arXiv:2305.02924v1 [math.FA] 1 May 2023

半群上的 Kannappan-余弦函数方程

Jafar Ahmed[1], Ajebbar Omar[2], Elqorachi Elhoucien[1]

摘要。本文确定了 Kannappan 余弦函数律 $g(xyz_0) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$, $x, y \in S$ 的复值解，其中 S 是一个半群，z_0 是 S. 中的一个固定元素。

1. 引言

余弦加法公式是

$$cos(x + y) = cos(x)\, cos(y) - sin(x)\, sin(y),\ x, y \in \mathbb{R}.$$

It i是以下函数方程在任意半群 S上的起点:

$$g(xy) = g(x)g(y) - f(x)f(y),\ x, y \in S \tag{1.1}$$

对于未知函数 f、g： $S \to \mathbb{C}$，这称为余弦加法定律。在 Acz`el 的专著 [1, 第 3.2 节3] 中，我们可以找到关于 (1.1) 及其在 $S = \mathbb{R}$ 上的连续实值解的早期研究结果。

函数方程 (1.1) 已由 Poulsen 和 Stetkær ([8]) 在群上求解，由 Ajebbar 和 Elqorachi ([2]) 在由其平方生成的半群上求解，最近又由 Ebanks [6] 在半群上求解。

在 [12, 定理 3.1] 中，Stetkær 求解了以下函数方程。

$$g(xy) = g(x)g(y) - f(y)f(x) + \alpha f(xy), \quad x, y \in S, \tag{1.2}$$

其中 α 是 $\mathbb{C}$中的一个固定常数。他用乘法函数和正弦加法定律特殊情形的解来表示这些解。在 [11, 命题 16] 中，他求解了函数方程

$$f(xyz_0) = f(x)f(y),\ x, y \in S, \tag{1.3}$$

2020年数学主题分类：主要分类 39B52，次要分类 39B32。关键词：函数方程、半群、乘法函数、加法函数、余弦-正弦方程。

该方程定义在半群上，且其中 z_0 是 S中的一个固定元素。我们将在计算中使用这些结果。

本文讨论以下 Kannappan-余弦加法定律。

$$g(xyz_0) = g(x)g(y) - f(x)f(y),\ x, y \in S \tag{1.4}$$

在半群 S 上。函数方程 (1.4) 被称为 Kannappan 函数方程，因为它引入了 z_0 作为 S 中的一个固定元素，这一点与 Kannappan [10] 的论文中所述的情况相同。

在 $\{f, g\}$ 线性相关的特殊情况下，我们得到存在一个常数 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得函数 $(1 - \lambda^2)g$ 满足函数方程 (1.3)。

如果 S 是具有单位元 e的幺半群，且 $f(e) = 0$ 和 $g(e) \neq 0$，或者$g(e) = 0$ 和 $f(e) \neq 0$，则最后一个函数方程就是余弦加法定律，Ebanks [6]最近已在一般半群上求解了该方程。

现在，若 $\alpha := f(e) \neq 0$ 且 $\beta: g(e) \neq 0$，则我们得到数对 $\left(\frac{g}{\beta}, \frac{f}{\beta}\right)$ 满足以下函数方程

$$\frac{g}{\beta}(xy) = \frac{g}{\beta}(x)\frac{g}{\beta}(y) - \frac{f}{\beta}(x)\frac{f}{\beta}(y) + \frac{\alpha}{\beta}\frac{f}{\beta}(xy),$$

该方程属于形式 (1.2)，而文献中已有关于群上 f 和 g 的显式公式（例如参见 [14, 推论3.2.]）。

函数方程 (1.4) 的自然一般设定是令 S 为半群，因为 (1.4) 的表述只要求 S 上的运算满足结合律，而不要求存在恒等元和逆元。因此，本文研究半群 S 上的 Kannappan-余弦函数方程 (1.4)，将以往 S 为群的研究加以推广。因此，本文的结果是对文献中已有结果的自然延续。

本文旨在说明，(1.4) 与 (1.2)-(1.3) 在幺半群上的关系如何扩展到更广泛的框架，即 S为半群的情形。我们给出解的显式公式，将其表示为从半群 S 到 $\mathbb{C}$的同态和可加映射（定理 4.1）。我们还求得了拓扑半群上的连续解。

2. 预备知识、记号与术语

全文中，S 是一个半群（带有结合运算的集合），而 z_0 是 S中的一个固定元素。

如果 S 是拓扑的，我们用 $\mathcal{C}(S)$ 表示从 S 到复数域 $\mathbb{C}$ 的连续函数代数。

设 $f: S \longrightarrow \mathbb{C}$ 是一个函数。若对所有x、$y \in S$，f 均为 $f(xy) = f(yx)$，则称其为中心函数；若对所有 x_1、x_2、...、$x_n \in S$，对 n 个元素的所有排列 σ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$，f均满足 $f(x_1x_2, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)})$，则称其为阿贝尔函数。若映射$A: S \longrightarrow \mathbb{C}$ 对所有 x、$y \in S$均满足 $A(xy) = A(x) + A(y)$，则称其为可加映射

若映射 $\chi:\ S \longrightarrow \mathbb{C}$ 对所有 x、$y \in S$均满足 $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$，则称其为可乘映射

若 $\chi \neq 0$，则零空间 $I_\chi := \{x \in S \mid \chi(x) = 0\}$ 要么为空集，要么是 S 的真子集；若非空，则 I_χ 是 S 中的一个双边理想，并且 $S \setminus I_\chi$ 是 S的一个子半群。

注意，加法函数和乘法函数都是阿贝尔的。
对于任意子集 $T \subseteq S$，令 $T^2 := \{xy \mid x, y \in T\}$；对于 S 中任意固定元素 z_0，令 $T^2 z_0 := \{xyz_0 \mid x, y \in T\}$。
为了表达本文所研究的函数方程的解，我们将对所有 u、$v \in S \setminus I_\chi\}$ 使用集合 P_χ:
$= \{p \in I_\chi \setminus I_\chi^2 \mid up, pv, upv \in I_\chi \setminus I_\chi^2$。关于 P_χ 的更多详情，请读者参见 [5], [6] 和 [4]。

3. 预备知识

本节给出求解函数方程 (1.3) 的一些有用结果。

引理 3.1. 设 S 是一个半群，$n \in \mathbb{N}$，且 χ、χ_1、χ_2、$\ldots\chi_n$: $S \longrightarrow \mathbb{C}$ 是互不相同的非零乘法函数。则
(a) $\{\chi_1, \chi_2, \ldots\chi_n\}$ 线性无关。(b) 若 $A: S \setminus I_\chi \longrightarrow \mathbb{C}$ 是一个非零加法函数，则集合 $\{\chi A, \chi\}$ 在 $S \setminus I_\chi$ 上线性无关。

证明。(a): 参见 [13, 定理 3.18]。(b): 参见 [3, 引理 4.4]。 □

下面的命题给出了函数方程的解

$$f(xyz_0) = \chi(z_0)f(x)\chi(y) + \chi(z_0)f(y)\chi(x),\ x, y \in S, \tag{3.1}$$

命题 3.2. 设 S 为半群，且 $\chi: S \longmapsto \mathbb{C}$ 为乘法函数，使得 $\chi(z_0) \neq 0$。若 $f: S \longmapsto \mathbb{C}$ 是 (3.1) 的一个解，则

$$f(x) = \begin{cases} \chi(x)(A(x) + A(z_0)) & for \quad x \in S \setminus I_\chi \\ \rho(x) & for \quad x \in P_\chi \\ 0 & for \quad x \in I_\chi \setminus P_\chi, \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $A: S \setminus I_\chi \longrightarrow \mathbb{C}$ 是可加的，且 $\rho: P_\chi \longrightarrow \mathbb{C}$ 是 f 在P_χ上的限制。

此外，f 是阿贝尔的，并满足以下条件:
(I) 对所有 $x \in I_\chi \setminus P$，$f(xy) = f(yx) = 0_\chi$ 且 $y \in S \setminus I_\chi$。
(II) 若 $x \in \{up, pv, upv\}$ 且 $p \in P_\chi$ 以及 u、$v \in S \setminus I_\chi$，则 $x \in P_\chi$ 并且我们分别有 $\rho(x) = \rho(p)\chi(u)$、$\rho(x) = \rho(p)\chi(v)$ 或 $\rho(x) = \rho(p)\chi(uv)$。
反过来 y, *the* f函数 f *of the form (3.2) defi*是一个解 f *(3.1).*
此外，如果 S 是拓扑半群且 $f \in \mathcal{C}(S)$，那么 $\chi \in \mathcal{C}(S)$ $A \in \mathcal{C}(S \setminus I_\chi)$ 且 $\rho \in \mathcal{C}(P_\chi)$。
证明。参见 [7, 命题 4.3]。 □

为了简化求解函数方程 (1.3) 的过程，我们证明以下引理，其中包含一些关键性质。

引理 3.3. 设 S 是一个半群，且 f、g： $S \longmapsto \mathbb{C}$ 是满足 $g \neq 0$ 的函数方程 (1.3) 的解。那么

(i)如果 $f(z_0) = 0$，则

(1)

$$g(z_0^2)g(xy) = g(z_0)[g(x)g(y) - f(x)f(y)] + f(z_0^2)f(xy),\ x, y \in S. \tag{3.3}$$

(2)

$$g(z_0^2)^2 = g(z_0)^3 + f(z_0^2)^2.$$

(3) 如果 f 和 g 线性无关，则 $g(z_0) \neq 0$。

(ii) 如果 $f(z_0) \neq 0$，则存在 $\mu \in \mathbb{C}$ 使得

$$f(xyz_0) = f(x)g(y) + f(y)g(x) + \mu f(x)f(y),\ x, y \in S. \tag{3.4}$$

证明。(i) 假设 $f(z_0) = 0$。

(1) 在 (1.3) 中分别作代换 (xy, z_0^2) 和 (xyz_0, z_0)，得到 $g(xyz_0^3) = g(xy)g(z_0^2) - f(xy)f(z_0^2)$，以及 $g(xyz_0^3) = g(xyz_0)g(z_0) - f(xyz_0)f(z_0) = g(z_0)g(x)g(y) - g(z_0)f(x)f(y)$。比较这些表达式，我们可得 $g(xy)g(z_0^2) - f(z_0^2)f(xy) = g(z_0)g(x)g(y) - g(z_0)f(y)f(x)$。这就证明了所需的恒等式。

(2) 直接将 $x = y = z_0$ 代入方程（3.3）即可得到。(3) 通过矛盾法，假设 $g(z_0) = 0$。然后利用（1.3）得到 $g(xyz_0^2) = g(x)g(yz_0) - f(x)f(yz_0) = g(xy)g(z_0) - f(xy)f(z_0) = 0$，由于 $f(z_0) = g(z_0) = 0$。于是我们推得

$$g(x)g(yz_0) = f(x)f(yz_0),\ x, y \in S. \tag{3.5}$$

如果对所有 $y \in S$ 都有 $g(yz_0) = 0$，那么 $0 = g(xyz_0) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$ x， $y \in S$. 因此， $g(x)g(y) = f(x)f(y)$ x，所以 $f = g$ 或 $f = -g$，这与 f 和 g 线性无关这一事实相矛盾。因此，在 Sz_0 上 $g \neq 0$，由（3.5）可得 $g = c_1 f$，其中 $c_1 =:$ 对于某个 $a \in S$，有 $f(az_0)/g(az_0)$，使得 $g(az_0) \neq 0$。这同样产生矛盾，因为 f 和 g 线性无关。因此我们得出 $g(z_0) \neq 0$。

(ii) 假设 $f(z_0) \neq 0$。在 (1.3) 中分别代换为 (x, yz_0^2) 和 (xyz_0, z_0)，得到 $g(xyz_0^3) = g(x)g(yz_0^2) - f(x)f(yz_0^2) = g(z_0)g(x)g(y) - g(x)f(z_0)f(y) - f(x)f(yz_0^2)$ 和 $g(xyz_0^3) = g(xyz_0)g(z_0) - f(xyz_0)f(z_0) = g(z_0)g(x)g(y) - g(z_0)f(x)f(y) - f(xyz_0)f(z_0)$。然后，根据 S 中运算的结合律，得到

$$f(z_0)[f(xyz_0) - f(x)g(y) - f(y)g(x)] = f(x)[f(yz_0^2) - f(y)g(z_0) - f(z_0)g(y)] \tag{3.6}$$

由于 $f(z_0) \neq 0$，将 (3.6) 除以 $f(z_0)$，得到

$$f(xyz_0) = f(x)g(y) + f(y)g(x) + f(x)\psi(y), \tag{3.7}$$

其中 $\psi(y) := f(z_0)^{-1}[f(yz_0^2) - f(y)g(z_0) - f(z_0)g(y)]$. 将 (3.7) 代回 (3.6)，我们得到 $f(z_0)[f(x)\psi(y)] = f(x)[f(y)\psi(z_0)]$, 这意味着 $\psi(y) = \mu f(y)$，其中 $\mu := \psi(z_0)$ $f(z_0)^{-1}$因此 (3.7) 变为 ~~$f(xyz_0)$~~ $= f(x)g(y) + f(y)g(x) + \mu f(x)f(y)$。引理 3.3 的证明至此完成。□

4. 主要结果

现在，我们已经准备好描述函数方程 (1.3) 的解。令 $\Psi_{A\chi,\ \rho}\colon\ S\longrightarrow\mathbb{C}$ 表示一个具有如下形式的函数：[4, 定理 3.1 (B)]，其中 $\chi\colon\ S\longrightarrow\mathbb{C}$ 是一个非零乘法函数， $A\colon$ $S\setminus I_\chi\longrightarrow\mathbb{C}$ 是一个可加函数， $\rho\colon P_\chi\longrightarrow\mathbb{C}$ 是 f的限制，并且条件 (i) 和 (iI) 成立。

定理 4.1. 函数方程的解 $f,g\colon\ S\longrightarrow\mathbb{C}$ 为以下几对函数。 *(1.3)*

(1) $f=g=0$. (2) $S\neq S^2z_0$,
并且有

$$f=\pm g\ and\ g(x)=\begin{cases}g_{z_0}(x)\ for\ x\in S\setminus S^2z_0\\0\qquad\qquad for\quad x\in S^2z_0,\end{cases}$$

其中 $g_{z_0}\colon\ S\setminus S^2z_0\longrightarrow\mathbb{C}$ 是任意非零函数。
(3) 存在常数 $d\in\mathbb{C}\setminus\{\pm1\}$ 和定义在S 上的乘法函数 χ ，满足 $z_0=0$ ，使得
$\chi(\ \ )/\ \ ,$

$$f=\frac{d\,\chi(z_0)}{1-d^2}\chi\ and\ g=\frac{\chi(z_0)}{1-d^2}\chi.$$

(4) 存在常数 $c\in\mathbb{C}^*\setminus\{\pm i\}$ ，以及定义在 S 上的两个不同乘法函数 χ_1 和 χ_2 ，满足 $\chi_1(z_0)\neq0$， $\chi_1(z_0)\neq0$ ，且 $\chi_1(z_0)\chi_1\neq\chi_2(z_0)\chi_2$ ，使得

$$f=-\frac{\chi_1(z_0)\chi_1-\chi_2(z_0)\chi_2}{i(c^{-1}+c)}\ and\ g=\frac{c^{-1}\chi_1(z_0)\chi_1+c\chi_2(z_0)\chi_2}{c^{-1}+c}.$$

(5) 存在常数 q、$\gamma\in\mathbb{C}^*$ ，以及定义在 S 上的两个不同非零乘法函数 χ_1 和 χ_2，满足 $\chi_1(z_0)=\frac{q^2-(1+\xi^{\ 2})}{2\gamma q}$， $\chi_2(z_0)=-\frac{q^2-(1-\xi^{\ 2})}{2\gamma q}$，且 $\xi\colon$ $=\pm\sqrt{1+q^2}$，使得

$$f=\frac{\chi_1+\chi_2}{2\gamma}+\xi\frac{\chi_1-\chi_2}{2\gamma}\ and\ g=q\frac{\chi_1-\chi_2}{2\gamma}.$$

(6) 存在常数 $q\in\mathbb{C}\setminus\{\pm\alpha\}$、 $\gamma\in\mathbb{C}^*\setminus\{\pm\alpha\}$ 和 $\delta\in\mathbb{C}\setminus\{\pm1\}$，以及定义在 S 上的两个不同非零乘法函数 χ_1 和 χ_2，满足 $\chi_1(z_0)=$ $\frac{(1+\delta)^{\ 2}-\alpha+q^{\ 2}()()}{2\gamma\ 1+\delta}$， $\chi_2(z_0)=\frac{(1-\delta)^{\ 2}-\alpha-q^{\ 2}()()}{2\gamma\ 1-\delta}$，以及 $\delta\colon$ $=\pm\sqrt{1+q^2-\alpha^2}$使得

$$f=\alpha\frac{\chi_1+\chi_2}{2\gamma}+q\frac{\chi_1-\chi_2}{2\gamma}\ and\ g=\frac{\chi_1+\chi_2}{2\gamma}+(1+\delta)\frac{\chi_1-\chi_2}{2\gamma}.$$

(7) 存在一个常数 $\beta\in\mathbb{C}^*$、一个非零乘法函数 χ on$S$、一个加法函数 $A\colon$ $S\setminus I_\chi\longrightarrow\mathbb{C}$ 以及一个函数 $\rho\colon P_\chi\longrightarrow\mathbb{C}$ ，满足 $\chi(z_0)=\frac{1}{\beta}$且 $A(z_0)=0$ ，
使得

$$f=\frac{1}{\beta}\Psi_{A\chi,\rho}\ and\ g=\frac{1}{\beta}\left(\chi\pm\Psi_{A\chi,\rho}\right).$$

(8) 存在一个乘法函数 χ on S，满足 $\chi(z_0) \neq 0$；一个加法函数 $A: S \setminus I_\chi \longrightarrow \mathbb{C}$ 以及一个函数 $\rho: P_\chi \longrightarrow \mathbb{C}$，使得

$$f = A(z_0)\chi + \Psi_{A\chi,\rho} \text{ and } g = (\chi(z_0) \pm A(z_0))\,\chi + \Psi_{A\chi,\rho}.$$

此外，若 S 是一个拓扑半群且 $f \in \mathcal{C}(S)$，则在情形 (1)、(2) 和 (4)-(8) 中，以及在 (3) 中若 $d \neq 0$，有 $g \in \mathcal{C}(S)$。

证明。若 $g = 0$，则 (1.3) 化为 $f(x)f(y) = 0$，对所有 $x, y \in S$ 均成立。这意味着 $f = 0$，因此得到第一部分解。以下我们可以假设 $g \neq 0$。

若 f 和 g 线性相关，则存在 $d \in \mathbb{C}$ 使得 $f = dg$。将其代入 (1.3)，得到以下方程：$g(xyz_0) = (1 - d^2)g(x)g(y)$ $x, y \in S$。若 $d^2 = 1$，则对所有 $x, y \in S$，都有 $g(xyz_0) = 0$。因此$S \neq S^2 z_0$，因为 $g \neq 0$。所以我们得到解族 (2)，其中 g_{z_0} 是任意非零函数。若 $d^2 \neq 1$，则根据 [11，命题 16]，存在定义在 S 上的乘法函数 χ，使得 $\chi(z_0)\chi := (1 - d^2)g$ 且$\chi(z_0) \neq 0$。于是我们推得 $g = \frac{\chi(z_0)}{1 - d^2}\chi$ 且 $f = dg = \frac{d\,\chi(z_0)}{1 - d^2}\chi$，从而得到解族 (3)。

在证明的其余部分中，我们假设 f 和 g 线性无关。根据 $f(z_0) = 0$ 还是 $f(z_0) \neq 0$，我们将证明分为两种情况。

情况 1. 假设 $f(z_0) = 0$。那么由引理 3.3 (i)-(3) 和 (i)-(1)，我们分别得到 $g(z_0) \neq 0$ 和

$$g(z_0^2)g(xy) = g(z_0)g(x)g(y) - g(z_0)f(x)f(y) + f(z_0^2)f(xy),\ x\ y \in S. \quad (4.1)$$

子情况 1.1. 假设 $g(z_0^2) = 0$。那么由引理 3.3 (i)-(2) 和 (i)-(3)，我们得到 $f(z_0^2) \neq 0$，因为 f 和 g 线性无关，因而 (4.1) 可改写为 $f(xy) = \gamma f(x)f(y) - \gamma g(x)g(y)$ $x, y \in S$，其中 $\gamma := \frac{g}{(z_0)\, f(z_0^2)} \neq 0$。因此，数对 $(\gamma f, \gamma g)$ 满足余弦加法公式 (1.4)。所以，根据 [12, 定理 6.1]，并考虑到 f 和 g 线性无关，我们知道只有以下几种可能。

(1.1.i) 存在常数 $q \in \mathbb{C}^*$ 以及定义在 S 上的两个不同的非零乘法函数 χ_1 和 χ_2，使得 $\gamma g = q\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}$ 和 $\gamma f = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \pm \left(\sqrt{1 + q^2}\right)\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}$，从而得到 $f = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2\gamma} \pm \left(\sqrt{1 + q^2}\right)\frac{\chi_1 - \chi_2}{2\gamma}$ 和 $g = q\frac{\chi_1 - \chi_2}{2\gamma}$。令 $\xi := \pm\sqrt{1 + q^2}$ 并利用(1.3)，可得

$$\frac{1}{4\gamma^2}\left(q^2 - (1 + \xi)^2\right)\chi_1(xy) + \frac{1}{4\gamma^2}\left(q^2 - (1 - \xi)^2\right)\chi_2(xy)$$

$$= \frac{q}{2\gamma}\chi_1(z_0)\chi_1(xy) - \frac{q}{2\gamma}\chi_2(z_0)\chi_2(xy),$$

由引理 3.1 (i)可知，这意味着 $\frac{q}{2\gamma}\chi_1(z_0) = \frac{1}{4\gamma^2}\left(q^2-(1+\xi)^2\right)$ 以及$\frac{q}{2\gamma}\chi_2(z_0) = -\frac{1}{4\gamma^2}\left(q^2-(1-\xi)^2\right)$，因为 χ_1 和 χ_2 不同且非零。于是我们推出

$$\chi_1(z_0)=\frac{1}{2\gamma q}\left(q^2-(1+\xi)^2\right) \quad \text{and} \quad \chi_2(z_0)=-\frac{1}{2\gamma q}\left(q^2-(1-\xi)^2\right).$$

因此，我们处于第 (5) 部分。

(1.1.ii) 存在一个非零乘法函数 χ，定义在 S 上，以及一个加法函数 A，定义在 $S\setminus I_\chi$ 上，使得 $\gamma g=\Psi_{A\chi,\rho}$ 且 $\gamma f=\chi\pm\Psi_{A\chi,\rho}$.

如果 $z_0\in I_\chi\setminus P_\chi$ 我们有 $\gamma g(z_0)=\Psi_{A\chi,\ \rho}(z_0)=0$ 根据 $\Psi_{A\chi,\ \rho}$ 的定义。如果$z_0\in P_\chi$我们有 $\chi(z_0)=0$且 $|\gamma g(z_0)|=|\rho(z_0)|=|\chi(z_0)\pm\rho(z_0)|=|\gamma f(z_0)|=0$。因此，如果 $z_0\in I_\chi$ 我们得到 $\gamma g(z_0)=0$，这就产生了矛盾，因为$g(z_0)\neq 0$ 且 $\gamma=\frac{g(z_0)}{f(z_0^2)}$。

因此，$z_0\in S\setminus I_\chi$ 且我们有 $\chi(z_0)\neq 0$。根据假设，$f(z_0)=0$，由此可得 $f(z_0)=\frac{1}{\gamma}[\chi(z_0)\pm A(z_0)\chi(z_0)]=0$，这意味着 $A(z_0)=-1$。现在，对所有 $x,y\in S\setminus I_\chi$，我们有 $xyz_0\in S\setminus I_\chi$，由此利用 (1.3) 可得$\left(\frac{1}{\gamma}-\chi(z_0)\right)\chi(xy)+\left(\frac{1}{\gamma}+\chi(z_0)\right)\chi(xy)A(xy)=0$。根据引理 3.1(i)，这意味着 $\frac{1}{\gamma}-\chi(z_0)=0$ 且 $\frac{1}{\gamma}+\chi(z_0)=0$，因为 $A\neq 0$。因此，$\chi(z_0)=\frac{1}{\gamma}=-\frac{1}{\gamma}$，这与假设矛盾，因为 $\frac{1}{\gamma}\neq 0$。所以，在这种可能性下没有解。子情形 1.2：假设 $g(z_0^2)\neq 0$，那么函数方程 (4.1) 可改写如下：$\beta g(xy)=\beta^2 g(x)g(y)-\beta^2 f(x)f(y)+\alpha\beta f(xy)\ \ x,y\in S$，其中 $\beta:=\frac{g(z_0)}{g(z_0^2)}\neq 0$且 $\alpha:=\frac{f}{g}(z_0^2)$ 这表明数对 $(\beta g,\beta f)$ 满足函数方程 (1.2)。因此，根据 [12, 定理 3.1], ，并考虑到 f 和 g 线性无关，仅有以下几种可能。

(1.2.i) 存在常数 $q\in\mathbb{C}\setminus\{\pm\alpha\}$以及两个不同的非零乘法函数 χ_1和 χ_2，定义在 S上，使得 $\beta f=\alpha\frac{\chi_1+\chi_2}{2}+q\frac{\chi_1-\chi_2}{2}$且 $\beta g=\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\pm\sqrt{1+q^2-\alpha^2}\frac{\chi_1-\chi_2}{2}$.。引入 $\delta:=\pm\sqrt{1+q^2-\alpha^2}$，我们得到 $f=\alpha\frac{\chi_1+\chi_2}{2\beta}+q\frac{\chi_1-\chi_2}{2\beta}$且 $g=\frac{\chi_1+\chi_2}{2\beta}+\delta\frac{\chi_1-\chi_2}{2\beta}$.。利用 (1.3) 可得 $\frac{1}{4\beta^2}\left((1+\delta)^2-(\alpha+q)^2\right)\chi_1(xy)+\frac{1}{4\beta^2}\left((1-\delta)^2-(\alpha+q)^2\right)\chi_2(xy)=\frac{1}{2\beta}(1+\delta)\chi_1(z_0)\chi_1(xy)+\frac{1}{2\beta}(1-\delta)\chi_2(z_0)\chi_2(xy)$，由引理 3.1(i) 可推出 $\frac{1}{2\beta}(1+\delta)\chi_1(z_0)=\frac{1}{4\beta^2}\left((1+\delta)^2-(\alpha+q)^2\right)$且

$\frac{1}{2\beta}(1-\delta)\ \chi_2(z_0) = \frac{1}{4\beta^2}\left((1-\delta)^2-(\alpha+q)^2\right)$，因为 χ_1 和 χ_2 是不同的非零乘法函数。注意，$\delta \neq \pm 1$，因为 $q \neq \pm\alpha$。因此我们推得 $\chi_1(z_0) = (1+\delta)^2 - \alpha+q^2()()$ 以及 $\chi_2(z_0) = \frac{(1-\delta)^2-\alpha+q^2()()}{2\beta\ 1-\delta}$。
$2\beta\ 1+\delta$
于是，以 γ 代替 β，便得到第 (6) 部分。

(1.2.ii) $\alpha \neq 0$ 并且存在两个不同的非零乘法函数 χ_1 和 χ_2，定义在 S 上，使得 $\beta f = \alpha\chi_1$ 和 $\beta g = \chi_2$。再次利用 (1.3)，我们得到 $\frac{1}{\beta}\left(\chi_2(z_0) - \frac{1}{\beta}\right)\chi_2(xy) + \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\chi_1(xy) = 0$，由此得到 $\chi_2(z_0) = \frac{1}{\beta}$和 $\alpha = 0$，因为 χ_1 和 χ_2 不同。因此，由于 $\alpha \neq 0$，这种可能性可以排除。

(1.2.iii) 存在一个定义在 S 上的非零乘法函数 χ，以及一个定义在 $S\setminus I_\chi$ 上的加法函数 A，使得 $\beta f = \alpha\chi + \Psi_{A\chi,\ \rho}$ 且 $\beta g = \chi \pm \Psi_{A\chi,\ \rho}$，由此得到 $f = \frac{1}{\beta}(\alpha\chi + \Psi_{A\chi,\ \rho})$ 和 $g = \frac{1}{\beta}(\chi \pm \Psi_{A\chi,\ \rho})$。

若 $g = \frac{1}{\beta}(\chi + \Psi_{A\chi,\ \rho})$，则 $z_0 \notin I_\chi \setminus P_\chi$。事实上，若非如此，则有 $\chi(z_0) = 0$ 且 $\Psi_{A\chi,\ \rho}(z_0) = 0$。于是 $\beta g(z_0) = \chi(z_0) + \Psi_{A\chi,\ \rho}(z_0) = 0$。这与 $g(z_0) \neq 0$ 这一事实矛盾。
另一方面，$z_0 \notin P_\chi$。事实上，若非如此，则有 $\chi(z_0) = 0$。于是 $\beta g(z_0) = \Psi_{A\chi,\ \rho}(z_0) = \beta f(z_0) = 0$，这与 $g(z_0) \neq 0$ 矛盾。因此，$z_0 \in S \setminus I_\chi$，进而 $\chi(z_0) \neq 0$。由于 $f(z_0) = 0$，我们得到 $f(z_0) = \chi(z_0)_\beta\ [\alpha + A(z_0)] = 0$，这意味着 $A(z_0) = -\alpha.$。现在任取 $x, y \in S \setminus I_\chi$。我们有 $xyz_0 \in S \setminus I_\chi$。利用 (1.3) 可得

$$\left(\frac{1-\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha-1}{\beta}\chi(z_0)\right)\chi(xy) + \left(\frac{1-\alpha}{\beta^2} - \frac{1}{\beta}\chi(z_0)\right)\chi(xy)A(xy) = 0. \tag{4.2}$$

如果 $A = 0$，那么 $\rho \neq 0$，因为 $\Psi_{A\chi,\ \rho} \neq 0$、$\alpha = 0$ 和 $\chi(z_0) = \frac{1}{\beta}$，根据 (4.2)。这是解的第 (7) 部分的一个特例。
如果 $A \neq 0$ 那么根据引理 3.1 (ii)，由 (4.2) 得到 $\frac{1-\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha-1}{\beta}\chi(z_0) = 0$，并且 $\frac{1-\alpha}{\beta^2} - \frac{1}{\beta}\chi(z_0) = 0.$。由于 $\alpha \neq 1$，因为 $\chi(z_0) \neq 0$，我们推得 $\chi(z_0) = \frac{1-\alpha}{\beta}$ 以及 $\chi(z_0) = \frac{1+\alpha}{\beta}.$。因此，我们得到 $\alpha = 0$ 以及 $\chi(z_0) = \frac{1}{\beta}$，而 f 的形式化简为 $f = \frac{1}{\beta}\Psi_{A\chi,\ \rho}$。所以我们处于第 (7) 部分。

若 $g = \frac{1}{\beta}(\chi - \Psi_{A\chi,\rho})$，通过采用与上述类似的计算，我们可以证明我们也属于第 (7) 部分。
Ca情况 2. 假设 $f(z_0) \neq 0$。利用方程组 (1.3) 和 (3.4)，通过

简单计算可得，对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(g-\lambda f)(xyz_0) = (g-\lambda f)(x)(g-\lambda f)(y) - (\lambda^2+\mu\lambda+1)f(x)f(y),\ x,y \in S. \tag{4.3}$$

设 λ_1 and λ_2 是方程 $\lambda^2+\mu\lambda+1=0$ 的两个根，则 $\lambda_1\lambda_2=1$，由此得到 $\lambda_1 \neq 0$ 和 $\lambda_2 \neq 0$。根据 [11, 命题 16]，由 (4.3) 可推得 $g-\lambda_1 f := \chi_1($ $z_0)\chi_1 \quad and \quad g-\lambda_2 f := \chi_2(z_0)\chi_2$，其中 $\chi_1$and χ_2 是两个乘法函数，使得 $\chi_1(z_0)\neq 0$ 和 $\chi_2(z_0)\neq 0$，因为 f and g 线性无关。

若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 则 $\chi_1 \neq \chi_2$，并且我们得到 $g = \frac{\lambda_2\chi_1(z_0)\chi_1 - \lambda_1\chi_2(}{\lambda_2-\lambda_1}$) 和 $f = \frac{\chi_1}{}(z_0)\lambda_2 - \lambda_1$ ()。令 $\lambda_1 = ic$，即可得到解的类别 (4)。

若 $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$，则 $g-\lambda f =: \chi(z_0)\chi$，其中 χ 是 S 上的乘法函数，且满足 $\chi(z_0)\neq 0$，因为 f 和 g 线性无关。因此

$$g = \chi(z_0)\chi + \lambda f. \tag{4.4}$$

将此式代入 (3.4)，经过初等计算可得

$$f(xyz_0) = \chi(z_0)f(x)\chi(y) + \chi(z_0)f(y)\chi(x) + (2\lambda+\mu)f(x)f(y),$$

对所有 x、$y \in S.$

此外，$\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$，因为 $\lambda_1\lambda_2 = 1$。因此，$(\lambda,\mu) = (1,-2)$ 或 $(\lambda,\mu) = (-1,2)$，因为 $\lambda^2+\mu\lambda+1=0$ 和 $\lambda \in \{-1,1\}$。所以，上述函数方程化简为

$$f(xyz_0) = \chi(z_0)f(x)\chi(y) + \chi(z_0)f(y)\chi(x),$$

对所有 x、$y \in S.$，因此，数对 (f,χ) 满足函数方程 (3.1)。由命题 3.2 可得 $f = A(z_0)\chi + \Psi_{A\chi,\ \rho\cdot}$。接着，利用 (4.4)，我们推导出 $g = \chi(z_0)\chi + \lambda f = (\chi(z_0) + \lambda A(z_0))\chi + \lambda^2\Psi_{A\chi,\ \rho} = (\chi(z_0) \pm A(z_0))\chi + \Psi_{A\chi,\ \rho}$。这就是第 (8) 部分。

反过来，很容易验证，定理 4.1 中列出的 f 和 g 的公式给出了方程 (1.3) 的解。

最后，假设 S 是一个拓扑半群。形式 (1)–(6) 的解的连续性可直接由 [13, 定理 3.18],得出；对于形式 (7) 和 (8) 的解，证明过程与[6, 定理 2.1] 中针对类别 (7)–(8) 所用的证明类似。至此，定理 4.1 的证明完成。□

参考文献

[1] J. Acz´el, *Lectures on functional equations and their applications*, 《科学与工程中的数学》，第19卷。学术出版社，纽约，xx+510 页（1966年）。[2]O. Ajebbar, E. Elqorachi, *Solutions and stability of trigonometric functional equations on an amenable group with an involutive automorphism*, 《韩国数学会通讯》，34(1)，55–82页（2019年）。

[3] O. Ajebbar, E. Elqorachi, *The Cosine-Sine functional equation on a semigroup with an involutive automorphism* 91, 1115 1146, 2017 , Aequationes Math., - ( ).[4] B. Ebanks, *Around the Sine Addition Law and d'Alembert's Equation on Semigroups* 77, 11, 2022 . Results in Math., 文章编号： （ ）。[5] B. Ebanks, *The sine addition and subtraction formulas on semigroups*, Acta Math. Hungar., 167 (2), 533-555, (2021).[6] B. Ebanks, *The cosine and sine addition and subtraction formulas on semigroups* 165 2 337 354, 2021 , Acta Math. Hungar., ( ), - ( ).[7] A. Jafar, O. Ajebbar, E. Elqorachi, *A Kannappan sine addition law on semigroups* 10 48550 2304 14146 , https://doi.org/ . / arXiv. . ..[8] T. A. Poulsen 和 H. Stetkær，三角函数加减公式，Aequationes Math., 59, 84-92 (2000).[9] B. Ebanks, *A Levi-Civita functional equation Monoids, Two Ways*. Silesianae, 第36卷，第2期，2022年，第151-166页。https://doi.org/10.2478/amsil-2022-0009.[10] Pl. Kannappan, 余弦函数的一个函数方程，Canad. Math. Bull., 2, 495 498, 1968- ( ).[11] H. Stetkær, *Kannappan's functional equation on semigroups with involution.* Semigroup Forum, 94 (1), 17-30, (2017).[12] H. Stetkær, *The cosine addition law with an additional term*, Aequa. Math., 90 (6), 1147-1168, (2016).[13] H. Stetkær, : *Functional Equations on Groups. World Scientific Publishing Company* , 新加坡 ( ).[14] S. Kabbaj, M. Tial, D. Zeglami, *The Integral Cosine Addition and Sine Subtraction Laws Results in Math.* 73 97, 2018 , , , 文章编号： （ ）。

Jafar Ahmed[1], Ajebbar Omar[2], Elqorachi Elhoucien[11] 伊本·祖赫尔大学，理学院，数学系，阿加迪尔，摩洛哥[2] 苏丹穆莱·斯利曼大学，多学科 факультет，数学与计算机科学系，贝尼迈拉勒，摩洛哥 电子邮箱：hamadabenali2@gmail.com, omar-ajb@hotmail.com, elqorachi@hotmail.com