 X 中每个具有上梯度 g_f 的函数 f，以及每个 $x \in$ X 和 $r > 0$，都有：

$$\int_{B(x,r)} |f - f_{B_r(x)}| \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \leq Cr \int_{B_{\lambda r}(x)} g_f \, \mathrm{d}\mathfrak{m},$$

其中 f_A 表示 f 在正且有限测度的集合 $A \subset X$ 上的平均值。定理 3.4 的证明基于以下泛函的极小化

$$M_\lambda \colon \{A \subset \Omega\} \to [0, +\infty] \colon A \mapsto \mathrm{Per}(A) + \lambda \mathfrak{m}(\Omega \setminus A).$$

如果我们将项 $\lambda\mathfrak{m}(\Omega \setminus A)$ 替换为 $\lambda\mathfrak{m}(\Omega \Delta A)$，便得到一个研究得更多的泛函。

$$\widetilde{M}_\lambda \colon \{A \subset \mathrm{X}\} \to [0, +\infty] \colon A \mapsto \mathrm{Per}(A) + \lambda \mathfrak{m}(\Omega \Delta A).$$

$\widetilde{\ }$对泛函进行极小化 M_λ 会得到一个在测度意义下接近Ω、但不一定包含于Ω中的集合。不过，定理3.4 的证明中用于说明极小化者$\widetilde{\ }$是一个 BV-延拓集的论证，同样适用于泛函 M_λ，前提是极小化者具有一个闭代表（以便使用引理3.2）。由于一般情况下我们并不知道 $M_\lambda\widetilde{\ }$或 M_λ 的极小化者是否具有一个闭代表，因此，我们没有使用全局极小元，而是在一个由闭集构成的递减链中取了一个极小元。回顾例3.7 可知，极小化者不一定具有一个开代表。

在 PI 空间中，全局极小元确实有一个闭代表$\widetilde{\ }$
M_λ 在博雷尔集类中。这可由准极小集的正则性结果得出。根据 [2, 命题 3.20 和注 3.23] 我们知道，在 PI 空间中，泛函 M_λ 的极小化者在局部 K是 X-准极小的。回顾一下，若博雷尔集 $E \subset$ X 在开集 $K\Omega$ K中是 -准极小的，或具有 $\subset$ X-准极小边界，则称之为如此；如果对于所有开集 $U \Subset \Omega$ 以及任意博雷尔集 F， $G \Subset U$ 都有

$$\mathrm{Per}(E, U) \leq K\mathrm{Per}((E \cup F) \setminus G; U).$$

若集合 E 在 Ω 中是局部 K-准极小的，则称之为如此；也就是说，我们不再要求它对所有开集 $U \Subset \Omega$ 都满足极小性，而是要求对于每个 $x \in \Omega$，都存在 $V \subset\Omega$ 的一个开邻域，使得对于所有 $U \Subset V$，上述条件均成立。

根据[16, 定理 4。2] 一个 K-PI空间中的拟极小集具有一个代表，使其拓扑边界与测度论边界相一致。回顾一下， E 的测度论边界由以下点组成：在这些点处， E 和X $\setminus E$ 的（上）密度均为正。通过密度点论证，测度论边界的测度始终为零。因此，一个K-拟极小集同时具有一个开代表和一个闭代表。定理 3.4 的证明进而表明，该闭代表是一个 BV-延拓集。然而，正如我们将在例 4.1 中看到的，作为一个 BV-延拓集这一性质在取不同代表时并不具有不变性，因此我们无法直接得出开代表也是一个 BV-延拓集的结论。

另请注意，对于泛函 M_λ，我们仅在 K 内具有局部 Ω-拟极小性。因此，通过 [16, 定理 4.2]，我们只能得知极小化者的拓扑边界在 Ω 内的测度为零。然而，如果我们从一个满足 Ω 和 $\mathfrak{m}(\partial\Omega) = 0$ 的区域开始，则可以得出结论： M_λ 的极小化者也同时具有一个开代表和一个闭代表。

上述论证引出了自然的问题：在 PI空间 中，每个具有局部拟极小曲面的区域都是一个 BV-延拓集吗？具有局部拟极小曲面的区域的闭包是局部拟极小

曲面 a BV-延拓集？我们以一个例子结束本节，该例表明第一个问题的答案是否定的。事实上，该例表明，即使是极小化者的开代表$\widetilde{\ }$的 M_λ 也不一定是 BV-延拓集，在 PI空间中也是如此。同一个例子还回答了[16]中的一个问题：在 PI 空间中，具有局部拟极小曲面的区域不一定是局部约翰域。

回顾一下，区域 Ω 是一个局部约翰域，如果存在常数 $C, \delta > 0$，使得对于每个$x \in \partial\Omega$、每个 $0 < r < \delta$ 以及所有 $y \in B_r(x) \cap \Omega$，都存在一点 $z \in B_{Cr}(x) \cap \Omega$，使得 $\mathsf{d}(y, z) \geq r/C$，并且存在一条曲线 $\gamma \subset \Omega$，使得

$$\ell(\gamma_{y,w}) \leq C\operatorname{dist}(w, \partial\Omega)$$

对所有 $w \in \gamma$，其中 $\gamma_{y,\ w}$ 是 γ 上连接 y 和 w 的最短子曲线，而 $\ell(\alpha)$ 表示曲线 α 的长度。提出局部约翰条件这一问题的动机来自欧几里得情形，在该情形下，David 和 Semmes 证明，具有拟极小边界曲面的有界集合是局部 John 区域 [10]。

例 4.1. 考虑度量测度空间 $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \cup \mathrm{X}_2 \cup \mathrm{X}_3$，其中 $\mathrm{X}_i = \{i\} \times [0, 1]$，并且对于每个 $t \in [0, 1]$，点 $(i, t, 0)$、$i = \{1, 2, 3\}$ 均被视为同一点。（后文中，我们不再总是写出第一坐标，因为它在上文中仅用作标记。）将 X_i 的公共部分记为$D = \mathrm{X}_1 \cap \mathrm{X}_2 \cap \mathrm{X}_3$。换言之，$\mathrm{X} = [0, 1] \times \mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}$ 是一个各分支长度均为单位长度的三叉树。X 上的距离 d 是各个 X_i 上的长度距离，其定义为

$$\mathsf{d}_{\mathrm{X}_i}(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

且参考测度 $\mathfrak{m}$ 是各个 X_i 上加权勒贝格测度之和：

$$\mathfrak{m} = 2\mathcal{L}^2|_{\mathrm{X}_1} + \mathcal{L}^2|_{\mathrm{X}_2 \cup \mathrm{X}_3}.$$

所得的度量测度空间 $(\mathrm{X}, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是阿尔福斯2-正则的，并满足 (1, 1)-庞加莱不等式。我们将考虑一个区域 $\Omega \subset \mathrm{X}$，其中 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3,$，且每个 $\Omega_i \subset \mathrm{X}_i$ 定义如下。我们首先定义一个三角形作为基本构件

$$T = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0,\ x_2 < x_1 < 1 - x_2\right\}.$$

现在，对于 X_1 中的集合 Ω_1，我们只需选取

$$\Omega_1 \coloneqq ([0, 1] \times (0, 1]) \cup J,$$

集合 $\Omega_2 \subset X_2$ 定义为

$$\Omega_2 \coloneqq \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(2^{-2k-1}T + (2^{-2k-1}, 0)\right) \cup J,$$

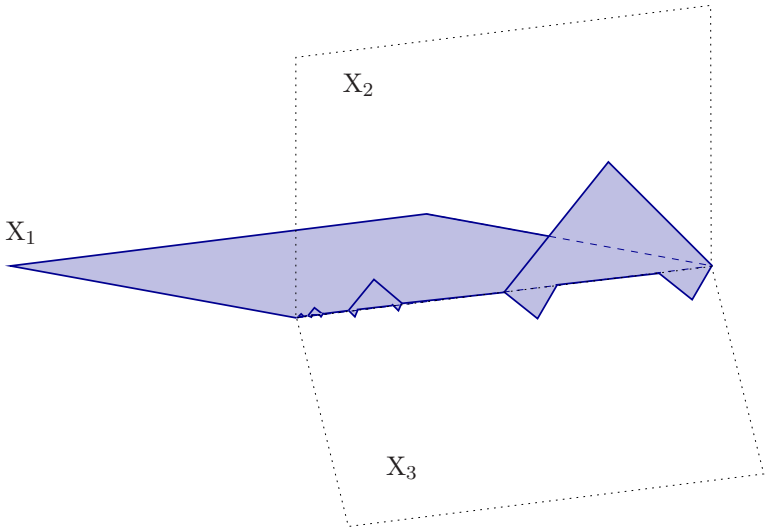
集合 $\Omega_3 \subset X_3$ 定义为

$$\Omega_3 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\left(2^{-4k-3}T + (2^{-2k-1}, 0)\right) \cup \left(2^{-4k-3}T + (2^{-2k} - 2^{-4k-3}, 0)\right)\right) \cup J.$$

上述集合的公共部分 $J \subset D$ 定义为

$$J = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\left(2^{-2k-1}, 2^{-2k-1} + 2^{-4k-3}\right) \cup \left(2^{-2k} - 2^{-4k-3}, 2^{-2k}\right)\right) \times \{0\}.$$

参见图 1，以了解区域 Ω的示意图。



PSfrag 替换项

图1。 区域 Ω位于例 4.1 中的三个单位正方形副本内，$\widetilde{\ }$X1,X2, 和 X3, 它们沿一条边粘合在一起。该区域使 M_λ 最小，因此具有局部拟极小曲面。直观地理解其拟极小性的一种方式是注意到，在尝试移除公共边处出现在 $X_1 \cup X_2$ 正方形中的狭缝时，通过局部变分无法大幅减小周长。这些狭缝使该区域既不是局部 John 区域，也不是 BV-延拓区域。

$\widetilde{\ }$断言1: 对于任意 $\lambda \geq 1$，区域 Ω 是 M_λ 在 X 的所有博雷尔子集中的一个极小化者。 为证明这一点，我们先证明

$$\widetilde{M}_\lambda(\Omega) = \mathrm{Per}(\Omega) + \lambda \mathfrak{m}(\Omega \Delta \Omega) = \mathrm{Per}(\Omega) \leq 2.$$

只需取一个趋近于 χ_Ω 的利普希茨函数序列 $(f_n)_n$ ，其中该序列的元素 f_n 由 $L^1(\mathfrak{m})$ 给出，即可验证这一点，该序列的元素由

$$f_n(x) = 1 - \min\big(1, n \cdot \mathrm{dist}(x, \Omega)\big), \quad \text{for every } x \in \mathrm{X}.$$

然后，记作

$$\Omega^n := \left\{ x \in \mathrm{X} : 0 < \mathrm{dist}(x, \Omega) < \frac{1}{n} \right\},$$

我们有给主人留下
些什么吧

$$\mathrm{Per}(\Omega) \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_{\Omega^n} \mathrm{lip}_a(f_n) \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \leq \liminf_{n \to +\infty} \, n \cdot \mathfrak{m}(\Omega^n).$$

因此，接下来只需估计 Ω^n 的测度。注意，根据距离 d 的选取以及三角形 T 中斜率的选取，对于 $k \in \{2, 3\}$，我们有

$$\Omega^n \cap \mathrm{X}_k = \left\{ (x, y + a) \in \mathrm{X}_k : (x, y) \in \partial\Omega \cap \mathrm{X}_k, \, a \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \right\}.$$

因此，利用富比尼定理，对于每个 $n \geq 2$，我们得到

$$\mathfrak{m}(\Omega^n) = \mathfrak{m}(\Omega^n \cap \mathrm{X}_2) + \mathfrak{m}(\Omega^n \cap \mathrm{X}_3) = \frac{2}{n}$$

从而 Per(Ω) ≤ 2。为了完成断言1的证明，接下来我们证明，对于任意具有有限周长的 $A \subset \mathrm{X}$，都有

$$\widetilde{M}_\lambda(A) \geq 2. \tag{11}$$

这可以通过证明对于任意 $f \in$LIP(X)，都有

$$\int_{\mathrm{X}} \mathrm{lip}_a(f) + \lambda |f - \chi_\Omega| \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \geq 2. \tag{12}$$

为证明这一点，固定任意 $x \in$ (0,1)。那么，由于 $\lambda \geq 1$，我们有

$$\int_{\{(1,x_1)\}\times(0,1)} \mathrm{lip}_a(f) + \lambda |f - \chi_\Omega| \, \mathrm{d}\mathcal{H}^1 \geq |f(1, x_1, 0) - 1|$$

并且对于 $k \in \{2, 3\}$,

$$\int_{\{(k,x_1)\}\times(0,1)} \mathrm{lip}_a(f) + \lambda |f - \chi_\Omega| \, \mathrm{d}\mathcal{H}^1 \geq |f(k, x_1, 0)|.$$

结合上述两个估计，并再次使用富比尼型论证，同时考虑到我们对测度的选择，可得

$$\int_{\mathrm{X}} \mathrm{lip}_a(f) + \lambda |f - \chi_\Omega| \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \geq 2|f(1, x_1, 0) - 1| + |f(2, x_1, 0)| + |f(3, x_1, 0)| \geq 2,$$

回顾点 $(i,\ t,\ 0)$ 对于 $t \in (0,\ 1)$ 以及 $i \in \{1, 2, 3\}$ 被视为同一点。因此我们得到（12）~从而得到（11）。这证明了 Ω 是 M_λ的极小化者。

。断言 2: Ω 不是 BV-延拓集，也不是 BV-延拓集。为此，取 $k \in \mathbb{N}$ 并定义

$$E_k = 2^{-2k-1}T + (2^{-2k-1}, 0) \subset \Omega_2.$$

Then

$$\mathrm{Per}_\Omega(E_k) \leq 2^{-4k-2} \quad \text{and} \quad \mathfrak{m}(E_k) = 2^{-4k-4}.$$

~ ~然而，对于任意满足 $E_k \cap \Omega = E_k$ 的 $E_k \subset \mathrm{X}$，通过观察矩形 $\mathrm{X}_1 \cup \mathrm{X}_2$, ，我们可以看到

$$\mathrm{Per}_{\mathrm{X}}(\tilde{E}_k) \geq 2^{-2k-1}.$$

因此，

$$\frac{\mathrm{Per}_{\mathrm{X}}(\tilde{E}_k)}{\mathrm{Per}_\Omega(E_k)} \geq \frac{2^{-2k-1}}{2^{-4k-2}} = 2^{2k+1} \to +\infty, \qquad \text{as } k \to +\infty$$

and

$$\frac{\mathrm{Per}_{\mathrm{X}}(\tilde{E}_k) + \mathfrak{m}(\tilde{E}_k)}{\mathrm{Per}_\Omega(E_k) + \mathfrak{m}(E_k)} \geq \frac{2^{-2k-1}}{2^{-4k-2} + 2^{-4k-4}} \geq 2^{2k} \to +\infty, \qquad \text{as } k \to +\infty,$$

。证明了 Ω 不是 BV-延拓区域，也不是 BV-延拓区域。（然而，请注意，Ω 是一个 BV-延拓集。）

断言 3：Ω 不是局部 *John* 区域。为证明这一点，我们取以下点作为中心：$x := (0, 0) \in \partial\Omega$。给定任意 $C \geq 1$ 和 $\delta > 0$，我们取 $k \in \mathbb{N}$ 足够大，使得

$$r_k := \sqrt{2} \cdot 2^{-4k-1} < \delta/C \qquad \text{and} \qquad 2^{2k+1} > C.$$

现在，取 $r = Cr_k$ 并选择 $y = (2^{-2k-1} + 2^{-2k-2}, 2^{-2k-3}) \in E_k \subset B_r(x)$。注意，根据对 k 的选择，我们有 $0 < r < \delta$。于是

$$E_k \subset B_{r_k}(y) = B_{r/C}(y),$$

因此，约翰条件中的点 z 必然要在 E_k之外选取。因此，在 Ω 中连接 y 和 z 的任意曲线 γ都必须经过一个点

$$w \in \left(\left(2^{-2k-1}, 2^{-2k-1} + 2^{-4k-3}\right) \cup \left(2^{-2k} - 2^{-4k-3}, 2^{-2k}\right)\right) \times \{0\} \subset J.$$

于是我们有

$$\frac{\operatorname{dist}(w, \partial\Omega)}{\ell(\gamma_{y,w})} \leq \frac{2^{-4k-4}}{2^{-2k-3}} = 2^{-2k-1} < \frac{1}{C},$$

在最后一个不等式中，我们再次使用了对 k的选择。这与给定参数 C 和 δ下的约翰条件相矛盾。

注 4.2。注意，作为 PI空间中 M_λ 的极小化者，例 4.1 的区域 Ω 也具有拟极小曲面。如果在该例中采用 2 维豪斯多夫测度作为测度 $\mathfrak{m}$，则空间 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是各向同性的。（回顾一下，当与有限周长集合 E 相关联的密度函数 θ_E 满足 $\operatorname{Per}(E, \cdot) = \theta_E \mathcal{H}|_{\partial^e E}$ 与集合 E 本身无关时，度量测度空间才是各向同性的。关于上述密度函数的更多细节，请参阅 [1] 。）由于拟极小性在将参考测度更换为与之可比的测度时保持不变，因此我们将得到该例的一个版本：空间是各向同性的，但区域只有拟极小曲面，而不是作为 M_λ的极小化者。还要注意，将距离改为由 X_i 中的欧几里得距离诱导的距离 d 后，拟极小性也保持不变，因为距离的改变是双 Lipschitz 的。

5. 开放问题

我们的延拓结果引出了几个尚未解答的问题。在定理3.4 中，我们证明了可以用闭集从内部逼近区域 BV-延拓集。对于 PI 空间这一特殊情形，我们在第 4 节指出，M_λ 的极小化者也有开代表。然而，例 4.1 表明，即使在 BV-PI空间中，开代表也未必是延拓集。尚未解决的问题是，成为 M_λ 的极小化者是否确有必要，还是只需具有拟极小曲面即可：

问题 5.1. 设 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个 PI空间，且 $\Omega \subset X$ 是一个具有局部 K-拟极小曲面的有界区域。那么 Ω 是一个 BV-延拓集吗?

从定理证明引出的另一个问题3.4 是：我们是否真的需要使用偏序，才能保证极小元素有一个闭代表?

问题 5.2。设 (X,d 𝔪) 是一个度量测度空间，且 Ω ⊂ X 是一个有界区域。设 E be$\widetilde{\ }$ 是 M_λ （或 M_λ）在 Ω（或分别在 X）的博雷尔子集中的一个极小化者。 E 是否有一个闭代表?

$\widetilde{\ }$对于 PI 空间，问题 5.2 的答案是肯定的，关于 M_λ，另见第 4节。无论是否采用极小化方法，仍有一个显而易见的问题有待解答：

问题 5.3。 设 (X, d 𝔪) 为度量测度空间，Ω ⊂ X 为有界区域，且 $\varepsilon > 0$。是否存在一个 BV-延拓区域 $A \subset \Omega$，使得 $\mathfrak{m}(\Omega \setminus A) < \varepsilon$?

我们的逼近都不是从外部进行的，因为我们通过比较极小化者的泛函值与对其进行修改（去掉一个开子集）后的泛函值，来论证该极小化者是一个延拓集。

问题 5.4。 设 (X, d 𝔪) 为度量测度空间，Ω ⊂ X 为有界区域，且 $\varepsilon > 0$。是否存在一个 BV-延拓区域（或仅仅是一个 BV-延拓集） $A \supset \Omega$，使得 $\mathfrak{m}(A \setminus \Omega) < \varepsilon$?

除了了解上述问题的答案之外，若能进一步探究在缺少局部庞加莱不等式的情况下，能否通过 Sobolev $W^{1,\,p}$-延拓区域来逼近区域，也会很有意思。特别是， $p = 1$ 这一情形与 BV 密切相关，即使在一般的度量测度空间中也是如此；此外还与周长延拓有关 [8]。

参考文献

[1] L. Ambrosio，倍增度量测度空间中有限周长集的精细性质，《集值分析》**10** （2002），第 111–128 页。[2] G. Antonelli、E. Pasqualetto 和 M. Pozzetta，里奇曲率具有下界的空间中的等周集，《非线性分析：理论、方法与应用》**220** （2022），第 112839 页。[3] A. Baldi 和 F. Montefalcone，关于度量测度空间中 *BV* 函数延拓的注记，《数学分析及其应用杂志》**340** （2008），197–208。[4] J. Björn 和 N. Shanmugalingam，度量空间中 *Newton*-索博列夫函数的庞加莱不等式、一致区域与延拓性质，《数学分析及其应用杂志》**332** （2007），第 1 期，190–208。[5] V. Bogachev、A. Pilipenko、A. Shaposhnikov，无限维区域上的索博列夫函数，《数学分析及其应用杂志》**419** （2014），第 2 期，1023–1044。[6] Yu. D. Burago 和 V. G. Maz'ya，不规则区域的位势理论与函数论，俄文译本。《数学研讨会》，V. A. Steklov 数学研究所，列宁格勒，第 3 卷，Consultants Bureau，纽约（1969），第 vii+68 页。[7] A. P. Calderón，可微函数与广义函数的勒贝格空间，载于《纯数学研讨会论文集》第 IV 卷，1961 年，第 33–49 页。[8] E. Caputo、J. Koivu 和 T. Rajala，度量测度空间中的索博列夫、*BV* 与周长延拓，2023，arXiv:2302.10018。[9] J. Cheeger，度量测度空间上利普希茨函数的可微性，《几何与泛函分析》**9** （1999），第 3 期，428–517[10] G. David 和 S. Semmes，余维 *1* 的准极小曲面与 *John* 域，《太平洋数学杂志》**183** （1998），213–277。[11] S. Di Marino，度量测度空间中 *BV* 与索博列夫空间的最新进展，博士论文，2014。[12] S. Di Marino、N. Gigli 和 A. Pratelli，保持局部常数的全局利普希茨延拓，《意大利林琴国家科学院院刊：数学与应用》**31** （2020），第 4 期，757–765。[13] M. García-Bravo 和 T. Rajala，强 *BV* 延拓与 $W^{1,\,1}$-延拓区域，《函数分析杂志》**283** （2022），论文编号 109665。

[14] J. Heinonen 和 P. Koskela，受控几何度量空间中的拟共形映射，《数学学报》**181** （1998），第 1 期，1–61 页。[15] St. Keith，度量测度空间上的模数与庞加莱不等式，《数学杂志》**245** （2003），第 2 期，255–292 页。[16] J. Kinnunen、R. Korte、A. Lorent 和 N. Shanmugalingam，度量空间中具有拟极小边界曲面的集合的正则性《几何分析杂志》**23** （2013），第 4 期，1607–1640 页。[17] P. Lahti，度量空间上有界变差函数的延拓与迹，《数学分析及其应用杂志》**423** （2015），第 1 期，521–537 页。[18] M. Miranda, Jr. “良好”度量空间上的有界变差函数，《纯粹与应用数学杂志》（第 9 辑）**82** （2003），第 8, 975 1004 2003 – . T. Rajala，倍增拟凸度量空间中一致区域的逼近，《复分析与协同》**7** （2021），第 4 期。[19] [20] E. M. Stein，奇异积分与函数的可微性，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970。

于韦斯屈莱大学数学与统计学系，邮政信箱 35（MaD），FI-40014 于韦斯屈莱大学，芬兰电子邮件地址: jesse.j.j.koivu@jyu.fi电子邮件地址: danka.d.lucic@jyu.fi电子邮件地址: tapio.m.rajala@jyu.fi