arXiv:2305.02919v1 [math.AP] 4 May 2023

自由边界的几何

EMANUEL INDREI

普渡大学数学系

Abstract. 对于非线性一致椭圆算子，当 $\Omega = \{\nabla u \neq 0\} \cap \{x_n > 0\}$ 时，可得到自由边界与固定边界的非横截相交，从而解决了椭圆理论中的一个问题：对于拉普拉斯算子，该问题已得到彻底理解，但在高维非线性情形下仍晦涩难解。此外，本文还解决了《障碍型问题中自由边界的正则性》 [PSU12]中讨论的一个问题。如果解具有物理意义，且 $n = 2$，那么在固定边界附近，自由边界是 C^1。这一正则性结果对于拉普拉斯算子而言也是新的。本文的创新之处在于研究自由边界点如何以几何构型趋近固定边界，并考察自由边界点之间的间距。

1. Introduction

在经典障碍问题中，我们寻求一个函数 $u: B_1 \to \mathbb{R}$，该函数满足偏微分方程

$$\begin{cases} \Delta u = \chi_{u>0} & \text{in } B_1, \\ u \geq 0 & \text{in } B_1 \\ u = g & \text{on } \partial B_1, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 g 是一个给定函数（例如连续函数），而 $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ 是单位球。该方程描述了覆盖在“障碍物”（即给定函数）上的弹性膜的平衡状态。在其具有开创性的 1977 年论文中，Caffarelli 证明了自由边界 $\Gamma = \partial\{u > 0\} \cap B_1$ 是 C^1，但需满足自然密度假设 [Caf77]。一般来说，存在两条奇异曲线在一点相接的例子（且这些例子违反了 Caffarelli 的假设）：Schaeffer 构造了尖点型奇异性的例子 [Sch77]。

自 Caffarelli 在 1977年 发表论文以来，完全非线性椭圆算子的自由边界在靠近固定边界处的行为一直悬而未决。通过在自由边界与固定边界的交点附近进行局部化，并考虑去掉解的符号约束后的 (1.1) 的一个变体，可以得到以下问题。

$$\begin{cases} F(D^2u) = \chi_\Omega & \text{in } B_1^+ \\ u = 0 & \text{on } B_1' \end{cases} \tag{1.2}$$

其中， F 是一个凸的、 C^1 完全非线性的一致椭圆算子，

$$\Omega = \big(\{u \neq 0\} \cup \{\nabla u \neq 0\}\big) \cap \{x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n_+.$$

在此背景下，自由边界是 $\Gamma = B_1^+ \cap \partial\Omega$，而非横截相交意味着，在足够小的尺度下，自由边界被限制在开口严格小于 π的任意圆锥之下：对于任意 $\epsilon > 0$ ，存在 $\rho_\epsilon > 0$ ，使得

$$\Gamma \cap B^+_{\rho_\epsilon} \subset B^+_{\rho_\epsilon} \setminus \mathcal{C}_\epsilon,$$

其中 $\mathcal{C}_\epsilon := \{x_n > \epsilon|x'|\}$, $x' = (x_1, \ldots\ldots, x_{n-1})$。

线性情形已通过单调性公式以及涉及格林函数 [CKS00、SU03、PSU12]的显式表示得到了充分研究；参见 [PSU12，第 8]章，其中包含许多非常有趣的参考文献。在完全非线性的一致椭圆背景下，非横截相交一度只是一个猜想，最终在 [Ind19b] 中得到完整解决。此外，在没有密度假设的单相问题中，还获得了自由边界的 C^1 正则性，从而以一种新颖的方法完成了Caffarelli正则性理论直至边界。

一个值得关注的特点是，边界情形通常不会比 $C^{1,\mathrm{Dini}}$ 更好；而在内部，正密度点处则具有解析性。此外，在内部需要某些假设（参见 Schaeffer的例子），而在固定边界附近，奇点则不再存在。

超导问题中对 Ω 的一种选取，书中[PSU12 第 8 章备注 8.8] （拉普拉斯算子的问题也尚未解决）有明确表述：研究 $\Omega = \{\nabla u \neq 0\} \cap \{x_n > 0\}$ 处接触点的 C^1 自由边界正则性。从数学上看，这个问题很复杂，因为我们事先并不知道函数在 Ω 的补集上取哪些值。

本文证明了非横截相交（定理3.1）。此外，当 $n = 2$ 满足 C^1 正则性时，也证明了这一点（定理3.5），并讨论了其物理背景。

不受维数约束（定理 3.3）。其创新之处在于通过几何构型研究自由边界点在非横截相交不成立的情况下如何趋近固定边界，并考察自由边界点之间的间距。

2. Preliminaries

假设包括:

- $F(0) = 0$;
- F 是一致椭圆的，具有

$$\mathcal{P}^-(M-N) \le F(M) - F(N) \le \mathcal{P}^+(M-N),$$

其中 M 和 N 是对称矩阵， $\mathcal{P}^\pm$ 是 Pucci 算子

$$\mathcal{P}^-(M) = \inf_{\lambda_0 \le N \le \lambda_1} \operatorname{tr}(NM), \qquad \mathcal{P}^+(M) = \sup_{\lambda_0 \le N \le \lambda_1} \operatorname{tr}(NM);$$

- F 是凸的， C^1 （该方法也适用于较弱的假设）。

假设 Ω' 是一个开集。连续函数 u 是一个 L^p-黏性次解，如果对于所有 $\phi \in W^{2,}{}^{p}_{loc}(\Omega')$，只要 $\epsilon > 0$， $A \subset \Omega'$ 是开集， $f \in L^p_{loc}(\Omega')$， $n < 2p$，并且

$$F(D^2\phi(x)) - f(x) \ge \epsilon$$

几乎处处在 A， $u - \phi$ 在 A 中不能取得局部最大值。上解的定义类似，而解既是上解也是下解。一个属于 $W^{2,}{}^{p}_{loc}(\Omega')$ 的 L^n-黏性解几乎处处满足方程 [CCKS96]。注意，可以将该理论推广到抛物情形 [LP21]。

连续函数 u 属于 $P_r^+(0, M, \Omega)$ 如果

1. $F(D^2u)$ 在 B_r^+ 中几乎处处成立。2. $||u||_{L^\infty(B_r^+)} \le M$ 3. 在 $\{x_n = 0\} \cap \overline{B_r^+} =$ 上： B_r'

在粘性意义下。

此外，给定 $u \in P_r^+(0, M, \Omega)$，自由边界记为 $\Gamma = \partial\Omega \cap B_r^+$； $\{u_j\} \subset P_1^+(0, M, \Omega)$ 的爆破极限是如下形式的极限。

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_{j_k}(s_kx)}{s_k^2},$$

其中， $\{j_k\}$ 是 $\{j\}$ 和 $s_k\to 0^+$的一个子序列。

3. Non-transversal intersection and the C^1 regularity

定理3.1. 假设 $u\in P_1^+(0,M,\Omega)$。存在 $r_0>0$ 以及一个连续性模 ω，使得

$$\Gamma(u)\cap B_{r_0}^+\subset\{x=(x',x_n):x_n\le\omega(|x'|)|x'|\}$$

前提是 $0\in\overline{\Gamma(u)}$。

证明。假设存在 $\epsilon>0$，使得对于所有 $l\in\mathbb{N}$，存在 $x_l\in C_\epsilon\cap B_{\frac{1}{l}}^+\cap\Gamma(u)$。考虑 $e\in\mathbb{S}^{n-1}$，使得沿着子序列 $x_l\to 0$ 沿 e $(e_n>0)$；注意

$$\frac{x_l}{|x_l|}\to e\in\overline{C_\epsilon}.$$

如果 $u_0=ax_1x_n+bx_n^2$ 是 $a\neq 0$ 的爆破极限，与 $\{u\}$ 相差一个旋转， $a>0$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u(s_kx)}{s_k^2}=ax_1x_n+bx_n^2.$$

接下来，注意当

$$\tilde{u}_k(x)=\frac{u(s_kx)}{s_k^2},$$

可得到

$$\sup_k||D^2\tilde{u}_k||_{L^\infty(B_{t_*}^+)}=T=T(t_*)<\infty$$

若 $t_*>0$ [IM16]。设 $z_{l,k}=\frac{x_l}{s_k}$、 $R>1$ 和 $\alpha\in(0,1/5)$。由于

$$||\tilde{u}_k-u_0||_{C^{1,\alpha_r}(B_R^+)}\to 0,$$

and

$$\inf_{C_\epsilon\setminus B_\alpha^+}|\nabla u_0(x)|\ge a_1>0$$

由此可知，存在 $N=N(\alpha,R,a,T)$，其中假设 $k\ge N$,

$$\inf_{(B_R^+\cap C_\epsilon)\setminus B_\alpha^+}|\nabla\tilde{u}_k(x)|\ge\frac{a_1}{3}. \tag{3.1}$$

令 $k_1 \geq N$ 为满足条件的最小整数，其中$|z_{1,k_1}| \geq R$ 通过 $s_k \to 0^+$；注意到 (3.1) 可直接推出

$$\Gamma_k \cap ((B_R^+ \cap C_\epsilon) \setminus B_\alpha^+) = \emptyset$$

当 $k \geq N$ 时。现在，由于

$$\mathcal{L}_t = \{tz_{1,k_1} : t \in (0,1]\} \subset C_\epsilon$$

将 $z_{k_1(1)}$ 设为 $B^+_{|x_1|} \cap \Gamma(\tilde{u}_{k_1})$ 上距离 $\mathcal{L}_t$ 最近的一个元素；注意到$|x_l| \leq \frac{1}{l} \to 0$，因此不失一般性，可以假设 $|x_1| < \alpha$。特别地，如果

$$A_1 = \{tz_{1,k_1} + (1-t)z_{k_1(1)} : 0 \leq t \leq 1\}$$

那么，在 A_1: $z_{1,\ k_1}$, $z_{k_1(1)}$ 上至少存在两个自由边界元素。注意，经过重新标记后，得益于

$$\Gamma_k \cap ((B_R^+ \cap C_\epsilon) \setminus B_\alpha^+) = \emptyset,$$

可以假设 $z_{1、\ k_1}$、$z_{k_1(1)}$ 是 A_1 上仅有的自由边界点，因为如果不是这样，由于 ($(B_R^+ \cap C_\epsilon) \setminus B_\alpha^+$) 中不存在自由边界点，因此可以选取距离 ∂B_R 最近的 $z_1 \in A_1$，然后类似地选择距离 ∂B_α 最近的 $z_2 \in A_1$。特别地，

$$t \mapsto \partial_{x_1} \tilde{u}_{k_1}(tz_{l_1,k_1} + (1-t)z_{k_1(1)})$$

在 $[0,1]$ 上绝对连续。接下来记 $l_1 = 1$，并选取满足 $|x_{l_2}| < |x_1|$ 的最小整数 $l_2 \geq 2$。令 $k_2 \geq k_1$ 为满足$|z_{l_2,\ k_2}| > R\frac{|x_{l_2}|}{s} \to \infty$ （当 $s \to 0^+$ 时）的最小整数，因此通过 $s_k \to 0$，k_2 存在。因此可以迭代，从而在 Γ（$\tilde{u}_{k_2}$）上得到两个元素:

$$z_{l_2,k_2} \in C_\epsilon \setminus B_R^+,$$

$$z_{k_2(2)} \in B^+_{|x_{l_2}|}.$$

注意，通过迭代可以选出 z_{l_m,k_m},$z_{k_m(m)} \in \Gamma(\tilde{u}_{k_m})$ 使得

$$e^m = \frac{z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}}{|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}|},$$

$$|z_{l_m,k_m}| \geq R,$$
$$|z_{k_m(m)}| \leq \alpha,$$
$$|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}| \geq R - \alpha > 0;$$

此外，通过

$$\frac{x_l}{|x_l|} \to e,$$

note

$$\frac{z_{l_m,k_m}}{|z_{l_m,k_m}|} = \frac{x_{l_m}}{|x_{l_m}|} \to e,$$

$$\frac{z_{k_m(m)}}{|z_{k_m(m)}|} \to e$$

（由于 $z_{l,\ k} = \frac{x_l}{s_k}$，可以选取靠近沿$e$直线的自由边界点 $z_{k_m\ (m)}$，因此

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}}{|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}|} - e\Big| \\
&= \Big|\frac{z_{l_m,k_m} - |z_{l_m,k_m}|e + |z_{l_m,k_m}|e - |z_{k_m(m)}|e + |z_{k_m(m)}|e - z_{k_m(m)}}{|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}|} - e\Big| \\
&= \Big|\frac{|z_{l_m,k_m}|(\frac{z_{l_m,k_m}}{|z_{l_m,k_m}|} - e) + |z_{l_m,k_m}|e - |z_{k_m(m)}|e + |z_{k_m(m)}|(e - \frac{z_{k_m(m)}}{|z_{k_m(m)}|})}{|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}|} - e\Big| \\
&\le \Big|\frac{|z_{l_m,k_m}|(\frac{z_{l_m,k_m}}{|z_{l_m,k_m}|} - e) + |z_{k_m(m)}|(e - \frac{z_{k_m(m)}}{|z_{k_m(m)}|})}{|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}|}\Big| + \Big|\frac{|z_{l_m,k_m}| - |z_{k_m(m)}| - |z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}|}{|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}|}\Big| \\
&\to 0
\end{aligned}$$

因为假设$|z_{l_m,\ k_m}| \to \infty$，通过$|z_{k_m\ (m)}\ | \le \alpha$,

$$\Big|\frac{1 - \frac{|z_{k_m(m)}|}{|z_{l_m,k_m}|} - |\frac{z_{l_m,k_m}}{|z_{l_m,k_m}|} - \frac{z_{k_m(m)}}{|z_{l_m,k_m}|}|}{|\frac{z_{l_m,k_m}}{|z_{l_m,k_m}|} - \frac{z_{k_m(m)}}{|z_{l_m,k_m}|}|}\Big| \to 0,$$

$$\frac{|z_{l_m,k_m}|}{|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}|} \to 1.$$

并且，假设（取一个子序列）$|z_{l_m,\ k_m}| \to \alpha_1 < \infty$，由于

$$|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}| \ge R - \alpha,$$

于是立即可得

$$\Big|\frac{|z_{l_m,k_m}|(\frac{z_{l_m,k_m}}{|z_{l_m,k_m}|} - e) + |z_{k_m(m)}|(e - \frac{z_{k_m(m)}}{|z_{k_m(m)}|})}{|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}|}\Big| \to 0,$$

也通过

$$\frac{z_{l_m,k_m}}{|z_{l_m,k_m}|} \to e,$$

$$\frac{z_{k_m(m)}}{|z_{k_m(m)}|} \to e,$$

note

$$\Big||z_{l_m,k_m}| - |z_{k_m(m)}| - |z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}|\Big| \to 0.$$

因此

$$e^m \to e.$$

Let

$$A_{k_m,l_m} = \{tz_{l_m,k_m} + (1-t)z_{k_m(m)} : 0 \le t \le 1\},$$

$$A_{k_m,l_m,\alpha} = \{tz_{l_m,k_m}+(1-t)z_{k_m(m)} : 0 \le t \le t(\alpha),\ \ t(\alpha) = \sup\{t : tz_{l_m,k_m}+(1-t)z_{k_m(m)} \in B_\alpha^+\}\},$$

$$A_{k_m,l_m,R,\alpha} = \{tz_{l_m,k_m}+(1-t)z_{k_m(m)} : t(\alpha) \le t \le t(R),\ \ t(R) = \sup\{t : tz_{l_m,k_m}+(1-t)z_{k_m(m)} \in B_R^+\}\},$$

$$A_{k_m,l_m,R} = \{tz_{l_m,k_m} + (1-t)z_{k_m(m)} : t(R) \le t \le 1\}.$$

注意

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\partial_{x_1}\tilde{u}_{k_m}(tz_{l_m,k_m} + (1-t)z_{k_m(m)}) \\
&\quad= \langle\nabla\partial_{x_1}\tilde{u}_{k_m}(tz_{l_m,k_m} + (1-t)z_{k_m(m)}), z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}\rangle \\
&\quad= \langle\nabla\partial_{x_1}\tilde{u}_{k_m}(tz_{l_m,k_m} + (1-t)z_{k_m(m)}), \frac{z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}}{|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}|}\rangle|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}| \\
&\quad= \langle\nabla\partial_{x_1}\tilde{u}_{k_m}(tz_{l_m,k_m} + (1-t)z_{k_m(m)}), e^m\rangle|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}| \\
&\quad= \partial_{e^m x_1}\tilde{u}_{k_m}(tz_{l_m,k_m} + (1-t)z_{k_m(m)})|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}|.
\end{aligned}$$

特别是，由于.....的绝对连续性

$$t \mapsto \partial_{x_1}\tilde{u}_{k_m}(tz_{l_m,k_m} + (1-t)z_{k_m(m)})$$

关于 $[0,1]$ 以及事实 $z_{l_m,\ k_m}$，$z_{k_m\ (m)} \in \Gamma\ (\tilde{u}_{k_m})$ ，

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_{x_1}\tilde{u}_{k_m}(tz_{l_m,k_m} + (1-t)z_{k_m(m)})|_{t=1} - \partial_{x_1}\tilde{u}_{k_m}(tz_{l_m,k_m} + (1-t)z_{k_m(m)})|_{t=0} \\
&= \int_0^1 \partial_{e^m x_1}\tilde{u}_{k_m}(sz_{l_m,k_m} + (1-s)z_{k_m(m)})|z_{l_m,k_m} - z_{k_m(m)}|ds.
\end{aligned}$$

因此，由于$|z_{l_m,\ k_m} - z_{k_m\ (m)}\ | \geq R - \alpha > 0$,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \partial_{e^m x_1} \tilde{u}_{k_m}(sz_{l_m,k_m} + (1-s)z_{k_m(m)})ds \\
&= \int_0^{t(\alpha)} \partial_{e^m x_1} \tilde{u}_{k_m}(sz_{l_m,k_m} + (1-s)z_{k_m(m)})ds \\
&+ \int_{t(\alpha)}^{t(R)} \partial_{e^m x_1} \tilde{u}_{k_m}(sz_{l_m,k_m} + (1-s)z_{k_m(m)})ds \\
&+ \int_{t(R)}^1 \partial_{e^m x_1} \tilde{u}_{k_m}(sz_{l_m,k_m} + (1-s)z_{k_m(m)})ds.
\end{aligned}$$

假设 $s \in [t(\alpha)\ t(R)]$, 该 $C^{2,\alpha}(B_R^+ \setminus B_\alpha^+)$ 正则性可得

$$\partial_{e^m x_1} \tilde{u}_{k_m}(sz_{l_m,k_m} + (1-s)z_{k_m(m)}) \to \partial_{x_1 e} u_0 = e_n a > 0$$

一致地；因此

$$\int_{t(\alpha)}^{t(R)} \partial_{e^m x_1} \tilde{u}_{k_m}(sz_{l_m,k_m} + (1-s)z_{k_m(m)})ds \to (t(R) - t(\alpha))e_n a > 0.$$

假设 $s \in [t(R), 1]$, , 则法图引理意味着

$$0 \leq \liminf_m (1 - t(R))\partial_{x_1 e} u_0 \leq \liminf_m \int_{t(R)}^1 \partial_{e^m x_1} \tilde{u}_{k_m}(sz_{l_m,k_m} + (1-s)z_{k_m(m)})ds;$$

此外， $C^{1,1}(B_1^+)$ 正则性可得

$$\int_0^{t(\alpha)} |\partial_{e^m x_1} \tilde{u}_{k_m}(sz_{l_m,k_m} + (1-s)z_{k_m(m)})|ds \leq Tt(\alpha);$$

观察 $t(\alpha) \to 0^+$ 当 $\alpha \to 0$; 选取 $R > 1$ 和某个较小的 $\alpha(R, T, e, a) \in (0, 1/5)$, 使得

$$\frac{t(R)e_n a}{e_n a + T} > t(\alpha),$$

$$\begin{aligned}
0 &= \liminf_m \Big(\int_0^1 \partial_{e^m x_1} \tilde{u}_{k_m}(sz_{l_m,k_m} + (1-s)z_{k_m(m)})ds \Big) \\
&\geq (t(R) - t(\alpha))e_n a - Tt(\alpha),
\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。因此可得:

$$u_0 = ax_1 x_n + bx_n^2$$

带有 $a \neq 0$，无法作为 $\{u\}$ 的爆破极限生成。因此，[Ind19b, Proposition 3.6] 推出所有爆破极限都具有以下形式。

$$u_0 = bx_n^2.$$

为完成论证，令 $x_l \in \Gamma(u) \cap B_{1/l}^+ \cap \mathcal{C}_\epsilon$, $y_l = \frac{x_l}{r_k}$ 满足 $r_l = |x_l|$。注意，当 $\tilde{u}_l(x) = \frac{u(r_l x)}{r_l^2}$ 时，$y_l \in \Gamma(\tilde{u}_l)$, $\tilde{u}_l \to bx_n^2$, $y_l \to y \in \partial B_1 \cap C_\epsilon$（取一个子序列），且 $y \in \Gamma(u_0)$, 这就产生了矛盾。

□

以下引理是证明 C^1 正则性的核心工具。

引理 3.2. 假设 $u \in P_1^+(0, M, \Omega)$ 且 $u \geq 0$. 那么，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $r(\epsilon, M) > 0$，使得如果 $x^0 \in \Gamma(u) \cap B_{1/2}^+$ 且 $d = x_n^0 < r$，那么

$$\sup_{B_{2d}^+(x^0)} |u - h| \leq \epsilon d^2, \qquad \sup_{B_{2d}^+(x^0)} |\nabla u - \nabla h| \leq \epsilon d,$$

其中

$$h(x) = b[(x_n - d)^+]^2,$$

且 $b > 0$ 取决于 F 的椭圆性常数。

证明。假设该陈述不成立，则存在 $\epsilon > 0$、非负的 $u_j \in P_1^+(0, M, \Omega)$，以及 $x^j \in \Gamma(u_j) \cap B_{1/2}^+$, $d_j = x_n^j \to 0$，使得

$$\sup_{B_{2d_j}(x^j)^+} |u_j - b[(x_n - d_j)^+]^2| > \epsilon d_j^2,$$

or

$$\sup_{B_{2d_j}(x^j)^+} |\nabla u_j - 2b(x_n - d_j)^+| > \epsilon d_j.$$

记作

$$\tilde{u}_j(x) = \frac{u_j((x^j)' + d_j x)}{d_j^2} = \frac{u_j((x^j)' + d_j x) - u_j((x^j)')}{d_j^2},$$

$u_j((x^j)') = 0$ 由于狄利克雷边界条件，因此

$$||\tilde{u}_j - h||_{C^1(B_2^+(e_n))} \geq \epsilon,$$

$h(x) = b[(x_n - 1)^+]^2$。由于 $|\nabla \tilde{u}_j(e_n)| = 0$, $C^{1,1}$ $\tilde{u}_j$ 的正则性意味着假设 $|x| \leq w$

$$|\tilde{u}_j(x)| = |\frac{u_j((x^j)' + d_j x) - u_j((x^j)')}{d_j^2}|$$
$$\leq \frac{|\nabla u_j(r_{x^j})||x|}{d_j} = \frac{|\nabla u_j(r_{x^j}) - \nabla u_j(x^j)||x|}{d_j} \leq T_1,$$

得益于 $\nabla u_j(x^j) = 0$；因此 $|\tilde{u}_j(x)|$ 局部有界。通过 Arzelà–Ascoli 定理以及 $C^{1,1}$ 正则性，必要时取一个子序列，

$$\tilde{u}_j \to u_0$$

其中 $u_0 \in C^{1,\,1}(\mathbb{R}^n_+)$ 在粘性意义下满足以下偏微分方程

$$\begin{cases} F(D^2 u_0) = 1 & \text{a.e. in } \mathbb{R}^n_+ \cap \Omega_0, \\ |\nabla u_0| = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \backslash \Omega_0, \\ u_0 = 0 & \text{on } \mathbb{R}^{n-1}_+. \end{cases} \tag{3.2}$$

现在假设 $R > 4$,

$$N = N(R) = \limsup_{y_n \to 0, y_n > 0, y_n \in \{y_n : (y', y_n) \in \cup_j \Gamma(u_j)\}} \sup_{\{x : x_n > 0, |x| \leq R\}} \sup_{e \in \mathbb{S}^{n-2} \cap e_n^{\perp}} \sup_{y \in \overline{B^+_{1/2}} \cap \{y' : (y', y_n) \in \Gamma(u_j)\}} \frac{\partial_e u_j(y_n x + y)}{x_n y_n}$$

并注意到 $\sup_{R>4} N(R) \leq N_* < \infty$ by $C^{1,\,1}$ 正则性和边界条件：对于任意 $e \in \mathbb{S}^{n-2} \cap e_n^{\perp}$ 和 $y \in \overline{B^+_{1/2}} \cap \{x_n = 0\}$，可得 $\partial_e u_j((y_n x)' + y) = 0$。此外，

$$N \geq \lim_k \left| \frac{\partial_{x_i} u_k(d_k x + (x^k)')}{d_k x_n} \right| = \lim_k \left| \frac{\partial_{x_i} \tilde{u}_k(x)}{x_n} \right| = \left| \frac{\partial_{x_i} u_0(x)}{x_n} \right| \tag{3.3}$$

对所有 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ 均成立。特别地，令 $v = \partial_{x_1} u_0$，使得

$$|v(x)| \leq N x_n \tag{3.4}$$

在 B^+_R 中。如果 $N = 0$，那么对于所有 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ 和 u_0，$\partial_{x_i} u_0 = 0(x)$ $= u_0(x_n)$。由于 e_n 是一个自由边界点，因此得到 $u_0 = h$，这与.....矛盾

$$||\tilde{u}_k - h||_{C^1(B^+_2(e_n))} \geq \epsilon.$$

因此 $N > 0$，并且存在一个序列 $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$，满足 $x_n^k > 0$、$y^k \in \overline{B_{1/2}^+} \cap \{x_n = 0\} \cap \{y' : (y', y_n) \in \Gamma(u_k)\}$，以及 $e^k \in \mathbb{S}^{n-2} \cap e_n^\perp$，使得 $x^k = (y^k)_n w_k$, $w_k \in B_R^+$，

$$N = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{x_n^k} \partial_{e^k} u_k(x^k + y^k).$$

由紧致性，可沿子序列 $e^k \to e_1 \in \mathbb{S}^{n-2}$, $w_k \to w_a \in \overline{B_R^+}$，使得在某个旋转下在线a

$$N = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{x_n^k} \partial_{x_1} u_k(x^k + y^k).$$

自由边界点 $(y^k, (y^k)_n)$ 意味着 $\partial_{x_1} u_k((y^k, (y^k)_n)) = 0$，因此由于 $(y^k)_n \to 0, |w_a| > 0$ 因为对于任意 $(w_k)_n \to 0$，选取 $\overline{w}_k = (\overline{w}'_k, (w_k)_n)$，其中 $\overline{w}'_k \nrightarrow 0$；设 $\overline{x}^k = (y^k)_n \overline{w}_k$，那么（假设 k 足够大），$(\overline{x}^k)_n = x_n^k$，但可以选择 $\overline{w}'_k$，使得

$$0 = \partial_{x_1} u_k((y^k, (y^k)_n)) \approx \partial_{x_1} u_k(x^k + y^k) \le \partial_{x_1} u_k(\overline{x}^k + y^k),$$

特别是，N 将偏好 $\overline{x}^k$ 而不是 x^k（通过极大性）。让

$$\tilde{u}_k(x) = \frac{u_k(y^k + r_k x)}{r_k^2},$$

$r_k = |x^k|$, $z^k = \frac{x^k}{r_k}$，并注意到沿着一个子序列 $z^k \to z \in \mathbb{S}^{n-1}$，有 $\tilde{u}_k \to u_0$。由此可得 $\partial_{x_1} u_0(z) = N z_n$，并且由于 $N(R) \le N_*$，可以令 $R \to \infty$。特别地，按照 [IM16] 中的方法，$u_0(x) = a x_1 x_n + c x_n + b x_n^2$ 对于 $a \ne 0$ 和 $c, b \in \mathbb{R}$ 成立，这与 u_k 非负矛盾。□

定理 3.3. 设 $u \in P_1^+(0, M, \Omega)$、$0 \in \Gamma(u)$，并假设 $u \ge 0$。则存在 $r_0 > 0$，使得 Γ 是 $B_{r_0}^+$ 中一个 C^1 函数的图像。

证明。该引理说明，自由边界在原点附近是 Lipschitz 的。此外，如果$\epsilon > 0$，则存在 $\alpha_\epsilon > 0$，使得对于 $y \in B_{\alpha_\epsilon}^+$，其中 N_y 是一个法向量，

$$|N_y - e_n| < \epsilon.$$

非横截相交意味着原点处存在法向量，且 $N_0 = e_n$。注意，存在 $r_0 > 0$，使得对于 $x \in B_{r_0}^+$、$\epsilon > 0$，存在 $a_\epsilon > 0$，使得若 $|x - z| < a_\epsilon$，即可。

$$|N_x - N_z| < \epsilon.$$

反设，则存在 $\epsilon > 0, x_k, z_k, |z_k| \to 0, |x_k| \to 0$,

$$|N_{x_k} - N_{z_k}| \ge \epsilon.$$

注意到，通过 $\alpha_{\frac{\epsilon}{2}} > 0$, $z_k, x_k \in B^+_{\alpha_\epsilon}$，假设 k 足够大；特别地，

$$|N_{z_k} - e_n| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$|N_{x_k} - e_n| < \frac{\epsilon}{2},$$

因此这与.....矛盾

$$\epsilon \leq |N_{z_k} - N_{x_k}| < \epsilon.$$

□

在物理情形下，爆破

$$u_0(x) = ax_1x_n + cx_n + \tilde{b}x_n^2,$$

$a \neq 0$，借助 $u \geq 0$ 可以排除这种情况。假设 $n = 2$，则一般可以通过最大值原理 [Ind19a] 排除不希望出现的爆破。

引理 3.4. 假设 $u \in P_1^+(0, M, \Omega)$ 且 $n = 2$.。那么对任意 $\epsilon > 0$，存在$r(\epsilon, u) > 0$，使得若 $x^0 \in \Gamma(u) \cap B^+_{1/2}$ 且 $d = x_2^0 < r$，则

$$\sup_{B^+_{2d}(x^0)} |u - h| \leq \epsilon d^2, \qquad \sup_{B^+_{2d}(x^0)} |\nabla u - \nabla h| \leq \epsilon d,$$

其中

$$h(x) = b[(x_2 - d)^+]^2,$$

且 $b > 0$ 取决于 F 的椭圆性常数。

证明。反设不成立，则存在 $\epsilon > 0$, $x^k \in \Gamma(u) \cap B^+_{1/2}$，满足 $d_k = x_n^k \to 0$，使得

$$\sup_{B_{2d_k}(x^k)^+} |u - b[(x_n - d_k)^+]^2| > \epsilon d_k^2,$$

or

$$\sup_{B_{2d_k}(x^k)^+} |\nabla u - 2b(x_n - d_k)^+| > \epsilon d_k.$$

Let

$$\tilde{u}_k(x) = \frac{u((x^k)' + d_k x)}{d_k^2} = \frac{u((x^k)' + d_k x) - u((x^k)')}{d_k^2},$$

$u((x^k)') = 0$ 由于狄利克雷边界条件，因此特别有

$$||\tilde{u}_k - h||_{C^1(B_2^+(e_n))} \geq \epsilon,$$

其中 $h(x) = b[(x_n - 1)^+]^2$。由于 $|\nabla \tilde{u}_k(e_n)| = 0$， C^1, 1 </style} $\tilde{u}_k$ 的正则性意味着，假设 $|x| \le w$,

$$
\begin{aligned}
|\tilde{u}_k(x)| &= |\frac{u((x^k)' + d_k x) - u((x^k)')}{d_k^2}| \\
&\le \frac{|\nabla u(r_{x^k})||x|}{d_k} = \frac{|\nabla u(r_{x^k}) - \nabla u(x^k)||x|}{d_k} \le T_1,
\end{aligned}
$$

得益于 $\nabla u(x^k) = 0$；因此 $|\tilde{u}_k(x)|$ 局部有界。利用 Arzelà–Ascoli 定理，必要时取一个子序列,

$$
\tilde{u}_k \to u_0
$$

其中 $u_0 \in C^{1,1}(\mathbb{R}^n_+)$ 在粘性意义下满足以下偏微分方程

$$
\begin{cases}
F(D^2 u_0) = 1 & \text{a.e. in } \mathbb{R}^n_+ \cap \Omega_0, \\
|\nabla u_0| = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \backslash \Omega_0, \\
u_0 = 0 & \text{on } \mathbb{R}^{n-1}_+.
\end{cases} \tag{3.5}
$$

现在假设 $R > 4$,

$$
N = N(R) = \limsup_{y_n \to 0, y_n > 0, y_n \in \{y_n : (y', y_n) \in \Gamma\}} \sup_{\{x : x_n > 0, |x| \le R\}} \sup_{e \in \mathbb{S}^{n-2} \cap e_n^{\perp}} \sup_{y \in \overline{B^+_{1/2}} \cap \{y' : (y', y_n) \in \Gamma\}} \frac{\partial_e u(y_n x + y)}{x_n y_n}
$$

并注意到 $\sup_{R>4} N(R) \le N_* < \infty$，根据 $C^{1,1}$ 正则性和边界条件：对于任意 $e \in \mathbb{S}^{n-2} \cap e_n^{\perp}$和 $y \in \overline{B^+_{1/2}} \cap \{x_n = 0\}$，可得 $\partial_e u((y_n x)' + y) = 0$。此外,

$$
N \ge \lim_k \left| \frac{\partial_{x_i} u(d_k x + (x^k)')}{d_k x_n} \right| = \lim_k \left| \frac{\partial_{x_i} \tilde{u}_k(x)}{x_n} \right| = \left| \frac{\partial_{x_i} u_0(x)}{x_n} \right| \tag{3.6}
$$

对所有 $i \in \{1, \dots, n-1\}$均成立。特别地，令 $v = \partial_{x_1} u_0$，使得

$$
|v(x)| \le N x_n \tag{3.7}
$$

在 B^+_R 中。如果 $N = 0$，那么对于所有 $i \in \{1, \dots, n-1\}$ 和 $u_0(x) = u_0(x_n)$，$\partial_{x_i} u_0 = 0$。由于 e_n 是自由边界点，由此得到 $u_0 = h$，这与.....矛盾。

$$
||\tilde{u}_k - h||_{C^1(B^+_2(e_n))} \ge \epsilon.
$$

因此 $N > 0$ 且存在如引理 3.2 所示的序列，$\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 满足 $x_n^k > 0$，$y^k \in \overline{B_{1/2}^+} \cap \{x_n = 0\} \cap \{y' : (y', y_n) \in \Gamma\}$，以及 $e^k \in \mathbb{S}^{n-2} \cap e_n^\perp$ 使得 $x^k = (y^k)_n w_k$，$w_k \in B_R^+$，

$$N = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{x_n^k} \partial_{e^k} u(x^k + y^k).$$

由紧致性可知，沿着一个子序列 $e^k \to e_1 \in \mathbb{S}^{n-2}$, $w_k \to w_a$ ($|w_a| > 0$)，使得在适当的旋转下

$$N = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{x_n^k} \partial_{x_1} u(x^k + y^k).$$

Let

$$\tilde{u}_k(x) = \frac{u(y^k + r_k x)}{r_k^2},$$

$r_k = |x^k|$, $z^k = \frac{x^k}{r_k}$，并注意到沿着一个子序列 $z^k \to z \in \mathbb{S}^{n-1}$ 和 $\tilde{u}_k \to u_0$。由此可得 $\partial_{x_1} u_0(z) = N z_n$，并且得益于 $N(R) \le N_*$，可以令 $R \to \infty$。特别地，按照引理 3.2 中的方法进行推导，可得 $u_0(x) = a x_1 x_n + c x_n + \tilde{b} x_n^2$ 对于 $a > 0$ 和 c, $b \in \mathbb{R}$。注意到

$$\nabla u_0(x) = (a x_n, 0 \dots 0, a x_1 + c + 2\tilde{b} x_n).$$

特别是，假设 $n = 2$,

$$\nabla u_0(x) = 0$$

当且仅当 $x_{a,\ c} = (\frac{-c}{a}, 0)$。令 $R \ge 1$，并注意到由于 $\tilde{u}_k \to u_0$ 属于 $C^{1,\ \alpha}_{loc}$，存在 $k_R \in \mathbb{N}$，使得对于 $k \ge k_R$、$|\nabla \tilde{u}_k| > \tilde{c}$，在

$$E = \big(\{-R + \frac{-c}{a} < x_1 < -\frac{R}{2} + \frac{-c}{a}\} \cup \{\frac{R}{2} + \frac{-c}{a} < x_1 < R + \frac{-c}{a}\}\big) \cap B_{2R}^+(x_{a,c}),$$

因此，$\tilde{u}_k \in C^{2,\ \alpha}(E)$。取一个子序列后，

$$\frac{|\partial_{x_1} \tilde{u}_k - a x_2|}{x_2} = m_k \to 0$$

使得

$$\partial_{x_1} \tilde{u}_k \ge \frac{a}{2} x_2$$

˜在 E 中取 $k \ge k_R \in \mathbb{N}$。接下来选取 $\eta \in (0, R)$ 和 k_0'，使得如果 $k \ge k_0'$,

$$\partial_{x_1} \tilde{u}_k(x) \ge \frac{a\eta}{2}$$

对 $x \in \{x_n \ge \eta\}$。注意到 $y_j = (y^j, (y^j)_n) \in \Gamma$，因此

$$\frac{y_j - y^k}{r_k}$$

是 $\tilde{u}_k$、 $k \geq k_0'$ 和 $j \in \mathbb{N}$ 的自由边界元素。现在， $\nabla u_0(x) = 0$ 当且仅当 $x_{a,c} = (\frac{-c}{a}, 0)$ 那么意味着，假设 j 足够大（k 足够大且固定），通过 $(y^j)_n \to 0$,

$$\frac{y_j - y^k}{r_k} \in B^+_{R/4}(x_{a,c}).$$

因此

$$\frac{y_j - y^k}{r_k} \in \Gamma(\tilde{u}_k)$$

然后得到

$$\mathrm{Int}\{\nabla \tilde{u}_k = 0\} \cap B^+_{R/2}(x_{a,c}) \neq \emptyset$$

因为假设这不成立，非退化性可推出 $\tilde{u}_k \in C^{2,\alpha}(B^+_{R/4}(x_{a,c}))$；由于 $\frac{y_j - y^k}{r_k}$ 是 $\tilde{u}_k$ 的一个自由边界元素，这与 F 的连续性相矛盾。如果

$$S = \{0 < x_2 < \eta, -R + \frac{-c}{a} < x_1 < R + \frac{-c}{a}\},$$

在 $v := \partial_{x_1}\tilde{u}_k \geq 0$ 上观察到 ∂S。通过求导， $Lv = 0$ 在 $S \cap \Omega_k$ 上成立，其中 L 是一个线性二阶一致椭圆算子。接下来，由于 v 在 $\partial\Omega_k$ 上消失，由最大值原理可知，$v > 0$ 在 $S \cap \Omega_k$ 中成立。注意，对于一个圆盘 $B \subset B^+_{R/2}(x_{a,c})$，使得 $\nabla \tilde{u}_k = 0$ 在 B 中，$u_k = m$ 对某个 $m \in \mathbb{R}$ 成立，并且存在一条通过沿 x_1 方向平移该圆盘生成的条带 S。再选择另一个圆盘

$$\tilde{B} \subset \tilde{S} \cap \{-R + \frac{-c}{a} < x_1 < -\frac{R}{2} + \frac{-c}{a}\},$$

令 $E_t = B + te_1$ 满足 $t \in \mathbb{R}$； $v = 0$ 属于 Ω_k^c，且 $v > 0$ 属于 $S \cap \Omega_k$，因此可得 $u < m$ 于 B 上。接下来，假设 $t^* > 0$ 表示使 ∂E_t 与 $\{\tilde{u}_k = m\}$ 相交的第一个取值，并令

$$y \in \partial E_{t^*} \cap \{\tilde{u}_k = m\}.$$

由 $F(D^2\tilde{u}_k) \geq 0$ 以及 $w = \tilde{u}_k - m < 0$ 属于 E_{t^*} 且满足 $w(y) = 0$，Hopf 原理推出（例如参见 [CLN13]） $\partial_{\mathcal{N}}\tilde{u}_k(y) > 0$。特别地，存在 $\mu > 0$ 使得 $B_\mu(y) \subset \Omega_k$。因此，$v > 0$ 于 $B_\mu(y)$ 上；又由于 $v = 0$ 于 Ω_k^c 上，存在 $z > 0$ 使得 $\tilde{u}_k(y + e_1 z) > m$ 对于 $y + e_1 z \in \{\tilde{u}_k = m\}$ 成立，这就产生了矛盾。□

这意味着在二维中无需符号假设即可获得 C^1 正则性，从而解决了 [PSU12 第 8 章注 8.8] 中的问题。

定理3.5. 设 $u \in P_1^+(0, M, \Omega)$、$0 \in \Gamma(u)$，并假设 $n = 2$。那么存在 $r_0 > 0$，使得 Γ 是 $B^+_{r_0}$ 中一个 C^1 函数的图像。

References

[Caf77] Luis A. Caffarelli。高维自由边界的正则性。数学学报，139(3-4)：155–184，1977年。[CCKS96] L. Caffarelli、M. G. Crandall、M. Kocan 和 A. Swiech。关于具有可测项的完全非线性方程的粘性解。纯粹与应用数学通讯，49(4)：365–397，1996年。[CKS00] Luis A. Caffarelli、Lavi Karp 和 Henrik Shahgholian。自由边界的正则性及其在Pompeiu问题中的应用。数学年刊（第二辑），151(1)：269–292，2000年。[CLN13] Luis Caffarelli、Yanyan Li 和 Louis Nirenberg。关于非线性椭圆方程奇异解的若干评注 III：包括抛物算子的粘性解。纯粹与应用数学通讯，66(1)：109–143，2013年。[IM16] Emanuel Indrei 和 Andreas Minne。二维中完全非线性椭圆算子的自由边界与固定边界的非横截相交。偏微分方程分析，9(2)：487–502，2016年。[Ind19a] Emanuel Indrei。超导平均场理论中自由边界与固定边界的非横截相交。界面与自由边界，21(2)：267–272，2019年。[Ind19b] Emanuel Indrei。完全非线性障碍问题的边界正则性与非横截相交。纯粹与应用数学通讯，doi.org/10.1002/cpa.21814，2019年。[LP21] Ki-Ahm Lee 和 Jinwan Park。抛物型双障碍问题的正则性理论。数学年刊，381(1-2)：685–728，2021年。[PSU12] Arshak Petrosyan、Henrik Shahgholian 和 Nina Uraltseva。障碍型问题中自由边界的正则性，数学研究生课程第136卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2012年。[Sch77] David G. Schaeffer。自由边界中的奇点示例。比萨高等师范学校科学类年刊（第四辑），4(1)：133–144，1977年。[SU03] Henrik Shahgholian 和 Nina Uraltseva。自由边界在接触点附近与固定边界相交时的正则性。杜克数学杂志，116(1)：1–34，2003年。