arXiv:2305.02912v1 [math.OC] 4 May 2023

多维空间中多个点源的综合平方反比效应

Keaton Coletti　Pawel Kalczynski　佐治亚大学工程学院　加利福尼亚州立大学富勒顿分校商学院与经济学院　佐治亚州雅典，邮编 30602　加利福尼亚州富勒顿，邮编 92834。电子邮箱：keaton.coletti@uga.edu　电子邮箱：pkalczynski@fullerton.edu
Zvi Drezner　加利福尼亚州立大学富勒顿分校商学院与经济学院　加利福尼亚州富勒顿，邮编 92834。电子邮箱：zdrezner@fullerton.edu

摘要

平方反比定律指出，源对其周围环境产生的效应与到该源的欧几里得距离的平方成反比。该定律适用于物理学、工程学和计算机科学等多个领域。我们研究多维空间中环绕一个封闭区域的多个点源所产生的综合效应。我们确定，在维度为 D 的空间中，当 $D \leq 4$ 时，最大效应位于该区域的边界上；当 $D \geq 4$ 时，最小效应位于边界上。

关键词：平方反比定律、降维、全局优化

1 引言

本文研究多维空间中的欧氏距离。点源会发出某种量，其作用与到源的距离平方成反比，而空间中某一点处的总作用，是各个源所产生标量贡献之和。这种标量求和适用于辐射、声音和光。Berman 等人（2010）提出了协同覆盖选址问题。光源、手机信号、噪声、热量等都会随距离平方增加而衰减。区域中的每一点都受到各信号之和的影响。例如，停车场中的路灯位于三维空间中，而我们关心的是二维停车场中的总光照。停车场中哪个位置接收到的光照最少？这个最小值保证停车场中的所有位置至少接收到这么多光照。

确定这类量的全局极值通常很有意义（Drezner 等，2020；Hansen 等，1981）。本文给出的结果将优化维数降低 1，从而改善计算时间，并降低错误识别局部极值的风险。

例如，考虑一个或多个被点源包围的三维闭合形状。这些点源向各个方向发射声音、热量、光或其他类型的能量。不同点源发射物的强度可能不同。如果优化目标是通过安排点源和/或形状的位置，来减小发射物对这些形状产生的最大总（累积）效应（同时确保所有点源都位于形状之外），我们证明，只需考虑这些形状边界上的效应即可，因为在三维空间中，最大总效应必定出现在边界上。

2 问题陈述

设 $D \in \{1,2,3,...\}$ 为欧几里得空间 $\mathbb{R}^D$的维度。考虑 n 个点源 $S_i = (s_{1i},\ s_{2i},\ ...,\ s_{Di}) \in \mathbb{R}^D$，$i = 1,\ 2,\ ...,\ n$。定义 $w_j > 0$，表示源 i所发射数量的强度。

此外，设 $\Omega \in \mathbb{R}^D$ 是受点源影响的区域，且 $\Omega \cap \{S_1, S_2, ..., S_n\} = \varnothing$。点源对 $X = (x_1, x_2, ..., x_D)$ 的综合作用为

$$J(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\sum_{k=1}^{D} (x_k - s_{ki})^2}. \tag{1}$$

3 最大值和最小值

定理1：设 $\Omega \in \mathbb{R}^D \setminus \{S_i\}$ 包含开集 Ω 及其边界 $\partial\Omega$。若 $J(X)$ 在 Ω 上非常数，则

1. 若 $D \le 4$，则 $J(X)$ 在 Ω 中仅在 $\partial\Omega$ 上取得最大值。

2. 若 $D \ge 4$，则 $J(X)$ 在 Ω 中仅在 $\partial\Omega$ 上取得最小值。

证明：$J(X)$ 定义在 Ω 上，因此在 Ω 中取得最大值和最小值。 $J(X)$ 是连续函数，并且在 Ω 中具有任意阶的连续导数。为简化记号，定义 $x_{ki} = (x_k - s_{ki})$，其中 $k = 1,\ 2,\ ...,\ D;\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n$（注意 $dx_{ki} = dx_k$）。于是，式（1）可写为

$$J(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\sum\limits_{k=1}^{D} x_{ki}^2},$$

其未混合的一阶和二阶偏导数为

$$\frac{dJ(X)}{dx_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-2x_{ki}w_i}{\left[\sum\limits_{k=1}^{D} x_{ki}^2\right]^2}$$

$$\frac{d^2J(X)}{dx_k^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-2w_i\left[\sum\limits_{k=1}^{D} x_{ki}^2\right]^2 + 8x_{ki}^2w_i\sum\limits_{k=1}^{D} x_{ki}^2}{\left[\sum\limits_{k=1}^{D} x_{ki}^2\right]^4}.$$

计算拉普拉斯算子得到

$$\Delta J(X) = \sum_{k=1}^{D} \frac{d^2J(X)}{dx_k^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-2Dw_i\left[\sum\limits_{k=1}^{D} x_{ki}^2\right]^2 + 8w_i\left[\sum\limits_{k=1}^{D} x_{ki}^2\right]^2}{\left[\sum\limits_{k=1}^{D} x_{ki}^2\right]^4} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(8-2D)w_i}{\left[\sum\limits_{k=1}^{D} x_{ki}^2\right]^2}. \tag{2}$$

我们有两种情况:

1. $\Delta J(X) \geq 0$ 对于 $D \leq 4$，因此 J 是次调和函数。对于所有 $X \in \Omega$，$\frac{d^2J(X)}{dx_k^2} > 0$ 对于某个 k成立，因此 J 在 Ω 中没有局部极大值或平台。

2. $\Delta J(X) \leq 0$ 对于 $D \geq 4$，因此 J 是超调和函数。对于所有 $X \in \Omega$，$\frac{d^2J(X)}{dx_k^2} < 0$ 对于某个 k成立，因此 J在 Ω 中没有局部极小值或平台。

Axler 等人（2013）、Evans（2022）、Ovall（2016）以及 Stein 和 Shakarchi（2010）应用了次调和函数的最大值原理（情形 1）和超调和函数的最小值原理（情形 2）。

□

推论 1：如果 $D = 4$, J 在其定义域上是调和的，并且在边界上的 Ω 中同时取得最大值和最小值。

请注意，$\overline{\Omega}$不一定是连通区域。尚未对 $D > 4$ 时 $J(X)$ 的最大值，或 $D < 4$ 时 $J(X)$ 的最小值作出任何说明。定理1不适用于 D 的其他取值。

表1： $D=5$的反例

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$i=1$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$i=2$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$i=3$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
$i=4$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$i=5$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
$i=6$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$i=7$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0
$i=8$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0
$i=9$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0
$i=10$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$

3.1 最大值和最小值可以位于内部的情形

我们构造一个反例，其中 $D\geq 5$ 时最大值可以位于 Ω 的内部，而 $D\leq 3$ 时最小值可以位于内部。考虑 D维空间中的一组 $2D$ 个源点，如表1中 $D=5$ 的情形所示，其中 $w_i=1$、 $i=1$、2、..、$2D$。所有点都位于一个以原点 (0, 0, . . ., 0) 为中心、半径为 $\frac{1}{2}$ 的 D维球表面上。我们首先证明，对于 $D\geq 5$，球心是一个局部最大值；对于 $D\leq 3$，球心是一个局部最小值。然后，我们找出一个 D维球的半径 $0<r_{max}<\frac{1}{2}$，该球定义了区域 Ω。

考虑D维球上的一个位置 $\Delta X=\{\Delta x_k\}$，其半径为 r D、球心位于原点，且 $\sum_{k=1}^{D}\Delta x_k^2=r^2$；其中 $k=1$，.....，D。对于源点 $i=1$，$\sum_{k=1}^{D}(\Delta x_k-x_i)^2=(\frac{1}{2}-\Delta x_1)^2+\sum_{k=2}^{D}\Delta x_k^2=\frac{1}{4}-\Delta x_1+r^2$。类似地，对于 $i=D+1$，$\sum_{k=2}^{D}(\Delta x_k-x_i)^2=(-\frac{1}{2}-\Delta x_1)^2+\sum_{k=1}^{D}\Delta x_k^2=\frac{1}{4}+\Delta x_1+r^2$，其他点也有类似的表达式。因此，

$$\begin{aligned} J(\Delta X) &= \sum_{i=1}^{D}\left[\frac{1}{\frac{1}{4}-\Delta x_i+r^2}+\frac{1}{\frac{1}{4}+\Delta x_i+r^2}\right]=\sum_{i=1}^{D}\frac{\frac{1}{2}+2r^2}{(\frac{1}{4}+\Delta x_i+r^2)(\frac{1}{4}-\Delta x_i+r^2)} \\ &= \sum_{i=1}^{D}\frac{\frac{1}{2}+2r^2}{(\frac{1}{4}+r^2)^2-\Delta x_i^2}\ . \end{aligned}$$

由于 $\Delta x_i\leq r$，我们可以通过将 Δx_i 替换为 r，得到 $J(\Delta X)$ 的一个上界；通过将 Δx_i 替换为 0，得到一个下界。然而，这种近似的误差范围过大，其误差阶为 r^2 ，因此无法用于证明局部极值。通过将分子和分母同时乘以 $(\frac{1}{4}+r^2)^2+\Delta x_i^2$，可以得到一个误差阶为 r^4 的更优近似：

$$J(\Delta X)=2\sum_{i=1}^{D}\frac{\left[\frac{1}{4}+r^2\right]\left[(\frac{1}{4}+r^2)^2+\Delta x_i^2\right]}{(\frac{1}{4}+r^2)^4-\Delta x_i^4} \tag{3}$$

并通过仅在分母中将 Δx_i 替换为 r 或 0 来获得界，并应用性质 D，即 $\sum_{i=1} \Delta x_i^2 = r^2$。

上界：

$$\begin{aligned} J(\Delta X) &\leq 2\sum_{i=1}^{D} \frac{\left[\frac{1}{4}+r^2\right]\left[(\frac{1}{4}+r^2)^2+\Delta x_i^2\right]}{(\frac{1}{4}+r^2)^4-r^4} \\ &= 2D\frac{\left[\frac{1}{4}+r^2\right](\frac{1}{4}+r^2)^2}{(\frac{1}{4}+r^2)^4-r^4} + 2\sum_{i=1}^{D}\frac{\left[\frac{1}{4}+r^2\right]\Delta x_i^2}{(\frac{1}{4}+r^2)^4-r^4} = 2D\frac{(\frac{1}{4}+r^2)^3}{(\frac{1}{4}+r^2)^4-r^4} + 2\frac{\left[\frac{1}{4}+r^2\right]r^2}{(\frac{1}{4}+r^2)^4-r^4} \\ &= \frac{\frac{1}{4}+r^2}{(\frac{1}{4}+r^2)^4-r^4}\left[\frac{D}{8}+(D+2)r^2+2Dr^4\right] . \end{aligned} \tag{4}$$

下界：

$$\begin{aligned} J(\Delta X) &\geq 2\sum_{i=1}^{D} \frac{\left[\frac{1}{4}+r^2\right]\left[(\frac{1}{4}+r^2)^2+\Delta x_i^2\right]}{(\frac{1}{4}+r^2)^4} \\ &= \frac{2D}{\frac{1}{4}+r^2} + 2\sum_{i=1}^{D}\frac{\Delta x_i^2}{(\frac{1}{4}+r^2)^3} = \frac{2D}{\frac{1}{4}+r^2} + \frac{2r^2}{(\frac{1}{4}+r^2)^3} \\ &= \frac{1}{(\frac{1}{4}+r^2)^3}\left[\frac{D}{8}+(D+2)r^2+2Dr^4\right] . \end{aligned} \tag{5}$$

定理 2：如果 $D > 4$ （分别为 $D < 4$）、 J（X）能在 Ω 的内部或边界上取得最大值（分别为最小值）。

证明：为证明最优值可以位于 Ω 的内部，考虑 Ω 是一个以原点为中心、半径较小的 D维球 r 。

由于 $J(0) = 8D$，根据方程（4）

$$\begin{aligned} J(\Delta X) - J(0) &\leq \frac{\frac{1}{4}+r^2}{(\frac{1}{4}+r^2)^4-r^4}\left[\frac{D}{8}+(D+2)r^2+2Dr^4\right] - 8D \\ &= \frac{(\frac{1}{4}+r^2)\left[\frac{D}{8}+(D+2)r^2+2Dr^4\right] - 8D((\frac{1}{4}+r^2)^4-r^4)}{(\frac{1}{4}+r^2)^4-r^4} \\ &= \frac{-8Dr^8-6Dr^6+\frac{13D+4}{2}r^4+\frac{4-D}{8}r^2}{(\frac{1}{4}+r^2)^4-r^4} , \end{aligned} \tag{6}$$

根据等式 (5)

$$\begin{aligned} J(\Delta X) - J(0) &\geq \frac{1}{(\frac{1}{4}+r^2)^3}\left[\frac{D}{8}+(D+2)r^2+2Dr^4\right] - 8D \\ &= \frac{\frac{D}{8}+(D+2)r^2+2Dr^4-8D(\frac{1}{4}+r^2)^3}{(\frac{1}{4}+r^2)^3} \\ &= \frac{-8Dr^6-4Dr^4+\frac{4-D}{2}r^2}{(\frac{1}{4}+r^2)^3} . \end{aligned} \tag{7}$$

要证明对于 Ω 内部的 $r > 0$， $J(\Delta X) < J(0)$，只需证明 (6) 的分子中的多项式对于 $r > 0$ 为负。该多项式在 $r = 0$ 处的一阶导数为 0，且对于 $D \geq 5$，二阶导数为负。因此，对于 $D \geq 5$，该多项式在 r 的某个值之前为负。要证明对于 Ω 内部的 $r > 0$， $J(\Delta X) > J(0)$，只需证明 (6) 的分子中的多项式对于 $r > 0$ 为正。该多项式在 $r = 0$ 处的一阶导数为 0，且对于 $D \leq 3$，二阶导数为正。因此，对于 $D \leq 3$，该多项式在 r 的某个值之前为正。□

3.2 反例中维度为 $D \geq 5$ 时保证递减、维度为 $D \leq 3$ 时保证递增的半径

考虑定理 2 中的反例。定理 2 的证明表明，对于 $D > 4$，存在一个半径为 $r \leq r_{\max}$ 的 D维球，其中某个 $r_{\max}$ 以原点为中心，在该球面上， $J(X)$ 在 Ω 中于原点处必定取得全局最大值；而对于 $D < 4$，则存在一个全局最小值。

为了求出 $D \geq 5$ 对应的 D维球半径下界，我们求方程 (6) 的分子除以 r^2 后所得多项式的最小正根 $\bar{x}$，其中 $x = r^2$:

$$-8Dx^3 - 6Dx^2 + \frac{13D+4}{2}x + \frac{4-D}{8} = 0 ,$$

以及 $r_{\max} = \sqrt{\bar{x}}$。通过数值求解，我们得到 $r_{\max}$ 的下界，如表2所示。忽略系数为负的 x^2 和 x^3，可以得到一个较好的近似（数值略低）： $r_{\max} \approx \sqrt{\frac{D-4}{52D+16}}$，当 $D \to \infty$ 时，它收敛到 $\sqrt{\frac{1}{52}} = 0.1387$ 。对于 $D = 1,000,000$，该多项式的根为 $r_{\max} = 0.1400$。如果只忽略项 x^3，通过求解二次方程可得 $r_{\max} = \sqrt{\frac{13D+4-\sqrt{157D^2+152D+16}}{24D}}$，其结果与表2中的数值精确到四位有效数字一致。当 $D \to \infty$ 时，其极限为 $\sqrt{\frac{13-\sqrt{157}}{24}} = \frac{1}{\sqrt{26+\sqrt{628}}}$。

对于 $r_{\max}$，最小情形的类似估计可通过 (7) 中的分子多项式得出，即 $r_{\max} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{4D}} - \frac{1}{4}}$。对于 $D = 2$， $r_{\max} = 0.3218$；对于 $D = 3$， $r_{\max} = 0.1967$。注意，在两种情形下，所有这些值都小于 0.5，因此所有源点都位于 Ω 之外。

表2：最大值限制 r

D	$r_{\max}$	D	$r_{\max}$
5	0.0603	10	0.1063
6	0.0783	15	0.1183
7	0.0892	20	0.1240
8	0.0966	50	0.1337
9	0.1021	100	0.1369

4 结论

我们考察了多个源点按照平方反比定律发射某种量时，在不包含这些点的开域上产生的综合效应。我们证明，点源在该区域上的综合（总）效应具有以下性质：

1. $D \leq 4$ 的最大值必须位于边界上（而非内部）

2. 对于 $D \geq 4$，最小值必须位于边界上（而非内部）

3. 对于 $D > 4$，最大值可能位于域内

4. 对于 $D < 4$，最小值可能位于定义域内部。

我们的研究成果使实际优化问题能够降维，从而显著提升效率和稳健性。

参考文献

Axler, S., Bourdon, P. 和 Wade, R.（2013）。《调和函数理论》，第 137 卷。施普林格科学与商业媒体。Berman, O., Drezner, Z. 和 Krass, D.（2010）。合作覆盖选址问题：平面情形。IIE汇刊，42：232–246。Drezner, T., Drezner, Z. 和 Kalczynski, P.（2020）。多个有害设施选址：合作模型。IISE汇刊，52：1403–1412。Evans, L. C.（2022）。《偏微分方程》，第 19 卷。美国数学学会。Hansen, P., Peeters, D. 和 Thisse, J.-F.（1981）。关于有害设施的位置。Sistemi Urbani，3：299–317。Ovall, J. S.（2016）。拉普拉斯算子与平均值和极值。《美国数学月刊》，123(3)：287–291。Stein, E. M. 和 Shakarchi, R.（2010）。《复分析》，第 2 卷。普林斯顿大学出版社。