arXiv:2305.02928v1 [math.NT] 4 May 2023

通过 Nahm 和研究不同部分分拆的奇偶偏差的渐近分析

KATHRIN BRINGMANN、SIU HANG MAN、LARRY ROLEN 和 MATTHIAS STORZER

Abstract. 对于随机分拆，一个最基本的问题是：人们可以对其中出现的部分有何预期？例如，随机分拆的部分模 N的分布如何？由于大多数分拆都包含 1，而且随机分拆中确实会有许多个 1 作为部分出现，因此自然可以预期其会偏向 1（模 N）。事实确实如此。例如，Kim、Kim 和 Lovejoy 最近确立了“奇偶偏差”，展示了人们预期分拆中奇数部分多于偶数部分的频率。在这里，我们将他们的工作推广到给出不同部分分拆的偏差（模 N）的渐近分析。证明依赖于圆法，并独立地提供了分析 Nahm 型 q-超几何级数渐近分析的有用技巧。

1. Introduction and statement of results

整数分拆中部分分布的研究历史悠久。例如，许多作者研究了对可取部分施加限制的分拆计数函数。在这里，我们关注属于不同同余类的部分数量之间的相对关系。由于大多数分拆中的大部分部分往往都很小，例如包含许多个 1 和 2，因此自然会预期这些部分模 $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ 并非等分布。例如，Kim、Kim 和 Lovejoy [12] 证明了分拆模 2 时存在如下奇偶偏差，其中 $p_o(n)$（分别为 $p_e(n)$）表示 n 中奇数部分（分别为偶数部分）占多数的分拆数量：

$$p_o(n) > p_e(n) \quad \text{for } n \neq 2, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{p_o(n)}{p_e(n)} = 1 + \sqrt{2}. \tag{1.1}$$

对于一般的 N，同余类之间也存在偏差。Dartyge、Sarkozy 和 Szalay [6, 7, 8], 在三篇相关论文中对这些偏差进行了深入分析，证明对于正比例的分拆，其各部分落在同余类中的偏差存在下界。Beckwith 和 Mertens [3], 将这些结果推广为渐近公式。最近，Kim、Kim 和 Lovejoy [12]开启了对不同部分分拆中部分偏差的研究。他们猜想了不等式 (1.1) 的一个类似结论，该结论最近已在 [2]中得到证明。本文的目标是将这些不等式精化为精确的一般渐近分析。

对于 $N, \ell, b \in \mathbb{N}$，满足每个部分的大小至少为 b 且模 N 与 b 同余的 ℓ 互异部分分拆的数量 $a_{N,\ell,b}(n)$ 的生成函数为

$$\sum_{n\geq 0} a_{N,\ell,b}(n) q^n = \frac{q^{\frac{N\ell(\ell-1)}{2}+b\ell}}{(q^N;q^N)_\ell}.$$

这里，$(a;q)_r := \prod_{j=0}^{r-1}(1-aq^j)$ 中，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 是通常的 *q-Pochhammer* 符号。

令 $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$、$K \in \mathbb{N}_0$、$1 \leq \alpha,\ \beta \leq N$ 和 $\alpha \neq \beta$。用 $d_{\alpha,\beta;N}^{[K]}(n)$ 表示 n 的互异部分分拆数，其中大小模 N 同余于 α 的部分数多于大小模 N 同余于 β 的部分数，且所有部分的大小均大于 K。其生成

函数 $d_{\alpha,\beta;N}^{[K]}(n)$ 给出如下（全文中向量均用粗体字母表示）

$$\mathcal{D}_{\alpha,\beta;N}^{[K]}(q) := \sum_{n\geq 0} d_{\alpha,\beta;N}^{[K]}(n)q^n = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}_{\alpha,\beta}} \frac{q^{N\cdot H(\boldsymbol{n})}}{\prod_{j=1}^{N}(q^N;q^N)_{n_j}}, \tag{1.2}$$

其中

$$\mathcal{S}_{\alpha,\beta} := \left\{\boldsymbol{n} = (n_1,\dots,n_N)^T \in \mathbb{N}_0^N : n_\alpha > n_\beta\right\}.$$

此外 $H\colon\ \mathbb{Z}^N \to \mathbb{Q}$ 由下式给出。

$$H(\boldsymbol{n}) := \tfrac{1}{2}\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{n} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{b} := \left(\tfrac{1}{N}-\tfrac{1}{2},\ \ \tfrac{2}{N}-\tfrac{1}{2},\ \ \dots,\ \ \tfrac{1}{2}\right)^T + \boldsymbol{e}$$

其中

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^{[N,K]} = (e_1,\dots,e_N)^T := \left|\tfrac{K}{N}\right|\mathbf{1} + (1,\dots,1,0,\dots,0)^T$$

满足 $\sum_j e_j = K$ 且 $\mathbf{1} := (1,\dots,1)^T \in \mathbb{Z}^N$。注意，我们有

$$\sum_{j=1}^{N} b_j = K + \tfrac{1}{2}. \tag{1.3}$$

本文研究了不同部分分拆关于模 N 的广义奇偶偏差。具体而言，给定两个同余类 α，β(模 N)，我们考虑将 n 分拆为不同部分时，部分数与 α(模 N) 同余的部分多于与 β(模 N) 同余的部分的分拆数，反之亦然。我们研究这两个计数之间的差，其生成函数为

$$\sum_{n\geq 0}\left(d_{\alpha,\beta;N}^{[K]}(n) - d_{\beta,\alpha;N}^{[K]}(n)\right)q^n.$$

$N=2$、$\alpha=1$、$\beta=2$ 和 $K=0$ 的情形对应于不同部分分拆的奇偶偏差问题，Kim、Kim 和 Lovejoy 在 [12] 中研究了该问题（关于模 N 的分拆奇偶偏差的相关工作，读者也可参阅 [5, 11] ）。我们的主要结果如下。

定理 1.1. 我们有

$$d_{\alpha,\beta;N}^{[K]}(n) = \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}}{2^{K+3}\cdot 3^{\frac{1}{4}}N^{N-1}n^{\frac{3}{4}}} \times \sum_{\substack{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^N \\ NH(\boldsymbol{\ell})\equiv n \pmod N}} \left(1 + \frac{N^2 - 2N[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N + \beta - \alpha + N\left(e_\beta - e_\alpha\right)}{2\cdot 3^{\frac{1}{4}}\sqrt{N}n^{\frac{1}{4}}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

如 $n\to\infty$，其中 $[\ell]_N$ 表示与 ℓ（模 N）同余的最小正整数。

注。 形如 (1.2) 的和，即对 q 的（部分）格求和，其中各项为二次多项式的幂除以 *Pochhammer* 符号的乘积，近年来受到广泛研究。特别是，它们在结理论、代数 K 理论、物理学，以及这些领域与量子模形式的交叉研究中都很重要（例如参见 [4, 10, 13, 14], ，更完整的参考文献列表及相关联系见 [9]）。它们也出现在 q 级数和组合学中（尽管并不总是称为*"Nahm* 和*"*），例如见 [1, 12]。最近，*Garoufalidis* 和 *Zagier* [9]研究了一大类 *Nahm* 和，但由于我们考虑的是格的更一般子集，这一研究不足以让我们研究(1.2) 。我们所用的解析方法拓展了他们的方法，且具有灵活性。因此，当这类和应用于组合学或结理论时，这些方法或许能更广泛地用于研究它们。

若 $N=2$ 或 $N\geq 5$，则我们可以进一步简化渐近公式。特别地，在这种情况下，渐近公式不依赖于 n（模 N）的同余类。

定理 1.2. 假设 $N=2$ 或 $N\geq 5$。那么，当 $n\to\infty$ 时，我们有：

$$d^{[K]}_{\alpha,\beta;N}(n)=\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}}{2^{K+3}\cdot 3^{\frac{1}{4}}n^{\frac{3}{4}}}\left(1+\frac{-N+\beta-\alpha+N\left(e_\beta-e_\alpha\right)}{2\cdot 3^{\frac{1}{4}}\sqrt{N}n^{\frac{1}{4}}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Kim、Kim 和 Lovejoy [12, 第 6] 节猜想，对于 $n\geq 20$，奇数部分多于偶数部分的不同部分分拆数量多于反之的数量。该猜想最初通过组合论论证得以证明 [2]，但此前尚未找到奇偶偏差的渐近公式。定理 1.2 的一个推论给出了奇偶偏差的新渐近公式。

推论 1.3。当 $n\to\infty$时，

$$d^{[K]}_{1,2;2}(n)-d^{[K]}_{2,1;2}(n)=\frac{(-1)^K e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}}{2^{K+3}\sqrt{6}n}\left(1+O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)\right).$$

特别地，当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{d^{[K]}_{1,2;2}(n)}{d^{[K]}_{2,1;2}(n)}\to 1.$$

注。推论 *1.3* 回答了 [2] 中的问题 *6.1*，即关于这些量之间显式不等式的问题（稍作修正后）。[2] 中的问题 *6.1* 猜想，对于所有 $n\geq 14$：

$$\begin{cases} d^{[1]}_{1,2;2}(n)>d^{[1]}_{2,1;2}(n) & \text{if } n\equiv 0 \pmod 2,\\ d^{[1]}_{1,2;2}(n)<d^{[1]}_{2,1;2}(n) & \text{if } n\equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

虽然对于许多较小的值，该猜想成立，但一般情况下并不成立。推论 *1.3* 给出了一个修正版，表明对于充分大的 n，$d^{[1]}_{1,2;2}(n)<d^{[1]}_{2,1;2}(n)$。

对于 $N\in\{3,4\}$，奇偶偏差的渐近分析确实可能取决于剩余类n(模 N)。我们用定理 1.1 的以下推论来说明这一现象。

推论 1.4。当 $n\to\infty$ 时，我们有如下渐近公式：

$$d^{[0]}_{1,2;3}(n)-d^{[0]}_{2,1;3}(n)=\begin{cases} \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}}{n}\left(\frac{1}{24}+O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)\right) & \text{if } n\equiv 0 \pmod 3,\\ \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}}{n}\left(\frac{1}{6}+O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)\right) & \text{if } n\equiv 1 \pmod 3,\\ \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}}{n}\left(-\frac{1}{12}+O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)\right) & \text{if } n\equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

定理 1.1 的证明主要采用圆法。我们简要概述证明思路。首先，考察 (1.2) 中各个被加数，并推导出当 q 趋近于一个单位根时它们的两种不同渐近级数。第一种级数是将被加数视为 z ($q=e^{-z}$) 中的全纯函数，并在 $z\to 0$ 从右半平面趋近时推导出渐近展开得到的。遗憾的是，该渐近展开仅在正实轴附近的一个狭窄锥形区域内成立，不足以计算主弧贡献。因此，我们分别处理 z 的实部和虚部，推导出第二种渐近级数。这种渐近级数不再是关于 z的全纯函数，但在足够大的区域内成立。为了推导 $\mathcal{D}^{[K]}_{\alpha,\beta;N}(q)$ 的渐近展开，我们对 (1.2) 中各被加数的渐近级数求和，同时忽略贡献可忽略不计的被加数。随后利用圆法得到 $d^{[K]}_{\alpha,\beta;N}(n)$ 的渐近展开。通过显式计算 $d^{[K]}_{\alpha,\beta;N}(n)$ 渐近展开的前两项，便可证明定理 1.1。

本文结构如下。第 2 节介绍渐近分析方面的预备知识，例如 $-\operatorname{Log}((q;q)_\infty)$ 的渐近公式以及欧拉–麦克劳林求和公式。第 3 节推导 (1.2) 中各被加数的两种渐近展开。第 4 节证明在推导 $\mathcal{D}_{\alpha,\beta;N}^{[K]}(q)$ 的渐近展开时被忽略项的界，并估计小弧贡献。第 5 节利用前几节得到的结果，推导 $\mathcal{D}_{\alpha,\beta;N}^{[K]}(q)$ 和 $d_{\alpha,\beta;N}^{[K]}(n)$ 的渐近展开。第 6 节显式计算 $d_{\alpha,\beta;N}^{[K]}(n)$ 的渐近展开，并证明定理 1.1 和定理 1.2。第 7 节给出数值示例，以说明本文证明的偏差。

Acknowledgments

第一作者和第二作者获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟“地平线 2020”研究与创新计划提供的资助（资助协议编号：101001179）。第二作者还获得了捷克科学基金会 GAČR 项目 21-00420M 的资助，以及查理大学 OP RDE 项目 CZ.02.2.69/0.0/0.0/18 053/0016976“研究、技术和行政人员国际流动”的支持。本研究获得了西蒙斯基金会的资助（853830, LR）。第三作者还感谢范德堡大学 2021—2023 年院长学院奖学金的支持，并感谢马克斯·普朗克数学研究所（波恩）提供的接待和经费支持。第四作者获得了马克斯·普朗克学会的支持。

Notation

为方便读者，我们列出本文中使用的记号。我们始终将$N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$、$K \in \mathbb{N}_0$和 $1 \leq \alpha,\ \beta \leq N$、$\alpha \neq \beta$视为固定参数。

- 对于 $z \in \mathbb{C}$，当 $\operatorname{Re}(z) > 0$时，我们记 $z = \varepsilon(1+iy)$，其中 $\varepsilon > 0$ 和 $y \in \mathbb{R}$，且 $q = e^{-z} \in \mathbb{C}$。
- 常数 λ 是固定的实数，且满足 $-\frac{2}{3} < \lambda < -\frac{1}{2}$。
- 对于 $\ell \in \mathbb{Z}$，我们用 $[\ell]_N$ 表示与 ℓ 模 N 同余的最小正整数。
- 我们定义集合 $\mathcal{S}_{\alpha,\beta} := \{\boldsymbol{n} = (n_1, \dots, n_N)^T \in \mathbb{N}_0^N \colon n_\alpha > n_\beta\}$。
- 对于 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^N$ 中的一个元素，我们记为 $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_N)$。我们总是假设 $0 \leq \ell_j < N$。
- 对于 $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_N) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^N$，我们定义 $\mathcal{S}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}} := \{\boldsymbol{n} \in \mathcal{S}_{\alpha,\beta} \colon \boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{\ell} \bmod N\}$。
- 令 $\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda} := \{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^N \colon \boldsymbol{n} = \log(2)/\varepsilon \cdot \mathbf{1} + \boldsymbol{\mu}, |\boldsymbol{\mu}| \leq \varepsilon^\lambda\}$，并记 $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{n} - \log(2)/\varepsilon \cdot \mathbf{1}$。
- 对于 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^N$，我们逐项定义 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^N$，使得 $n_j = \log(2)/z + u_j/\sqrt{z}$，从而得到一个映射 $\boldsymbol{n} \mapsto \boldsymbol{u}$。在映射 $\boldsymbol{n} \mapsto \boldsymbol{u}$ 下，$\mathcal{S}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}$（分别为 $\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}$）的双射像记作 $\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}$（分别为 $\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}$）。我们还逐项定义 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^N$，使得 $n_j = \log(2)/\varepsilon + v_j/\sqrt{z}$。
- 函数 C_r、Λ 和 D_r定义为

$$\sum_{r\geq 0} C_r(\boldsymbol{u}) z^{\frac{r}{2}} := \exp(\phi(\boldsymbol{u}, z)), \qquad \text{with} \quad \phi(\boldsymbol{u}, z) := -\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u}\sqrt{z} - \frac{Nz}{24} + \sum_{j=1}^{N} \xi\left(\frac{u_j}{\sqrt{z}}, z\right),$$

$$\text{where} \qquad \xi(\nu, z) = -\sum_{r=2}^{R-1} \left(B_r(-\nu) - \delta_{r,2}\nu^2\right) \operatorname{Li}_{2-r}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{z^{r-1}}{r!} + O\left(z^{R-1}\right) \quad (R \in \mathbb{N}),$$

$$\Lambda(y) := N\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\log(2)^2(1+iy)^2}{2} - \operatorname{Li}_2\left(2^{-(1+iy)}\right)\right),$$

$$\sum_{r\geq 0} D_r(\boldsymbol{v}, y) z^{\frac{r}{2}} := \exp(\phi(\boldsymbol{v}, z)), \qquad \text{with} \quad \phi(\boldsymbol{v}, z) := -\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{v}\sqrt{z} - \frac{Nz}{24} + \sum_{j=1}^{N} \xi_y\left(\frac{v_j}{\sqrt{z}}, z\right),$$

$$\text{where}\qquad \xi_y(\nu,z) = -\sum_{r=2}^{R-1}\left(B_r(-\nu)-\delta_{r,2}\nu^2\right)\mathrm{Li}_{2-r}\left(2^{-(1+iy)}\right)\frac{z^{r-1}}{r!}+O\left(z^{R-1}\right)\quad (R\in\mathbb{N}).$$

- 函数 $\mathcal{D}_{\alpha}^{[K]}$、$\beta$; N 和 $\mathcal{D}_{\alpha}^{[K]}$、$\beta$; N、$\boldsymbol{\ell}$ 定义为

$$\mathcal{D}_{\alpha,\beta;N}^{[K]}(q) := \sum_{n\geq 0} d_{\alpha,\beta;N}^{[K]}(n)q^n = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}_{\alpha,\beta}}\frac{q^{N\cdot H(\boldsymbol{n})}}{\prod_{j=1}^{N}\left(q^N;q^N\right)_{n_j}},$$

$$\mathcal{D}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K]}(q) := \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}}\frac{q^{NH(\boldsymbol{n})}}{\prod_{j=1}^{N}\left(q^N;q^N\right)_{n_j}}.$$

- 函数 $f_{\alpha}^{[K]}{}_{,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}$, $g_{\alpha}^{[K]}{}_{,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}$, $g_{\alpha}^{[K,1]}{}_{N,\beta;,\boldsymbol{\ell}}$以及 $g_{\alpha}^{[K,2]}{}_{N,\beta;,\boldsymbol{\ell}}$ 定义为

$$f_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K]}(z) := \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}}\frac{e^{-NH(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}\left(e^{-Nz};e^{-Nz}\right)_{n_j}},\qquad g_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K]}(z) := f_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K]}\left(\frac{z}{N}\right),$$

$$g_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K,1]}(z) := \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}}\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}\left(e^{-z};e^{-z}\right)_{n_j}},\quad g_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K,2]}(z) := \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\setminus\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}}\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}\left(e^{-z};e^{-z}\right)_{n_j}}.$$

- 对于 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{C}^N$，令 u_α 为 $\boldsymbol{u}$的第 α个元素，令 $\boldsymbol{u}_{[1]}$ 为其余的 $N-1$ 个元素。为方便起见，记作 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}_{[1]},u_\alpha)$。类似地，对于 $\boldsymbol{\mu}$中相应的 $N-1$个元素，记作 $\boldsymbol{\mu}_{[1]}$。对于 $1\leq c\leq N, c\neq\alpha$，令 u_c（分别为 u_α）表示 $\boldsymbol{u}$的第 c 个（分别为第 α个）元素，并令$\boldsymbol{u}_{[2]}$ 表示其余的 $N-2$ 个元素。为方便起见，记作 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}_{[1]},u_\alpha)=(\boldsymbol{u}_{[2]},u_c,u_\alpha)$。

- 对于固定的 $\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^N$，集合 $\mathfrak{u}_\alpha(\boldsymbol{u}_{[1]})$、$\mathfrak{u}_c$ 和 $\mathcal{U}_{[1]}$定义为

$$\mathfrak{u}_\alpha\left(\boldsymbol{u}_{[1]}\right) := \left\{u_\beta+t\sqrt{z}\ :\ t\in[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N+N\mathbb{N}_0\right\},\quad \mathfrak{u}_c := \left\{-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+t\sqrt{z}\ :\ t\in\ell_c+N\mathbb{N}_0\right\},$$

$$\mathcal{U}_{[1]} := \left\{\boldsymbol{u}_{[1]}\in\left(-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\mathbb{R}\sqrt{z}\right)^{N-1}\ :\ \left|\boldsymbol{\mu}_{[1]}\right|\leq\varepsilon^\lambda\right\}.$$

- 函数 G_j 和 $G_{j,\ \alpha}$ 定义为

$$G_j(\boldsymbol{u}) := e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}C_j(\boldsymbol{u})e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}},\qquad G_{j,\alpha}\left(\boldsymbol{u}_{[1]}\right) := \sum_{u_\alpha\in\mathfrak{u}_\alpha\left(\boldsymbol{u}_{[1]}\right)}G_j\left(\boldsymbol{u}_{[1]},u_\alpha\right).$$

- 系数 $E_{\boldsymbol{\ell},r}$, $V_{j,r}$ 和 W_r 定义如下，其中 $R\in\mathbb{N}$,

$$g_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K,1]}(z) =: \frac{e^{\frac{\pi^2N}{12z}}}{2^{K+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{N}{2}}}\sum_{r=0}^{R-1}E_{\boldsymbol{\ell},r}z^{\frac{r}{2}}+e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}O\left(\varepsilon^{N\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+3R\left(\lambda+\frac{2}{3}\right)}\right),$$

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}}G_j(\boldsymbol{u}) =: e^{\frac{\pi^2N}{12z}}\sum_{r=-N}^{R-1}V_{j,r}z^{\frac{r}{2}}+O\left(\varepsilon^{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(3j+2N+R-1)+\frac{N+R}{2}-1}e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}\right),$$

$$\sum_{u_\alpha\in\mathfrak{u}_\alpha\left(\boldsymbol{u}_{[1]}\right)}G_j\left(\boldsymbol{u}_{[1]},u_\alpha\right) =: \frac{1}{N\sqrt{z}}\int_{u_\beta}^{u_\beta+\sqrt{z}\infty}G_j\left(\boldsymbol{u}_{[1]},u_\alpha\right)du_\alpha+\sum_{r=0}^{R-1}W_rG_j^{(r)}\left(\boldsymbol{u}_{[1]},u_\beta\right)z^{\frac{r}{2}}$$
$$+O\left(\varepsilon^{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(3j+R+1)+\frac{R-1}{2}}e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}\right).$$

2. Preliminaries

我们首先回顾几个特殊函数。对于 $s \in \mathbb{C}$，多重对数函数 定义为

$$\mathrm{Li}_s(w) := \sum_{n\geq 1} \frac{w^n}{n^s}, \quad |w| < 1.$$

对于 $w \in (0, 1)$，定义罗杰斯二重对数函数（通过平移一个常数，使得 $L(1) = 0$）

$$L(w) := \mathrm{Li}_2(w) + \frac{1}{2}\log(w)\log(1-w) - \frac{\pi^2}{6}.$$

众所周知（见 [20,第6]页），

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{12}. \tag{2.1}$$

Let $B_r(x)$ 表示通过生成函数定义的 r阶伯努利多项式 n

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} =: \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

r阶伯努利数由 $B_r := B_r(0)$ 给出。

我们使用 $\ll$，$\gg$和 $\asymp$ 来比较量的大小，除非另有说明，否则不对它们的符号或辐角作任何假设；例如，对于 $y \in \mathbb{R}$，$y \ll 1$ 表示对于某个 $C > 0$有 $-C \leq y \leq C$。

我们首先给出一个 关于 $(q;q)_\infty^{-1}$ 的基本估计；下述引理的证明是显然的。

引理 2.1。设 $\varepsilon > 0$和 $z := \varepsilon(1 + iy)$。假设对于某个 $\delta > 0$，有 $y \ll \varepsilon^{-\frac{1}{2}+\delta}$。那么我们有[1]

$$-\mathrm{Log}((q,q)_\infty) = \frac{\pi^2}{6z} + \frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{z}{2\pi}\right) - \frac{z}{24} + \mathcal{E},$$

当 $z \to 0$ 时，其中误差项 $\mathcal{E}$ 满足：对所有 $L \in \mathbb{N}$，均有 $\mathcal{E} \ll z^L$。

下述引理是 [9] 中引理 2.1 的一个特例。

引理 2.2。设 $z, w \in \mathbb{C}$，且 $\mathrm{Re}(z) > 0$, $|w| < 1$，并且 $\nu \in \mathbb{C}$ 满足 $\nu z = o(1)$。那么[2]

$$\mathrm{Log}\left(\left(we^{-\nu z}q;q\right)_\infty\right) = -\mathrm{Li}_2(w)\frac{1}{z} - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Log}(1-w) - \frac{\nu^2 z}{2}\frac{w}{1-w} + \psi_w(\nu, z).$$

这里 $\psi_w(\nu, z)$，对于 $R \in \mathbb{N}$，当 $z \to 0$ 时具有渐近展开，其中 $\mathrm{Re}(z) > 0$

$$\psi_w(\nu, z) = -\sum_{r=2}^{R-1}\left(B_r(-\nu) - \delta_{r,2}\nu^2\right)\mathrm{Li}_{2-r}(w)\frac{z^{r-1}}{r!} + O\left(z^{R-1}\right), \tag{2.2}$$

其中 $\delta_{j,k}$ 为克罗内克 δ 符号。特别地，对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$，ν^n 的系数为 $O(z^{\frac{2n}{3}})$。 —

注。[9, 引理 2。1] 仅对实数 z作了陈述。然而，逐行检查其中的证明可知，该结论对复数 z仍然成立。

我们还将使用以下版本的欧拉–麦克劳林求和公式。欧拉–麦克劳林求和的经典版本将求和式 $\sum_{n=0}^{m} F(n)$ 与积分 $\int_0^m F(x)dx$ 进行比较；此版本使用相同的表达式，但进行了变量替换 $F(x) = f(xz + a)$。欧拉–麦克劳林求和公式的一个相关的"平移"版本也可见于 [19] 的命题 3。

[1]全文中，我们对对数取主值分支。[2]在 [9, 引理 2。1], 中有一个循环量子对数项，当 q 趋近于 1 时，该项趋于零。

命题 2.3。 设 $a, z \in \mathbb{C}$。设 f 是定义在 $L(a,z) := \{tz + a : t \in \mathbb{R}_0^+\}$ 上的一个全纯函数。那么，对于所有 $m, R \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{m} f(nz+a) = \frac{1}{z}\int_a^{a+mz} f(x)dx + \frac{f(mz+a)+f(a)}{2} + \sum_{r=1}^{R} \frac{B_{2r} z^{2r-1}}{(2r)!}\left(f^{(2r-1)}(mz+a) - f^{(2r-1)}(a)\right) + O(1)z^{2R}\int_a^{a+mz} \left|f^{(2R+1)}(x)\right| dx.$$

此外，若 f 在 $L(a,z)$上快速衰减，则有

$$\sum_{n\geq 0} f(nz+a) = \frac{1}{z}\int_a^{a+z\infty} f(x)dx + \frac{f(a)}{2} - \sum_{r=1}^{R} \frac{B_{2r} z^{2r-1}}{(2r)!} f^{(2r-1)}(a) + O(1)z^{2R}\int_a^{a+z\infty} \left|f^{(2R+1)}(x)\right| dx.$$

3. Asymptotic formulas for summands

3.1. 问题的设定。 我们研究函数在右半平面内，当 $z \to 0$ 时的渐近分析

$$\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}(q;q)_{n_j}}. \tag{3.1}$$

对于 z 为实数的情形，文献 [9, 18] 已给出了 (3.1) 的渐近分析。为避免混淆，我们用 $\varepsilon > 0$ 表示实变量，并用 $z = \varepsilon(1+iy)$ 表示满足 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 的复变量。对于 $-\frac{2}{3} < \lambda < -\frac{1}{2}$，我们定义如下，其中 $|\boldsymbol{\mu}|$ 是向量 $\boldsymbol{\mu}$ 的（欧几里得）范数:

$$\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda} := \left\{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^N : \boldsymbol{n} = \frac{\log(2)}{\varepsilon}\mathbf{1} + \boldsymbol{\mu},\ |\boldsymbol{\mu}| \leq \varepsilon^{\lambda}\right\}.$$

备注。 考虑这一展开背后有一个普遍的理念。正如文献 [9] （见第 *3* 页）及其他研究 *Nahm* 和的参考文献所述，自然的"展开"中心是所谓 *Nahm* 方程的解（本质上，这对应于鞍点）。在我们的情形中， $H(\boldsymbol{n})$可以分解为一个二次型部分和一个线性部分，而二次型部分恰好就是形式 $\frac{1}{2}|\boldsymbol{n}|^2$。此时，*Nahm* 方程（见文献 [9] 中的 *(6)*）变为 $1 - z_j = z_j$，*(*$1 \leq j \leq N$*)*，其在 $(0,1)^N$ 内的唯一解为 $\frac{1}{2}\mathbf{1}$。正如文献[9]，的命题 *2.1* 所述，展开应以 $n_j \approx \frac{1}{\varepsilon}\log(\frac{1}{z_j})$ 为中心；在我们的情形中，对于所有 j，该值为 $n_j \approx \log(2)\,\varepsilon$。因此，$\log(2)\,\varepsilon\,\mathbf{1}$ 是我们需要围绕展开的鞍点；从理念上说，这解释了 $\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}$ 的定义。这一点也会在下文的证明中显现出来。

在本节中，我们证明 (3.1) 的渐近公式，情形为 $\boldsymbol{n} \in \mathcal{N}_{\varepsilon,\ \lambda}$。

3.2. 窄范围估计。 我们证明 (3.1) 的渐近展开，当 $\boldsymbol{n} \in \mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}$.

命题 3.1。 设 $\boldsymbol{n} \in \mathcal{N}_{\varepsilon,\ \lambda}$ 和 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^N$ 满足：对于 $1 \leq j \leq N$,

$$n_j = \frac{\log(2)}{z} + \frac{u_j}{\sqrt{z}}. \tag{3.2}$$

假设对于某个 $\delta > 0$，有 $y \ll \varepsilon^{\delta}$。那么我们有

$$\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}(q;q)_{n_j}} = \left(\frac{z}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \frac{e^{\frac{\pi^2 N}{12z} - \frac{Nz}{24}}}{2^{K+\frac{1}{2}}} e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u}\sqrt{z}} \prod_{j=1}^{N} \exp\left(\xi\left(\frac{u_j}{\sqrt{z}}, z\right)\right), \tag{3.3}$$

其中，对于 $R\in\mathbb{N}$, $\xi(\nu,z)$，当 $z\to 0$ 时具有渐近展开

$$\xi(\nu,z)=-\sum_{r=2}^{R-1}\left(B_r(-\nu)-\delta_{r,2}\nu^2\right)\operatorname{Li}_{2-r}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^{r-1}}{r!}+O\left(z^{R-1}\right). \tag{3.4}$$

证明。我们记

$$\frac{1}{(q;q)_{n_j}}=\frac{\left(q^{n_j+1};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty}. \tag{3.5}$$

由 (3.2) 得 $q^{n_j}=\frac{1}{2}e^{-u_j\sqrt{z}}$。令 $\nu_j:=\frac{u_j}{\sqrt{z}}$。由于 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}$，因此存在某个 $|\mu_j|\le\varepsilon^\lambda$，

$$\nu_j=n_j-\frac{\log(2)}{z}=\left(\frac{\log(2)}{\varepsilon}+\mu_j\right)-\frac{\log(2)}{\varepsilon(1+iy)}=\left(1-\frac{1}{1+iy}\right)\frac{\log(2)}{\varepsilon}+\mu_j. \tag{3.6}$$

若 $y\ll\varepsilon^\delta$，则 (3.6) 中的第一项大小为 $\varepsilon^{\delta-1}$。由于 $|\mu_j|\le\varepsilon^\lambda$，我们得出 $\nu_j z=o(1)$。因此，我们可以对 $w=\frac{1}{2}$ 应用引理 2.2，并推出

$$\operatorname{Log}\left(\left(q^{n_j+1};q\right)_\infty\right)=-\frac{1}{z}\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)+\log(2)\left(\nu_j+\frac{1}{2}\right)-\frac{\nu_j^2 z}{2}+\psi_{\frac{1}{2}}(\nu_j,z). \tag{3.7}$$

由 (3.5)、(3.7) 和引理 2.1 可得，其中 $\mathcal{E}$ 满足对所有 $L\in\mathbb{N}$ 均有 $\mathcal{E}\ll z^L$，

$$-\operatorname{Log}\left((q;q)_{n_j}\right)=-\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{z}+\log(2)\left(\nu_j+\frac{1}{2}\right)-\frac{\nu_j^2 z}{2}+\psi_{\frac{1}{2}}(\nu_j,z)+\frac{\pi^2}{6z}-\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{2\pi}{z}\right)-\frac{z}{24}+\mathcal{E}.$$

现在令 $\xi(\nu_j,\ z):=\psi_{\frac{1}{2}}(\nu_j,\ z)\ +\mathcal{E}$。由于对所有 $L\in\mathbb{N}$ 都有 $\mathcal{E}\ll z^L$，可知 $\xi(\nu_j,\ z)$ 与 $\psi_{\frac{1}{2}}(\nu_j,\ z)$ 具有相同的渐近展开。因此我们可以写成

$$-\operatorname{Log}\left((q;q)_{n_j}\right)=-\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{\pi}{z}\right)-\frac{z}{24}+\left(\frac{\pi^2}{6}-\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\right)\frac{1}{z}+\log(2)\nu_j-\frac{\nu_j^2 z}{2}+\xi(\nu_j,z).$$

对 j 求和，得到

$$-\sum_{j=1}^{N}\operatorname{Log}\left((q;q)_{n_j}\right)=-\frac{N}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{\pi}{z}\right)-\frac{Nz}{24}+\left(\frac{\pi^2}{6}-\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\right)\frac{N}{z}+\sum_{j=1}^{N}\left(\log(2)\nu_j-\frac{\nu_j^2 z}{2}+\xi(\nu_j,z)\right). \tag{3.8}$$

利用 (1.3)，我们注意到

$$-H(\boldsymbol{n})z=-\frac{N\log(2)^2}{2z}-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}\sum_{j=1}^{N}u_j-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}-\log(2)\left(K+\frac{1}{2}\right)-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u}\sqrt{z}. \tag{3.9}$$

结合 (3.8) 和 (3.9)，得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}\left(\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}(q;q)_{n_j}}\right)=&-\frac{N}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{\pi}{z}\right)-\frac{Nz}{24}+\left(\frac{\pi^2}{6}-\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\right)\frac{N}{z}+\sum_{j=1}^{N}\left(\log(2)\nu_j-\frac{\nu_j^2 z}{2}+\xi(\nu_j,z)\right)\\&-\frac{N\log(2)^2}{2z}-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}\sum_{j=1}^{N}u_j-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}-\log(2)\left(K+\frac{1}{2}\right)-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u}\sqrt{z}.\end{aligned}$$

利用 (2.1)，我们计算得出

$$-\left(\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\log(2)^2}{2}-\frac{\pi^2}{6}\right)\frac{N}{z}=-L\left(\frac{1}{2}\right)\frac{N}{z}=\frac{\pi^2 N}{12z}.$$

最后，利用这一点以及 $\nu_j=\frac{u_j}{\sqrt{z}}$ 这一事实，我们可以改写为

$$\operatorname{Log}\left(\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}(q;q)_{n_j}}\right)$$
$$=-\frac{N}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{\pi}{z}\right)+\frac{\pi^2 N}{12z}-\frac{Nz}{24}-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u}\sqrt{z}-\log(2)\left(K+\frac{1}{2}\right)+\sum_{j=1}^{N}\xi\left(\frac{u_j}{\sqrt{z}},z\right).$$

最后，两边取指数即可得到 (3.3)。 □

现在我们利用命题 3.1 推导式 (3.1) 的渐近展开。

命题 3.2. 设定与命题 *3.1* 中相同。若 $y\ll\varepsilon^{\frac{1}{3}+\delta}$对某个 $\delta>0$成立，则对于 $R\in\mathbb{N}$，关于 $\boldsymbol{u}$，我们有一致成立的

$$\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}(q;q)_{n_j}}=\left(\frac{z}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}}\frac{e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}}{2^{K+\frac{1}{2}}}\sum_{r=0}^{R-1}C_r(\boldsymbol{u})z^{\frac{r}{2}}+O\left(\varepsilon^{3R\delta_1}\right)z^{\frac{N}{2}}e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}},$$

其中 $\delta_1:=$最小值$\{\delta,\frac{2}{3}+\lambda\}>0$。 $C_r(\boldsymbol{u})$ 是形式指数的系数

$$\sum_{r\geq 0}C_r(\boldsymbol{u})z^{\frac{r}{2}}:=\exp(\phi(\boldsymbol{u},z)),\qquad \phi(\boldsymbol{u},z):=-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u}\sqrt{z}-\frac{Nz}{24}+\sum_{j=1}^{N}\xi\left(\frac{u_j}{\sqrt{z}},z\right),\tag{3.10}$$

并且 $\xi(\nu,z)$ 具有 (3.4) 中给出的渐近展开。

证明. 利用 (3.3) 和 (3.10)，作为形式幂级数，我们有

$$\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}(q;q)_{n_j}}=\left(\frac{z}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}}\frac{e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}}{2^{K+\frac{1}{2}}}e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\sum_{r\geq 0}C_r(\boldsymbol{u})z^{\frac{r}{2}}.$$

剩下需要证明的是，对于 $R\in\mathbb{N}$，关于 $\boldsymbol{u}$ 一致成立，

$$\left(\frac{z}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}}\frac{e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}}{2^{K+\frac{1}{2}}}e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\sum_{r\geq R}C_r(\boldsymbol{u})z^{\frac{r}{2}}=O\left(\varepsilon^{3R\delta_1}\right)z^{\frac{N}{2}}e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}.\tag{3.11}$$

当 $y\ll\varepsilon^{\frac{1}{3}+\delta}$ 时，我们有 $z\asymp\varepsilon$。由于 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}$，我们有 $|\boldsymbol{\mu}|\leq\varepsilon^{\lambda}$，由此根据 (3.6) 可得 $\nu_j\ll\varepsilon^{-\frac{2}{3}+\delta_1}$以及 $|\boldsymbol{u}|\ll\varepsilon^{-\frac{1}{6}+\delta_1}$。现在考虑 $\phi(\boldsymbol{u},\ z)$ 的渐近展开。由于 $\psi_1(\nu_j,\ z)$ 和 $\xi(\nu_j,\ z)$ 具有相同的渐近展开（见命题 3.1 的证明），我们使用 (2.2)，推得对于 $S\geq 3$，

$$\phi(\boldsymbol{u},z)=-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u}\sqrt{z}-\frac{Nz}{24}-\sum_{j=1}^{N}\sum_{r=2}^{S-1}\left(B_r\left(-\frac{u_j}{\sqrt{z}}\right)-\delta_{r,2}\frac{u_j^2}{z}\right)\operatorname{Li}_{2-r}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^{r-1}}{r!}$$
$$+O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}(S-3)+S\delta_1}\right).\tag{3.12}$$

关于 $\boldsymbol{u}$ 的一致性源于误差项中的隐含常数与 $\boldsymbol{u}$ 无关。

最后，我们通过证明将 (3.12) 指数化后得到良定义的渐近级数，来证明该命题。为此，将 (3.12) 改写为关于 $z^{\frac{1}{2}}$ 的形式幂级数

$$\phi(\boldsymbol{u},z)=:\sum_{m\geq 1}g_m(\boldsymbol{u})z^{\frac{m}{2}}.$$

接着，由于 $\deg(B_m)=m$，可得 $\deg(g_m)\leq m+2$。对于 $m\in\mathbb{N}$，我们有

$$g_m(\boldsymbol{u})z^{\frac{m}{2}}\ll\varepsilon^{(m+2)\left(-\frac{1}{6}+\delta_1\right)+\frac{m}{2}}\ll\varepsilon^{\frac{m-1}{3}+(m+2)\delta_1}.$$

由此可知，对所有 $M \in \mathbb{N}$，我们都有 $\sum_{m=1}^{M} g_m(\boldsymbol{u}) z^{\frac{m}{2}} = O(\varepsilon^{3\delta_1})$，且该结论对 $\boldsymbol{u}$ 一致成立。将 (3.12) 两边取指数，得到一个形式表达式

$$\exp(\phi(\boldsymbol{u}, z)) = \exp\left(\sum_{m\geq 1} g_m(\boldsymbol{u}) z^{\frac{m}{2}}\right) = \prod_{m\geq 1}\sum_{k\geq 0} \frac{g_m(\boldsymbol{u})^k z^{\frac{mk}{2}}}{k!} =: \sum_{r\geq 0} C_r(\boldsymbol{u}) z^{\frac{r}{2}},$$

其中 $C_0(\boldsymbol{u}) = 1$。我们声称，对于所有 $r \in \mathbb{N}$，$\deg(C_r) \leq 3r$。为此，我们注意到

$$\deg(C_r) \leq \max_{\sum_\ell m_\ell = r} \left\{ \sum_{(m_1, m_2, \dots)} \deg(g_{m_\ell}) \right\}.$$

这里，最大值取遍满足 $\sum_\ell m_\ell = r$ 的非负整数序列 $(m_1, m_2, \dots)$。但由于对于 $m \in \mathbb{N}$，$\deg(g_m) \leq m + 2 \leq 3m$，我们据此得到，对于所有 $r \in \mathbb{N}$，$\deg(C_r) \leq 3r$，如所声称的那样。由 $|\boldsymbol{u}| \ll \varepsilon^{-\frac{1}{6}+\delta_1}$ 可知，对于所有 $R \in \mathbb{N}$，关于 $\boldsymbol{u}$ 一致地，

$$\exp(\phi(\boldsymbol{u}, z)) = \sum_{r=0}^{R-1} C_r(\boldsymbol{u}) z^{\frac{r}{2}} + O\left(\varepsilon^{3R\delta_1}\right).$$

这证明了 (3.11)，从而也证明了该命题。 □

3.3. **更大范围的估计**。为了建立 (3.1) 的另一种渐近展开（该展开在主弧上有效），令 $\mathcal{A} := (1 + \frac{2^{-(1+iy)}}{1-2^{-(1+iy)}}) I_N$，其中 I_N 为 $N \times N$ 单位矩阵，并且

$$\Lambda(y) := N\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\log(2)^2(1+iy)^2}{2} - \mathrm{Li}_2\left(2^{-(1+iy)}\right)\right).$$

命题 3.3. 设 $\boldsymbol{n} \in \mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}$ 和 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^N$ 满足：对于 $1 \leq j \leq N$，

$$n_j = \frac{\log(2)}{\varepsilon} + \frac{v_j}{\sqrt{z}}. \tag{3.13}$$

假设对于某个 $\delta > 0$，有 $y \ll \varepsilon^{-1-\frac{3\lambda}{2}+\delta}$。那么我们有

$$\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}(q;q)_{n_j}} = 2^{-\left(K+\frac{1}{2}\right)(1+iy)}\left(1-2^{-(1+iy)}\right)^{-\frac{N}{2}-\frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{j=1}^{N} v_j}\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{\frac{N}{2}}$$
$$\times \exp\left(\frac{\Lambda(y)}{z} - \frac{Nz}{24} - \frac{\log(2)(1+iy)}{\sqrt{z}}\sum_{j=1}^{N} v_j - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\mathcal{A}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{v}\sqrt{z}\right)\prod_{j=1}^{N}\exp\left(\xi_y\left(\frac{v_j}{\sqrt{z}}, z\right)\right),$$

其中，对于 $R \in \mathbb{N}$，$\xi_y(\nu, z)$ 当 $z \to 0$ 时有渐近展开，

$$\xi_y(\nu, z) = -\sum_{r=2}^{R-1}\left(B_r(-\nu) - \delta_{r,2}\nu^2\right)\mathrm{Li}_{2-r}\left(2^{-(1+iy)}\right)\frac{z^{r-1}}{r!} + O\left(z^{R-1}\right). \tag{3.14}$$

注. 请注意 (3.2) 和 (3.13) 中 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的区别。用 $\boldsymbol{v}$（而不是 $\boldsymbol{u}$）表示 $\boldsymbol{n}$，可以推导出一个在 y 范围更广的渐近展开。

命题 *3.3* 的证明. 由 (3.13)，我们有 $q^{n_j} = 2^{-(1+iy)}e^{-v_j\sqrt{z}}$。定义 $\bar{\nu}_j := \frac{v_j}{\sqrt{z}}$。那么我们有

$$\nu_j = n_j - \frac{\log(2)}{\varepsilon} = O\left(\varepsilon^{\lambda}\right).$$

若 $y \ll \varepsilon^{-1-\frac{3\lambda}{2}+\delta}$，则 $z \ll \varepsilon^{-\frac{3\lambda}{2}+\delta_2}$，其中 $\delta_2 := \min\{1 + \frac{3\lambda}{2}, \delta\} > 0$ and $\nu_j z = o(1)$。

定义 $\omega := 2^{-(1+iy)}$。注意到 $|\omega| = |2^{-(1+iy)}| < 1$，我们可以应用引理 2.2，进而得到

$$\operatorname{Log}\left(\left(q^{n_j+1};q\right)_\infty\right) = -\frac{\operatorname{Li}_2(\omega)}{z} - \left(\nu_j+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}(1-\omega) - \frac{\nu_j^2 z}{2}\frac{\omega}{1-\omega} + \psi_\omega(\nu_j,z).$$

利用引理 2.1 和 (3.5)，我们对 j 求和，并得到，其中 $\mathcal{E}$ 满足对于所有 $L\in\mathbb{N}$，$\mathcal{E}\ll z^L$。

$$-\sum_{j=1}^{N}\operatorname{Log}((q;q)_{n_j}) = -\frac{N\operatorname{Li}_2(\omega)}{z} + \sum_{j=1}^{N}\left(-\left(\nu_j+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}(1-\omega) - \frac{\nu_j^2 z}{2}\frac{\omega}{1-\omega} + \psi_\omega(\nu_j,z)\right) + \frac{\pi^2 N}{6z} - \frac{N}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{2\pi}{z}\right) - \frac{Nz}{24} + N\mathcal{E}.$$

现在令 $\xi_y(\nu_j,z) := \psi_\omega(\nu_j,z) + \mathcal{E}$。由于对所有 $L\in\mathbb{N}$，都有 $\mathcal{E}\ll z^L$，因此 $\xi_y(\nu_j,z)$ 与 $\psi_\omega(\nu_j,z)$ 具有相同的渐近展开。接下来，利用 (1.3)，我们有

$$-H(\boldsymbol{n})z = -\frac{N\log(2)^2(1+iy)}{2\varepsilon} - \frac{\log(2)(1+iy)}{\sqrt{z}}\sum_{j=1}^{N}v_j - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} - \log(2)\left(K+\frac{1}{2}\right)(1+iy) - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{v}\sqrt{z}.$$

其余计算与命题 3.1 的计算类似。 □

现在我们使用命题 3.3 推导 (3.1) 的另一个渐近展开；该命题的证明与命题 3.2 的证明作相应修改后即可得出，故此处省略。

命题 3.4. 假设命题 *3.3* 中的设定成立。如果对于某个 $\delta>0$，$y\ll\varepsilon^{-1-\frac{3\lambda}{2}+\delta}$，那么我们有关于 $R\in\mathbb{N}$ 的渐近展开，且该展开关于 $\boldsymbol{v}$ 一致，

$$\begin{aligned}\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}(q;q)_{n_j}} &= 2^{-\left(K+\frac{1}{2}\right)(1+iy)}\left(1-2^{-(1+iy)}\right)^{-\frac{N}{2}}\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{\frac{N}{2}}e^{\frac{\Lambda(y)}{z}}\\ &\quad\times e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\mathcal{A}\boldsymbol{v}+\frac{1}{\sqrt{z}}\left(-\log(2)(1+iy)-\operatorname{Log}\left(1-2^{-(1+iy)}\right)\right)\sum_{j=1}^{N}v_j}\sum_{r=0}^{R-1}D_r(\boldsymbol{v},y)z^{\frac{r}{2}}\\ &\quad+z^{\frac{N}{2}}e^{\frac{\Lambda(y)}{z}}e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\mathcal{A}\boldsymbol{v}+\frac{1}{\sqrt{z}}\left(-\log(2)(1+iy)-\operatorname{Log}\left(1-2^{-(1+iy)}\right)\right)\sum_{j=1}^{N}v_j}O\left(\varepsilon^{2R\delta_2}\right),\end{aligned}$$

其中 $\delta_2 := \min\{1+\frac{3\lambda}{2},\delta\}>0$，$D_r(\boldsymbol{v},y)$ 定义为形式指数函数的系数。 l

$$\sum_{r\geq 0}D_r(\boldsymbol{v},y)z^{\frac{r}{2}} := \exp(\phi(\boldsymbol{v},z)),\qquad \phi(\boldsymbol{v},z) := -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{v}\sqrt{z} - \frac{Nz}{24} + \sum_{j=1}^{N}\xi_y\left(\frac{v_j}{\sqrt{z}},z\right),$$

且 $\xi_y(\frac{v_j}{\sqrt{z}}z)$ 具有式 (3.14) 所给出的渐近展开。

4. Error Estimates

在本节中，我们建立一些误差估计，这些估计将在第 5 节中使用。

命题 4.1。对于每个 $L\in\mathbb{N}$，当 $\operatorname{Re}(z)\to 0$ 位于右半平面时，我们有

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}_0^N\setminus\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}}\left|\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}(q;q)_{n_j}}\right| \ll \varepsilon^L e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}.$$

证明。首先，假设 $z=\varepsilon$ 为实数，即 $y=0$。固定 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}_0^N\setminus\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}$，并令 $\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}^N$ 满足$n_j=\log(2)$ ε $+\mu_j$，其中 $1\le j\le N$。我们使用 (3.5)。注意到 $q^{n_j}=\frac{1}{2}e^{-\mu_j\varepsilon}$。利用幂级数展开 $\log(1-x)$ $=-\sum_{n\ge1}\frac{x^n}{n}$，我们展开

$$\sum_{j=1}^{N}\log\left(\left(q^{n_j+1};q\right)_\infty\right)=-\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\ge1}\frac{1}{k\cdot 2^k}\frac{e^{-k\mu_j\varepsilon}}{e^{k\varepsilon}-1}. \tag{4.1}$$

由于对所有 $x\neq0$ 都有 $e^x>1+x$，且对 $x>0$ 有$\frac{1}{e^x-1}\ge\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$，因此我们得到

$$\frac{e^{-k\mu_j\varepsilon}}{e^{k\varepsilon}-1}>(1-k\mu_j\varepsilon)\left(\frac{1}{k\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{k\varepsilon}-\left(\mu_j+\frac{1}{2}\right)+\frac{k\mu_j\varepsilon}{2}.$$

将其代入 (4.1) 得

$$\sum_{j=1}^{N}\log\left(\left(q^{n_j+1};q\right)_\infty\right)<-N\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\varepsilon}+\sum_{j=1}^{N}\left(\log(2)\left(\mu_j+\frac{1}{2}\right)-\frac{\mu_j\varepsilon}{2}\right). \tag{4.2}$$

结合 (4.2) 和引理 2.1，对于 $L\in\mathbb{N}$，当 $\varepsilon\to0$ 时，得到

$$\log\left(\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})\varepsilon}}{\prod_{j=1}^{N}(q;q)_{n_j}}\right)<-H(\boldsymbol{n})\varepsilon+\frac{\pi^2N}{6\varepsilon}-\mathrm{Li}_2\left(\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{N}{\varepsilon}-\tfrac{N}{2}\log\left(\tfrac{\pi}{\varepsilon}\right)-\tfrac{N\varepsilon}{24}+\left(\log(2)-\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{j=1}^{N}\mu_j+N\mathcal{E}. \tag{4.3}$$

接下来我们计算

$$-H(\boldsymbol{n})\varepsilon=-\frac{\log(2)^2N}{2\varepsilon}-\log(2)\sum_{j=1}^{N}\mu_j-\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\mu}\frac{\varepsilon}{2}-\log(2)\sum_{j=1}^{N}b_j-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\mu}\varepsilon. \tag{4.4}$$

将 (4.4) 代入 (4.3)，并使用 (2.1)，得到

$$\log\left(\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})\varepsilon}}{\prod_{j=1}^{N}(q;q)_{n_j}}\right)<\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}+T, \tag{4.5}$$

其中

$$T:=-\frac{N}{2}\log\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)-\frac{N\varepsilon}{24}-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{N}\mu_j-\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\mu}\frac{\varepsilon}{2}-\log(2)\sum_{j=1}^{N}b_j-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\mu}\varepsilon+N\mathcal{E}.$$

若 $\delta>0$、$l<-\frac{1}{2}-\delta$ 和 $|\boldsymbol{\mu}|>\varepsilon^l$，则 T受 $-\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\mu}\frac{\varepsilon}{2}$支配，且存在一个与 l无关的 $\varepsilon_0>0$，使得 $T<-\frac{1}{4}\varepsilon^{2l+1}$对 $\varepsilon<\varepsilon_0$成立。将此代入 (4.5) 可知，对于 $\varepsilon<\varepsilon_0$，

$$\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})\varepsilon}}{\prod_{j=1}^{N}(q;q)_{n_j}}<e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}-\frac{\varepsilon^{2l+1}}{4}}. \tag{4.6}$$

现在考虑以下求和

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}_0^N\setminus\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}}\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})\varepsilon}}{\prod_{j=1}^{N}(q;q)_{n_j}}=\sum_{r\ge1}\sum_{\substack{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}_0^N\setminus\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}\\ \varepsilon^{-r+1}<|\boldsymbol{\mu}|\le\varepsilon^{-r}}}\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})\varepsilon}}{\prod_{j=1}^{N}(q;q)_{n_j}}=:\sum_{r\ge1}\mathcal{R}(r). \tag{4.7}$$

对于 $\mathcal{R}(1)$，求和范围为 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}_0^N\setminus\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}$，其中 $1<|\boldsymbol{\mu}|\le\varepsilon^{-1}$。注意，$\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}_0^N\setminus\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}$ 意味着 $|\boldsymbol{\mu}|>\varepsilon^\lambda$，因此实际上我们是在对满足 $\varepsilon^\lambda<|\boldsymbol{\mu}|\le\varepsilon^{-1}$ 的项求和。由 (4.6) 可知，$\mathcal{R}(1)$ 中的被加数有界于 $e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}-\frac{\varepsilon^{2\lambda+1}}{4}}$。由于 $\mathcal{R}(1)$ 含有 $O(\varepsilon^{-N})$ 项，我们得出，对于 $\varepsilon<\varepsilon_0$

$$\mathcal{R}(1)\ll\frac{e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}-\frac{\varepsilon^{2\lambda+1}}{4}}}{\varepsilon^N}. \tag{4.8}$$

现在考虑 $r \geq 2$ 时 $\mathcal{R}(r)$ 中的被加数。由于 $|\boldsymbol{\mu}| > \varepsilon^{-r+1}$，由 (4.6) 可知，被加数有界于 $e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{3-2r}}{4}}$。由于 $\mathcal{R}(r)$ 含有 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-Nr})$ 项，我们得出，对于 $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\mathcal{R}(r) \ll \frac{e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{3-2r}}{4}}}{\varepsilon^{Nr}}. \tag{4.9}$$

将（4.8）和（4.9）代入（4.7），我们推得

$$\sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^N \setminus \mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}} \frac{e^{-H(\boldsymbol{n})\varepsilon}}{\prod_{j=1}^N (q;q)_{n_j}} = \sum_{r \geq 1} \mathcal{R}(r) \ll e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}} \left(\frac{e^{-\varepsilon^{\frac{2\lambda+1}{4}}}}{\varepsilon^N} + \sum_{r \geq 2} \frac{e^{-\frac{\varepsilon^{3-2r}}{4}}}{\varepsilon^{Nr}} \right) \ll \varepsilon^L e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}$$

对于所有 $L \in \mathbb{N}$，当 $\varepsilon \to 0$ 时。这就证明了 z 为实数时的结论。

一般情形由平凡界可得。

$$\left| \frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^N (q;q)_{n_j}} \right| \leq \frac{e^{-H(\boldsymbol{n})\varepsilon}}{\prod_{j=1}^N (|q|;|q|)_{n_j}}. \qquad \square$$

以下命题有助于建立 (1.2) 的小弧估计。

命题 4.2. 设 $\boldsymbol{n} \in \mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}$，并假设对于某个 $\delta > 0$，$\varepsilon^{-\delta} < |y| \leq \frac{\pi}{\varepsilon}$ 足够小。那么对于所有 $L \in \mathbb{N}$，都有，

$$\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^N (q;q)_{n_j}} \ll \varepsilon^L e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}.$$

证明。当 $q = e^{-z} = e^{-\varepsilon(1+iy)}$ 时，假设 $\varepsilon^{-\delta} < |y| \leq \frac{\pi}{\varepsilon}$ 意味着 $\varepsilon^{1-\delta} < |\mathrm{Arg}(q)| \leq \pi$。对于 $1 \leq j \leq N$，定义集合

$$\mathcal{Q}_j := \left\{ q^k : 1 \leq k \leq n_j \right\}, \qquad \mathcal{Q}_j^- := \{ s \in \mathcal{Q}_j : \mathrm{Re}(s) \leq 0 \}, \qquad \mathcal{Q}_j^+ := \mathcal{Q}_j \setminus \mathcal{Q}_j^-.$$

如果 $\varepsilon^{1-\delta} < |\mathrm{Arg}(q)| \leq \pi$ 且 $\boldsymbol{n} \in \mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}$，那么可以证明存在一个与 j 无关的 $C > 0$，使得当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，$|\mathcal{Q}_j^-| \geq C n_j$。

接下来，我们给出 $|(q;q)_{n_j}^{-1}|$ 的一个上界。为此，注意到对于 $s \in \mathbb{C}$，若 $\mathrm{Re}(s) < 0$，则有 $|1-s| > 1$。由此可得

$$\left| \frac{1}{(q;q)_{n_j}} \right| \leq \prod_{\substack{1 \leq k \leq n_j \\ q^k \in \mathcal{Q}_j^+}} \frac{1}{|1-q^k|} \leq \prod_{\substack{1 \leq k \leq n_j \\ q^k \in \mathcal{Q}_j^+}} \frac{1}{1-|q|^k}.$$

如上所示，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，我们有 $|\mathcal{Q}_j^-| \geq C n_j$。因此，乘积中的项数不超过 $|\mathcal{Q}_j^+| \leq (1-C) n_j$。由于 $(1-|q|^k)^{-1}$ 随着 k 增大而减小，我们得到一个上界

$$\left| \frac{1}{(q;q)_{n_j}} \right| \leq \prod_{\substack{1 \leq k \leq n_j \\ q^k \in \mathcal{Q}_j^+}} \frac{1}{1-|q|^k} \leq \prod_{k=1}^{\lfloor (1-C) n_j \rfloor} \frac{1}{1-|q|^k} = \frac{1}{(|q|;|q|)_{\lfloor (1-C) n_j \rfloor}}.$$

由此得到

$$\left| \frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^N (q;q)_{n_j}} \right| \leq \frac{e^{-H(\boldsymbol{n})\varepsilon}}{\prod_{j=1}^N (|q|;|q|)_{\lfloor (1-C) n_j \rfloor}}.$$

最后，如果 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{N}_{\varepsilon,\ \lambda}$ 且 $\varepsilon>0$ 足够小，那么我们有

$$\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})\varepsilon}}{\prod_{j=1}^{N}(|q|;|q|)_{\lfloor(1-C)n_j\rfloor}}\le\frac{e^{-H(\lfloor(1-C)n_1\rfloor,\ldots,\lfloor(1-C)n_N\rfloor)\varepsilon}}{\prod_{j=1}^{N}(|q|;|q|)_{\lfloor(1-C)n_j\rfloor}}=o\left(\varepsilon^{L}e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}\right)$$

对所有 $L\in\mathbb{N}$，由命题 4.1 可知，因为 $(\lfloor(1-C)n_1\rfloor,\ \ldots\ldots,\ \lfloor(1-C)n_N\rfloor)\notin\mathcal{N}_{\varepsilon,\ \lambda}$。 □

5. Asymptotics for $d^{[K]}_{\alpha,\beta;N}(n)$

我们将和式 $\mathcal{D}^{[K]}_{\alpha,\ \beta;\ N}$ 拆分为

$$\mathcal{D}^{[K]}_{\alpha,\beta;N}(q)=\sum_{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^N}\mathcal{D}^{[K]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(q),\qquad\mathcal{D}^{[K]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(q):=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}}\frac{q^{NH(\boldsymbol{n})}}{\prod_{j=1}^{N}\left(q^N;q^N\right)_{n_j}},\tag{5.1}$$

其中 $\mathcal{S}_{\alpha,\ \beta;N,\ \boldsymbol{\ell}}:=\{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}_{\alpha,\beta}\colon\ \boldsymbol{n}\equiv\boldsymbol{\ell}\ （模\ N）\}$。我们总是选取 $\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^N$ 中满足 $0\le\ell_j<N$ $(1\le j\le N)$ 的代表元。令 $\zeta_N:=e^{\frac{2\pi i}{N}}$。于是有

$$\mathcal{D}^{[K]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(\zeta_Ne^{-z})=\zeta_N^{NH(\boldsymbol{\ell})}f^{[K]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z),$$

其中

$$f^{[K]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z):=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}}\frac{e^{-NH(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}\left(e^{-Nz};e^{-Nz}\right)_{n_j}}.$$

研究.....更为方便

$$g^{[K]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z):=f^{[K]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\left(\frac{z}{N}\right)=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}}\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}\left(e^{-z};e^{-z}\right)_{n_j}}.$$

我们拆分

$$g^{[K]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z)=g^{[K,1]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z)+g^{[K,2]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z),\tag{5.2}$$

其中

$$g^{[K,1]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z):=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}}\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}(e^{-z};e^{-z})_{n_j}},\quad g^{[K,2]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z):=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\setminus\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}}\frac{e^{-H(\boldsymbol{n})z}}{\prod_{j=1}^{N}(e^{-z};e^{-z})_{n_j}}.$$

命题 5.1. 若 $y\ll\varepsilon^{1+\lambda+\delta}$ 对某个 $\delta>0$成立，则当 $z\to0$ 趋于 $R\in\mathbb{N}$ 时，我们有：

$$g^{[K,1]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z)=\frac{e^{\frac{\pi^2N}{12z}}}{2^{K+\frac12}\pi^{\frac N2}}\sum_{r=0}^{R-1}E_{\boldsymbol{\ell},r}z^{\frac r2}+O\left(\varepsilon^{N\left(\lambda+\frac12\right)+3R\left(\lambda+\frac23\right)}e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}\right),$$

其中 $E_{\boldsymbol{\ell},\ r}$ 均可显式计算。特别地，对于任意 $L\in\mathbb{N}$，当 $z\to0$时，有$R_0=R_0（L）:=\lceil\frac{L-N}{(\lambda+\frac12)3\lambda+2}\rceil$

$$g^{[K,1]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z)=\frac{e^{\frac{\pi^2N}{12z}}}{2^{K+\frac12}\pi^{\frac N2}}\sum_{r=0}^{R_0-1}E_{\boldsymbol{\ell},r}z^{\frac r2}+O\left(\varepsilon^{L}e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}\right).$$

我们通过一系列引理证明命题 5.1。令 $\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}$ 为 $\mathcal{S}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}$ 在 (3.2) 中给出的 $\boldsymbol{n}\mapsto\boldsymbol{u}$ 下的双射像，并令 $\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}$ 为 $\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}$ 在同一映射下的双射像。由于 $\boldsymbol{n}\mapsto\boldsymbol{u}$ 将 $\mathbb{R}^N$ 映射到 $(-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\mathbb{R}\sqrt{z})^N$，我们有 $\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\subseteq\overline{(-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}\mp\mathbb{R}\sqrt{z})^N}\subseteq\mathbb{C}^N$。

引理 5.2。 如果对于某个 $\delta>0$ 和 $P(\boldsymbol{u})$， $y\ll\varepsilon^{1+\lambda+\delta}$ 是 $\boldsymbol{u}$ 中的多项式，那么，当 $z\to 0$ 时，

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\setminus\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}}\left|P(\boldsymbol{u})e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\right|=O\left(\varepsilon^L\right),\quad and\quad \int_{\left(-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\mathbb{R}\sqrt{z}\right)^N\setminus\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}}\left|P(\boldsymbol{u})e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\right|d\boldsymbol{u}=O\left(\varepsilon^L\right).$$

对所有 $L\in\mathbb{N}$。

证明。 令 $\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}^N$ 满足 $n_j=\log(2)\varepsilon^{-1}+\mu_j$，其中 $1\le j\le N$。我们可以改写为

$$u_j=\frac{\log(2)\sqrt{z}}{\varepsilon}\left(1-\frac{1}{1+iy}\right)+\mu_j\sqrt{z}. \tag{5.3}$$

对于 $y\ll\varepsilon^{1+\lambda+\delta}$，(5.3) 中的第一项的大小为 $\ll\varepsilon^{\frac{1}{2}+\lambda+\delta}$。这意味着

$$\mathrm{Im}(u_j)\ll\varepsilon^{\frac{1}{2}+\lambda+\delta}+\varepsilon^{\frac{3}{2}+\lambda+\delta}\mu_j.$$

与此同时，如果 $\mu_j\gg\varepsilon^{\lambda}$，则有 $\mathrm{Re}(u_j)\gg\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu_j$。特别地，这意味着 $\mathrm{Im}(u_j)\ll\varepsilon^{\delta}\mathrm{Re}(u_j)$。由于 $\boldsymbol{n}\notin\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}$，我们有 $|\boldsymbol{\mu}|>\varepsilon^{\lambda}$，特别地，存在某个 j，使得对于某个 j，有 $\mu_j\gg\varepsilon^{\lambda}$。因此，$-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}$ 的实部为负，其大小为 $\gg\varepsilon^{1+2\lambda}$，当 $\varepsilon\to 0$ 时。由于 $1+2\lambda<0$，这意味着

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\setminus\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}}\left|P(\boldsymbol{u})e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\right|=O\left(\varepsilon^L\right),\quad \text{and}\quad \int_{\left(-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\mathbb{R}\sqrt{z}\right)^N\setminus\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}}\left|P(\boldsymbol{u})e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\right|d\boldsymbol{u}=O\left(\varepsilon^L\right)$$

对所有 $L\in\mathbb{N}$，注意到 $P(\boldsymbol{u})$ 仅呈多项式增长。 □

现在我们证明命题 3.2 中出现的指数因子的大小上界 .

Lemma 5.3. 若 $y\ll\varepsilon^{1+\lambda+\delta}$ 对某个 $\delta>0$ 成立，且 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}$，则当 $z\to 0$ 时，我们有

$$\left|e^{\frac{\pi^2N}{12z}}e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\right|\le e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}.$$

证明。 我们首先估计 $\sqrt{z}$ 的实部和虚部。令 $\sqrt{z}:=\varepsilon_0(1+iy_0)$，则有 $\varepsilon=\varepsilon_0^2(1-y_0^2)$ 和 $y=\frac{2y_0}{1-y_0^2}$。由于 $\varepsilon>0$，我们有 $1-y_0^2>0$，因此 $|y_0|<1$。于是 $0<1-y_0^2<1$，且 $y=\frac{2y_0}{1-y_0^2}\ge 2y_0$。由于 $y\ll\varepsilon^{1+\lambda+\delta}$，我们有 $1-y_0^2=1+O(\varepsilon^{2+2\lambda+2\delta})$，以及 $\varepsilon_0=\varepsilon^{\frac{1}{2}}(1+O(\varepsilon^{2+2\lambda+2\delta}))$。

接下来，我们对 $e^{\mathrm{Re}(-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u})}$ 进行估计。为此，我们计算

$$\mathrm{Re}\left(-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}\right)=\sum_{j=1}^N\mathrm{Re}\left(-u_j^2\right)=\sum_{j=1}^N\left(\mathrm{Im}(u_j)^2-\mathrm{Re}(u_j)^2\right). \tag{5.4}$$

由于

$$u_j=-\frac{\log(2)}{\varepsilon_0}\left(1-iy_0-y_0^2+O\left(y_0^3\right)\right)+n_j\varepsilon_0(1+iy_0),$$

由此可得

$$\mathrm{Im}(u_j)=\frac{\log(2)}{\varepsilon_0}\left(y_0+O\left(y_0^3\right)\right)+n_j\varepsilon_0y_0,$$

$$\mathrm{Im}(u_j)^2=\frac{\log(2)^2}{\varepsilon_0^2}\left(y_0^2+O\left(y_0^3\right)\right)+n_j\log(2)\left(y_0^2+O\left(y_0^3\right)\right)+n_j^2\varepsilon_0^2y_0^2. \tag{5.5}$$

由于 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}$，我们推得 $n_j=\frac{1}{\varepsilon}(\log(2)+O(\varepsilon^{1+\lambda}))$。将其代入 (5.5)，得到

$$\mathrm{Im}(u_j)^2=\frac{\log(2)^2}{\varepsilon_0^2}\left(y_0^2+O\left(y_0^3\right)\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\log(2)+O\left(\varepsilon^{1+\lambda}\right)\right)\log(2)\left(y_0^2+O\left(y_0^3\right)\right)$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\log(2)+O\left(\varepsilon^{1+\lambda}\right)\right)^2\varepsilon_0^2y_0^2.$$

利用 $\varepsilon=\varepsilon_0^2(1-y_0^2)$、$(1-y_0^2)^{-1}=1+y_0^2+O(y_0^4)$ 和 $y_0\ll\varepsilon^{1+\lambda+\delta}$，我们可以展开

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(u_j)^2&=\frac{\log(2)^2\left(1-y_0^2\right)}{\varepsilon}\left(y_0^2+O\left(y_0^3\right)\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\log(2)+O\left(\varepsilon^{1+\lambda}\right)\right)\log(2)\left(y_0^2+O\left(y_0^3\right)\right)\\&\qquad+\frac{1}{\varepsilon}\left(\log(2)+O\left(\varepsilon^{1+\lambda}\right)\right)^2y_0^2\left(1+y_0^2+O\left(y_0^4\right)\right)\\&=\frac{\log(2)^2y_0^2}{\varepsilon}(1+O(y_0))+\frac{\log(2)^2y_0^2}{\varepsilon}\left(1+O\left(\varepsilon^{1+\lambda}\right)\right)+\frac{\log(2)^2y_0^2}{\varepsilon}\left(1+O\left(\varepsilon^{1+\lambda}\right)\right)\\&=\frac{y_0^2}{\varepsilon}\left(3\log(2)^2+O\left(\varepsilon^{1+\lambda}\right)\right)\le\frac{y^2}{\varepsilon}\left(\frac{3}{4}\log(2)^2+O\left(\varepsilon^{1+\lambda}\right)\right).\end{aligned}$$

由 (5.4) 可得

$$\operatorname{Re}\left(-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}\right)\le\frac{Ny^2}{\varepsilon}\left(\frac{3}{4}\log(2)^2+O\left(\varepsilon^{1+\lambda}\right)\right).\tag{5.6}$$

另一方面，我们有

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\pi^2N}{12z}\right)=\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+iy}\right)=\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}\left(1-y^2+O\left(y^4\right)\right).$$

将此与 (5.6) 结合，对于 $\varepsilon>0$ 充分小时，我们得到

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\pi^2N}{12z}\right)+\operatorname{Re}\left(-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}\right)=\frac{N}{\varepsilon}\left(\frac{\pi^2}{12}+y^2\left(\frac{3}{4}\log(2)^2-\frac{\pi^2}{12}+O\left(\varepsilon^{1+\lambda}\right)\right)+O\left(y^4\right)\right)\le\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}.\quad\square$$

接下来证明以下引理。

引理 5.4. 若 $y\ll\varepsilon^{1+\lambda+\delta}$ 对某个 $\delta>0$ 成立，则对于 $R\in\mathbb{N}$，当 $z\to0$ 时，我们有 ，

$$g_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K,1]}(z)=\left(\frac{z}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}}\frac{e^{\frac{\pi^2N}{12z}}}{2^{K+\frac{1}{2}}}\sum_{r=0}^{R-1}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}}e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}C_r(\boldsymbol{u})z^{\frac{r}{2}}+O\left(\varepsilon^{N\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+3R\left(\lambda+\frac{2}{3}\right)}e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}\right).$$

证明。 对命题 3.2 中的渐近分析求和，得到[3]

$$\begin{aligned}g_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K,1]}(z)=\left(\frac{z}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}}\frac{e^{\frac{\pi^2N}{12z}}}{2^{K+\frac{1}{2}}}\sum_{r=0}^{R-1}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}}&e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}C_r(\boldsymbol{u})z^{\frac{r}{2}}\\&+z^{\frac{N}{2}}e^{\frac{\pi^2N}{12z}}O\left(\varepsilon^{3R\left(\lambda+\frac{2}{3}\right)}\right)\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}}e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

由于对 $\mathcal{T}_{\alpha、\beta;N、\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon、\lambda}$ 的求和包含 $\ll\varepsilon^{N\lambda}$ 项，根据引理 5.3 可知，(5.7) 右端的第二项具有所述的界。□

为方便起见，我们对 $j\in\mathbb{N}_0$ 设定

$$G_j(\boldsymbol{u}):=e^{\frac{\pi^2N}{12z}}C_j(\boldsymbol{u})e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}},$$

其中，多项式 $C_j(\boldsymbol{u})$ 在 (3.10) 中定义；特别地，我们有 $\deg(C_j)\le3j$ （参见命题 3.2 的证明）。接下来我们估计 $\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\ \beta;N,\ \boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\ \lambda}}G_j(\boldsymbol{u})$。

[3]注意，在命题 3.2 中，δ_1 取值为 $\delta_1=\lambda+\frac{2}{3}$。(5.7) 中的误差项是合理的，因为命题 3.2 中的误差项关于 $\boldsymbol{u}$是一致的。

Lemma 5.5. 如果对于某个 $\delta > 0$， $y \ll \varepsilon^{1+\lambda+\delta}$，那么对于 $R \in \mathbb{N}$，当 $z \to 0$ 时，我们有

$$\sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}} \cap \mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}} G_j(\boldsymbol{u}) = e^{\frac{\pi^2 N}{12z}} \sum_{r=-N}^{R-1} V_{j,r} z^{\frac{r}{2}} + O\left(\varepsilon^{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(3j+2N+R-1)+\frac{N+R}{2}-1} e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}} \right).$$

证明。首先，我们考虑对 $\boldsymbol{u}$ 的第 α 个分量 u_α 求和。为突出这个分量，我们用 $\boldsymbol{u}_{[1]}$ 表示 $\boldsymbol{u}$ 中其余的 $N-1$ 个分量，并记作 $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha)$。请注意，这个记号并不表示 u_α 是 $\boldsymbol{u}$ 的第 N 个分量。

我们将其分解为

$$\sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}} \cap \mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}} G_j(\boldsymbol{u}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{u}_{[1]} \in \mathbb{C}^{N-1} \\ \exists u_\alpha \in \mathbb{C}, (\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha) \in \mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}} \cap \mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}}} \sum_{\substack{u_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha(\boldsymbol{u}_{[1]}) \\ (\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha) \in \mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}}} G_j\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha\right), \tag{5.8}$$

其中

$$\mathfrak{u}_\alpha\left(\boldsymbol{u}_{[1]}\right) := \left\{ u_\beta + t\sqrt{z} \ : \ t \in [\ell_\alpha - \ell_\beta]_N + N\mathbb{N}_0 \right\}.$$

若 $\boldsymbol{u}_{[1]}$ 满足存在 $u_\alpha \in \mathbb{C}$，使得 $(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha) \in \mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}} \cap \mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}$，则有

$$\mathfrak{u}_\alpha\left(\boldsymbol{u}_{[1]}\right) = \left\{ u_\alpha \in \mathbb{C} : \left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha\right) \in \mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}} \right\},$$

因此分解式 (5.8) 是有意义的。我们逐个变量地计算这个和，从最内层对 u_α 的求和开始。根据引理 5.2，我们可以通过去掉条件 $(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha) \in \mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}$ 来扩展 (5.8) 中的内层求和。这会引入一个大小为 $O(\varepsilon^L) e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}$ 的误差项，对所有 $L \in \mathbb{N}$ 均如此，但该误差可以忽略不计。根据命题 2.3，取 $a = u_\beta + [\ell_\alpha - \ell_\beta]_N \sqrt{z}$, $z \mapsto N\sqrt{z}$，得到

$$\begin{aligned}
\sum_{u_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha(\boldsymbol{u}_{[1]})} G_j\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha\right) = \frac{1}{N\sqrt{z}} \int_{u_\beta + [\ell_\alpha - \ell_\beta]_N \sqrt{z}}^{u_\beta + \sqrt{z}\infty} G_j\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha\right) du_\alpha + \frac{1}{2} G_j\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\beta + [\ell_\alpha - \ell_\beta]_N \sqrt{z}\right) \\
- \sum_{r=1}^{R} \frac{B_{2r} N^{2r-1} z^{r-\frac{1}{2}}}{(2r)!} G_j^{(2r-1)}\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\beta + [\ell_\alpha - \ell_\beta]_N \sqrt{z}\right) \\
+ O(1) z^R \int_{u_\beta + [\ell_\alpha - \ell_\beta]_N \sqrt{z}}^{u_\beta + \sqrt{z}\infty} \left| G_j^{(2R+1)}\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha\right) \right| du_\alpha.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

首先，我们估计式 (5.9) 中的第二个积分。通过直接计算，我们得到，对于 $k \in \mathbb{N}$

$$G_j^{(k)}\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha\right) = e^{\frac{\pi^2 N}{12z}} P_k(\boldsymbol{u}) e^{-\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u}},$$

其中，导数是关于 u_α 求取的，且 $P_k(\boldsymbol{u})$ 是次数至多为 $3j+k$ 的多项式。根据引理 5.2，我们可以将 (5.9) 中的第二个积分限制在 $\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}$ 的范围内，由此引入一个大小为 $O(\varepsilon^L) e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}$ 的误差，该误差对所有 $L \in \mathbb{N}$ 均成立。现在，我们考虑积分在 $\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}$ 上的部分，其测度为 $\ll \varepsilon^{\lambda+\frac{1}{2}}$。对于 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}$，我们利用 $|\boldsymbol{u}| \ll \varepsilon^{\lambda+\frac{1}{2}}$ 和引理 5.3 得出结论：

$$G_j^{(k)}\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha\right) \ll \varepsilon^{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(3j+k)} e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}. \tag{5.10}$$

因此

$$\int_{u_\beta + [\ell_\alpha - \ell_\beta]_N \sqrt{z}}^{u_\beta + \sqrt{z}\infty} \left| G_j^{(2R+1)}\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha\right) \right| du_\alpha \ll \varepsilon^{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(3j+2R+2)} e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}. \tag{5.11}$$

接下来我们考虑（5.9）中的第一个积分。我们将其拆分为

$$\int\limits_{u_\beta+[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N\sqrt{z}}^{u_\beta+\sqrt{z}\infty} G_j\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\alpha\right)du_\alpha=\int\limits_{u_\beta}^{u_\beta+\sqrt{z}\infty} G_j\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\alpha\right)du_\alpha-\int\limits_{u_\beta}^{u_\beta+[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N\sqrt{z}} G_j\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\alpha\right)du_\alpha.$$

我们保留右端的第一个积分。对于第二个积分，应用命题 2.3（取 $a=u_\beta$, $z\mapsto[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N\sqrt{z}$），得到

$$\begin{aligned}\int_{u_\beta}^{u_\beta+[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N\sqrt{z}} G_j\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\alpha\right)du_\alpha&=\frac{[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N\sqrt{z}}{2}\left(G_j\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\beta+[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N\sqrt{z}\right)+G_j\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\beta\right)\right)\\&\quad-\sum_{r=1}^{R}\frac{B_{2r}[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N^{2r}z^r}{(2r)!}\left(G_j^{(2r-1)}\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\beta+[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N\sqrt{z}\right)-G_j^{(2r-1)}\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\beta\right)\right)\\&\quad+O(1)z^{R+\frac12}\int_{u_\beta}^{u_\beta+[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N\sqrt{z}}\left|G_j^{(2R+1)}\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\alpha\right)\right|du_\alpha.\end{aligned}\tag{5.12}$$

利用 (5.10)，我们得到

$$\int_{u_\beta}^{u_\beta+[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N\sqrt{z}}\left|G_j^{(2R+1)}\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\alpha\right)\right|\ll\varepsilon^{\left(\lambda+\frac12\right)(3j+2R+1)+\frac12}e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}.\tag{5.13}$$

接下来需要考虑 (5.9) 和 (5.12) 中出现的形如 $G_j^{(k)}\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\beta+[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N\sqrt{z}\right)$ 的项。我们应用泰勒定理并改写为

$$\begin{aligned}G_j^{(k)}\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\beta+[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N\sqrt{z}\right)&=\sum_{r=0}^{R-1}\frac{[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N^r z^{\frac r2}}{r!}G_j^{(k+r)}\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\beta\right)\\&\quad+\frac{1}{(R-1)!}\int_{u_\beta}^{u_\beta+[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N\sqrt{z}}G_j^{(k+R)}\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\alpha\right)(u_\alpha-u_\beta)^{R-1}du_\alpha.\end{aligned}\tag{5.14}$$

利用 (5.10)，我们得到

$$\int_{u_\beta}^{u_\beta+[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N\sqrt{z}}G_j^{(k+R)}\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\alpha\right)(u_\alpha-u_\beta)^{R-1}du_\alpha\ll\varepsilon^{\left(\lambda+\frac12\right)(3j+k+R)+\frac R2}e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}.\tag{5.15}$$

结合 (5.9)、(5.12) 和 (5.14)，并应用误差估计 (5.11)、(5.13) 和 (5.15)，我们写成

$$\begin{aligned}\sum_{u_\alpha\in\mathfrak{u}_\alpha\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]}\right)}G_j\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\alpha\right)&=\frac{1}{N\sqrt{z}}\int_{u_\beta}^{u_\beta+\sqrt{z}\infty}G_j\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\alpha\right)du_\alpha+\sum_{r=0}^{R-1}W_rG_j^{(r)}\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]},u_\beta\right)z^{\frac r2}\\&\quad+O\left(\varepsilon^{\left(\lambda+\frac12\right)(3j+R+1)+\frac{R-1}{2}}e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}\right),\end{aligned}\tag{5.16}$$

其中

$$W_0=\frac12-\frac{[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N}{N},\tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}W_r&=\left(\frac12-\frac{[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N}{2N}\right)\frac{[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N^r}{r!}+\sum_{t=1}^{\lceil\frac r2\rceil}\frac{B_{2t}\left([\ell_\alpha-\ell_\beta]_N^{2t}-N^{2t}\right)[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N^{r-2t+1}}{(2t)!(r-2t+1)!N}\\&\quad-\delta_{r\equiv1\pmod2}\frac{B_{r+1}[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N^{r+1}}{(r+1)!N},\qquad(r\geq1).\end{aligned}$$

接下来，我们考虑对其他变量求和。令

$$G_{j,\alpha}\left(\boldsymbol{u}_{[1]}\right) := \sum_{u_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha\left(\boldsymbol{u}_{[1]}\right)} G_j\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha\right).$$

令 $1 \le c \le N$、 $c \ne \alpha$，并考虑对 u_c 求和。为突出 $\boldsymbol{u}$ 的第 c 个和第α 个分量，我们用 $\boldsymbol{u}_{[2]}$ 表示 $\boldsymbol{u}$ 的其余 $N-2$ 个分量，并写作 $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_{[2]},\ u_c,\ u_\alpha)$。我们再次滥用了记号；这并不意味着 u_c，u_α 是 $\boldsymbol{u}$ 的最后几个分量。我们写作 $\boldsymbol{u}_{[1]} = (\boldsymbol{u}_{[2]},\ u_c)$。我们考虑

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}} G_j(\boldsymbol{u}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{u}_{[2]}\in\mathbb{C}^{N-2}\\ \exists u_c,u_\alpha\in\mathbb{C},\left(\boldsymbol{u}_{[2]},u_c,u_\alpha\right)\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}}} \sum_{\substack{u_c\in\mathfrak{u}_c,\ u_\alpha\in\mathfrak{u}_\alpha\left(\boldsymbol{u}_{[2]},u_c\right)\\ \left(\boldsymbol{u}_{[2]},u_c,u_\alpha\right)\in\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}}} G_j\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha\right),$$

其中

$$\mathfrak{u}_c := \left\{ -\frac{\log(2)}{\sqrt{z}} + t\sqrt{z} \ :\ t \in \ell_c + N\mathbb{N}_0 \right\}.$$

与对 u_α 求和类似，我们可以利用引理 5.2，通过移除条件 $(\boldsymbol{u}_{[2]},\ u_c,\ u_\alpha) \in \mathcal{U}_{\varepsilon,\ \lambda}$ 来扩展求和；这会引入大小为 $O(\varepsilon^L)e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}$ 的误差，对所有 $L \in \mathbb{N}$ 都成立，而该误差可以忽略。因此，我们可以改为考虑以下求和

$$\sum_{\substack{u_c\in\mathfrak{u}_c\\ u_\alpha\in\mathfrak{u}_\alpha\left(\boldsymbol{u}_{[2]},u_c\right)}} G_j\left(\boldsymbol{u}_{[2]}, u_c, u_\alpha\right) = \sum_{u_c\in\mathfrak{u}_c} G_{j,\alpha}\left(\boldsymbol{u}_{[2]}, u_c\right).$$

再次应用命题 2.3，并写作

$$\begin{aligned}\sum_{u_c\in\mathfrak{u}_c} G_{j,\alpha}\left(\boldsymbol{u}_{[2]}, u_c\right) = {}& \frac{1}{N\sqrt{z}} \int_{-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\ell_c\sqrt{z}}^{-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\sqrt{z}\infty} G_{j,\alpha}\left(\boldsymbol{u}_{[2]}, u_c\right) du_c + \frac{1}{2} G_{j,\alpha}\left(\boldsymbol{u}_{[2]}, -\frac{\log(2)}{\sqrt{z}} + \ell_c\sqrt{z}\right)\\ & - \sum_{r=1}^{R} \frac{B_{2r} N^{2r-1} z^{r-\frac{1}{2}}}{(2r)!} G_{j,\alpha}^{(2r-1)}\left(\boldsymbol{u}_{[2]}, -\frac{\log(2)}{\sqrt{z}} + \ell_c\sqrt{z}\right)\\ & + O(1) z^R \int_{-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\ell_c\sqrt{z}}^{-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\sqrt{z}\infty} \left| G_{j,\alpha}^{(2R+1)}\left(\boldsymbol{u}_{[2]}, u_c\right)\right| du_c. \quad (5.18)\end{aligned}$$

由于 $e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}$ 指数衰减，当 $z \to 0$ 时，对所有 $r \in \mathbb{N}_0$ 和 $L \in \mathbb{N}$，有

$$G_{j,\alpha}^{(r)}\left(\boldsymbol{u}_{[2]}, -\frac{\log(2)}{\sqrt{z}} + \ell_c\sqrt{z}\right) = O\left(\varepsilon^L\right) e^{\frac{\pi^2 N}{12z}},\ \int_{-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}-\sqrt{z}\infty}^{-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\ell_c\sqrt{z}} G_{j,\alpha}\left(\boldsymbol{u}_{[2]}, u_c\right) du_c = O\left(\varepsilon^L\right) e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}. \quad (5.19)$$

因此，(5.18) 中第一个积分的下边界可以延伸至 $-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}} - \sqrt{z}\infty$，并且除主项外的所有项均可忽略，由此引入大小为 $O(\varepsilon^L)e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}$ 的误差项，对所有 $L \in \mathbb{N}$ 均成立。同时，(5.18) 中的误差项大小为—

$$z^R \int_{-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\ell_c\sqrt{z}}^{-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\sqrt{z}\infty} \left| G_{j,\alpha}^{(2R+1)}\left(\boldsymbol{u}_{[2]}, u_c\right)\right| du_c = O\left(\varepsilon^{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(3j+2R+2)+R+\lambda} e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}\right). \quad (5.20)$$

令 R 足够大，由（5.18）、（5.19）和（5.20）可得

$$\sum_{u_c\in\mathfrak{u}_c} G_{j,\alpha}\left(\boldsymbol{u}_{[2]}, u_c\right) = \frac{1}{N\sqrt{z}} \int_{-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\mathbb{R}\sqrt{z}} G_{j,\alpha}\left(\boldsymbol{u}_{[2]}, u_c\right) du_c + O\left(\varepsilon^L e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}\right)$$

对于所有 $L \in \mathbb{N}$。使用相同的论证，我们对其他坐标求和，得到 t

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}} G_j(\boldsymbol{u}) = \frac{z^{\frac{1-N}{2}}}{N^{N-1}} \int_{\left(-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\mathbb{R}\sqrt{z}\right)^{N-1}} G_{j,\alpha}\left(\boldsymbol{u}_{[1]}\right) \boldsymbol{du}_{[1]} + O\left(\varepsilon^L e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}\right)$$

对于所有 $L \in \mathbb{N}$。同样，我们可以使用引理 5.2 将积分限制在

$$\mathcal{U}_{[1]} := \left\{ \boldsymbol{u}_{[1]} \in \left(-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}} + \mathbb{R}\sqrt{z}\right)^{N-1} : \left|\boldsymbol{\mu}_{[1]}\right| \le \varepsilon^{\lambda} \right\},$$

其中，$\boldsymbol{\mu}_{[1]}$ 是通过（5.3）与$\boldsymbol{u}_{[1]}$ 相关联的（$N-1$）元组，误差可忽略不计。因此，我们可以写为

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}} G_j(\boldsymbol{u}) = \frac{z^{\frac{1-N}{2}}}{N^{N-1}} \int_{\mathcal{U}_{[1]}} G_{j,\alpha}\left(\boldsymbol{u}_{[1]}\right) \boldsymbol{du}_{[1]} + O\left(\varepsilon^L e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}\right).$$

应用渐近展开 (5.16)，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}} G_j(\boldsymbol{u}) &= \frac{z^{-\frac{N}{2}}}{N^N} \int_{\mathcal{U}_{[1]}} \int_{u_\beta}^{u_\beta+\sqrt{z}\infty} G_j\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha\right) du_\alpha \boldsymbol{du}_{[1]} \\ &+ \sum_{r=0}^{R-1} \frac{z^{\frac{1-N+r}{2}}}{N^{N-1}} W_r \int_{\mathcal{U}_{[1]}} G_j^{(r)}\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\beta\right) \boldsymbol{du}_{[1]} + O\left(\varepsilon^{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(3j+R+1)+\frac{R-1}{2}} e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}\right) \int_{\mathcal{U}_{[1]}} \boldsymbol{du}_{[1]}. \quad (5.21)\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{U}_{[1]}$的测度为 $\ll \varepsilon^{(N-1)(\lambda+\frac{1}{2})}$, -(5.21) 中的误差项大小为

$$O\left(\varepsilon^{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(3j+R+N)+\frac{R-1}{2}} e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}\right).$$

现在，我们可以再次使用引理 5.2，将 (5.21) 中的积分延伸至 $\left(-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}} + \mathbb{R}\sqrt{z}\right)^{N-1}$ –

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}} G_j(\boldsymbol{u}) &= \frac{z^{-\frac{N}{2}}}{N^N} \int_{\left(-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\mathbb{R}\sqrt{z}\right)^{N-1}} \int_{u_\beta}^{u_\beta+\sqrt{z}\infty} G_j\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\alpha\right) du_\alpha \boldsymbol{du}_{[1]} \\ &+ \sum_{r=0}^{R-1} \frac{z^{\frac{1-N+r}{2}}}{N^{N-1}} W_r \int_{\left(-\frac{\log(2)}{\sqrt{z}}+\mathbb{R}\sqrt{z}\right)^{N-1}} G_j^{(r)}\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\beta\right) \boldsymbol{du}_{[1]} + O\left(\varepsilon^{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(3j+R+N)+\frac{R-1}{2}} e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}\right).\end{aligned}$$

最后，由于 $G_j^{(r)}$ ($\boldsymbol{u}_{[1]}$, u_α) 是全纯的且快速衰减，我们可以移动积分路径并写成

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}} G_j(\boldsymbol{u}) &= \frac{z^{-\frac{N}{2}}}{N^N} \int_{\mathcal{R}_{\alpha,\beta;N}} G_j\left(\boldsymbol{u}\right) \boldsymbol{du} \\ &+ \sum_{r=0}^{R-1} \frac{z^{\frac{1-N+r}{2}}}{N^{N-1}} W_r \int_{\mathbb{R}^{N-1}} G_j^{(r)}\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\beta\right) \boldsymbol{du}_{[1]} + O\left(\varepsilon^{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(3j+R+N)+\frac{R-1}{2}} e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}\right),\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{R}_{\alpha,\ \beta;N} := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N :\ u_\alpha \ge u_\beta\}$。因此我们可以令

$$V_{j,-N} := \frac{e^{-\frac{\pi^2 N}{12z}}}{N^N} \int_{\mathcal{R}_{\alpha,\beta;N}} G_j(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{du}, \quad (5.22)$$

$$V_{j,r} := \frac{e^{-\frac{\pi^2 N}{12z}}}{N^{N-1}} W_{r+N-1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} G_j^{(r+N-1)}\left(\boldsymbol{u}_{[1]}, u_\beta\right) \boldsymbol{du}_{[1]} \qquad (r \ge -N+1). \quad (5.23)$$

注意，$V_{j,\ r}$ 与 z 无关。 □

现在我们可以证明命题 5.1 了。

证明 *of* 命题 *5.1.* 我们估计引理 5.4 中出现的以下表达式。 :

$$\left(\frac{z}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \frac{e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}}{2^{K+\frac{1}{2}}} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}} e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}} C_r(\boldsymbol{u}) z^{\frac{r}{2}} = \frac{1}{2^{K+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{N}{2}}} \sum_{r=0}^{R-1} z^{\frac{N+r}{2}} \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}} G_r(\boldsymbol{u}).$$

由引理 5.5 可得。

$$z^{\frac{N+r}{2}} \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}} G_r(\boldsymbol{u}) = e^{\frac{\pi^2 N}{12z}} \sum_{j=0}^{R-1-r} V_{r,j-N} z^{\frac{r+j}{2}} + O\left(\varepsilon^{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(2r+N+R-1)+\frac{N+R}{2}-1} e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}\right).$$

对 r 求和得

$$\sum_{r=0}^{R-1} z^{\frac{N+r}{2}} \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}} G_r(\boldsymbol{u}) = e^{\frac{\pi^2 N}{12z}} \sum_{r=0}^{R-1}\sum_{j=0}^{r} V_{j,r-j-N} z^{\frac{r}{2}} + O\left(\varepsilon^{3(R-1)\left(\lambda+\frac{2}{3}\right)+N(\lambda+1)-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}\right).$$

由于 $N \geq 2$ 和 $-\frac{2}{3} < \lambda < -\frac{1}{2}$，引理 5.4 中的误差项 $O(\varepsilon^{N(\lambda+\frac{1}{2})+3R(\lambda+\frac{2}{3})} e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}})$ 占主导地位。令

$$E_{\boldsymbol{\ell},r} := \sum_{j=0}^{r} V_{j,r-j-N} \tag{5.24}$$

得出该命题。 □

现在我们证明，上述渐近展开也适用于更大的 $|y|$ 值，且误差可忽略不计。我们需要以下关于 $\Lambda(y)$ 的技术引理。

引理 5.6。 令 $s(y) := \mathrm{Re}(\frac{\Lambda(y)}{1+iy} - \frac{\pi^2 N}{12})$。则有以下结论：

(1) 对所有 $y \in \mathbb{R}$，均有 $s(y) \leq 0$，且等号成立当且仅当 $y = 0$。(2) 对任意 $y_0 > 0$，存在 $d > 0$，使得对所有 $|y| \geq y_0$，均有 $s(y) < -d$。(3) 当 $y \to 0$ 时，有

$$s(y) = N\left(\log(2)^2 - \frac{\pi^2}{12}\right) y^2 + O\left(y^4\right).$$

证明。 (1) 和 (2) 很容易验证，而 (3) 可通过在 $y = 0$ 处计算泰勒级数得到。 □

接下来我们证明，命题 5.1 中的渐近展开在 $y \ll \varepsilon^{-1-\frac{3\lambda}{2}+\delta}$ 范围内，能很好地近似 $g_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K]}(z)$；该范围涵盖主弧。

命题 5.7. 若 $y \ll \varepsilon^{-1-\frac{3\lambda}{2}+\delta}$，则对于每个 $L \in \mathbb{N}$，

$$g_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K]}(z) = \frac{e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}}{2^{K+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{N}{2}}} \sum_{r=0}^{R_0-1} E_{\boldsymbol{\ell},r} z^{\frac{r}{2}} + O\left(\varepsilon^L e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}\right)$$

如 $z \to 0$，其中 $E_{\boldsymbol{\ell},r}$ 和 $R_0 = R_0(L)$ 均如命题 *5.1*。

证明。 我们按照 (5.2) 进行拆分。由命题 4.1，对于所有 $L \in \mathbb{N}$ as $z \to 0$，有

$$g_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K,2]}(z) \ll \varepsilon^L e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}.$$

因此只需估计 $g_{\alpha}^{[K,1]}{}_{N,\ \beta;\ ,\ \boldsymbol{\ell}}$。该命题由以下断言得出：

$$e^{-\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}\left(g_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K,1]}(z)-\frac{e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}}{2^{K+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{N}{2}}}\sum_{r=0}^{R_0-1}E_{\boldsymbol{\ell},r}z^{\frac{r}{2}}\right)=O\left(\varepsilon^{L}\right).$$

根据命题 3.4，若 $y\ll\varepsilon^{-1-\frac{3\lambda}{2}+\delta}$，则我们得到一个渐近展开

$$\begin{aligned}e^{-\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}g_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K,1]}(z)&=2^{-\left(K+\frac{1}{2}\right)(1+iy)}\left(1-2^{-(1+iy)}\right)^{-\frac{N}{2}}\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{\frac{N}{2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\Lambda(y)}{1+iy}-\frac{\pi^2 N}{12}\right)}\\&\times\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}}e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\mathcal{A}\boldsymbol{v}+\frac{1}{\sqrt{z}}\left(-\log(2)(1+iy)-\mathrm{Log}\left(1-2^{-(1+iy)}\right)\right)\sum_{j=1}^{N}v_j}\sum_{r=0}^{R_0-1}D_r(\boldsymbol{v},y)z^{\frac{r}{2}}\\&+z^{\frac{N}{2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\Lambda(y)}{1+iy}-\frac{\pi^2 N}{12}\right)}O\left(\varepsilon^{2R_0\delta_2}\right)\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}\cap\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}}e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\mathcal{A}\boldsymbol{v}+\frac{1}{\sqrt{z}}\left(-\log(2)(1+iy)-\mathrm{Log}\left(1-2^{-(1+iy)}\right)\right)\sum_{j=1}^{N}v_j}.\end{aligned}\tag{5.25}$$

我们断言，若对于某个 $\delta>0$ 有 $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}\ll y\ll\varepsilon^{-1-\frac{3\lambda}{2}+\delta}$，则对于所有 $L\in\mathbb{N}$，我们有

$$e^{-\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}g_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}^{[K,1]}(z)=O\left(\varepsilon^{L}\right).\tag{5.26}$$

为证明 (5.26)，只需证明指数

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\Lambda(y)}{1+iy}-\frac{\pi^2 N}{12}\right)-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\mathcal{A}\boldsymbol{v}+\frac{1}{\sqrt{z}}\left(-\log(2)(1+iy)-\mathrm{Log}\left(1-2^{-(1+iy)}\right)\right)\sum_{j=1}^{N}v_j$$

对于某个 $\delta_0>0$，其负实部的大小为 $\gg\varepsilon^{-\delta_0}$；(5.25) 中的其他因子均被 $z\to 0$ 有界。根据引理 5.6 (1)，$\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}(\frac{\Lambda(y)}{1+iy}-\frac{\pi^2 N}{12})=s(y)\varepsilon$ 的实部为负。因此，只需证明该指数的大小足够大，并且主导其他实部为正的指数。

首先考虑 $\varepsilon^{-\delta+\frac{1}{2}}\ll y\ll 1^{-}$ 的情形，其中 $\delta>0$ 足够小。由引理 5.6 (3)，可得

$$\frac{s(y)}{\varepsilon}\gg\frac{y^2}{\varepsilon}\gg\varepsilon^{-2\delta}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时。同时，通过计算泰勒级数展开可得，当 $y\to 0$ 时，

$$\mathrm{Re}\left(-\log(2)(1+iy)-\mathrm{Log}\left(1-2^{-(1+iy)}\right)\right)\ll y^2.$$

由于 $|\boldsymbol{\nu}|\ll\varepsilon^{\lambda}$（参见命题 3.3 的证明），我们得出

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\left(-\log(2)(1+iy)-\mathrm{Log}\left(1-2^{-(1+iy)}\right)\right)\sum_{j=1}^{N}v_j\right)\ll\varepsilon^{\lambda}y^2.$$

接下来考虑指数 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\mathcal{A}\boldsymbol{v}$。为此，我们分两种情形讨论。

(1) 假设 $\varepsilon^{-\delta+\frac{1}{2}}\ll y\ll\varepsilon^{\frac{1}{4}}$。由于 v_j 是 $\sqrt{z}$ 的实数倍，条件 $y\ll\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ 意味着，当 $z\to 0$ 时，$-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\mathcal{A}\boldsymbol{v}$ 的实部为负。(2) 假设 $\varepsilon^{\frac{1}{4}}\ll y\ll 1$。在这种情况下，我们有 $|\boldsymbol{v}|\ll\varepsilon^{\frac{1}{2}+\lambda}$，由此可得 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\mathcal{A}\boldsymbol{v}\ll\varepsilon^{1+2\lambda}$。无论哪种情况，指数 $s(y)\varepsilon$ 的量级为 $\gg\varepsilon^{-2\delta}$，且大于 (5.25) 中出现的其他具有正实部的指数。因此，取 $\delta_0=2\delta$，我们得出：若 $\varepsilon^{-\delta+\frac{1}{2}}\ll y\ll 1$，则 (5.26) 成立。

接下来，我们考虑 $1 \ll y \ll \varepsilon^{-1-\frac{3\lambda}{2}+\delta}$ 对于某个 $\delta > 0$ 的情况。我们使用平凡估计。

$$\mathrm{Re}\left(-\log(2)(1+iy) - \mathrm{Log}\left(1-2^{-(1+iy)}\right)\right) \ll 1.$$

于是由界 $|\boldsymbol{\nu}| \ll \varepsilon^{\lambda}$ 可得。

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\left(-\log(2)(1+iy) - \mathrm{Log}\left(1-2^{-(1+iy)}\right)\right)\sum_{j=1}^{N} v_j\right) \ll \varepsilon^{\lambda}.$$

同时，由引理 5.6 (2)，我们有 $s_{(\varepsilon^{y}} \gg {}^{1}_{\varepsilon)}$。最后，由于 $|\boldsymbol{\nu}| \ll \varepsilon^{\lambda}$ 和 $z \ll \varepsilon^{-\frac{3\lambda}{2}+\delta_2}$，其中 $\delta_2 = \min\{1+\frac{3\lambda}{2}, \delta\} > 0$（参见命题 3.3 的证明），我们推得 $|\boldsymbol{v}| \ll \varepsilon^{\frac{\lambda}{4}+\frac{\delta_2}{2}}$，因此

$$-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^T \mathcal{A}\boldsymbol{v} \ll \varepsilon^{\frac{\lambda}{2}+\delta_2}.$$

由上述计算可知，$s_{(\varepsilon^{y}} \gg {}^{1}_{\varepsilon)}$，且此指数大于其他指数。因此，(5.26) 也成立。

对于表达式 $2^{-K-\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{N}{2}} e^{\frac{\pi^2 N}{12z}-\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}} \sum_{r=0}^{R_0-1} E_{\boldsymbol{\ell},r} z^{\frac{r}{2}}$，我们只有一个指数，即 $\frac{\pi^2 N}{12z} - \frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}$。这个指数的实部为负，大小为

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\pi^2 N}{12z} - \frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}\right) = \frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}\left(\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+iy}\right) - 1\right) \gg \varepsilon^{\max\{1+2\lambda-2\delta,-1\}}$$

对于 $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \ll y \ll \varepsilon^{-1-\frac{3\lambda}{2}+\delta}$。因此，对于 $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \ll y \ll \varepsilon^{-1-\frac{3\lambda}{2}+\delta}$，我们有，对所有 $L \in \mathbb{N}$，

$$\frac{e^{\frac{\pi^2 N}{12z}-\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}}{2^{K+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{N}{2}}} \sum_{r=0}^{R_0-1} E_{\boldsymbol{\ell},r} z^{\frac{r}{2}} = O\left(\varepsilon^{L}\right).$$

另一方面，如果 $y \ll \varepsilon^{1+\lambda+\delta}$，则根据命题 5.1，对于所有 $L \in \mathbb{N}$，我们有，

$$g^{[K,1]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z) - \frac{e^{\frac{\pi^2 N}{12z}}}{2^{K+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{N}{2}}} \sum_{r=0}^{R_0-1} E_{\boldsymbol{\ell},r} z^{\frac{r}{2}} \ll \varepsilon^{L} e^{\frac{\pi^2 N}{12\varepsilon}}.$$

取 $\delta > 0$ 充分小，则这两种情形涵盖完整范围 $y \ll \varepsilon^{-1-\frac{3\lambda}{2}+\delta}$，从而证明了该命题。□

现在我们可以推导 $d^{[K]}_{\alpha,\beta;N}(n)$ 的渐近展开。

定理 5.8。对于 $R \in \mathbb{N}$，当 $n \to \infty$ 时，我们有，

$$d^{[K]}_{\alpha,\beta;N}(n) = \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}}{2^{K+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{N}{2}}}\left(\sum_{r=0}^{R-1} \sum_{\substack{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^N \\ NH(\boldsymbol{\ell})\equiv n \pmod N}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} c_{\frac{r}{2}-j,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{3}},j} E_{\boldsymbol{\ell},r-2j}\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{r+3}{4}} + O\left(n^{-\frac{R+3}{4}}\right)\right),$$

其中 $E_{\boldsymbol{\ell},r}$ 与命题 *5.1* 中的相同，并且

$$c_{A,B,r} := \frac{\left(-\frac{1}{4B}\right)^r B^{A+\frac{1}{2}}\Gamma\left(A+r+\frac{3}{2}\right)}{2\sqrt{\pi} r!\Gamma\left(A-r+\frac{3}{2}\right)}.$$

证明。根据柯西定理，对于 $n \in \mathbb{N}_0$，

$$d^{[K]}_{\alpha,\beta;N}(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{D}^{[K]}_{\alpha,\beta;N}(q)}{q^{n+1}} dq,$$

其中 $\mathcal{C}$ 是以原点为圆心、位于单位圆内且沿逆时针方向恰好环绕原点一周的圆。利用 (5.1) 并作变量替换 $q=e^{-z}$，对于任意 $\varepsilon>0$，且 $\zeta_N:=e^{\frac{2\pi i}{N}}$，可得

$$d^{[K]}_{\alpha,\beta;N}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^N}\zeta_N^{(n-NH(\boldsymbol{\ell}))k}\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon-\pi i}^{\varepsilon+\pi i}g^{[K]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z)e^{\frac{nz}{N}}dz. \tag{5.27}$$

设 $\theta>0$ 固定。我们将积分分为主弧 $\mathcal{C}_1(\varepsilon):=\{z=\varepsilon(1+iy):\ |y|\le\theta\}$和小弧 $\mathcal{C}_2(\varepsilon):=\{z=\varepsilon(1+iy):\theta<|y|\le\frac{\pi}{\varepsilon}\}$。注意，命题 5.7 适用于整个主弧（因为 $\varepsilon^{-1-\frac{3\lambda}{2}+\delta}\gg 1$）。因此，在主弧上，对每个 $L\in\mathbb{N}$，我们都有

$$g^{[K]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z)-\frac{e^{\frac{\pi^2N}{12z}}}{2^{K+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{N}{2}}}\sum_{r=0}^{R_0-1}E_{\boldsymbol{\ell},r}z^{\frac{r}{2}}\ll\varepsilon^Le^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}, \tag{5.28}$$

其中 $R_0=R_0(L)$ 如命题 5.1 所示。在次弧上，我们利用命题 4.2 和 5.7 得到对所有 $L\in\mathbb{N}$,

$$g^{[K]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z)\ll\varepsilon^Le^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}. \tag{5.29}$$

令 $A\ge 0, B>0$。由 [15, 引理 3.7], 可得，当 $n\to\infty$ 时,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_1\left(\frac{B}{\sqrt{n}}\right)}z^Ae^{\frac{B^2}{z}+nz}dz=n^{\frac{1}{4}(-2A-3)}e^{2B\sqrt{n}}\left(\sum_{r=0}^{R-1}\frac{c_{A,B,r}}{n^{\frac{r}{2}}}+O\left(n^{-\frac{R}{2}}\right)\right).$$

因此我们得到渐近展开

$$\begin{aligned}&\frac{2^{-K-\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{N}{2}}}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_1\left(\frac{\pi N}{2\sqrt{3n}}\right)}e^{\frac{\pi^2N}{12z}}\sum_{r=0}^{R-1}E_{\boldsymbol{\ell},r}z^{\frac{r}{2}}e^{\frac{nz}{N}}dz\\&\qquad=\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}}{2^{K+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{N}{2}}}\left(\sum_{r=0}^{R-1}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}c_{\frac{r}{2}-j,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{3}},j}E_{\boldsymbol{\ell},r-2j}\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{r+3}{4}}+O\left(n^{-\frac{R+3}{4}}\right)\right).\end{aligned} \tag{5.30}$$

与此同时，如果函数 h 满足 $h(z)\ll\varepsilon^Le^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}$，当 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 时，对 $L\ge 0$，那么我们有，当 $n\to\infty$ 时,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{\pi N}{2\sqrt{3n}}-\pi i}^{\frac{\pi N}{2\sqrt{3n}}+\pi i}h(z)e^{\frac{nz}{N}}dz=O\left(n^{-\frac{L}{2}}e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}\right), \tag{5.31}$$

并使用 (5.31) 计算次要弧积分和误差积分。

令 $R\in\mathbb{N}$。我们设 $L=\frac{R+3}{2}$，并按命题 5.1 选取 $R_0=R_0(L)$，然后写作

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}\left(\frac{\pi N}{2\sqrt{3n}}\right)}g^{[K]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z)e^{\frac{nz}{N}}dz\\&\qquad=\frac{2^{-K-\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{N}{2}}}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}\left(\frac{\pi N}{2\sqrt{3n}}\right)}e^{\frac{\pi^2N}{12z}}\sum_{r=0}^{R_0-1}E_{\boldsymbol{\ell},r}z^{\frac{r}{2}}e^{\frac{nz}{N}}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}\left(\frac{\pi N}{2\sqrt{3n}}\right)}h(z)e^{\frac{nz}{N}}dz,\end{aligned}$$

其中，我们根据（5.28）和 ~~(5.29)~~ 得到 ~~$h(z)$~~ $\ll\varepsilon^Le^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}=\varepsilon^{\frac{R+3}{2}}e^{\frac{\pi^2N}{12\varepsilon}}$。利用（5.30）和（5.31），上面的积分可计算为

$$\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}}{2^{K+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{N}{2}}}\left(\sum_{r=0}^{R_0-1}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}c_{\frac{r}{2}-j,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{3}},j}E_{\boldsymbol{\ell},r-2j}\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{r+3}{4}}+O\left(n^{-\frac{R_0+3}{4}}\right)\right)+O\left(n^{-\frac{R+3}{4}}e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}\right).$$

由于含有 $r \geq R$ 的项大小也为 $O(n^{-\frac{R+3}{4}} e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}})$，我们可以截断渐近展开，得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}\left(\frac{\pi N}{2\sqrt{3n}}\right)} g^{[K]}_{\alpha,\beta;N,\boldsymbol{\ell}}(z) e^{\frac{nz}{N}}\, dz = \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}}{2^{K+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{N}{2}}}\left(\sum_{r=0}^{R-1}\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2}\rfloor} c_{\frac{r}{2}-j,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{3}},j} E_{\boldsymbol{\ell},r-2j}\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{r+3}{4}} + O\left(n^{-\frac{R+3}{4}}\right)\right).$$

将其代回 (5.27) 得到

$$d^{[K]}_{\alpha,\beta;N}(n) = \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}}{2^{K+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{N}{2}}N}\left(\sum_{r=0}^{R-1}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^N} \zeta_N^{(n-NH(\boldsymbol{\ell}))k}\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2}\rfloor} c_{\frac{r}{2}-j,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{3}},j} E_{\boldsymbol{\ell},r-2j}\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{r+3}{4}} + O\left(n^{-\frac{R+3}{4}}\right)\right).$$

利用单位根的正交性，即可得到该定理。 □

6. Proof of Theorems 1.1 and 1.2

现在我们可以证明定理 1.1 了。

定理 *1.1* 的证明。 为了证明定理 1.1，只需确定定理 5.8 中的前两项。我们计算

$$c_{0,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{3}},0} = \frac{N^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{2}\cdot 3^{\frac{1}{4}}}, \qquad c_{\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{3}},0} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi N}{3}}.$$

我们沿用命题 5.1 的证明来确定$E_{\boldsymbol{\ell},0}$ 和 $E_{\boldsymbol{\ell},1}$。首先，我们计算形式幂级数展开 (3.10) 中的系数 $C_0(\boldsymbol{u})$ 和 $C_1(\boldsymbol{u})$。我们展开

$$\exp(\phi(\boldsymbol{u},z)) = \exp\left(-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u}z^{\frac{1}{2}} - \frac{Nz}{24} - \sum_{j=1}^{N}\sum_{r\geq 2}\left(B_r\left(-\frac{u_j}{\sqrt{z}}\right) - \frac{\delta_{r,2}u_j^2}{z}\right)\mathrm{Li}_{2-r}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^{r-1}}{r!}\right).$$

注意到我们有

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^{N}\sum_{r\geq 2}\left(B_r\left(-\frac{u_j}{\sqrt{z}}\right) - \frac{\delta_{r,2}u_j^2}{z}\right)\mathrm{Li}_{2-r}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^{r-1}}{r!}\right) = 1 + \sum_{j=1}^{N}\left(-\frac{u_j}{2} + \frac{u_j^3}{3}\right)\sqrt{z} + O(z),$$

$$\exp\left(-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u}\sqrt{z}\right) = 1 - \sum_{j=1}^{N} b_j u_j\sqrt{z} + O(z) = 1 + \sum_{j=1}^{N}\left(-\frac{j}{N} + \frac{1}{2} - e_j\right)u_j\sqrt{z} + O(z),$$

我们得到

$$C_0(\boldsymbol{u}) = 1, \qquad C_1(\boldsymbol{u}) = \sum_{j=1}^{N}\left(-\left(\frac{j}{N} + e_j\right)u_j + \frac{u_j^3}{3}\right).$$

接下来我们计算常数 $V_{0,-N}$, $V_{0,1-N}$，以及 $V_{1,-N}$。为此，我们使用以下求值结果

$$e^{-\frac{\pi^2 N}{12z}}\int_{\mathcal{R}_{\alpha,\beta;N}} G_0(\boldsymbol{u})\boldsymbol{du} = \int_{\mathcal{R}_{\alpha,\beta;N}} e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{du} = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{2},$$

$$e^{-\frac{\pi^2 N}{12z}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} G_0\left(\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]}, u_\beta\right)\boldsymbol{du}_{[\mathbf{1}]} = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-u_\beta^2 - \boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]}^T\boldsymbol{u}_{[\mathbf{1}]}}\boldsymbol{du}_{[\mathbf{1}]} = \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{\sqrt{2}},$$

其中 $\mathcal{R}_{\alpha,\beta;N} := \{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^N\colon\ u_\alpha \geq u_\beta\}$。与此同时，我们计算

$$e^{-\frac{\pi^2 N}{12z}}\int_{\mathcal{R}_{\alpha,\beta;N}} G_1(\boldsymbol{u})\boldsymbol{du} = \int_{\mathcal{R}_{\alpha,\beta;N}} C_1(\boldsymbol{u})e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{du}$$

$$= -\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{j}{N}+e_j\right)\int_{\mathcal{R}_{\alpha,\beta;N}} u_j e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{du} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{N}\int_{\mathcal{R}_{\alpha,\beta;N}} u_j^3 e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{du}. \quad (6.1)$$

我们考虑右侧的第一个积分。如果 $j \notin \{\alpha,\beta\}$，那么我们有

$$\int_{\mathcal{R}_{\alpha,\beta;N}} u_j e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{du} = \int_{u_\alpha>u_\beta} e^{-u_\alpha^2-u_\beta^2}du_\alpha du_\beta \int_{\mathbb{R}^{N-2}} u_j e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{du} = 0$$

因为右侧的大部分积分关于 u_j 反对称。另一方面，我们有

$$\int_{\mathcal{R}_{\alpha,\beta;N}} u_\alpha e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{du} = \int_{u_\alpha>u_\beta} u_\alpha e^{-u_\alpha^2-u_\beta^2}du_\alpha du_\beta \int_{\mathbb{R}^{N-2}} e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{du} = \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_{\mathcal{R}_{\alpha,\beta;N}} u_\beta e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{du} = \int_{u_\alpha>u_\beta} u_\beta e^{-u_\alpha^2-u_\beta^2}du_\alpha du_\beta \int_{\mathbb{R}^{N-2}} e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{du} = -\frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{2\sqrt{2}}.$$

(6.1) 右侧的第二个积分在交换 u_α 和 u_β 后保持不变。因此

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\mathcal{R}_{\alpha,\beta;N}} u_j^3 e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{du} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} u_j^3 e^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{du} = 0,$$

由于该积分是反对称的。代入 (6.1)，可得

$$e^{-\frac{\pi^2 N}{12z}}\int_{\mathcal{R}_{\alpha,\beta;N}} G_1(\boldsymbol{u})\boldsymbol{du} = \left(\frac{\beta-\alpha}{N}+(e_\beta-e_\alpha)\right)\frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{2\sqrt{2}}.$$

由 (5.22) 和 (5.23)（以及关于 W_0 的 (5.17)）可得

$$V_{0,-N} = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{2N^N}, \quad V_{0,1-N} = \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{\sqrt{2}N^{N-1}}\left(\frac{1}{2}-\frac{[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N}{N}\right), \quad V_{1,-N} = \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}(\beta-\alpha+N(e_\beta-e_\alpha))}{2\sqrt{2}N^{N+1}}.$$

最后，利用 (5.24)，我们计算得

$$E_{\boldsymbol{\ell},0} = V_{0,-N} = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{2N^N},$$

$$E_{\boldsymbol{\ell},1} = V_{0,1-N}+V_{1,-N} = \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{2\sqrt{2}N^{N-1}}\left(1-\frac{2[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N}{N}+\frac{\beta-\alpha+N(e_\beta-e_\alpha)}{N^2}\right).$$

定理 1.1 随即由定理 5.8 得出。 □

为了证明定理 1.2，我们需要以下引理，它可通过直接计算得出。

引理 6.1. 设 $N \geq 5$, $1 \leq \alpha,\beta \leq N$，以及 $r, \ell_\alpha, \ell_\beta \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$。则

$$\#\left\{\boldsymbol{\ell}_{[2]} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{N-2} : NH\left(\boldsymbol{\ell}_{[2]},\ell_\alpha,\ell_\beta\right) \equiv r \pmod N\right\} = N^{N-3},$$

其中 $\boldsymbol{\ell}_{[2]} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{N-2}$ 遍历指标 $j \notin \{\alpha,\beta\}$。

现在我们可以证明定理 1.2 了。

定理 *1.2* 的证明。*</style>*情形 可由定理 *1.1* 直接验证。现在假设 。由引理 *6.1* 可知，对每个 , ℓ_α, $\ell_\beta \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，都存在 N^{N-3}元组 $\boldsymbol{\ell} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^N$，使得 $NH(\boldsymbol{\ell}) \equiv r$(模 N)。因此，我们可以如下计算定理 1.1 中的内层求和:

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^N \\ NH(\boldsymbol{\ell})\equiv r \pmod N}} \left(1+\frac{N^2-2N[\ell_\alpha-\ell_\beta]_N+\beta-\alpha+N\left(e_\beta-e_\alpha\right)}{2\cdot 3^{\frac{1}{4}}\sqrt{N}}n^{-\frac{1}{4}}\right)$$

$$= N^{N-1}\left(1+\frac{-N+\beta-\alpha+N\left(e_\beta-e_\alpha\right)}{2\cdot 3^{\frac{1}{4}}\sqrt{N}}n^{-\frac{1}{4}}\right). \qquad \square$$

7. Numerical examples

我们提供数值数据以支持我们的结论。所有计算均使用 PARI/GP 完成，图表则使用 Sage [16, 17] 绘制。

7.1. 关于 $N=2$ 的数值数据。 我们提供了一些关于奇偶偏差问题的数值数据。

例。 令 $N=2$、$\{\alpha,\beta\}=\{1,2\}$ 和 $K\in\{0,1\}$ 分别对应于 [2, 12] 中的论断。$d_{1\,2}^{[K]}{}_{,\ ;2}(n)$、$d_{2\,1}^{[K]}{}_{,\ ;2}(n)$ 的数值及其差值，对于 $0\le n\le 50$，在 $K=0$ 的表1和 $K=1$ 的表2中给出。对于 $0\le n\le 100$，差值 $d_{1\,2}^{[K]}{}_{,\ ;2}(n)-d_{2\,1}^{[K]}{}_{,\ ;2}(n)$ 绘于图1。对于 $K=0$，我们观察到，与 [2, 12], 一致，$d_{1\,2}^{[0]}{}_{,\ ;2}(n)>d_{2\,1}^{[0]}{}_{,\ ;2}(n)$，对于 $n\ge 20$ 成立。对于 $K=1$，我们注意到，关于 $13\le n\le 29$ 的数值与 [2], 问题 6.1 中的论断一致，即，

$$d_{1,2;2}^{[1]}(n)-d_{2,1;2}^{[1]}(n)\begin{cases}>0 & \text{if } n \text{ is even},\\ <0 & \text{if } n \text{ is odd},\end{cases}$$

而数值结果表明，对于所有 $n\ge 29$，都有 $d_{1\,2}^{[1]}{}_{,\ ;2}(n)-d_{2\,1}^{[1]}{}_{,\ ;2}(n)<0$。使用 PARI/GP 在 Apple M1 Pro芯片上对这一结论进行了数值检验，范围达到 $n\le 10000$，耗时 5 分钟。

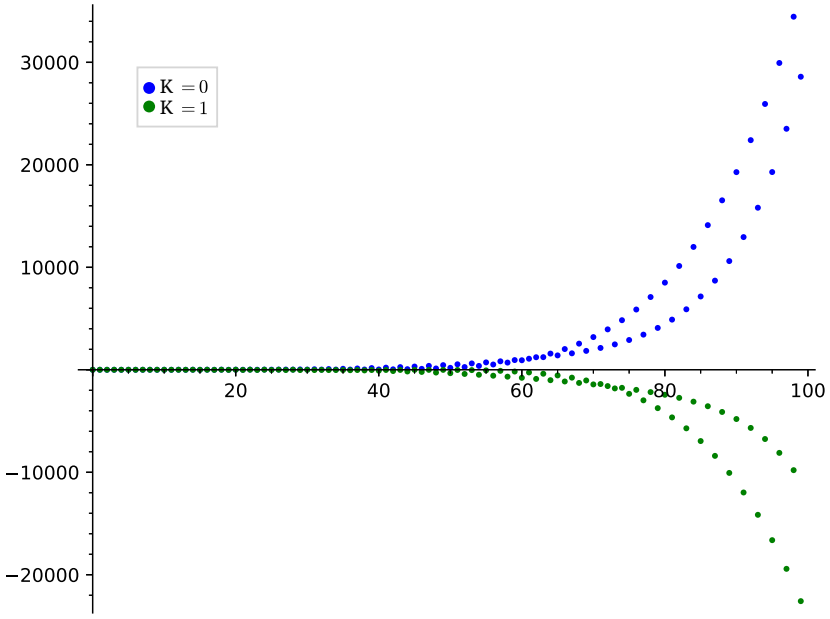

Figure 1. $d_{1\,2}^{[K]}{}_{,\ ;2}(n)-d_{2\,1}^{[K]}{}_{,\ ;2}(n)$，其中 $0\le n\le 100,\quad K\in\{0,1\}$

此外，$(d_{1\,2}^{[K]}{}_{,\ ;2}(n)-d_{2\,1}^{[K]}{}_{,\ ;2}(n))ne^{-\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}$ 在图2中针对 $10\le n\le 5000$绘出。该图支持推论 1.3, 并表明这些数收敛到 $(-1)^K 2^{\frac{7}{2}-K}3^{-\frac{1}{2}}$，且与 n （模 2）无关。

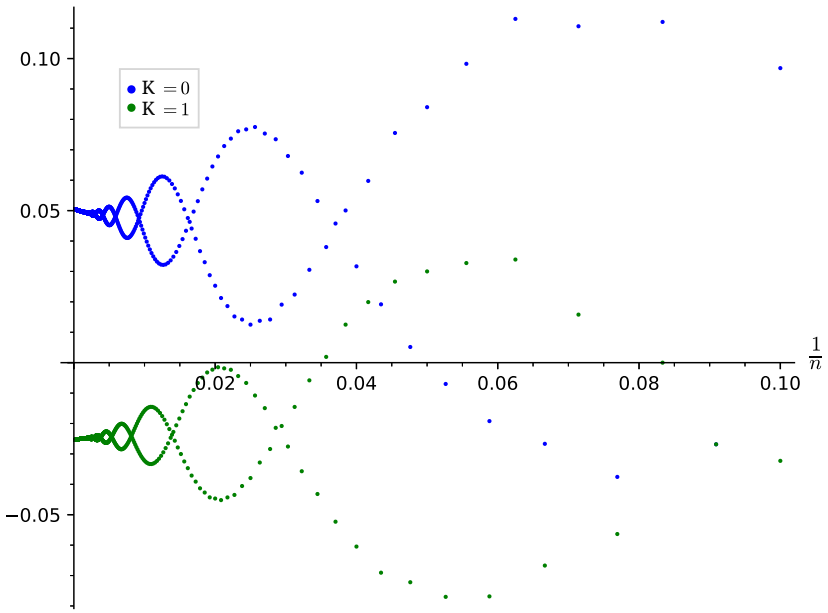

FIGURE 2. $(\frac{1}{n},\ (d^{[K]}_{1\,2,\ ;\ 2}(n) - d^{[K]}_{2\,1,\ ;\ 2}(n))ne^{-\pi\sqrt{\frac{n}{3}}})$ 对于 $10 \le n \le 5000$, $K \in \{0,1\}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$d^{[0]}_{1,\ 2;2}(n)$	1	0	1	1	1	2	1	4	2	6	3	9	5	12	9	17	14	22
$d^{[0]}_{2,\ 1;2}(n)$	0	1	0	1	0	2	1	2	2	3	4	4	7	5	11	7	16	10
$d^{[0]}_{1,\ 2;2}(n) - d^{[0]}_{2,\ 1;2}(n)$	1	−1	1	0	1	0	0	2	0	3	−1	5	−2	7	−2	10	−2	12

19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
22	29	33	38	48	50	68	65	95	86	128	113	172	149	226	197	295
23	15	32	21	43	32	57	45	74	66	96	92	123	129	157	175	199
−1	14	1	17	5	18	11	20	21	20	32	21	49	20	69	22	96

36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
260	379	342	485	449	613	587	773	762	967	987	1206	1269	1497	1623
239	253	316	320	419	406	544	514	704	652	898	825	1142	1045	1435
21	126	26	165	30	207	43	259	58	315	89	381	127	452	188

TABLE 1. $K = 0$ 的数值结果。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$d^{[1]}_{1,\,2;\,2}(n)$	0	0	1	0	1	0	1	1	1	2	1	4	1	6	2	9	3
$d^{[1]}_{2,\,1;\,2}(n)$	0	1	0	1	0	2	0	2	1	3	2	4	4	5	7	6	11
$d^{[1]}_{1,\,2;\,2}(n) - d^{[1]}_{2,\,1;2}(n)$	0	−1	1	−1	1	−2	1	−1	0	−1	−1	0	−3	1	−5	3	−8

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
12	5	16	9	20	14	26	22	32	33	40	48	50	67	63	93	79	125
8	16	11	23	14	32	20	43	27	57	39	74	54	95	76	121	103	153
4	−11	5	−14	6	−18	6	−21	5	−24	1	−26	−4	−28	−13	−28	−24	−28

36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
101	166	129	216	166	279	215	354	278	448	360	559	467	695	603
143	191	191	239	257	297	338	369	444	458	572	569	737	705	935
−42	−25	−62	−23	−91	−18	−123	−15	−166	−10	−212	−10	−270	−10	−332

TABLE 2. $K = 1$的数值结果。

7.2. **数值值数据 $N = 3$。** 我们给出数值数据，以说明推论 1.4。

例。 我们考虑 $N = 3$ 和 $K = 0$。 $d^{[0]}_{1\,2,;3}(n)$ 和 $d^{[0]}_{1\,2,;3}(n)$ 的前 17 个值及其差值列于表3。图3描绘了 $0 \le n \le 100$ 时的差值 $d^{[0]}_{1\,2,;3}(n) - d^{[0]}_{2\,1,;3}(n)$。此外，图4绘出了 $10 \le n \le 1000$ 时的数值 $(d^{[0]}_{1\,2,;3}(n) - d^{[0]}_{2\,1,;3}(n))ne^{-\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}$。正如上文所指出的，我们观察到，差值的渐近分析确实取决于 n （模 3）。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$d^{[0]}_{1,\,2;\,3}(n)$	1	0	0	2	1	0	4	2	0	8	4	1	14	8	2	24	14
$d^{[0]}_{2,1;3}(n)$	0	1	0	0	2	0	1	4	0	2	8	0	4	14	1	8	24
$d^{[0]}_{1,\,2;\,3}(n) - d^{[0]}_{2,1;3}(n)$	1	−1	0	2	−1	0	3	−2	0	6	−4	1	10	−6	1	16	−10

TABLE 3. $N = 3$、 $K = 0$ 的数值结果。

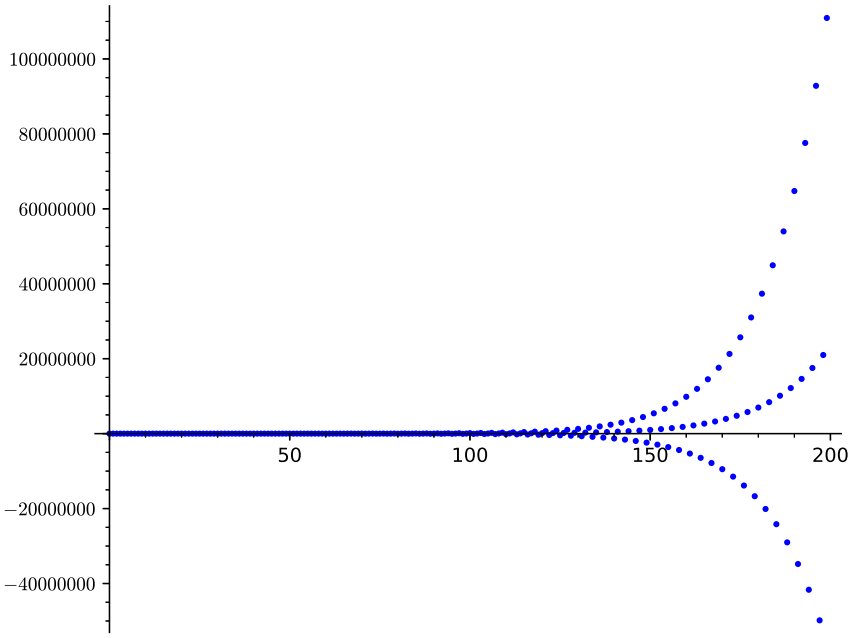

FIGURE 3. $d^{[0]}_{1\,2,\ ;\ 3}(n) - d^{[0]}_{2\,1,\ ;\ 3}(n)$, 针对 $0 \le n \le 100$

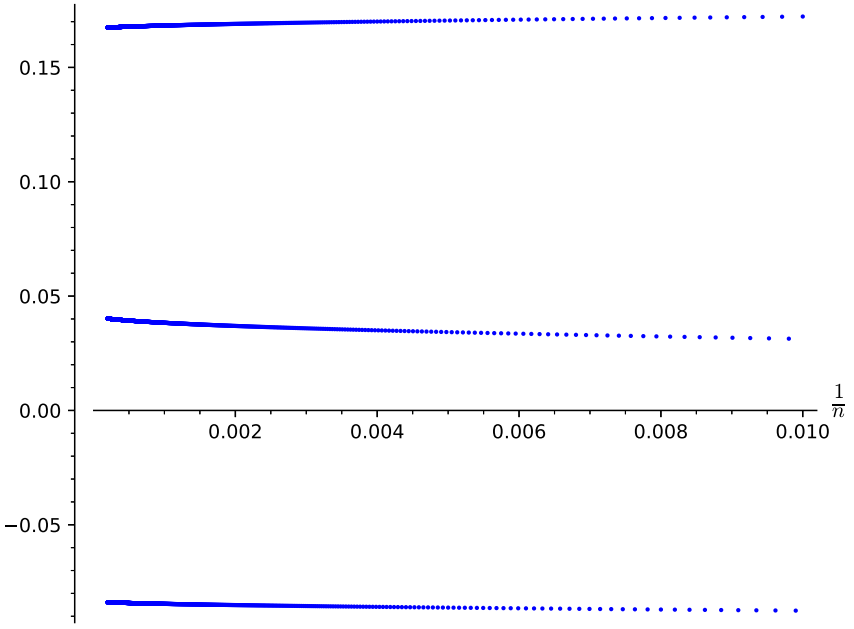

FIGURE 4. $(\frac{1}{n},\ (d^{[0]}_{1\,2,\ ;\ 3}(n) - d^{[0]}_{2\,1,\ ;\ 3}(n))ne^{-\pi\sqrt{\frac{n}{3}}})$, 针对 $10 \le n \le 1000$

REFERENCES

[1] G. Andrews, *Questions and conjectures in partition theory*, 《美国数学月刊》**93** (1986), 708–711. [2] K. Banerjee、S. Bhattacharjee、M.Dastidar、P. Mahanta 和 M. Saikia, *Parity biases in partitions and restricted partitions* **103** 2022 , 《欧洲组合学杂志》( )。

[3] O. Beckwith 和 M. Mertens, *The number of parts in certain residue classes of integer partitions*, 《数论研究》1:11（2015）。[4] F. Calegari、S. Garoufalidis 和 D. Zagier, *Bloch groups, algebraic K-theory, units and Nahm's Conjecture*, 即将在《高等师范学校科学年刊》发表。[5] S. Chern, *Further results on biases in integer partitions*, 《韩国数学会会报》59:1（2022），111–117。[6] N. Dartyge 和 A. Sarkozy, *Arithmetic Properties of summands of partitions II*, 《拉马努金杂志》10（2005），383– 394。[7] N. Dartyge、A. Sarkozy 和 M. Szalay, *On the distribution of the summands of partitions in residue classes*, 《匈牙利数学学报》109（2005），215–237。[8] N. Dartyge、A. Sarkozy 和 M. Szalay, *On the distribution of the summands of unequal partitions in residue classes* **110** 2006 323 335 ,

《匈牙利数学学报》（），–。[9] S. Garoufalidis 和 D. Zagier, *Asymptotics of Nahm sums at roots of unity*, 《拉马努金杂志》55（2021），219–238。[10] S. Garoufalidis 和 D. Zagier, *Knots and their related q-series*, arXiv:2304.09377，2023。[11] B. Kim 和 E. Kim, *Biases in integer partitions*。《澳大利亚数学会会报》104:2（2021），177–186。[12] B. Kim、E. Kim 和 J. Lovejoy, *Parity bias in partitions*。《欧洲组合学杂志》89（2020），103159。[13] M. Kontsevich 和 Y. Soibelman, *Cohomological Hall algebra exponential Hodge structures and motivic Donaldson-Thomas invariants* , , **5** 2 2011 231 352 《数论与物理通讯》第（），–。[14] W. Nahm, *Conformal field theory and torsion elements of the Bloch group* 载于：《数论、物理与几何前沿 II》，第67–132页。施普林格，柏林，2007。[15] H. Ngo 和 R. Rhoades, *Integer partitions, probabilities and quantum modular forms*。《数学科学研究》4:17（2017）。[16] PARI团队, *PARI/GP version 2.15.0*，波尔多大学，2022，http://pari.math.u-bordeaux.fr。[17] Sage开发者 *SageMath, the Sage mathematics software system (Version 9.6)*，2022，https://www.sagemath.org。[18] M. Vlasenko 和 S. Zwegers, *Nahm's conjecture: asymptotic computations and counterexamples*, 《数论与物理通讯》5（2021），617–642。[19] D. Zagier, *The Mellin transform and related analytic techniques*, E. Zeidler, 《量子场论 I：数学与物理基础：数学家与物理学家之间的桥梁》附录，第305–323页。施普林格，柏林（2006）。[20] D. Zagier, *The dilogarithm function*，载于：P. Cartier、P. Moussa、B. Julia、P. Vanhove（编），《数论、物理与几何前沿 II》。施普林格，柏林、海德堡（2007）。

University of Cologne, Department of Mathematics and Computer Science, Weyertal 86-90, 50931Cologne, Germany *Email address*: kbringma@math.uni-koeln.de*Email address*: sman1@math.uni-koeln.deCharles University, Faculty of Mathematics and Physics, Department of Algebra, Sokolovská49/83, 186 75 Praha 8, Czechia*Email address*: shman@karlin.mff.cuni.czDepartment of Mathematics, 1420 Stevenson Center, Vanderbilt University, Nashville, TN 37240*Email address*: larry.rolen@vanderbilt.edu
Max Planck Institute for Mathematics, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany*Email address*: storzer@mpim-bonn.mpg.de