arXiv:2305.02940v1 [math.CO] 4 May 2023

辛空间的框架复形

KEVIN I. PITERMAN

Abstract. 对于域 $\mathbb{F}_q$ 上维数为 $2n$ 的辛空间 V，我们计算其正交图的特征值。该简单图的顶点是 V 的二维非退化子空间，边连接彼此正交的顶点。作为 Garland 方法的推论，我们得到了 V 的标架复形的同调群的消失结果，其中该复形是此图的团复形。我们得出结论，若 $n < q + 3$，则大小为 $\neq 0$、$n - 1$ 的标架偏序集与标架复形同伦等价，并且在特征为0的域上是 Cohen-Macaulay 的。然而，我们还证明，当维数足够大时，该偏序集不是 Cohen-Macaulay 的。

1. Introduction

在 [6] 中，我们研究了由配备非退化 ϵ-厄米形式的有限维向量空间产生的偏序集与复形，尤其关注厄米形式。具体而言，设有限维向量空间 V 配备域 $\mathbb{K}$上的非退化厄米形式，令 $\mathcal{F}(V)$ 表示 V的标架复形。它是一个单纯复形，其单形是 V中两两正交的一维非退化子空间组成的集合。我们在 [6] 中描述了 $\mathcal{F}(V)$ 的连通性，并研究了它的基本群。对于有限域 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{q^2}$，我们还计算了正交图的特征值，即标架复形的 1-骨架。这使我们得以在标架复形上应用 Garland 方法，并证明了以特征为 0 的域为系数的同调群消失结果。此外， [6] 还表明，其中一些消失结果可以推广到真非退化子空间偏序集、正交分解偏序集，以及底层酉群的某个 p-子群偏序集，其中 p 是整除 $q + 1$的素数。特别地，如果 $\dim(V) < q + 1$，那么所有这些偏序集在特征为 0 的域上都是 Cohen-Macaulay 的。

在本文中，我们研究辛情形。回顾一下，辛空间是一个（偶数维）向量空间，配备了一个非退化交错双线性形式，使得每个向量都是全纯的。

K. Das [4] 证明了：在有限域 $\mathbb{F}_q$上的维数为 $2n$ 的辛空间的真非退化子空间偏序集 $q \neq 2$是（同伦）Cohen-Macaulay的，维数为 $n - 2$。特别地，这意味着由非退化子空间构成的非平凡正交分解的偏序集也是Cohen-Macaualay的，维数为 $n - 2$（参见 [6, 推论 2.7]）。然而，对于相应标架复形的同伦类型，人们所知甚少。

设 V 是域 $\mathbb{K}$ 上维数为 $2n$ 的辛空间。V 的正交图是图 $\mathcal{G}(V)$，其顶点是 V 的二维非退化子空间，边由正交关系定义。V 的标架复形记为 $\mathcal{F}(V)$，它是 $\mathcal{G}(V)$ 的团复形。注意， $\mathcal{F}(V)$ 的维数为 $n - 1$。由于每个

2020 *Mathematics Subject Classification.* 05E45, 20J05, 51E24.*Key words and phrases.* 辛形式、标架复形、Cohen-Macaulay复形、图谱。

维数为 $n-2$ 的单形都包含于唯一的极大单形中， $\mathcal{F}(V)$ 可塌缩到一个维数为 $n-2$ 的子复形。为避免塌缩时作出非典范选择，我们有时使用偏序集 $\mathcal{F}(V)$，其元素为大小为 $\neq 0$ 的标架， $n-1$；该偏序集的维数为 $n-2$，并与 $\mathcal{F}(V)$ 同伦等价（见引理 2.10] [6, ）。因此，我们可以在偏序集 $\mathcal{F}(V)$ 上分析Cohen-Macaulay 性质。

在这篇文章中，我们着重研究 $\mathcal{G}(V)$ 和 $\mathcal{F}(V)$ 的一些性质。我们在以下定理中总结了主要结果。

T定理 1.1. 设 V 是域 $\mathbb{K}$ 上维数为 $2n$ 的辛空间。

(1) $\mathcal{F}(V)$ 连通当且仅当 $n \geq 3$。(2) 如果 $n \geq 5$，那么 $\mathcal{F}(V)$ 是单连通的。(3) 如果 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ 是有限的且 $n < q+3$，那么 $\mathcal{F}(V)$ 是特征为0的域上的Cohen-Macaulay。(4) 如果 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ 是有限的且 $n > q^2(q^2+1) + n(n-2)q^{-4}(q^4+q^2+1)^{-1}$，那么 $\widehat{\mathcal{F}}(V)$ 在任何域上都不是 Cohen-Macaulay。

事实上，前述定理的第 (3) 项可通过应用 Garland 方法得到。为此，我们首先计算了 $\mathcal{G}(V)$ 的特征值。设 $d_n = \frac{q^{2n-4}}{(q^{2n-2}-1)(q^2-1)}$，它是 $\mathcal{G}(V)$ 中一个顶点的度。

定理 1.2. 设 V 是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上、维数为 $2n$ 的辛空间，且具有 $n \geq 2$。$\mathcal{G}(V)$ 的特征值如下：

$$\begin{cases} d_n,\ q^{2n-5},\ \pm q^{2n-4},\ \pm q^{3n-6} & n \geq 3, \\ d_n,\ -q^{2n-4} & n = 2. \end{cases}$$

我们简要介绍本文的结构。第 2 节介绍关于辛空间和标架复形的一些预备知识。第 3 节和第 4 节的内容更具技术性，包含计算 $\mathcal{G}(V)$ 的特征值所需的背景知识。具体而言，在第 3 节中，我们证明，对于 $\mathcal{G}(V)$ 的两个顶点 S、W，存在六种可能的构型，用以刻画 S、W 与和 $S+W$ 之间的关系（见定义 3.2），并在表 1 中给出这些可能情形的其他代数描述。在第 4 节中，对于 $\mathcal{G}(V)$ 的一对固定顶点 S、W，我们刻画与 S 相邻的顶点 T，使得 T、W 的行为符合第 3 节中引入的六种情形之一。对于有限的 $\mathbb{K}$，这使我们能够明确计算 S 与 W 之间给定长度的路径数，并发现这些长度仅取决于 S 和 W 满足上述六种情形中的哪一种。基于此，在第 5 节中，我们将计算 $\mathcal{G}(V)$ 的邻接矩阵的特征值，归结为计算某个 6 维矩阵的最小多项式，并据此得出定理 1.2（见定理 5.2）。

我们分别在第 6 节和第 7 节证明定理 1.1 的第 (1) 项和第 (2) 项。在第 8 节中，我们将 Garland 方法应用于 $\mathcal{F}(V)$，并得出定理 1.1(3) 的结论。最后，我们在第 9 节讨论一些未来方向和备注，并在那里证明定理 1.1 的第 (4) 项。

致谢。我要感谢 Volkmar Welker 一直以来给予我的支持，并感谢我们过去一年中进行的无数次讨论，这些讨论促成了本文所呈现的想法。本文是在亚历山大·冯·洪堡基金会授予的奖学金支持下完成的，部分结果则是在 2022年 于 Mittag-Leffler 研究所进行研究访问期间获得的。

2. Symplectic spaces

本节中，我们回顾辛空间的一些基本性质。所有向量空间都是有限维的。有关定义和记号的更多细节，请参阅 [6] 的第 2 节。

从现在起，我们将辛空间定义为域 $\mathbb{K}$ 上配备非退化辛形式 Ψ 的向量空间 V。回顾一下， V 上的辛结构在等距意义下是唯一的（参见 [1, (19.16)]）。也就是说，存在 V 的一个基 $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$，使得辛形式 Ψ 在此基下的矩阵为

$$\mathbf{S}_n := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

等价地，对于所有 $1 \le i, j \le n$，我们有

$$\Psi(e_i, e_j) = 0 = \Psi(e_{n+i}, e_{n+j}) \quad \text{and} \quad \Psi(e_i, e_{n+j}) = \delta_{i,j} = -\Psi(e_{n+j}, e_i).$$

这类基称为辛基。通常我们将辛空间记作 V，而其形式 Ψ 则默认省略。

更一般地，如果 Ψ 是一个双线性交错形式，满足对于所有 $v \in V$， $\Psi(v, v) = 0$，且 $\dim(\mathrm{Rad}(V)) = r$，则称 (V, Ψ) 是一个 r- 退化辛空间。

以下引理总结了关于辛空间的一些众所周知的事实。例如，参见 [1,第 19]节。

引理 2.1. 设 V是一个 r-退化辛空间，并设 S、 $T \le V$。下列断言成立：

(1) $V =$根基$(V) \oplus V'$，其中 V'是一个辛空间。(2) S是一个 s-退化辛空间，其中 $s =$为维数(根基(S))。(3) 维数(S) + 维数$(S^\perp)$ = 维数(V) + 维数$(S \cap$ 根基$(V))$。(4) $(S^\perp)^\perp = S +$ 根基(V)。(5) 若 S是全各向同性的，则维数(S) $\le$ (维数(V) + 维数$(S \cap$ 根基$(V)))/2$。(6) S非退化，当且仅当 $S \oplus S^\perp = V$。(7)（维特引理）若 $\alpha\colon S \to T$ 是一个等距变换，且 $\alpha(S \cap$根基$(V)) = T \cap$根基(V)，则 α 可扩张为 V的一个等距变换。

记 $\mathrm{Sp}(V)$ 为辛空间 V在 $\mathbb{K}$ 上的维数为 $2n$ 时的等距变换群。由于辛结构是唯一的，该群仅取决于 n和 $\mathbb{K}$，因此也可以记作 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{K})$；若 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$，则也可以记作 $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$。回忆一下， $|\mathrm{Sp}_{2n}(q)| = q^{n^2} \prod_{i=1}^{n} (q^{2i} - 1)$。

设 V是定义在 $\mathbb{K}$ 上的一个 r-退化辛空间。正交图 $\mathcal{G}(V)$ 是一个图，其顶点为 V 的二维非退化子空间。该图的两个顶点相连，当且仅当它们正交。我们通常将 $\mathcal{G}(V)$ 与其顶点集等同。 V的标架复形是其正交图的团复形，记作 $\mathcal{F}(V)$。大小为 m 的单形 $\sigma \in \mathcal{F}(V)$ 称为一个 m-标架，或简称标架；它由 V 中两两正交的 m 个二维非退化子空间组成。我们用 $\mathcal{F}_m(V)$ 表示大小为 m 的标架集合。注意， $\mathcal{F}(V)$ 是一个维数为 $n-1$ 的单纯复形。

由维特引理可知，$\mathrm{Sp}(V)$ 在所有大小相同的标架集合上传递作用，且该作用的稳定子可以很容易地计算出来。也就是说，如果 σ 是一个 m-标架，那么

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Sp}(V)}(\sigma) \cong (\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})^m \rtimes \mathrm{Sym}_m) \times \mathrm{Sp}_{2(n-m)}(\mathbb{K}). \tag{2}$$

这里我们用到了 $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$。特别地，当 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ 是一个有限域时，我们可以得到 $\mathcal{F}(V)$ 的约化欧拉示性数的一个简洁表达式。

推论 2.2. 设 V 是域 $\mathbb{F}_q$ 上维数为 $2n$ 的辛空间。那么

$$\tilde{\chi}(\mathcal{F}(V)) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+1} |\mathcal{F}_m(V)| = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+1} \frac{|\mathrm{Sp}_{2n}(q)|}{q^m(q^2-1)^m m! |\mathrm{Sp}_{2(n-m)}(q)|}.$$

正如 [6, 引理 2.10], 所指出的，若 V 是维数为 $2n$ 的非退化空间，则 $\mathcal{F}(V)$ 可缩到一个维数为 $(n-2)$ 的子复形。事实上，若令 $\mathcal{F}(V)$ 表示大小为 $\neq 0$ 的标架偏序集$\widehat{\ }$，$n-1$，则 $\mathcal{F}(V)$ 与 $\mathcal{F}(V)$（的序复形）同伦等价，$\widetilde{\ }$其中后者的维数为 $n-2$。特别地，我们看到 $H_{n-1}(\mathcal{F}(V)\ \mathbb{Z}) = 0$。

3. Counting pairs (S, W) of non-degenerate 2-dimensional subspaces

本节着重研究两个非退化二维子空间 S、$W \in \mathcal{G}(V)$ 之间的代数关系。从现在起，V 表示域 $\mathbb{K}$ 上维数为 $2n$ 的辛空间，$n \geq 2$。

注 3.1（维数为 2 时的辛基）。设 $W \in \mathcal{G}(V)$，于是 $W = \langle w、u \rangle$ 和$\Psi(w,u) \neq 0$，因为 $\mathrm{Rad}(W) = 0$。重新缩放 w后，我们假设 $\Psi(w,u) = 1$。那么，生成 W且满足 $\Psi(w', u') = 1$ 的有序对 (w', u') 所构成的集合由以下线性组合给出

$$\begin{cases} w' = aw + bu, \\ u' = cw + du, \end{cases}$$

使得 $1 = \Psi(w', u') = ad - bc$。因此，这样的数对与 W 的等距变换群一一对应，也就是说，与特殊线性群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 一一对应。

继续之前，我们先引入以下实用的非标准记号。设$v \in V$和 $S, W \in \mathcal{G}(V)$，其辛基分别为 $x, y \in S$和 $w, u \in W$。我们定义：

$$\begin{cases} v_x := \Psi(v, y), \\ v_y := -\Psi(v, x), \\ v_S := v - v_x x - v_y y, \\ w \circ_S u := 1 - \Psi(w_S, u_S) = w_x u_y - w_y u_x. \end{cases} \tag{3}$$

向量 v_S 是 v 在 $S^{\perp}$上的正交投影，而 $v - v_S$ 是v 在 S上的投影。这两个向量不依赖于基 $\{x, y\}$的选取。因此，值 $w \circ_S u$ 也不依赖于基的选取。不过，v_x 和v_y 则依赖于基的选取。

在下面的定义中，我们描述一对顶点 S, W of $\mathcal{G}(V)$ 的六种两两不相交的可能构型。我们的目标是固定 S，并通过给出 S 与 W 之间适当的代数关系来刻画每种情形。

定义 3.2. 对于固定的 $S \in \mathcal{G}(V)$ 和 $1 \leq i \leq 6$，定义 $\mathcal{E}_i(S)$ 为满足下列第 (i) 项条件的 $W \in \mathcal{G}(V)$ 的集合：

(1) 维数$(S + W) = 2$，即 $S = W$。(2) 维数$(S + W) = 3$。(3) 维数$(S + W) = 4$且 $S + W$ 退化。(4) $S \perp W$。

(5) $S+W$非退化， $S \not\perp W$，且 $w \circ_S u = 0$。(6) 维数$(S+W) = 4$，$S+W$非退化， $S \not\perp W$，且 $w \circ_S u \neq 0$。注意，在情形（4）和（5）中，维数$(S+W) = 4$，而在情形（5）中， $S \neq W$。

以下观察将有助于刻画上述情形（1-6）。

*Rem*引理 3.3。设 S、$W \in \mathcal{G}$（V）分别具有辛基 x、y 和 w、u。 n

$$S+W = \langle x, y, w_S, u_S \rangle = S \oplus \langle w_S, u_S \rangle, \text{ and } \langle w_S, u_S \rangle \perp S.$$

因此， $S+W$ 退化，当且仅当 $S+W = S \oplus \mathrm{Rad}(S+W)$ 且 $\mathrm{Rad}(S+W) = \langle w_S$、 $u_S \rangle$。

下面我们将更详细地描述集合 $\mathcal{E}_1$（S）.....、$\mathcal{E}_6$（S），并在 $\mathbb{K}$ 为有限时计算它们的大小。对于 $\mathbb{K}$ 为无限的情形， $|\mathcal{E}_i$（S）| 可以是 0、1 或无限（这里我们令 $0.|\mathbb{K}| = 0$ 和 $|\mathbb{K}|^0 = 1$）。这可以在对集合双射格外谨慎后，由我们的证明推导出来。我们省略无限情形的细节，并将验证留给读者。

由于 $\mathcal{E}_1$（S） $= \{S\}$，我们将重点描述满足 $i \geq 2$ 的集合 $\mathcal{E}_i$（S）。

情形（2）。 $W \in \mathcal{E}_2(S)$ 当且仅当 $W = \langle w, u \rangle$ 满足 $\Psi(w,u) = 1$, $w_S \neq 0$ 和 $u_S = 0$。对于 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$，我们有

$$b_n := |\mathcal{E}_2(S)| = (q^{2n-2}-1)(q+1). \tag{4}$$

证明。首先假设 $\dim(S+W) = 3$，并选取 W 的一个辛基 w, u。根据注3.3， $\langle w_S, u_S \rangle$ 是一维。因此，如有必要，可将 (w,u) 换成 $(-u,w)$，不失一般性地假设 $w_S \neq 0$ 和 $u_S = \lambda w_S$。特别地，我们看到 $\Psi(w_S, u_S) = 0$，从而得到 $1 = \Psi(w,u) = w \circ_S u$。考虑基 $w' = w$, $u' = u - \lambda w$。于是 $\Psi(w', u') = \Psi(w,u) = 1$, $w'_S = w_S \neq 0$，且 $u'_S = u_S - \lambda w_S = 0$。也就是说， w', u' 是陈述中所说的 W 的一组基。

反过来，如果 $W = \langle w, u \rangle$ with $\Psi(w,u) = 1, w_S \neq 0$ and $u_S = 0$，那么 $S+W = S \oplus \langle w_S \rangle$ 的维数为 3。

现在我们来计算这类 W 的数量。为此，我们先计算满足本情形等价关系条件的向量数对 (w,u) 的数量，再除以固定 W 中所含这类数对的数量。我们固定一组基 $S = \langle x, y \rangle$ with$\Psi(x,y) = 1$。

首先，满足 $w_x u_y - w_y u_x = 1$ 的数对 $((w_x, w_y), (u_x, u_y))$ 的数量，恰好等于一个二维辛空间中基的数量。根据注 3.1，这个数量就是$|\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})|$。

其次， $w = w_x x + w_y y + w_S$，其中 $w_S \in S^\perp \setminus 0$ 任意，且 $u = u_x x + u_y y$。这为 w_S 提供了 $|\mathbb{K}|^{2n-2} - 1$ 种可能。因此，满足性质 $w \circ_S u = \Psi(w,u) = 1, w_S \neq 0$ and $u_S = 0$ 的数对 (w,u) 的数量为 $(|\mathbb{K}|^{2n-2} - 1)|\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})|$。

最后，假设 $W = \langle w$、 $u \rangle$（其中 (w,u) 如上所述）以及 $w' = aw + bu$、 $u' = cw + du$ 也是满足上述条件的一对。也就是说：

$$\begin{cases} 1 = \Psi(w', u') = ad - bc, \\ 0 \neq w'_S = a w_S, \Leftrightarrow a \neq 0, \\ 0 = u'_S = c w_S, \Leftrightarrow c = 0. \end{cases}$$

因此，我们看到 $w' = aw + bu$, $u' = du$，其中 $1 = ad$，即 $d = a^{-1}$。那么对于 a，我们有 $|\mathbb{K}| - 1$ 种可能，而对于 b，则有 $|\mathbb{K}|$ 种可能。这给出了 $|\mathbb{K}|(|\mathbb{K}| - 1)$ 个满足条件的数对 (w', u')。

这些条件以及在 $\langle w, u\rangle$ 内。这使我们能够得出结论，对于 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ ，

$$b_n = |\mathcal{E}_2(S)| = \frac{(q^{2n-2}-1)q(q^2-1)}{q(q-1)} = (q^{2n-2}-1)(q+1).$$

□

情形（3）。 $W \in \mathcal{E}_3(S)$ 当且仅当 $W = \langle w, u\rangle$ 满足 $\Psi(w, u) = 1$, w_S, u_S 线性无关，且 $\Psi(w_S, u_S) = 0$。此外，对于 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$，我们有

$$c_n := |\mathcal{E}_3(S)| = (q^{2n-2}-1)(q^{2n-3}-q).$$

证明。假设 $W = \langle w, u\rangle$。那么 $S+W = S \oplus \langle w_S, u_S\rangle$ 的维数为 4，当且仅当 w_S, u_S 线性无关。此外， $S+W$ 退化，当且仅当 $\langle w_S, u_S\rangle$ 是全迷向的，也就是说， $\Psi(w_S, u_S) = 0$（见注 3.1）。因此，情形（3）的等价关系成立。

现在我们来计算这类 W 的数量。我们采用与前一种情形类似的方法。

注意， $1 = \Psi(w, u) = w \circ_S u$。这给出了 $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})|$ 种可能的向量对 $(w - w_S, u - u_S)$。接下来，我们固定一个非零的 $w_S \in S^\perp$，由此得到 $|\mathbb{K}|^{2n-2} - 1$ 种可能。然后， u_S 是 $\langle w_S\rangle^\perp \cap S^\perp = \langle w_S$ 中的一个非零向量，后者子空间的维数为 $2n-3$。然而，由于 $w_S \perp w_S$，我们需要从 u_S 的选取中排除 w_S 的数乘。这给出 $|\mathbb{K}|(|\mathbb{K}|^{2n-4}-1)$ 种 u_S 的可能。因此，满足 $\Psi(w, u) = 1$，且 w_S, u_S 线性无关、 $\Psi(w_S, u_S) = 0$ 的数对 (w, u) 的数量为

$$(|\mathbb{K}|^{2n-2}-1)|\mathbb{K}|(|\mathbb{K}|^{2n-4}-1)|\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})|.$$

最后，为了确定 $|\mathcal{E}_3(W)|$，我们需要计算有多少个这样的数对生成相同的子空间 W。假设 (w, u) 和 (w', u') 是满足这些条件的两个数对，其中 $w' = aw + bu$ 和 $u' = cw + du$。这意味着：

$$\begin{cases} 1 = \Psi(w', u') = ad - bc, \\ 0 = \Psi(w'_S, u'_S) = \Psi(aw_S + bu_S, cw_S + du_S) & \text{(already holds)}, \\ w'_S = aw_S + bu_S,\ u'_S = cw_S + du_S \text{ l.i.}, \Leftrightarrow ad - bc \neq 0. \end{cases}$$

那么，给定的 W 中此类数对 (w', u') 的数量为 $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})|$。这表明，对于$\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, $c_n = (q^{2n-2}-1)(q^{2n-3}-q)$。 □

情形（4）。 $\mathcal{E}_4(S) = \mathcal{G}(S^\perp)$，并且对于 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ 我们有

$$d_n := |\mathcal{E}_4(S)| = |\mathcal{G}(S^\perp)| = \frac{q^{2n-4}(q^{2n-2}-1)}{(q^2-1)}.$$

证明。这很明显。 □

在进入定义 3.2 的情况 (5) 和 (6) 之前，我们先计算 $\mathcal{E}_5(S) \cup \mathcal{E}_6(S)$：

情形（5）∪（6）。 $S + W$ 是维数为 4 的非退化 $S \not\perp W$，当且仅当$W = \langle w,\ u\rangle$ 满足 $w \neq w_S$且 $\Psi(w_S,\ u_S) \neq 0$。对于 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$，我们有

$$e_n^0 := |\mathcal{E}_5(S) \cup \mathcal{E}_6(S)| = d_{n+1} - d_n - c_n - b_n - 1 = q^{2n-4}(q^{2n-2}-1)(q^2-q+1).$$

证明。注意， $S \not\perp W$ 当且仅当，对于 $W = \langle w,\ u\rangle$ 要么是 $w \neq w_S$，要么是 $u \neq u_S$。然后，经过基变换，我们可以假设 $S \not\perp W$ 当且仅当存在 W 的某个基 w，u，使得 $w \neq w_S$。接下来，$\dim(S+W) = 4$ 当且仅当 w_S，u_S 线性无关。而且，由于 $W \neq S$，$S+W$ 是非退化的，当且仅当 $\Psi(w_S,\ u_S) \neq 0$（事实上，这已经意味着 w_S，u_S 线性无关）。这给出了等价关系中 W 的描述。

要计算此类 W 的数量，注意到它就是其余四种情形的补空间，且这五种情形构成 $\mathcal{G}(V)$ 的一个划分，其中 $|\mathcal{G}(V)| = d_{n+1}$。□

最后，为了完成对情形（5）和（6）的刻画，我们只需刻画情形（5），因为情形（6）可视为 $\mathcal{E}_5(S) \cup \mathcal{E}_6(S)$ 中的补情形。

情形（5）。$W \in \mathcal{E}_5(S)$ 当且仅当 $W = \langle w, u\rangle$ 满足 $w \neq w_S$, $u = u_S$ 且 $\Psi(w_S, u_S) = 1$。对于 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$，此类 W 的数量为

$$e_n^1 := |\mathcal{E}_5(S)| = q^{2n-4}(q^{2n-2}-1)(q+1).$$

证明。这个描述可由并集情形（5）∪(6)立即得到：因为附加条件 $w \circ_S u = 0$ 成立当且仅当 $u - u_S = \lambda(w - w_S)$，所以我们可以将 u 替换为 $u' = u - \lambda w$，从而得到所需的基。这里我们用到了 $w \neq w_S$。

接下来，我们计算 $\mathcal{E}_5(S)$ 的大小。已知 $w - w_S$ 是 S 中的一个非零向量，共有 $|\mathbb{K}|^2 - 1$ 种可能。因此，向量 $u = u_S$ 由 u_S 完全确定。另一方面，满足 $\Psi(w_S, u_S) = 1$ 的数对 (w_S, u_S) 的数量为 $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})||\mathcal{G}(S^\perp)|$。因此，我们得到 $(|\mathbb{K}|^2-1)|\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})||\mathcal{G}(S^\perp)|$ 个可能的数对 (w, u)。

还需确定其中有多少个属于同一个固定子空间 $W = \langle w, u\rangle$。假设 w, u 和 w', u' 是 W 的两个基，且满足本情形的相同要求。记 $w' = aw + bu$ 和 $u' = cw + du$。于是：

$$\begin{cases} 1 = \Psi(w', u') = ad - bc, \\ 0 \neq w' - w'_S = a(w - w_S), \\ 0 = u' - u'_S = c(w - w_S). \end{cases}$$

因此 $c = 0$, $d = a^{-1}$，且对 b 没有任何限制。这给出了 (w', u') 的 $|\mathbb{K}|(|\mathbb{K}|-1)$ 种可能。

总之，对于 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$,

$$e_n^1 = \frac{(q^2-1)|\mathrm{SL}_2(q)||\mathcal{G}(S^\perp)|}{q(q-1)} = q^{2n-4}(q^{2n-2}-1)(q+1).$$

□

对于情形（6），我们不需要更具体的描述，因为它总是落在情形（1-5）的补空间中。由此，也可以轻易计算出 $\mathcal{E}_6(S)$ 的大小。

情形（6）。对于 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$，我们有

$$e_n^2 := |\mathcal{E}_6(S)| = q^{2n-3}(q^{2n-2}-1)(q-2).$$

注 3.4. 请注意，数值 $b_n, c_n, d_n, e_n^0, e_n^1, e_n^2$ 是 n 和 q 的不变量，并不依赖于 S 的选择。

$S \in \mathcal{G}(V)$	基 w 的条件 $, u$ 的 W 与 $\Psi(w,u) = 1$	$\mathbb{K} = \mathbb{F}$ 的 $\mathcal{E}_i(S)$ 大小 $_q$
$W \in \mathcal{E}_1(S) = \{S\}$	$W = S$	1
$W \in \mathcal{E}_2(S)$	$w_S \neq 0 = u_S$	$b_n = (q^{2n-2}-1)(q+1)$
$W \in \mathcal{E}_3(S)$	w_S, u_S 与 $\Psi(w_S, u_S) = 0$ 线性无关	$c_n = (q^{2n-2}-1)(q^{2n-3}-q)$
$W \in \mathcal{E}_4(S)$	$w = w_S$ 和 $u = u_S$	$d_n = \frac{q^{2n-4}(q^{2n-2}-1)}{(q^2-1)}$
$W \in \mathcal{E}_5(S) \cup \mathcal{E}_6(S)$	$\Psi(w_S, u_S) \neq 0$ 和 $w \neq w_S$	$e_n^0 = q^{2n-4}(q^{2n-2}-1)(q^2-q+1)$
$W \in \mathcal{E}_5(S)$	$w \neq w_S$ 和 $u = u_S$	$e_n^1 = q^{2n-4}(q^{2n-2}-1)(q+1)$
$W \in \mathcal{E}_6(S)$	$\Psi(w_S, u_S) \neq 0$ 和 $w \circ_S u \neq 0$	$e_n^2 = q^{2n-3}(q^{2n-2}-1)(q-2)$

TABLE 1.两个非退化二维子空间 S 和 W 在 $\mathbb{K}$ 上的 $2n$ 维辛空间 V 中的可能关系。第三列中的值与 S 的选择无关。

我们在表 1 中总结了这五种情形的描述。

记 d_{n+1} 为底域 $\mathbb{K}$ 上维数为 $2n$ 的辛空间中二维非退化子空间的数量。注意，这个数量仅取决于 $\mathbb{K}$ 和 n。在下面的引理中，我们根据 $\mathbb{K}$ 和 d_{n+1} 的大小，计算一个 r-退化辛空间中二维非退化子空间的数量。

引理 3.5. 设 V 是一个维数为 $2n+r$ 的 r-退化辛空间。那么， V 的非退化二维子空间的数量为:

$$d_{n+1,r} := d_{n+1} \cdot |\mathbb{K}|^{2r}.$$

证明. 根据引理 2.1，将 $V =$ 分解为 $\mathrm{Rad}(V) \oplus V'$，其中 V' 是维数为 $2n$ 的辛空间。于是投影映射 $p\colon V \to V'$ 具有如下性质：若 $S \leq V'$ 非退化，则 $p^{-1}(S) = \mathrm{Rad}(V) \oplus S$。此外，若 $S \leq V'$ 和 $W \leq V$ 非退化且 $p(S) = p(W)$，则 $W \leq \mathrm{Rad}(V) \oplus S$。若进一步有 $W \leq V'$，则 $W = S$，因为 $p|_{V'}$ 是恒等映射。由于对于任意 S， $\mathcal{G}(\mathrm{Rad}(V) \oplus S)$ 和 $\mathcal{G}(\mathrm{Rad}(V) \oplus W)$ 同构，因此我们得出，对于 $S \in \mathcal{G}(V')$,

$$d_{n+1,r} = |\mathcal{G}(V)| = |\mathcal{G}(V')| \cdot |\mathcal{G}(\mathrm{Rad}(V) \oplus S)|.$$

设 $T = R \oplus S$，其中 $R = \mathbb{K}^r$ 和 $S = \mathbb{K}^2$ 是典范辛空间。赋予T一个 r-退化辛形式 Ψ，使得 $R = \mathrm{Rad}(T)$，且 $(S, \Psi|_S)$ 有辛基 e_1, e_2。对于向量 $v, v' \in R$和常数 $a, b, c, d \in \mathbb{K}$，我们看到，$w = v + (ae_1 + be_2)$，$u = v' + (ce_1 + de_2)$ 是非退化二维子空间 $W = \langle w, u \rangle$ 的辛基，当且仅当

$$1 = \Psi(w,u) = \Psi(v + (ae_1 + be_2), v' + (ce_1 + de_2)) = \Psi(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) = ad - bc.$$

因此，我们有 $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})|\cdot|\mathbb{K}|^{2r}$ 个可能的基。而且，正如前面所见，在每个子空间W 中都有 $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})|$ 个这样的基。由此得到的公式与引理陈述一致（注意，该等式在无限情形下也成立）。□

4. Counting triples $(S \perp T, W)$ of non-degenerate 2-dimensional subspaces

设 V是域 $\mathbb{K}$上维数为 $2n$ 的辛空间。在上一节中，我们刻画并计算了（当 $\mathbb{K}$ 为有限时）定义 3.2 所述六种情形中各自的子空间 $W \in \mathcal{G}(V)$ 的数量。见表 1。现在固定 $S, W \in \mathcal{G}(V)$，并计算对 $j \in \{1, \dots, 6\}$的每个取值，满足 $W \in \mathcal{E}_j(T)$ 的 $T \in \mathcal{G}(S^\perp)$ 的数量。

定义 4.1。对于 $S, W \in \mathcal{G}(V)$ 和 $1 \le j \le 6$，令

$$\mathcal{C}_j(S, W) := \{T \in \mathcal{G}(S^\perp) \,:\, W \in \mathcal{E}_j(T)\}, \text{ and}$$
$$\mu_j^n(S, W) := |\mathcal{C}_j(S, W)|.$$

我们将看到，数值 $\mu_j^n(S, W)$ 仅取决于满足 $W \in \mathcal{E}_i(S)$ 的指标 $i \in \{1, \dots, 6\}$。因此，本节余下部分将着重计算这些数值$\mu_j^n(S, W)$；当数对 (S, W) 已知时，我们将其简记为 μ_j^n。无限情形的技术细节留给读者，我们主要关注有限情形$\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$，以便为 μ_j^n 得到显式公式。

从现在起，V是一个维数为 $2n$、定义在 $\mathbb{K}$ 上的辛空间，我们固定 $S, W \in \mathcal{G}(V)$。为避免平凡情形，假设 $n \ge 2$。情形 $n = 1$ 会导出 $\mathcal{G}(V) = \{V\}$，因此我们正在计算的大多数集合都是空集。

现在我们继续计算六种情形下的值 $\mu_j^n(S, W)$，这六种情形对应于 S 与 W 之间可能的关系，如定义 3.2 所述。

引理 4.2（情形 (1)）。设 $n \ge 2$ 和 $S \in \mathcal{G}(V)$。那么，对于 $S = W$，我们得到：

$$\mu_j^n(S, W) = \begin{cases} 0 & j \neq 4, \\ d_n & j = 4. \end{cases} \tag{5}$$

证明。这可由定义直接得出。 □

接下来，我们刻画那些使 $W + T$ 退化的 $T \in \mathcal{G}(S^\perp)$。

命题 4.3。设 $S, W \in \mathcal{G}(V)$，其中 $W \neq S$，并固定 W的一组辛基 w, u。设 $T \in \mathcal{G}(S^\perp)$。当且仅当 T存在一组基 (x, y)，满足以下条件时，$W + T$才是退化的：

$$\begin{cases} 1 = \Psi(x, y), \\ \Psi(x, w) = 1 = \Psi(y, u), \\ \Psi(x, u) = 0 = \Psi(y, w). \end{cases} \tag{6}$$

此外，在这种情况下，有序对 (x, y) 是唯一的。

证明。我们首先证明唯一性。假设 x、y 和 x'、y' 是满足公式（6）条件的两组数对。记 $x' = ax + by$ 和 $y' = cx + dy$。于是我们有：

$$\begin{cases} 1 = \Psi(x', w) = a, \\ 1 = \Psi(y', u) = d, \\ 0 = \Psi(x', u) = b, \\ 0 = \Psi(y', w) = c. \end{cases}$$

因此， $x' = x$ 和 $y' = y$。

现在，我们用 T 来刻画 $W + T$ 何时退化。任取 T 的一个辛基 x, y。注意，由于 $T \perp S$，$x = x_S$ 且 $y = y_S$。现在， $W + T = \langle w, u, x, y\rangle$ 退化，当且仅当存在 $z = aw + bu + cx + dy \neq 0$ 使得

$$\begin{cases} 0 = \Psi(z, w) = -b + c\Psi(x, w) + d\Psi(y, w), \\ 0 = \Psi(z, u) = a + c\Psi(x, u) + d\Psi(y, u), \\ 0 = \Psi(z, x) = -a\Psi(x, w) - b\Psi(x, u) - d, \\ 0 = \Psi(z, y) = -a\Psi(y, w) - b\Psi(y, u) + c. \end{cases}$$

因此，当且仅当上述方程组对应矩阵的行列式为零时，这个非零向量才存在。该行列式为：

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & \Psi(x, w) & \Psi(y, w) \\ 1 & 0 & \Psi(x, u) & \Psi(y, u) \\ -\Psi(x, w) & -\Psi(x, u) & 0 & -1 \\ -\Psi(y, w) & -\Psi(y, u) & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1 - \Psi(x, w)\Psi(y, u) + \Psi(x, u)\Psi(y, w))^2.$$

因此， $W + T$ 退化，当且仅当

$$1 = \Psi(x, w)\Psi(y, u) - \Psi(x, u)\Psi(y, w). \tag{7}$$

定义 $x' := \Psi(y, u)x - \Psi(x, u)y$ 和 $y' := -\Psi(y, w)x + \Psi(x, w)y$。

假设 $W + T$ 退化。那么，等式 (7) 成立，且

$$\begin{cases} \Psi(x', y') = \Psi(x, w)\Psi(y, u) - \Psi(x, u)\Psi(y, w) = 1, \\ \Psi(x', w) = \Psi(y, u)\Psi(x, w) - \Psi(x, u)\Psi(y, w) = 1, \\ \Psi(x', u) = \Psi(y, u)\Psi(x, u) - \Psi(x, u)\Psi(y, u) = 0, \\ \Psi(y', w) = -\Psi(y, w)\Psi(x, w) + \Psi(x, w)\Psi(y, w) = 0, \\ \Psi(y', u) = -\Psi(y, w)\Psi(x, u) + \Psi(x, w)\Psi(y, u) = 1. \end{cases}$$

因此，(x', y') 是 T 的基，并且满足公式（6）的条件。

反过来，如果 (x, y) 是满足公式（6）条件的一对，那么公式（7）成立。命题的证明至此完成。□

以下推论有助于通过计算适当正交补中的元素个数，来计算 T 中满足 $W + T$ 退化条件的子空间个数。

推论 4.4. 设 S, T, W 如命题 4.3 中所述。固定辛基 $e, f \in S, w, u \in W$ 和 $x, y \in T$。设 $\alpha := -e + x$, $\beta := f + y$, $w' := f + w_S$ 和 $u' := e + u_S$。那么，(x, y) 满足公式（6）的条件，当且仅当

$$\begin{cases} 0 = \Psi(\alpha, \beta), \\ 0 = \Psi(\alpha, w'), \\ 0 = \Psi(\alpha, u'), \\ 0 = \Psi(\beta, w'), \\ 0 = \Psi(\beta, u'). \end{cases} \tag{8}$$

反过来，如果 α、$\beta \in V$ 满足条件，使得 $\alpha = -e + \alpha_S$、 $\beta = f + \beta_S$ 和 α、β 满足公式（8）中的条件，那么 $(x, y) = (\alpha_S, \beta_S)$ 就是一对满足公式（6）中条件的对象。

特别地，我们看到，当且仅当以下条件成立时，$\alpha,\beta\in V$ 满足关于 $\alpha=-e+\alpha_S$ 和 $\beta=f+\beta_S$ 的公式（8）：

$$\begin{cases}\alpha\in\langle w',u',e\rangle^{\perp}-\langle f\rangle^{\perp}, & \alpha_e=-1,\\ \beta\in\langle w',u',f,\alpha\rangle^{\perp}-\langle e\rangle^{\perp}, & \beta_f=1.\end{cases}\tag{9}$$

因此，为了刻画和 $W+T$ 退化的情形，我们可以在推论 4.4 的方程（9）中寻找解 α,β。

在继续计算 $\mu_j^n(S,W)$ 之前，我们需要根据 S,T,W 的选取，刻画何时 $w\circ_T u=0$。

引理 4.5. 设 $S,T,W\in\mathcal{G}(V)$，并固定 W 的一个辛基 w,u。则下列条件等价：

(1) $T\perp S$ 和 $w\circ_T u=0$，(2) $T\perp S$ 和 $T\cap W^{\perp}\neq 0$，(3) $T\perp S+W$ 或 T 包含一个基 x,y，满足：(a) $x\in S^{\perp}-W^{\perp}$，(b) $y\in S^{\perp}\cap W^{\perp}-\langle x\rangle^{\perp}$，(c) $\Psi(x,y)=1$。(4) $T\perp S$ 和 $W\in\mathcal{E}_4(T)\cup\mathcal{E}_5(T)$。

此外，符合条目 (3)(a,b,c) 的数对 (x,y) 的数量为 $|\mathbb{K}|(|\mathbb{K}|-1)$。因此，满足 $T\perp S$、$T\not\perp W$ 和 $w\circ_T u=0$ 的子空间 T 的总数等于 $\mu_5^n(S,W)$。于是，对于有限域 $\mathbb{K}=\mathbb{F}_q$，我们有：

$$\mu_5^n(S,W)=\frac{q^{2n-\dim(S+W)-2}}{(q-1)}\cdot\begin{cases}\left(q^{2n-2}-q^{2n-\dim(S+W)}\right) & \Psi(w_S,u_S)=0,\\ \left(q^{2n-2}-q^{2n-\dim(S+W)}-q^2+1\right) & \Psi(w_S,u_S)\neq 0.\end{cases}\tag{10}$$

证明。注意，由表 1（其中 T 扮演其中 S 的角色），条目 (1) 和 (4) 等价。此外，若 $T\perp W$，则 $w\circ_T u=0$，因此条目 (1-4) 均成立。并且，对于任意基 x、y，$T\perp S$ 当且仅当 x、$y\in S^{\perp}$，其中这些基属于 T。因此，接下来我们假设 $T\perp S$ 且 $T\not\perp W$，并证明条目 (1)、(2) 和 (3) 等价。

取 T 的一组基 x,y，使得 $\Psi(x,y)=1$。回忆一下，$w=w_x x+w_y y+w_T$，同理可得 $u=u_x x+u_y y+u_T$。由于 $T\not\perp W$，因此我们有 $w\neq w_T$ 或 $u\neq u_T$。于是得到以下等价关系：

$$\begin{aligned}w\circ_T u=0&\Leftrightarrow w_x x+w_y y\text{ 和 }u_x x+u_y y\text{ 线性相关}\\&\Leftrightarrow\Psi(w,y)\Psi(u,x)=\Psi(w,x)\Psi(u,y)\\&\Leftrightarrow 0=\Psi(w,\Psi(u,x)y-\Psi(u,y)x)=\Psi(u,\Psi(w,y)x-\Psi(w,x)y)\\&\Leftrightarrow 0=\Psi(w,u_x x+u_y y)=\Psi(u,w_x x+w_y y).\end{aligned}$$

那么，$w\circ_T u=0$ 当且仅当 $w_x x+w_y y,u_x x+u_y y\in T\cap W^{\perp}$。由于这些向量中至少有一个非零，我们得出 $T\cap W^{\perp}\neq 0$ 当且仅当 $w\circ_T u=0$。因此，条件 (1) 和 (2) 等价。

现在假设条件（2）成立。由 $T\not\perp W$，我们有 $\dim(T\cap W^{\perp})=1$。于是可以从 T 中选取一对非零元素（x，y），使得 $x\in T-W^{\perp}$ 且 $y\in T\cap W^{\perp}$。重新缩放后，我们假设 $\Psi(x,y)=1$。特别地，$y\notin\langle x\rangle^{\perp}$。于是（$x$，$y$）满足条件（3）中的（a、b、c）。这说明条件（2）蕴含条件（3）。

现在我们证明条件（3）蕴含条件（1）。也就是说，我们说明在条件（3）（a、b、c）下，可以得到 $w \circ_T u = 0$。由于我们假设 $T \not\perp W$，因此存在 T 的一个基（x， y），满足条件（a、b、c）。于是 Ψ（w， y）$= 0 = \Psi$（u， y），由此我们推得 $w_x = 0 = u_x$，所以 $w \circ_T u = 0$。这就证明了条件（3）蕴含条件（1）。等价关系的证明至此完成。

接下来，我们证明， T中满足(3)(a,b,c)的数对(x, y)的数量为 $|\mathbb{K}|(|\mathbb{K}| - 1)$。设$(x, y)$和$(x', y')$是 T中满足(a,b,c)的两个元素数对。记$x' = ax + by$ 和 $y' = cx + dy$。则：

- $\Psi(x', w) = a\Psi(x, w)$， $\Psi(x', u) = a\Psi(x, u)$。于是，根据条件(a)， $a \neq 0$。
- 根据条件(b)， $0 = \Psi(y', w) = c\Psi(x, w)$， $0 = \Psi(y', u) = c\Psi(x, u)$。于是，根据条件(a)， $c = 0$。
- 根据(c)， $1 = \Psi(x', y') = ad - bc$。

我们得出， $c = 0$、 $b \in \mathbb{K}$ 不受限制， $a \neq 0$，且 $d = a^{-1}$。因此，(x', y')有$|\mathbb{K}|(|\mathbb{K}| - 1)$种可能。

最后，我们统计如(3)(a,b,c)中子空间 T 所对应的数对(x, y)的总数，并得出 $\mu_5^n(S, W)$ 的值。无限情形的细节留给读者，我们假设 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ 是有限的。我们有

$$|S^\perp - W^\perp| = |S^\perp| - |(S + W)^\perp| = q^{2n-2} - q^{2n-\dim(S+W)}$$

x的可能数。接下来， y 的可能数为

$$\frac{|(S + W)^\perp| - |(S + W + \langle x\rangle)^\perp|}{q - 1} = \frac{q^{2n-\dim(S+W)} - q^{2n-\dim(S+W+\langle x\rangle)}}{q - 1},$$

其中，分母 $q-1$来自对 y 进行适当的重新缩放，以满足条件$\Psi(x, y) = 1$。此外， y 的可能数取决于 $x \in S + W$是否成立。因此，我们需要刻画 $x \in S + W$成立的条件。由于 $x \in S^\perp$，我们有 $x \in S+W = S\oplus\langle w_S, u_S\rangle$ 当且仅当 $x \in \langle w_S, u_S\rangle$。但若 $x = aw_S+bu_S$，则必须满足$x \notin W^\perp$。这意味着，要么 $0 \neq \Psi(x, w) = b\Psi(u_S, w_S)$，要么 $0 \neq \Psi(x, u) = a\Psi(w_S, u_S)$。于是，当且仅当 $\Psi(w_S, u_S) \neq 0$时， x 的这一选择才可行；此时， x有$|\langle w_S, u_S\rangle| - 1 = q^2 - 1$种可能。根据这一观察，可以直接验证 μ_5^n 的值如(10)所示。注意，若 $x \in S + W$，则$S^\perp \cap W^\perp - \langle x\rangle^\perp = \emptyset$，因此 y没有可行的选择。□

下面的引理也显而易见：

引理 4.6. 对任意 $S, W \in \mathcal{G}(V)$，有 $\mu_4(S, W) = |\mathcal{G}((S + W)^\perp)|$。

现在我们拥有了计算 $\mu_j^n(S, W)$ 的值所需的全部工具。

命题 4.7（情形（2））。设 $W \in \mathcal{E}_2(S)$。那么，对于 $n \geq 2$，有：

$$\begin{cases} \mu_1^n(S, W) = 0 = \mu_2^n(S, W) = \mu_3^n(S, W) = \mu_6^n(S, W), \\ \mu_4^n(S, W) = d_{n-1} \cdot |\mathbb{K}|^2, \\ \mu_5^n(S, W) = |\mathbb{K}|^{4n-8}. \end{cases} \tag{11}$$

证明。根据表 1，存在基 w、 u of W，使得 $\Psi(w$、 $u) = 1$ 且 $w_S \neq 0 = u_S$。令 $T \in \mathcal{G}(S^\perp)$。则 $u \in S \leq T^\perp$，从而 $u_T = u \neq 0$。特别地， $w \circ_T u = 1 - \Psi(w_T$、 $u_T) = 1 - \Psi(w$、 $u) = 0$。根据引理 4.5 中的等价关系，我们得出 $W \in \mathcal{E}_4(T) \cup \mathcal{E}_5(T)$，因此

$$\mu_1^n(S, W) = 0 = \mu_2^n(S, W) = \mu_3^n(S, W) = \mu_6^n(S, W).$$

另一方面，根据引理 4.6，$\mu_4^n(S,W) = |\mathcal{G}((S+W)^\perp)|$。由于维数$(S+W) = 3$，$(S+W)^\perp$ 是一个维数为 $2n-3$ 的 1-退化辛空间。因此引理 3.5 给出了 $\mu_4^n(S,W)$ 的值。

现在我们计算 $\mu_5^n(S,W)$。由于我们已经有了 $T \in \mathcal{G}(S^\perp)$ 的 $w \circ_T u = 0$，如果进一步要求 $T \not\perp W$，那么根据引理 4.5，我们可以得出 $\mu_5^n(S,W) = |\mathbb{K}|^{4n-8}$，这也涵盖了无限 $\mathbb{K}$的情况。□

命题 4.8（情形（3））。设 $S \in \mathcal{G}(V)$ 和 $W \in \mathcal{E}_3(S)$。对于 $n \geq 3$，我们有：

$$
\begin{cases}
\mu_1^n(S,W) = 0 = \mu_2^n(S,W), \\
\mu_3^n(S,W) = |\mathbb{K}|^{4n-9}, \\
\mu_4^n(S,W) = d_{n-2} \cdot |\mathbb{K}|^4, \\
\mu_5^n(S,W) = |\mathbb{K}|^{4n-10}(|\mathbb{K}|+1), \\
\mu_6^n(S,W) = |\mathbb{K}|^{4n-9}(|\mathbb{K}|-2).
\end{cases} \tag{12}
$$

如果 $n = 2$，则不会出现这种情况，且上述值未定义。

证明。我们首先假设 $n \geq 3$。显然，$\mu_1^n(S,W) = 0$，因为 $W \not\perp S$。

另一方面，由表 1，存在 W 的一组基 w, u，使得 $\Psi(w,u) = 1$,w_S, u_S 线性无关，且 $\Psi(w_S, u_S) = 0$。

我们证明，对于 $T \in \mathcal{G}(S^\perp)$，$W+T$的维数总是 4。任取 T 的一组基 x, y，于是 $W+T = \langle w,u,x,y\rangle$。取一个线性组合 $0 = aw + bu + cx + dy$。我们证明 $a = b = c = d = 0$。投影到 S 得到 $0 = a(w - w_S) + b(u - u_S)$。由于$1 = \Psi(w,u) = \Psi(w_S, u_S) + w \circ_S u = w \circ_S u$，$w - w_S$和 $u - u_S$线性无关，因此 $a = 0 = b$。同样，由于 x, y 线性无关，$c = d = 0$。因此，$\dim(W+T) = 4$。特别地，我们已经证明 $\mu_2^n(S,W) = 0$，而 $\mu_3^n(S,W)$ 是满足 $W+T$ 退化的 $T \perp S$ 的数量。

接下来，为了计算 $\mu_3^n(S,W)$，我们将计算推论 4.4 中方程（9）的解的个数α, β。固定一个基 $S = \langle e, f\rangle$，使得 $\Psi(e,f) = 1$。回忆一下，$w' = f + w_S$ 且 $u' = e + u_S$。我们假设 $\mathbb{K}$ 是有限的，并将无限情形的细节留给读者。

断言 1. 对于 α，有 $|\mathbb{K}|^{2n-4}$ 个解。

证明. 我们有 $\alpha \in \langle w', u', e\rangle^\perp - \langle f\rangle^\perp$，其中 $\alpha_e = -1$。因此，这样的 α 的数量等于：

$$
\frac{1}{|\mathbb{K}|-1} |\left\langle w', u', e\right\rangle^\perp - \langle f\rangle^\perp| = \frac{1}{|\mathbb{K}|-1} \left(|\left\langle w', u', e\right\rangle^\perp| - |\left\langle w', u', e, f\right\rangle^\perp| \right).
$$

我们计算这些子空间的维数。首先，$\langle w', u', e\rangle = \langle f + w_S, u_S, e\rangle$ 的维数为 3，因为 $u_S \neq 0$。因此，$|\langle w', u', e\rangle^\perp| = |\mathbb{K}|^{2n-3}$。其次，$\langle w', u', e, f\rangle = \langle w_S, u_S, e, f\rangle = S + W$，根据假设其维数为 4。于是 $|\langle w', u', e, f\rangle^\perp| = |\mathbb{K}|^{2n-4}$。我们得出，这样的 α 的数量为 $|\mathbb{K}|^{2n-4}$。□

断言 2. 对于每个满足方程（9）的 α，存在 $|\mathbb{K}|^{2n-5}$ 个关于 β 的解。

证明. 我们有 $\beta \in \langle w', u', f, \alpha\rangle^{\perp} - \langle e\rangle^{\perp}$，其中 $\beta_f = 1$。与先前关于 α 的情形类似，关于 β 的解的数量为

$$\frac{1}{|\mathbb{K}|-1}|\left\langle w', u', f, \alpha\right\rangle^{\perp} - \langle e\rangle^{\perp}| = \frac{1}{|\mathbb{K}|-1}\left(|\left\langle w', u', f, \alpha\right\rangle^{\perp}| - |\left\langle w', u', e, f, \alpha\right\rangle^{\perp}|\right).$$

注意到，当且仅当 $\alpha \in \langle w', u', f\rangle$ 时，$\langle w', u', f, \alpha\rangle$ 的维数为 3。然而，这不可能成立，因为 $\alpha \in \langle w', u', e\rangle^{\perp}$ 和 $\alpha_e \neq 0$。因此，$|\langle w', u', f, \alpha\rangle^{\perp}| = |\mathbb{K}|^{2n-4}$。接下来，

$$\left\langle w', u', e, f, \alpha\right\rangle = \langle w_S, u_S, e, f, \alpha_S\rangle = \langle w_S, u_S, \alpha_S\rangle \oplus \langle e, f\rangle.$$

当且仅当 $\alpha_S \notin \langle w_S, u_S\rangle$ 时，该子空间的维数为 5；根据 α 的定义，这必然成立。因此，$\langle w', u', e, f, \alpha,\rangle$ 的维数为 5，并且

$$|\left\langle w', u', e, f, \alpha\right\rangle^{\perp}| = |\mathbb{K}|^{2n-5}.$$

固定 α 后，β 有 $|\mathbb{K}|^{2n-5}$ 个解。 □

根据断言 1 和 2，我们得出结论：使 $W+T$ 退化的 $T \perp S$ 的数量为 $|\mathbb{K}|^{2n-4} \cdot |\mathbb{K}|^{2n-5} = |\mathbb{K}|^{4n-9}$。因此，$\mu_3^n(S, W) = |\mathbb{K}|^{4n-9}$。

最后，由于 $\dim(S+W) = 4$ 且 $S+W$ 是退化的，因此 $(S+W)^{\perp}$ 是一个维数为 $2n-4 = 2(n-3)$ 的 2-退化辛空间。这表明，

$$\mu_4^n(S, W) = |\mathcal{G}((S+W)^{\perp})| = d_{n-2,2} = d_{n-2} \cdot |\mathbb{K}|^4.$$

$\mu_5^n(S, W)$ 的值由引理 4.5 中的公式（10）得出，因为 $\Psi(w_S, u_S) = 0$。$\mu_6^n(S, W)$ 的值则通过取补空间得到。

为了完成这个命题的证明，注意如果 $n = 2$ and $\dim(S+W) = 4$，那么$S + W = V$，它是非退化的。因此，维数$2n = 4$ 时不会出现情形（3）（参见表 1 中 c_2 的值）。□

我们仅针对有限 $\mathbb{K}$陈述剩余的情形 (4)、(5) 和 (6)。对于无限域，也可以得到类似的公式，但它们需要更复杂的论证，而本文中我们不需要这些公式。

命题 4.9（情形（4））。设 $S \in \mathcal{G}(V)$ 和 $W \in \mathcal{E}_4(S) = \mathcal{G}(S^{\perp})$。对于 $n \geq 2$ 和 $\mathbb{K}$有限的情形，我们有：

$$\begin{cases} \mu_1^n(S, W) = 1, \\ \mu_2^n(S, W) = b_{n-1} = (|\mathbb{K}|^{2n-4} - 1)(|\mathbb{K}| + 1), \\ \mu_3^n(S, W) = c_{n-1} = |\mathbb{K}|(|\mathbb{K}|^{2n-4} - 1)(|\mathbb{K}|^{2n-6} - 1), \\ \mu_4^n(S, W) = d_{n-1}, \\ \mu_5^n(S, W) = e_{n-1}^1 = |\mathbb{K}|^{2n-6}(|\mathbb{K}|^{2n-4} - 1)(|\mathbb{K}| + 1), \\ \mu_6^n(S, W) = e_{n-1}^2 = |\mathbb{K}|^{2n-5}(|\mathbb{K}|^{2n-4} - 1)(|\mathbb{K}| - 2). \end{cases} \tag{13}$$

证明。由于 $W \in \mathcal{G}(S^{\perp})$，我们可以直接在 S 的正交补中进行讨论。因此，$\mu_j^n(S, W)$ 的取值对应于表 1 的第三列，其中 $n-1$ 在此处充当n。注意，这些取值在 $n = 2$ 的情形下是一致的。至此，本情形的证明完成。□

命题 4.10（情形 (5) 和 (6)）。设 $S \in \mathcal{G}(V)$ 且 $W \in \mathcal{E}_5(S) \cup \mathcal{E}_6(S)$。那么，对于$n \geq 2$ 且 $\mathbb{K}$ 有限的情形，我们有：

$$
\begin{cases}
\mu_1^n(S,W) = 0, \\
\mu_2^n(S,W) = \begin{cases} |\mathbb{K}|^{2n-4} & W \in \mathcal{E}_5(S), \\ 0 & W \in \mathcal{E}_6(S), \end{cases} \\
\mu_3^n(S,W) = |\mathbb{K}|^{2n-5}(|\mathbb{K}|^{2n-4}-1), \\
\mu_4^n(S,W) = d_{n-1}, \\
\mu_5^n(S,W) = |\mathbb{K}|^{2n-6}(|\mathbb{K}|^{2n-4}-1)(|\mathbb{K}|+1), \\
\mu_6^n(S,W) = \begin{cases} |\mathbb{K}|^{2n-5}(|\mathbb{K}|^{2n-4}-1)(|\mathbb{K}|-2) & W \in \mathcal{E}_5(S), \\ |\mathbb{K}|^{2n-5}(|\mathbb{K}|^{2n-4}(|\mathbb{K}|-2)+2) & W \in \mathcal{E}_6(S). \end{cases}
\end{cases} \tag{14}
$$

证明。根据表 1，我们可以选取 W 的一组基 w、u，使得 $\neq 0$ $\Psi(w_S, u_S)$，并且 $w \neq w_S$。此外，如果 $w \circ_S u = 0$，我们取 $u = u_S$。令 q 为 $\mathbb{K}$ 的大小。

μ_1^n 的值显然，而由于 $S+W$ 是 4 维的非退化 $| = d_{n-1}$，$\mu_4^n(S,W) = |\mathcal{G}((S+W)^{\perp})$。

现在我们计算 μ_2^n 和 μ_3^n。根据推论 4.4，只需计算满足方程（9）的解 α、β 的数量。令 $S = \langle e$、$f\rangle$ 满足 $\Psi = 1(e,f)$。回忆 $w' = f + w_S$、$u' = e + u_S$。

Claim 1. 存在 q^{2n-4} 个向量 α，使得 $\alpha \in \langle w'$、u'、$e\rangle^{\perp} - \langle f\rangle^{\perp}$ 和 $\alpha_e = -1$。

证明。如命题 4.8 中断言 1 的证明所示，我们需要计算子空间 $\langle w'$、u'、$e\rangle$ 和 $\langle w'$、u'、e、$f\rangle$的维数。

我们有 $\langle w'$、u'、$e\rangle = \langle f + w_S$、$u_S$、$e\rangle$，并且由于 $u_S \neq 0$，这个子空间的维数为 3，其正交补的维数为 $2n-3$。

另一方面，$\langle w'$、u'、e、$f\rangle = \langle w_S$、$u_S\rangle \oplus \langle e$、$f\rangle$。由于根据假设 $\Psi(w_S$、$u_S) \neq 0$，这个子空间的维数为 4。因此，α有 $\frac{1}{q-1}\left(q^{2n-3} - q^{2n-4}\right) = q^{2n-4}$种选择。断言 1 的证明到此结束。□

断言 2. 设 $\alpha \in \langle w', u', e\rangle^{\perp} - \langle f\rangle^{\perp}$ 满足 $\alpha_e = -1$。那么，满足 $\beta_f = 1$ 的向量$\beta \in \langle w', u', f, \alpha\rangle^{\perp} - \langle e\rangle^{\perp}$ 的数量为：

(1) 对于 $\alpha = -e + \Psi(u_S, w_S)^{-1}u_S$，若 $w \circ_S u = 0$，则 β 有 q^{2n-4} 种选择；否则为 0 种。(2) 若 $\alpha \neq -e + \Psi(u_S, w_S)^{-1}u_S$，则 β有 q^{2n-5} 种选择。

证明. 固定一个满足给定条件的 α。回顾一下，$\alpha = -e + \alpha_S$。和之前一样，我们计算 $\langle w', u', f, \alpha\rangle$ 以及 $\langle w', u', e, f, \alpha\rangle$的维数。

一方面，我们有 $\langle w', u', f, \alpha\rangle = \langle w_S, e + u_S, f, -e + \alpha_S\rangle$。当且仅当 $\alpha_S \neq -u_S$时，这个子空间的维数为 4，也就是说，$\alpha \neq -u'$。还要注意，$-u' \in \langle w', u', e\rangle^{\perp} - \langle f\rangle^{\perp}$ 当且仅当 $w \circ_S u = 0$。

现在我们转向第二个子空间：

$$\left\langle w', u', e, f, \alpha \right\rangle = \langle w_S, u_S, e, f, \alpha_S\rangle = \langle w_S, u_S, \alpha_S\rangle \oplus \langle e, f\rangle .$$

当且仅当 $\alpha_S \notin \langle w_S, u_S\rangle$ 时，此子空间的维数为 5，因为 w_S, u_S线性无关。否则，其维数为 4。

假设 即 $\alpha_S = aw_S + bu_S$。根据 α 的定义中的正交关系，可得：

$$\begin{cases} 0 = \Psi(\alpha, w') = -1 - b\Psi(w_S, u_S), \\ 0 = \Psi(\alpha, u') = a\Psi(w_S, u_S). \end{cases}$$

由 $\Psi(w_S, u_S) \neq 0$ 可得 $a = 0$，且 $b = \Psi(u_S, w_S)^{-1}$。因此，存在唯一的 α，由 $\alpha = -e + \Psi(u_S, w_S)^{-1}u_S$ 给出，使得 $\langle w', u', e, f, \alpha\rangle$ 的维数为 4。若 $\alpha \neq -e + \Psi(u_S, w_S)^{-1}u_S$，则 $\langle w', u', e, f, \alpha\rangle$ 的维数为 5。

为完成此论断的证明，我们必须分析所得的不同情形。

首先假设 $\alpha = -e + \Psi(u_S, w_S)^{-1}u_S$（这确实是 α的一个可能解）。那么 $\langle w', u', e, f, \alpha\rangle$ 的维数为 4。然而，当且仅当 $\Psi(u_S, w_S)^{-1} = -1$，也即当且仅当 $w \circ_S u = 0$时，$\langle w', u', f, \alpha\rangle$ 的维数为 3。这表明，对于固定的 α，若$w \circ_S u = 0$，则 β有 $\frac{1}{q-1}\left(q^{2n-3} - q^{2n-4}\right) = q^{2n-4}$ 种选择。若 $w \circ_S u \neq 0$，两个子空间的维数均为 4，因此 β有 0 种选择。

最后，如果 $\alpha \neq -e + \Psi(u_S, w_S)^{-1}u_S$，我们便得到 β 的 q^{2n-5} 种选择。 □

由断言 1 和 2 可知，使 $W + T$ 退化的子空间 $T \perp S$ 总数为 $(q^{2n-4} - 1)q^{2n-5} + h$，其中 $h = q^{2n-4}$ 在 $w \circ_S u = 0$ 时成立，否则为 0。

为了完成这一命题的证明，我们证明 $W+T$的维数为 3，当且仅当 $w \circ_S u = 0$ 和 $x = -u_S$，其中 x, y 是 T的一个基，如公式（6）所示。根据推论 4.4，如果$x = -u_S$，那么 $\alpha = -e - u_S$，因此 β有 q^{2n-4} 种选择，从而 $y = \beta - f$也有相应的选择。

现在，假设 $W+T$ 是退化的，并取 T 的一组基 x, y，如公式（6）所示。假设 $0 = aw + bu + cx + dy$。将其投影到 S 上，可得 $0 = a(w - w_S) + b(u - u_S)$。于是，关于 a, b 存在非平凡解，当且仅当 $w \circ_S u = 0$。如果 $w \circ_S u \neq 0$，那么 $a = 0 = b$，而 $0 = cx + dy$ 也会导出 $c = 0 = d$。因此，若 $w \circ_S u \neq 0$，即 $W \in \mathcal{E}_6(S)$，则有 $\dim(W + T) = 4$，进而 $\mu_2^n(S, W) = 0$，且 $\mu_3^n(S, W) = q^{2n-5}(q^{2n-4} - 1)$。

现在假设 $w \circ_S u = 0$，也就是说 $W \in \mathcal{E}_5(S)$。我们证明 $\mu_2^n(S, W) = q^{2n-4}$。由公式（6）的关系可得：

$$\begin{cases} 0 = \Psi(aw + bu + cx + dy, w) = -b + c, \\ 0 = \Psi(aw + bu + cx + dy, u) = a + d. \end{cases}$$

因此，$c = b$、$d = -a$ 和 $0 = a(w - y) + b(u + x)$。通过投影到 S，我们得到 $0 = a(w - w_S)$，因为根据假设，$u = u_S$。此外，$w \neq w_S$ 得出 $a = 0$。这表明，要么 $b = 0$，要么 $x = -u = -u_S$。我们得出结论，$\dim(T + W) = 3$ 当且仅当 $x = -u_S$，即 $\alpha = -u'$。在这种情况下，根据断言 2 中的第 (1) 项，我们得到 β 的 q^{2n-4} 个解，因此也得到 $y = \beta - f$ 的解。由于满足公式（6）所述性质的有序对（x，y）是唯一的，因此我们有 $\mu_2^n(S, W) = q^{2n-4}$。

μ_5^n 的值可由引理 4.5 中的公式（10）得到，因为 $\Psi(w_S, u_S) \neq 0$。剩余的值 μ_6^n 可以通过取适当的集合补集来计算。

最后请注意，在 $n = 2$ 的情况下，这些值是一致的。至此，本命题的证明完成。□

既然我们已经看到，至少对于有限域，$\mu_j^n(S, W)$ 只取决于定义 3.2 中的六种情形，我们将这些值简记为 $\mu_{i,\ j}^n$：

定义 4.11. 设 V 是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上、维数为 $2n$ 的辛空间。对于 $1 \le i$、$j \le 6$，定义如下：

$$\mu_{i,j}^n := \begin{cases} \mu_j^n(S,W) & \text{there exist } S,W \in \mathcal{G}(V) \text{ with } W \in \mathcal{E}_i(S), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在以下定理中，我们根据表 1 中计算出的值 $b_n, c_n, d_n, e_n^1, e_n^2$ 总结本节的计算结果。

定理 4.12. 设 V 是一个维数为 $2n$, $n \ge 2$ 的辛空间，其底域为 $\mathbb{F}_q$。那么，当存在满足 $W \in \mathcal{E}_i(S)$ 的 $S, W \in \mathcal{G}(V)$ 时，表 2 总结了 $\mu_{i,j}^n$ 的值。

$\mu_{i,j}^n$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
$i=1$	0	0	0	d_n	0	0
$i=2$	0	0	0	$d_{n-1}\cdot q^2$	q^{4n-8}	0
$i=3$	0	0	q^{4n-9}	$d_{n-2}\cdot q^4$	$q^{4n-10}(q+1)$	$q^{4n-9}(q-2)$
$i=4$	1	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	e_{n-1}^1	e_{n-1}^2
$i=5$	0	q^{2n-4}	$q^{2n-5}(q^{2n-4}-1)$	d_{n-1}	e_{n-1}^1	e_{n-1}^2
$i=6$	0	0	$q^{2n-5}(q^{2n-4}-1)$	d_{n-1}	e_{n-1}^1	$e_{n-1}^2+q^{2n-4}$

TABLE 2. 条目（i, j）给出 $\mu_{i,j}^n$ 的值，前提是存在 S、$W \in \mathcal{G}(V)$，使得 $W \in \mathcal{E}_i(S)$。

5. Walks and eigenvalues

在本节中，$\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ 是一个有限域，V 是定义在 $\mathbb{K}$ 上的辛空间。对于 S、$W \in \mathcal{G}(V)$ 和 $r \ge 0$，令 $l_r(S,W)$ 表示正交图中从 S 到 W、长度为 r 的游走数。由于我们的目标是计算 $\mathcal{G}(V)$ 的特征值，本节将证明 $l_r(S,W)$ 仅取决于满足 $W \in \mathcal{E}_i(S)$ 的指标 i，进而将特征值的计算约化为大致求 6 维矩阵 $\mu = (\mu_{i,j}^n)_{i,j}$ 的最小多项式的根（见表 2）。

首先，我们通过归纳法证明，$l_r(S,W)$ 仅取决于满足 $W \in \mathcal{E}_i(S)$ 的指标 i。假设对于所有 $0 \le k < r$ 和 $1 \le i \le 6$，值 $l_k(S,W) = l_{i,k}^n$ 与满足 $W \in \mathcal{E}_i(S)$ 的 S、$W \in \mathcal{G}(V)$ 的选取无关。那么，对于 $1 \le i \le 6$ 和 $W \in \mathcal{E}_i(S)$，有：

$$l_r(S,W) = \sum_{T \perp S} l_{r-1}(T,W) = \sum_{j=1}^{6} \sum_{T \in \mathcal{C}_j(S,W)} l_{r-1}(T,W) = \sum_{j=1}^{6} \mu_{i,j}^n \cdot l_{j,r-1}^n. \tag{15}$$

Th我们 $l_r(S,W)$ 仅取决于指标 i，而与 S、W 的具体选择无关

例如，我们有：

$$l_1(S,W) = \begin{cases} 1 & W \in \mathcal{G}(S^\perp) = \mathcal{E}_4(S), \\ 0 & W \notin \mathcal{E}_4(S). \end{cases} \tag{16}$$

and

$$l_2(S,W) = \mu_4^n(S,W) = \begin{cases} d_n & W \in \mathcal{E}_1(S), \\ d_{n-1}\cdot|\mathbb{K}|^2 & W \in \mathcal{E}_2(S), \\ d_{n-2}\cdot|\mathbb{K}|^4 & W \in \mathcal{E}_3(S), \\ d_{n-1} & W \in \mathcal{E}_4(S) \cup \mathcal{E}_5(S) \cup \mathcal{E}_6(S). \end{cases} \tag{17}$$

定义 5.1. 设 V 是 $\mathbb{F}_q$ 上维数为 $2n$ 的辛空间。对于 $r \geq 0$，我们定义

$$\begin{aligned}\mu &:= (\mu^n_{i,j})_{i,j},\\ l^n_{i,r} &:= \begin{cases} l_r(S,W) & \text{there exist } S,W \in \mathcal{G}(V) \text{ with } W \in \mathcal{E}_i(S),\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}\\ l^n_r &:= (l^n_{1,r},\dots,l^n_{6,r})^t.\end{aligned}$$

因此，对于 V 的邻接矩阵 $\mathcal{G}(V)$ 和 $W \in \mathcal{E}_i(S)$，我们有：

$$\begin{cases} l^n_r = \mu \cdot l^n_{r-1} = \mu^r \cdot l_0, & \forall r \geq 1,\\ (A^r)_{(S,W)} = l^n_{i,r} = (\mu^r \cdot l_0)^t_i. \end{cases} \tag{18}$$

根据这些定义和前面提到的性质可知，多项式R 当且仅当 $R(\mu)\cdot l_0 = 0$ 时会湮灭 $\mathcal{G}(V)$ 的邻接矩阵 A。特别地，A 的最小多项式整除 μ 的最小多项式，因此其次数至多为 6。

利用这些观察结果，MAPLE 中的计算表明，A 的最小多项式关于 $n \geq 3$ 有以下 6 个根：

$$d_n, q^{2n-5}, \pm q^{2n-4}, \pm q^{3n-6}. \tag{19}$$

在 $n = 2$ 的情况下，$\mathcal{G}(V)$ 是一个非连通图，其连通分支数与 2-标架数相同。注意，$d_2 = 1$ 以及 l_r 的取值为：

$$l_0 = (1,0,0,0,0,0),\ l_1 = (0,0,0,1,0,0),\ l_2 = (1,0,0,0,0,0) = l_0.$$

因此，$R = X^2 - 1$ 是 $\mathcal{G}(V)$ 的邻接矩阵的最小多项式。

我们已经证明：

定理 5.2. 设 V 是维数为 $2n$、定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的辛空间，且 $n \geq 2$。$\mathcal{G}(V)$ 的邻接矩阵的最小多项式的根如下：

$$\begin{cases} d_n,\ q^{2n-5},\ \pm q^{2n-4},\ \pm q^{3n-6} & n \geq 3,\\ d_n,\ -q^{2n-4} & n = 2. \end{cases}$$

6. Connectivity

在本节中，我们刻画辛空间 V（其维数为 $2n$，定义在域 $\mathbb{K}$ 上）的正交图 $\mathcal{G}(V)$ 的连通性，从而也刻画标架复形 $\mathcal{F}(V)$ 的连通性。我们有如下定理：

定理 6.1（连通性）。设 V 是定义在 $\mathbb{K}$ 上、维数为 $n \geq 2$ 的辛空间。以下断言成立。

(1) 当且仅当 $n \geq 3$ 时，$\mathcal{F}(V)$ 是连通的。(2) 若 $n = 2$, $\mathcal{F}(V)$ 是同伦离散的，且有 $|\mathbb{K}|^2(|\mathbb{K}|^2+1)/2$ 个连通分支。(3) 若 $n = 3$, $\mathcal{G}(V)$ 的直径为 3，且 $\mathcal{F}(V)$ 同伦等价于 1-球面的楔和。特别地，对于 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ 有限，球面的数量为$-\tilde{\chi}(\mathcal{F}(V))$ $= \frac{1}{3}\left(q^{12} + 2q^{10} - q^8 - 2q^6 - 3q^4 + 3\right)$。(4) 若 $n \geq 4$, $\mathcal{G}(V)$ 的直径为 2。

此外，如果 V' 是维数为 $2n + r$ 的 r-退化辛空间，那么当且仅当 $n \geq 3$ 时，$\mathcal{F}(V')$ 是连通的。

证明。对于 $n \geq 2$， $\mathcal{G}(V) = \mathcal{F}(V)$，它是不连通的，并且每个 V 的 2-标架对应一个（可缩的）连通分支。因此，2-标架的数量等于顶点数除以 2，即 $d_3/2$。如果 $\mathbb{K}$ 是无限的，则该数量是无限的；或者，如果 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$，则由表 1 可知 $d_3/2 = q^2(q^2+1)/2$。

现在假设 $n \geq 4$。情形 $n = 3$ 将单独处理。设 S、W 是 $\mathcal{G}(V)$ 的两个顶点。将 $(S+W)^\perp =$ 根基$(S+W) \oplus U$ 写成，其中 U 是维数为 $2m$ 的辛空间，且根基$(S+W)$ 的维数为 r。于是 $2m = 2n -$ 维$(S+W) - r \geq 8-4-2 = 2$，这意味着 $\mathcal{G}(U) \neq \emptyset$。因此

$$l_2(S,W) = |\mathcal{G}((S+W)^\perp)| \geq |\mathcal{G}(U)| > 0.$$

这表明 $\mathcal{G}(V)$ 是连通的，且直径恰好为 2，因为总是存在不相邻的顶点。

最后，我们处理情形 $n = 3$。取 S、$W \in \mathcal{G}(V)$。如前所述， $l_2(S,W) > 0$，当 $(S+W)^\perp \neq$ 根基$(S+W)$ 时。然而，由于此时维数较低，等式 $(S+W)^\perp =$ 根基$(S+W)$ 成立当且仅当 $W \in \mathcal{E}_3(S)$。事实上，例如取 $S = \langle e_1, e_4 \rangle$ 以及 $W = \langle e_1 + e_2, e_4 + e_2 \rangle$ 为规范形式中的元素，即可得到 $\mathcal{E}_3(S) \neq \emptyset$。尽管如此，我们证明，对于 $W \in \mathcal{E}_3(S)$， $l_3(S,W) > 0$。确实，对于 $T \in \mathcal{C}_5(S,W)$， $l_3(S,W) \geq l_2(T,W) > 0$，其中后者根据命题 4.8 非空。因此， $\mathcal{G}(V)$ 是连通的，直径为 3。由于 $\mathcal{F}(V)$ 同伦等价于一个维数为 $n-2=1$ 的子复形，我们得出 $\mathcal{F}(V)$ 同伦等价于 1-球面的楔和。对于有限的 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$，我们可以根据 $\mathcal{F}(V)$ 的约化欧拉示性数计算这类球面的数量，该示性数为

$$\tilde{\chi}(\mathcal{F}(V)) = -\frac{1}{3}\left(q^{12} + 2q^{10} - q^8 - 2q^6 - 3q^4 + 3\right).$$

我们已经证明了命题（1–4）。剩下的部分是证明“此外”部分。

设 V' 是一个维数为 $2n+r$ 的 r-退化辛空间。考虑根基的一个补空间V，即 $V' =$ Rad$(V') \oplus V$，使得 V 是一个维数为$2n$ 的辛空间。假设 $n \geq 3$，那么根据命题（1）， $\mathcal{F}(V)$ 是连通的。令 $S \in \mathcal{G}(V')$，并记作 $S = \langle x, y \rangle$，其中 $x = r + w$, $y = r' + u$ 且 $w, u \in V$。注意， $0 \neq \Psi(x,y) = \Psi(w,u)$。因此 $W = \langle w, u \rangle \in \mathcal{G}(V)$。现在，考虑某个 $T \in \mathcal{G}(V \cap W^\perp)$；这样的对象存在，因为 V 是一个维数为 $2n \geq 6$ 的非退化空间。接下来容易验证， $T \perp S$ 也成立，即$T \perp (S+W)$ 且 $T \in \mathcal{G}(V)$。这表明 $\mathcal{G}(V')$，从而 $\mathcal{F}(V')$，都是连通的。

另一方面，如果 $\mathcal{F}(V')$ 是连通的，那么投影 $\mathcal{G}(V') \to \mathcal{G}(V)$ 是满射，因此 $\mathcal{G}(V)$ 是连通的。因此 $n \geq 3$ 由第 (1) 项得出。□

7. Simple connectivity

本节中，我们证明当 $n \geq 5$ 时， $\mathcal{F}(V)$ 是单连通的，其中 V是一个维数为 $2n$ 的辛空间。回顾一下，若 $n = 3$，则根据定理 6.1， $\mathcal{F}(V)$ 同伦等价于 1-球面的楔和，因此其基本群是一个非平凡自由群。然而， $n = 4$ 这一情形仍未解决。

为了证明 $\pi_1(\mathcal{F}(V)) = 1$ if $n \geq 5$，我们证明图 $\mathcal{G}(V)$ 的极小环是零伦的。具体而言，回顾一下， $\mathcal{F}(V)$ 中的每个回路都可以通过同伦变形为正交图 $\mathcal{G}(V)$ 中的闭游走。由于根据定理 6.1， $\mathcal{G}(V)$ 的直径为 2， $\mathcal{G}(V)$ 中的闭游走可以（通过同伦）分解为长度为 $r \leq 2 \cdot 2 + 1 = 5$ 的环，称为 r-边形。因此， $\mathcal{F}(V)$ 是单连通的，当且仅当每个 r-边形都是零伦的。此外，由于 $\mathcal{F}(V)$ 是一个团复形，

3边形均已填充，因此是零伦。因此，只需证明4边形和5边形也都是零伦。更多详情请参见 [6] 或 [2] 中的第4节。

我们首先证明，五边形同伦于若干正方形（因此也可能是四边形）的拼接。

引理 7.1. 设 C 是辛空间 V 的图 $\mathcal{G}(V)$ 中的一个五边形，其维数为 $2n$，且满足 $n \geq 5$。那么，C 在 $\mathcal{F}(V)$ 中同伦于若干正方形的拼接。

证明. 假设 C 是顶点序列 $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 = S_0$，其中对所有 $0 \leq i < 5$，$S_i \perp S_{i+1}$。那么 S_0 与 S_2 不正交，也与 S_3 不正交。设 $T = S_0 + S_2 + S_3$。显然 $\dim(T) \leq 6$，且 $\dim(\mathrm{Rad}(T)) \leq 2$，因为 $S_2 + S_3$ 是一个维数为 4 的非退化空间。因此

$$\text{维数}(T^\perp) - \dim(\mathrm{Rad}(T^\perp)) = 2n - \dim(T) - \dim(\mathrm{Rad}(T)) \geq 2n - 6 - 2 \geq 10 - 8 \geq 2$$

这表明 $T^\perp$ 是一个可能退化的辛空间，其中包含维数为 2 或更高的非退化辛子空间。于是我们可以取 $W \in \mathcal{G}(T^\perp)$，而这$W$ 将五边形剖分为两个正方形和一个三角形。引理得证。□

引理 7.2. 设 C 是辛空间 V（维数为 $2n$）的图 $\mathcal{G}(V)$ 中的一个四边形，且 $n \geq 5$。那么 C 在 $\mathcal{F}(V)$ 中是零伦的。

证明. 假设 C 是顶点序列 $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 = S_0$，且对所有 $0 \leq i < 4$ 都有 $S_i \perp S_{i+1}$。若 $\mathcal{F}((S_0 + S_2)^\perp)$ 连通，则可得到一条连接 S_1 与 S_3 $\in \mathcal{F}((S_0 + S_2)^\perp)$ 的路径，从而将该四边形三角剖分。例如，当和 $S_0 + S_2$ 非退化时，这一结论成立。对于 $S_1 + S_3$，也可类似处理。

因此，根据定理 6.1，接下来只需分析 $S_0 + S_2$ 和 $S_1 + S_3$ 都退化，且它们的正交补中有一个维数为 < 6 的非退化部分的情形。注意，若 $S_2 \in \mathcal{E}_2(S_0)$，则 $\dim(\mathrm{Rad}(S_0 + S_2)) = 1$，所以

$$\dim((S_0 + S_2)^\perp) - \dim(\mathrm{Rad}(S_0 + S_2)) = 2n - 3 - 1 \geq 6.$$

因此，在这种情况下，$\mathcal{F}((S_0 + S_2)^\perp)$是连通的（见定理 6.1）。

因此，$S_0 + S_2$和 $S_1 + S_3$均为维数为 4 的退化空间（即 $S_2 \in \mathcal{E}_3(S_0)$ 和$S_3 \in \mathcal{E}_3(S_1)$），且它们的正交补的非退化部分维数至多为 4，这意味着

$$4 \geq \dim((S_0 + S_2)^\perp) - \dim(\mathrm{Rad}(S_0 + S_2)) = (2n - 4) - 2.$$

这表明 $n = 5$。

设 e, f和 e', f'分别是 S_0和 S_1的辛基。令 $W = S_2 = \langle w, u\rangle$ 和 $T = S_3 = \langle x, y\rangle$，其中这些基如表 1 所取。由于 $W \perp S_1$,$T \perp S_0$ $W \not\perp S_0$ 和 $T \not\perp S_1$，我们有：

$$\begin{cases} w = w_e e + w_f f + \hat{w}, \\ u = u_e e + u_f f + \hat{u}, \\ x = x_{e'} e' + x_{f'} f' + \hat{x}, \\ y = y_{e'} e' + y_{f'} f' + \hat{y}, \end{cases}$$

其中带帽向量属于 $(S_0 + S_1)^\perp$。事实上，$\langle \hat{w}、\hat{u}、\hat{x}、\hat{y}\rangle$ 由正交关系 $T \perp W$ 可知构成一个全各向同性子空间，并且 $T \in \mathcal{E}_3(S_1)$ 和 $W \in \mathcal{E}_3(S_0)$（见表 1）。我们还知道 $\hat{w} = w_{S_0}$、$\hat{u} = u_{S_0}$ 线性无关。

取 $w' = w - \hat{}u$、 $u' = u - \hat{}u$。注意，由于线性无关性， $w'_{S_0} = \hat{}w - \hat{}u \neq 0$，根据定义， $u'_{S_0} = 0$，且 $\Psi(w', u') = \Psi(w, u) = 1$。因此 $W' = \langle w', u' \rangle \in \mathcal{E}_2(S_0)$。还要注意， $W' \perp T$以及 $W' \perp S_1$。于是正方形 $C' = S_0$、 S_1、 W'、 T、 S_0如上所见是零伦的。

另一方面，注意到 $W + W' = \langle w, u, \hat{}u \rangle$的维数为 3，即 $W' \in \mathcal{E}_2(W)$。这意味着正方形 $C'' = W', S_1, W, T, W'$也是零伦的。由于 C与正方形 C' 和 C''的串接同伦，我们得出 C 是零伦的。□

我们已经证明了以下定理：

定理 7.3. 设 V是一个维数为 $2n \geq 10$的辛空间。那么 $\mathcal{F}(V)$ 是单连通的。

8. Application of Garland's method

本节中，我们将 Garland 方法应用于有限域上的辛空间的框架复形。

设 $_{\mathbb{K}}$是任意环。对于 $m \geq -1$，如果拓扑空间 X是关于 $_{\mathbb{K}}$的 m-连通的，即对所有 $k \leq m$， $\widetilde{H}_k($ $X, _{\mathbb{K}}) = 0$。维数为 d的单纯复形 K若关于 $_{\mathbb{K}}$是$(d-1)$-连通的，则称其关于 $_{\mathbb{K}}$是球形的。此外，如果对每个单形 $\sigma \in K$（包括 $\sigma = \emptyset$），链环 $\mathrm{Lk}_K(\sigma)$ 关于 $_{\mathbb{K}}$都是维数为 $d - |\sigma|$的球形，则称 K关于 $_{\mathbb{K}}$是 Cohen-Macaulay 的。

现在回顾 Garland 定理。见 [3, 5]。

定理 8.1（Garland）。设 K 是一个维数为 d 的有限单纯复形，并且$0 \leq i \leq d$。假设对每个 $(i-1)$ 维单形$\sigma \in K$，以下条件均成立：

(1) 链环 $\mathrm{Lk}_K(\sigma)$ 是维数为 ≥ 1 的连通空间。(2) $\mathrm{Lk}_K(\sigma)$ 的 1-骨架的归一化拉普拉斯算子的最小非零特征值严格大于 $\frac{i}{i+1}$。

$\widetilde{}$那么 $H_i(K, \mathbb{Q}) = 0$。

回顾一下，图 $\mathcal{G}$ 的归一化拉普拉斯算子为 $\mathrm{Id} - D^{-1}A$，其中 D 是以顶点度为对角元素的对角矩阵， A 是 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵。

我们将 Garland 方法应用于标架复形 $\mathcal{F}(V)$。注意，若 $\sigma \in \mathcal{F}(V)$ 是一个 i-标架，则其链环自然同构于 $\mathcal{F}(\langle\sigma\rangle^{\perp})$，其中 $\langle\sigma\rangle^{\perp}$ 是一个维数为 $2(n-i)$ 的辛空间。因此，根据定理 6.1，当且仅当 $n - i \geq 3$ 时，这个链环是连通的。

另一方面，我们已经计算了有限域上每个辛空间 V 对应的 $\mathcal{F}(V)$ 的 1-骨架 $\mathcal{G}(V)$ 的特征值。因此，根据定理 5.2， $n \geq 3$ 的 $\mathcal{G}(V)$ 的归一化拉普拉斯算子的最小非零特征值为

$$\lambda_{\min}(n, q) := 1 - \frac{q^{3n-6}}{d_n}.$$

因此我们固定 $0 \leq i \leq n-3$（即满足 $n - i \geq 3$），并检验 Garland 定理的条件：由于每个 $(i-1)$-单形的链环都同构于一个维数为 $2(n-i)$ 的辛空间的标架复形，关于最小特征值的条件为

$$\lambda_{\min}(n-i, q) > \frac{i}{i+1} = 1 - \frac{1}{i+1}. \tag{20}$$

上述不等式等价于：

$$\frac{d_{n-i}}{q^{3(n-i)-6}} > i+1. \tag{21}$$

令 $j := n-i$。因此，(21) 等价于：

$$P_j(q) := \frac{(q^{2j-2}-1)}{q^{j-2}(q^2-1)} + j - 1 > n. \tag{22}$$

我们注意到，$P_j(q)$ 关于 j 是单调的。

引理 8.2. 设 $3 \le j < i \le n$ 和 $q \ge 2$。则 $P_j(q) + (i-j) < P_i(q)$.

因此，根据 Garland 方法，如果 $P_j(q) > n$那么 $\mathcal{F}(V)$ 是 $(n-j)$-连通的 over $\mathbb{K}$.

证明。我们计算：

$$P_i(q) - P_j(q) - (i-j) = \frac{(q^{2i-2}-1)q^{j-2} - (q^{2j-2}-1)q^{i-2}}{q^{j+i-4}(q^2-1)} = \frac{(q^{j+i-2}+1)(q^{i-2}-q^{j-2})}{q^{j+i-4}(q^2-1)}.$$

这个表达式为正，因为 $q^{i-2} > q^{j-2}$。

特别是，这一部分由式 (22) 和 Garland 方法的应用得出。 □

我们计算若干个 $3 \le j \le n$ 取值下的 $P_j(q)$：

- 若 $j=3$，则 $P_3(q) = q+2+q^{-1}$。因此，$n < P_3(q)$ 当且仅当 $n < q+3$。
- 若 $j=4$，则 $P_4(q) = q^2+4+q^{-2}$。因此，$n < P_4(q)$ 当且仅当 $n < q^2+4$。
- 设 $n = 2n'+\epsilon$，其中 $\epsilon \in \{0,1\}$。令 $j := n'+\epsilon$，并考虑以下表达式：

$$P_j(q) - n = \frac{q^{2n'+2(\epsilon-1)}-1}{q^{n'+\epsilon-2}(q^2-1)} - n' - 1.$$

根据基本分析，我们可知 $P_j(q) > n$ 当且仅当表3中所示的界限成立。因此，若满足以下任一条件，则 $\mathcal{F}(V)$ 在特征为0的域上是 $n-j = [n/2]$-连通的：

(1) $q=2$ 和 $n \ge 7$，(2) $q=3$ 和 $n \ge 5, n \ne 6$，(3) $q \ge 4$ 和 $n \ge 5$。

	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 1$
$q=2$	$n' \ge 4$	$n' \ge 3$
$q=3$	$n' \ge 4$	$n' \ge 2$
$q \ge 4$	$n' \ge 3$	$n' \ge 2$

TABLE 3. $P_{n'+\epsilon}(q) - n$ 的正性，以 q、n' 和 ϵ表示。

由于偏序集 $\widehat{\mathcal{F}}(V)$ 的一个区间要么是球面的楔和，要么同构于某个标架 σ 的 $\widehat{\mathcal{F}}(\langle\sigma\rangle^{\perp})$，因此当 $n < q+3$ 时，我们可以得出其在特征为0的域上具有 Cohen–Macaulay性这一结论。我们在下面的推论中总结这些结论。

推论8.3. 设 V 是一个维数为 $2n$的辛空间 $n \ge 4$，定义在有限域$\mathbb{F}_q$上，且$\mathbb{K}$ 是一个特征为0的域。

(1) 若 $n < q+3$，则 $\mathcal{F}(V)$ 在 $\mathbb{K}$ 上是 Cohen-Macaulay 的。(2) 若 $n < q^2+4$，则 $\widehat{\mathcal{F}}(V)$ 在 $\mathbb{K}$ 上是 $(n-4)$-连通的。(3) 若 $n \ge 7$ 对于 $q=2$、3，或 $n \ge 5$ 对于 $q \ge 4$ 成立，则 $\mathcal{F}(V)$ 在 $\mathbb{K}$ 上是 $[n/2]$-连通的。

9. Final remarks

一般来说，我们可以证明偏序集 $\mathcal{F}(V)$ 在任意环上都不是 Cohen-Macaulay 的。当维数 $2n$ 足够大时，情况便是如此，因为某些链环将不是球形的。具体而言，对于给定的 n_0，我们可以证明 $\widetilde{H}_{n_0-3}(\mathcal{F}(V)\ \mathbb{Q}) \neq 0$，其中 V是一个在 $\mathbb{F}_q$ 上维数为 $2n_0$ 的辛空间。于是，对于任意维数为 $2n \geq 2n_0$的 V，我们取一个标架 $\sigma \in \mathcal{F}(V)$，使得 $|\sigma| = n-n_0$。链环 $\mathcal{F}(V)_{>\sigma}$同构于 $\widehat{\mathcal{F}}(\langle\sigma\rangle^{\perp})$，且 $\langle\sigma\rangle^{\perp}$是维数为 $2n_0$ 的辛空间，因此 $\widetilde{H}_{n_0-3}(\widehat{\mathcal{F}}(V)_{>\sigma}, \mathbb{K}) \neq 0$，也就是说，$\widehat{\mathcal{F}}(V)_{>\sigma}$在 $\mathbb{K}$ 上不是球形的。

Prop命题 9.1. 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上维数为 $2n$ 的辛空间。

(1) 如果 $n > q^2(q^2+1) + n(n-2)q^{-4}(q^4+q^2+1)^{-1}$，那么 $\widetilde{H}_{n-3}(\mathcal{F}(V)\ \mathbb{Q}) \neq 0$。(2) 如果 $n \geq m$，其中 m 满足第 (1) 项的界限，则 $\mathcal{F}(V)$ 在任何环上都不是 Cohen-Macaulay。

证明。第 (1) 项可由对链群维数的基本计数得出。具体而言，令 $f_m = |\mathcal{F}_m(V)|$ 表示 $\mathcal{F}(V)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上第 $(m-1)$ 个链群的维数。这些值可由公式 (2) 计算得出。然后，如果界限

$$f_n + f_{n-2} > f_{n-1} + f_{n-3} \tag{23}$$

成立，$H_{n-3}(\mathcal{F}(V)\ \mathbb{Q}) \neq 0$。现在不难验证，式（23）成立当且仅当第（1）项的界成立。

Item (2) 可由本命题陈述前的讨论得出 n. □

注 9.2. 对于维数为 8 的辛空间 V，即 $n=4$，我们尚未描述 $\mathcal{F}(V)$ 的基本群。注意，如果底域是大小为 q 的有限域，那么 $P_3(q) > 4$，因此由 Garland 定理可知，$\mathcal{F}(V)$ 在特征零的域上是 1-连通的。也就是说，$H_1(\mathcal{F}(V)\ \mathbb{Z})$ 是一个有限阿贝尔群。这或许表明 $\mathcal{F}(V)$ 是单连通的。此外，根据 [7] 的结果，$\pi_1(\mathcal{F}(V))$ 具有 Kazhdan 性质 (T)。

最后，我们想知道关于 Cohen–Macaulay 性的结果能否推广到同伦语境。也就是说，$n < q+3$ 是否意味着 $\mathcal{F}(V)$ 是同伦 Cohen-Macaulay。

References

[1] M. Aschbacher. *Finite group theory, Second edition.*《剑桥高等数学研究》丛书，第 10 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2000 年。xii+304 页。[2] M. Aschbacher 和 Y. Segev. *Extending morphisms of groups and graphs*，《数学年刊》135 (1992), 297-323。[3] W. Ballmann 和 J. Świ

On L^2-cohomology and Property (T) for Automorphism Groups atkowski. , *of Polyhedral Cell Complexes* **7** 1997 4, 615 645
《几何与泛函分析》（），第 期，–。[4] K.M. Das. *Some Results About the Quillen Complex of* $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$，《代数学杂志》209 (1998), 427-445。[5] H. Garland.

p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups，《数学年刊》(2) 97 (1973), 375–423。[6] K.I. Piterman 和 V. Welker. *Homotopy properties of the complex of frames of a unitary space*。预印本（2022年）。[7] A. Zuk. *Le propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres*，《巴黎科学院会议报告》S´erie I Math. 323 (1996), 第 5 期, 453-458。

Philipps-Universität Marburg, Fachbereich Mathematik und Informatik, 35032 Marburg,Germany*Email address*: piterman@mathematik.uni-marburg.de