arXiv:2305.02947v1 [nlin.CG] 4 May 2023

元胞自动机基本组成研究

Alonso Castillo-Ramirez*

Maria G. Magaña-Chavez†

瓜达拉哈拉大学精确科学与工程大学中心数学系，墨西哥。

2023年5月5日

摘要

初等元胞自动机（ECA）是一类具有小型记忆集的一维离散计算模型。自先驱研究者 Stephen Wolfram 将其作为时间离散动力系统进行研究以来，这类模型便引起了广泛关注。256 个 ECA 中的每一个都标记为规则 X，其中 X 是一个介于 0 和 255 之间的整数。在计算研究中，一个通常被忽视的重要性质是：任意两个一维元胞自动机的复合仍然是一个一维元胞自动机。在本章中，我们开始对 ECA 的复合进行系统研究。直观地说，如果对于许多规则 Y，复合 $X \circ Y$ 和 $Y \circ X$ 具有较小的最小记忆集，那么我们就认为规则 X 具有较低的复杂度。因此，我们提出了一种基于 ECA 之间复合关系的全新分类方法。我们还描述了 ECA 的所有半群（即 ECA 的复合闭集），并从半群理论的角度分析其基本结构。特别地，我们确定 ECA 的最大半群包含 9 个元素，并且具有一个 8 阶的子半群，该子半群是 R-平凡的。这一性质最近已被用于定义半群上的随机游走和马尔可夫链。

关键词： 初等元胞自动机；幂等元；幺半群。

1 引言

初等元胞自动机（ECA）是一维元胞自动机，基于二元字母表 $A = \{0,1\}$，并具有记忆集 $\{-1, 0, 1\}$。Stephen Wolfram 于 20 世纪 80 年代开始对其进行系统研究，将每个 ECA 标记为规则 X，其中 X 为 0 到 255 之间的整数（[17]）。此外，通过将它们视为时间离散动力系统，Wolfram 根据复杂程度递增将 ECA 分为四类：均匀、周期、混沌和复杂行为（[17, 18]）。Matthew Cook 证明规则 110 能够实现通用计算，这是一个重大突破（[8]）。

在本章中，我们关注一种在计算研究中常被忽视的元胞自动机运算：其全局函数的复合。两个一维元胞自动机的复合仍然是一维元胞自动机，因此，所有一维元胞自动机组成的集合（通常记作 $\mathrm{End}(A^{\mathbb{Z}})$ 或 $\mathrm{CA}(\mathbb{Z}; A)$）构成一种称为 *幺半群* 的代数结构（即配备二元结合运算和单位元的集合）。这个幺半群的可逆元群（通常记作 $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ 或 $\mathrm{ICA}(\mathbb{Z}; A)$）是符号动力学中的重要研究对象（例如，参见 [2], [12, Sec. 13.2], [3, Sec. 22]）。

*电子邮件：alonso.castillor@academicos.udg.mx

†电子邮件：maria.magana3917@alumnos.udg.mx

本章的目标是开始对初等元胞自动机之间的复合行为进行计算探索。很容易看出，两个初等元胞自动机的复合不一定是初等元胞自动机；然而，这种情况发生的频率有多高？结果表明，如果我们随机选择两个规则 X and Y，复合 $X \circ Y$ 再次成为初等元胞自动机的概率约为6.29%。如果从选择中排除规则0、51、204和255（因为这些规则与任何初等元胞自动机复合，结果总是初等元胞自动机），那么 $X \circ Y$ 是初等元胞自动机的概率会降至3.3%。给定一个规则 X，如果另一个规则 Y 与 X 的复合分别为 $Y \circ X$ 或 $X \circ Y$ 且结果是初等元胞自动机，我们就称 Y 是 X 的左伴随元或右伴随元。我们观察到，根据Wolfram的分类，越复杂的规则往往具有越少的左伴随规则和右伴随规则（表3）。

我们根据256条初等元胞自动机与其他初等元胞自动机复合时的行为，对其复杂性进行分类。对于这种分类，左伴随规则和右伴随规则的概念过于严格，因此我们将准初等元胞自动机（QECA）定义为其记忆集包含于 $\{k-1, k, k+1\}$ 中的一维元胞自动机，其中 $k \in \mathbb{Z}$。如果 $Y \circ X$（分别为 $X \circ Y$）是一个准初等元胞自动机，则称规则 Y 是规则 X 的左（分别为右）准伴随规则 。因此，我们将每条规则 X 与一对非负整数（l_X、r_X）对应起来，其中 l_X 是 X 的左准伴随元数量，r_X 是 X 的右准伴随元数量。这样，全部256条规则就对应于欧几里得空间 $\mathbb{R}^2$ 中的点，因此我们可以应用层次聚类，从而得到四个类别（标记为0至3），并按准伴随元数量递减的顺序排列（表5）。我们的分类提供了一种对初等元胞自动机进行分组的非平凡方式，它不以其最小记忆集的大小为依据，并且不同于Wolfram类的分类。

本章最后一部分，我们从半群理论的角度研究初等元胞自动机。回顾一下，半群 是一个配备了结合二元运算的集合；幺半群与半群之间没有实质区别，因为总可以添加或去掉一个单位元，从而得到其中一种结构。我们首先研究定义在幂等元初等元胞自动机上的自然偏序 ([7, 第 1.8] 节)（即满足 $X \circ X = X$ 的规则）。接下来，我们求出并分析所有元素均为初等元胞自动机的半群。结果表明，恰有七个*ECA*-极大幺半群 $M_i, i = 1, \ldots\ldots, 7$；所谓极大，是指它们是初等元胞自动机组成的幺半群，且不真包含于任何其他由初等元胞自动机构成的幺半群中（命题 2）。一维元胞自动机的补与反射对称性使我们能够证明 M_1 与 M_2 同构，M_3 与 M_4 同构，且 M_6 与 M_7 同构。这些幺半群之间不存在其他同构关系。我们给出所有这些幺半群的凯莱表和 Green 等价类。其中最值得关注的是幺半群 $M_1 \cong M_2$：它的阶为 9，并包含一个阶为 8 的子幺半群 M_1'，该子幺半群右可逆且为 R-平凡。这一性质引起了广泛关注，因为它可用于定义幺半群上的随机游走和马尔可夫链（见 [1]）。

本章结构如下。第2节中，我们确立符号约定，并回顾元胞自动机的一些基本结果，包括反射和补这两种著名对称的关键性质。第3节中，我们研究初等元胞自动机之间的复合，并定义左、右伴随元和准伴随元的概念；这使我们能够根据左、右准伴随元的数量对初等元胞自动机进行分类。第4节中，我们回顾半群理论的一些基本概念，包括幂等元上的自然偏序和格林关系。第5节中，我们首先描述幂等初等元胞自动机上的自然偏序。随后，我们证明，任何由初等元胞自动机构成的半群都必须包含在七个幺半群 $M_i, i = 1、\ldots\ldots、7$ 之一中。本节最后考察这七个幺半群的结构。最后，第6节讨论本章的主要结论，并提出未来工作的若干可能方向。附录6提供了一些表格，其中列出了88个初等元胞自动机等价类的每个代表元的左、右伴随元数量、ECA分解数量以及左、右准伴随元数量。表格中的初等元胞自动机代表元按照其Wolfram类排序。

本章中的许多新成果是第二作者在瓜达拉哈拉大学撰写的硕士论文 [13] 的一部分。

2 元胞自动机基础理论

在本章中，我们将考虑字母表 $A := \{0, 1\}$。满移位，或构型空间，$A^{\mathbb{Z}}$ 是所有映射 $x\colon \mathbb{Z} \to A$ 的集合，并配备了 $\mathbb{Z}$ 在 $A^{\mathbb{Z}}$ 上定义的移位作用，其定义如下:

$$(k \cdot x)(s) := x(s - k)$$

对每个 $s, k \in \mathbb{Z}, x \in A^{\mathbb{Z}}$。$A^{\mathbb{Z}}$ 的一个元素 x 可视为一个双无限序列

$$x = \ldots\ x(-2)\ x(-1)\ .\ x(0)\ x(1)\ x(2)\ \ldots,$$

其中，对所有 $s \in \mathbb{Z}$，$x(s) \in A$，并且我们在序列的第零项前加一个点。采用这种记法，可以很容易看出，$k \in \mathbb{Z}$ 在 x 上的移位作用表示序列向右平移 k位（若 k 为正），或向左平移 $-k$ 位（若 k 为负）：

$$k \cdot x = \ldots\ x(-2 - k)\ x(-1 - k)\ .\ x(-k)\ x(1 - k)\ x(2 - k)\ \ldots.$$

集合 $A^{\mathbb{Z}}$ 也可以赋予离散积拓扑，它是 A上离散拓扑的积拓扑。$A^{\mathbb{Z}}$ 上的离散积拓扑的一些基本事实在 [6, 第 1]章中有所描述。

定义 1。$A^{\mathbb{Z}}$ 上的元胞自动机是一个函数 $\tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$，满足存在一个有限子集$S \subseteq \mathbb{Z}$，称为 τ 的记忆集，以及一个局部函数 $\mu\colon A^S \to A$，使得

$$\tau(x)(s) = \mu(((-s) \cdot x)|_S), \quad \forall x \in A^{\mathbb{Z}}, s \in \mathbb{Z}.$$

任意元胞自动机 $\tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ 在 $A^{\mathbb{Z}}$的积离散拓扑下都是连续的，并且 $\mathbb{Z}$- 等变，这意味着

$$\tau(k \cdot x) = k \cdot \tau(x), \text{ for all } x \in A^{\mathbb{Z}}, k \in \mathbb{Z}.$$

此外，Curtis-Hedlund-Lyndon 定理（见 [6, 定理 1.8.1]）保证，任意连续且 $\mathbb{Z}$-等变的自映射 $A^{\mathbb{Z}}$ 都是元胞自动机。

元胞自动机 τ 的记忆集并不唯一：若 S 是 τ的一个记忆集，则任何有限超集 $S' \supseteq S$ 也都是 τ的一个记忆集。不过，每个元胞自动机都有唯一的最小记忆集 (MMS)，即基数最小的记忆集，它是 τ 所有记忆集的交集（见 [6, 命题 1.5.2]）。

定义 2. 若一个初等元胞自动机 (ECA) 是定义在 $A^{\mathbb{Z}}$ 上的元胞自动机，且其最小记忆集包含于 $\{-1,0,1\}$，则称其为初等元胞自动机。

初等元胞自动机被标记为“规则 X”，其中 X 是一个从 0 到 255 的整数。在每种情况下，规则 X 的局部规则$\mu_X\colon A^{\{-1,0,1\}} \to A$ 按如下方式确定：令 $X_1 \ldots X_8$ 为 X的二进制表示，并将 $A^{\{-1,0,1\}}$ 的元素按字典序降序排列，即 111，110，……，000；随后，μ_X 作用于 $A^{\{-1,0,1\}}$ 中的第 i个元素所得的像为 X_i。我们将规则 X 的全局函数也记作同一个整数 X，即 $X\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$。

例如，通过下表定义 $\mu\colon A^{\{-1,0,1\}} \to A$

$x \in A^S$	111	110	101	100	011	010	001	000
$\mu(x)$	0	1	1	0	1	1	1	0

由局部规则 $\mu\colon A^{\{-1,0,1\}} \to A$ 定义的初等元胞自动机是规则 110，因为上述表格第二行中的数字以二进制表示为 110。

以下结果是本研究的主要灵感来源（参见 [6, 1.4.9]）。

定理 1。令 $\sigma\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ 和 $\tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ 分别为记忆集 S 和 T 的元胞自动机。则，复合 $\sigma \circ \tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ 是一个记忆集为 $S + T := \{s + t\colon s \in S, t \in T\}$ 的元胞自动机。

$\sigma \circ \tau$ 的局部规则可以根据 σ 和 τ 的局部规则来描述，如 [6,备注 1.410]中所述。需要注意的是，定理 1 为 $\sigma \circ \tau$ 给出的记忆集不一定是 MMS；这意味着 $\sigma \circ \tau$ 的 MMS 可能是 $S+T$ 的任意子集。

在 [17]（另见 [18, 第 2.1 节]）中，Wolfram 根据初等元胞自动机从一个随机初始状态经过多次迭代后的行为，将其分为四类：

- **I 类**：均匀行为。
- **II 类**：周期行为。
- **III 类**：混沌行为。
- **IV 类**：复杂行为。

表 1：Wolfram 对初等元胞自动机的分类。

Wolfram's 类别	**Rules**
I 类	0 8 32 40 128 136 160 168
II 类	1 2 3 4 5 6 7 9 10 11 12 13 14 15 19 23 24 25 26 27 28 29 33 34 35 36 37 38 42 43 44 46 50 51 56 57 58 62 72 73 74 76 77 78 94 104 108 130 132 134 138 140 142 152 154 156 162 164 170 172 178 184 200 204 232
III 类	18 22 30 45 60 90 105 122 126 146 150
IV 类	41 54 106 110

在下一节中，我们将把256种初等元胞自动机划分为88个等价类，这些等价类保留了元胞自动机的许多动力学和代数性质（见表2）。表1按Wolfram类对初等元胞自动机进行归类，每个等价类仅列出一个代表。

2.1 元胞自动机的等价性

对于任意 $x \in A^{\mathbb{Z}}$，用 x^{rev} 表示 x 关于 0 的反射；换言之，$x^{\mathrm{rev}}(k) := x(-k)$，对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 均成立，这意味着

$$x^{\mathrm{rev}} = \ldots\ x(2)\ x(1)\ .\ x(0)\ x(-1)\ x(-2)\ \ldots$$

现在，对于任意细胞自动机 $\tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$，定义其反射 $\tau^\star\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ 为

$$\tau^\star(x) = (\tau(x^{\mathrm{rev}}))^{\mathrm{rev}},\ \text{for all } x \in A^{\mathbb{Z}}.$$

元胞自动机的反射满足以下性质（证明见 [5, 命题 1]）。

引理 1. 设 $\tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ 是一个记忆集为 T 的元胞自动机。

1. $\tau^\star\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ 是一个记忆集为 $-T := \{-t\colon t \in T\}$ 的元胞自动机。
2. $(\tau^\star)^\star = \tau$.
3. 对于任何其他元胞自动机 $\sigma\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$,

$$(\sigma \circ \tau)^\star = \sigma^\star \circ \tau^\star.$$

在实际应用中，通过局部规则表很容易得到初等元胞自动机的反射：我们只需对表格第一行中的模式应用 rev 操作。例如，规则 110 的反射的局部规则表为

$x \in A^S$	111	110	101	100	011	010	001	000
$\mu(x)$	0	1	1	1	1	1	0	0

因此，规则 110 的反射是规则 124。

元胞自动机之间的另一种重要对称性由规则 51 定义。规则 51 是一种可逆的初等元胞自动机，它会交换 $A^{\mathbb{Z}}$ 中构型里的 0 和 1。对于任意元胞自动机 $\tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$，定义其补 $\tau^c\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ 为

$$\tau^c := 51 \circ \tau \circ 51.$$

由于 $51 \circ 51 = \mathrm{id}$，很容易证明以下结论。

引理 2。设 $\tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ 是记忆集为 T 的元胞自动机。

1. $\tau^c\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ 是一个记忆集为 T 的元胞自动机。
2. $(\tau^c)^c = \tau$.
3. 对于任何其他元胞自动机 $\sigma\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$,

$$(\sigma \circ \tau)^c = \sigma^c \circ \tau^c.$$

初等元胞自动机的补可以通过交换规则表两行中的 0 和 1，从其局部规则表中得到。例如，规则 110 的补的局部规则表为

$x \in A^S$	111	110	101	100	011	010	001	000
$\mu(x)$	1	0	0	0	1	0	0	1

因此，规则 110 的补规则是规则 137。

引理 3. 对于任意元胞自动机 $\tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$，我们有

$$(\tau^c)^\star = (\tau^\star)^c.$$

证明。首先注意到 $(51)^\star = 51$。因此，我们有

$$\begin{aligned}(\tau^c)^\star &= (51 \circ \tau \circ 51)^\star \\ &= (51)^\star \circ \tau^\star \circ (51)^\star \\ &= 51 \circ \tau^\star \circ 51 \\ &= (\tau^\star)^c.\end{aligned}$$

结果如下。 □

反射和补使我们能够为细胞自动机τ 定义一个等价类：$A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$，它与 τ 在由反射和补对称性生成的群作用下的轨道相同：

$$[\tau] := \{\tau, \tau^\star, \tau^c, (\tau^c)^\star\}.$$

这将 256 个初等元胞自动机划分为 88 个等价类，如 [18, 表 1] 和 [17, 表1]所述。初等元胞自动机的许多动力学和代数性质在这些等价类中得以保留。表2展示了这 88 个等价类及其最小记忆集的大小。

表2：初等元胞自动机的等价关系

Rule	MMS 的大小	等价规则			Rule	MMS 的大小	等价规则		
0	0	255			56	3	98	185	227
1	3	127			57	3	99		
2	3	16	191	247	58	3	114	163	177
3	2	17	63	119	60	2	102	153	195
4	3	223			62	3	118	131	145
5	2	95			72	3	237		
6	3	20	159	215	73	3	109		
7	3	21	31	87	74	3	88	173	229
8	3	64	239	253	76	3	205		
9	3	65	111	125	77	3			
10	2	80	175	245	78	3	92	141	197
11	3	47	81	117	90	2	165		
12	2	68	207	221	94	3	133		
13	3	69	79	93	104	3	233		
14	3	84	143	213	105	3			
15	1	85			106	3	120	169	225
18	3	183			108	3	201		
19	3	55			110	3	124	137	193
22	3	151			122	3	161		
23	3				126	3	129		
24	3	66	189	231	128	3	254		
25	3	61	67	103	130	3	144	190	246
26	3	82	167	181	132	3	222		
27	3	39	53	83	134	3	148	158	214
28	3	70	157	199	136	2	192	238	252
29	3	71			138	3	174	208	244
30	3	86	135	149	140	3	196	206	220
32	3	251			142	3	212		
33	3	123			146	3	182		
34	2	48	187	243	150	3			
35	3	49	59	115	152	3	188	194	230
36	3	219			154	3	166	180	210
37	3	91			156	3	198		
38	3	52	155	211	160	2	250		
40	3	96	235	249	162	3	176	186	242
41	3	97	107	121	164	3	218		
42	3	112	171	241	168	3	224	234	248
43	3	113			170	1	240		
44	3	100	203	217	172	3	202	216	228
45	3	75	89	101	178	3			
46	3	116	139	209	184	3	226		
50	3	179			200	3	236		
51	1				204	1			
54	3	147			232	3			

3 初等元胞自动机的复合

在本节中，我们研究复合在初等元胞自动机集合上的行为。给定两个初等元胞自动机 X 和 Y，不难发现 $X \circ Y$ 不一定是初等元胞自动机；根据定理 1，$X \circ Y$ 的一个记忆集是

$$\{-1, 0, 1\} + \{-1, 0, 1\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

但 $X \circ Y$ 是初等元胞自动机，当且仅当其 MMS 包含于 $\{-1, 0, 1\}$。目前没有一般性的理论结果可以帮助我们确定 $X \circ Y$的 MMS。

我们在 Python 中实现了 [14] 一个计算任意两个初等元胞自动机复合的函数，以及一个确定该复合的 MMS 的函数。

图 1 以图形方式展示了所有初等元胞自动机彼此之间的复合：当且仅当 $X \circ Y$是初等元胞自动机时，位置（X，Y）处才有一个蓝点。由此可见一些简单的结果：对于每个 $X \in \{0, 51, 204, 255\}$ 和$0 \le Y \le 255$，复合 $X \circ Y$和 $Y \circ X$总是初等的；这一点很容易事先推得，因为规则 0 和规则 255 是常值函数，其 MMS 为空，而规则 51 和规则 204 的 MMS 等于 $\{0\}$（事实上，规则 204 是恒等函数）。

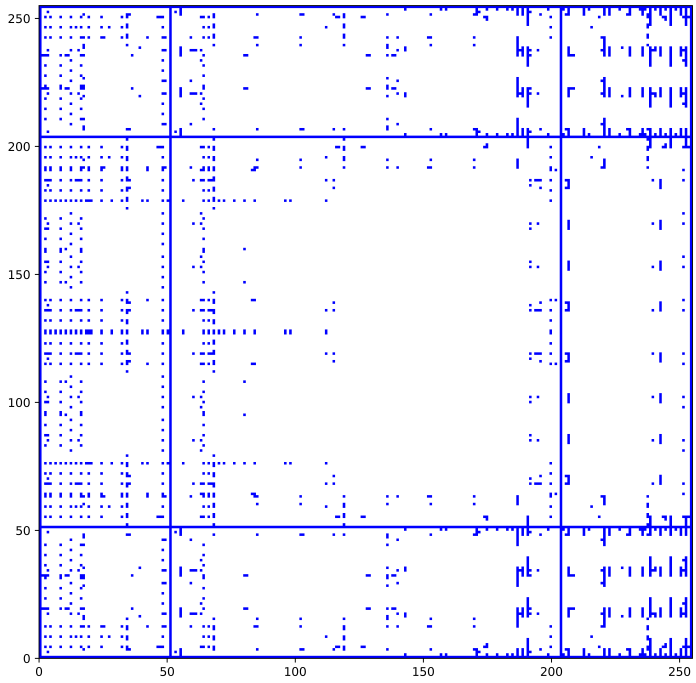


图 1：产生初等元胞自动机的初等元胞自动机复合。

另一个有趣的推论是，随机选取两个初等元胞自动机，其复合仍为初等元胞自动机的概率为 $\frac{4128}{65536} \approx 0。0629$。此外，如果从可选规则中排除规则 0、规则 51、规则 204 和规则 255，这一概率会降至 $\frac{2096}{63504} \approx 0。033$。

定义 3。设 $X:\ A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ 是一个初等元胞自动机。

1. 如果复合 $Y \circ X$ 是一个 ECA，则称规则 Y 是规则 X 的左伴随规则。2. 如果复合 $X \circ Y$ 是一个 ECA，则称规则 Y 是规则 X 的右伴随规则。3. 如果 $X = Y \circ Z$，则称规则对 (Y,Z) 是规则 R_X 的初等元胞自动机分解。

引理 4. 根据表*2*，设 X 和 Y 是两个等价规则。那么 X 和 Y 的左伴随元和右伴随规则数量相同，*ECA*分解的数量也相同。

证明。 由于 X 和 Y 等价，因此必定存在 $r \in \{1, \star, c, c\star\}$，使得 $Y = X^r$。这意味着 r 是恒等对称、反射、补或补反射，这些内容已在第 2.1 节中讨论。

设 A 和 B 分别为规则 X 和 Y的所有左伴随规则的集合。考虑函数$r:\mathrm{A} \to \mathrm{B}$，其定义为 $Z \mapsto Z^r$，对每个 $Z \in \mathrm{A}$ 均如此（严格来说，这是对对称映射r在 A 上的限制）。为了证明该函数定义良好，取 $Z \in \mathrm{A}$。于是，存在一条规则W，使得$X = Z \circ W$ 根据引理 1 和 2，我们有

$$Y = X^r = (Z \circ W)^r = Z^r \circ W^r.$$

这表明 $Z^r \in \mathrm{B}$。此外，该函数是单射，因为引理 1（2.）和引理 2（2.）表明

$$Z^r = W^r \ \Rightarrow\ (Z^r)^r = (W^r)^r \ \Rightarrow\ Z = W.$$

函数 $r:\ \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ 是满射，因为 $L \in \mathrm{B}$ 的一个原像是 $L^r \in \mathrm{A}$。因此，A 与 B 之间存在双射，所以 $|\mathrm{A}| = |\mathrm{B}|$。类似的论证表明， X 和 Y 具有相同数量的右伴随规则。

为了证明 X 和 Y 具有相同数量的 ECA分解，我们可以使用 $r \in \{1, \star, c, c\star\}$ 来定义两个集合之间的双射

$$\{(Z, W) : X = Z \circ W\} \text{ and } \{(L, S) : Y = L \circ S\}.$$

该结果可通过与上一段类似的论证得出。 □

附录中的表8和表9列出了根据表2确定的每个 ECA等价类代表元的左伴随元和右伴随元数量，以及分解数量。在这些表中，我们按 Wolfram类对初等元胞自动机进行了排列，以说明一般而言，随着 Wolfram类的增加，左伴随元和右伴随元的数量以及分解数量都会减少。

表3：按 Wolfram类划分的伴随元平均数量

Wolfram类	**左伴随元平均数**	**右伴随元平均数**	**分解的平均值**
I 类	18.18	19.64	16.00
II 类	8.25	8.42	6.57
III 类	3.85	0.31	3.23
IV 类	2.00	0.00	0.00

表3展示了 Wolfram 各类的左伴随元、右伴随规则以及分解的平均数量。计算这些平均值时，排除了规则0、51、204和255，因为它们是极端的例外情况。我们可以看到一个明显趋势：Wolfram类的类别越高，所有平均值都越低；这表明初等元胞自动机的动力学复杂性会影响其与其他初等元胞自动机复合时的行为。

左伴随规则和右伴随规则的概念过于严格，因为它要求复合的 MMS 既不能移动也不能平移：它必须保留在 $\{-1,0,1\}$ 内。这种严格性例如体现在低复杂度规则 170 上；该规则仅表示向左平移，却只有 12 个左伴随规则和右伴随规则。为了解决这一问题，我们引入准初等元胞自动机和准伴随规则的概念。

定义 4。 准初等元胞自动机 （QECA）是一个元胞自动机 τ： $A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$其最小记忆集包含于 $\{k-1, k, k+1\}$ 中，其中 $k \in \mathbb{Z}$。

定义 5。令 X： $A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ 为一个 ECA。

1. 如果复合 $Y \circ X$ 是一个 $QECA$，则规则 Y 是规则 X 的左准伴随规则。
2. 如果复合 $X \circ Y$ 是一个 $QECA$，则规则 Y 是规则 X 的右准伴随规则。

我们使用 Python [14] 来确定两个 ECA 的复合何时会产生 QECA。图2以图形方式表示了所有 ECA 两两之间的复合：当且仅当 $X \circ Y$ 是 QECA 时，位置（X， Y）处才会有一个蓝点。

请注意，规则 0、15、51、85、170、204、240 和 255 与任意 ECA 在左侧或右侧进行复合时，总会得到 QECA。

如引理4所示，我们可以证明，任意两个等价的 ECA 必须具有相同数量的左准伴随元和右准伴随元。附录中的表8和表9根据表2，给出了 ECA等价类中每个代表元的左准伴随元和右准伴随元数量。

表 4 显示了各个 Wolfram类中左、右准伴随元的平均数量。规则 0、15、51、85、170、204、240 和 255 因为是极端例外，未纳入这些平均值的计算。我们再次看到，Wolfram类的编号与左、右准伴随元的数量呈反比趋势。

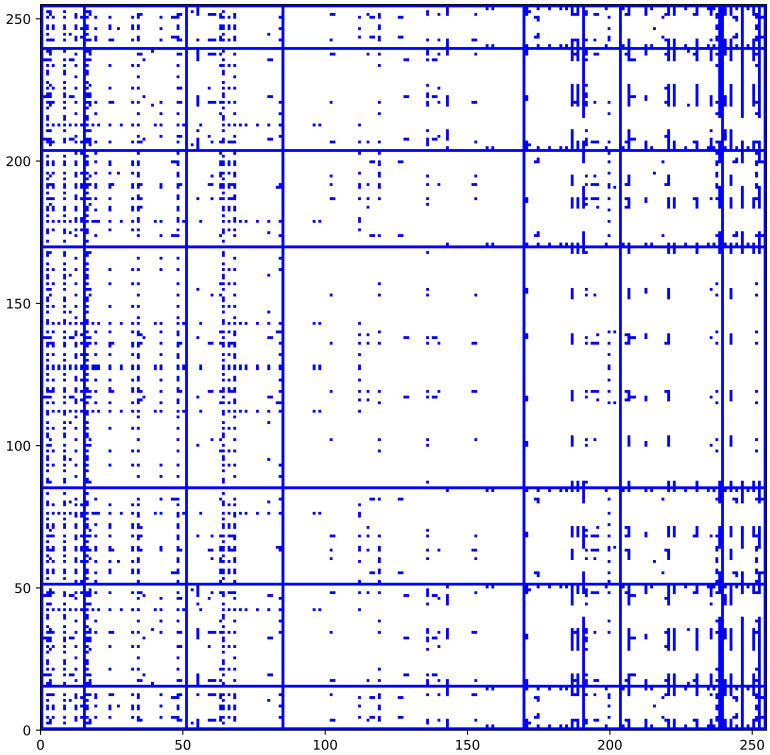


图 2：产生准初等元胞自动机的初等元胞自动机复合。

表 4：按 Wolfram类统计的准伴随元平均值

Wolfram类	**左侧准伴随规则平均值**	**右侧准伴随规则平均值**
I 类	24.73	37.82
II 类	15.53	14.80
III 类	7.23	4.31
IV 类	5.43	0.00

我们的下一个目标是根据初等元胞自动机的左、右准伴随元提出一种新的分类方法。为此，我们为每条规则 X关联一对非负整数（l_X， r_X），其中 l_X 是 X 的左准伴随元数量，而 r_X 是 X 的右准伴随元数量。

图3展示了 ECA等价类 X 中每个代表元对应的数对 (l_x, r_x) 的图 .

我们使用 Python [14]中的 scipy.cluster.hierarchy 包，以 $\mathbb{R}^2$ 的欧氏距离作为度量，对这些数据进行层次聚类。数据分为 3、4、5 和 6 个簇时的轮廓系数（见 [11, 第 87] 页）分别为 0.7559、0.7281、0.5979 和 0.6142。该系数用于衡量数据在簇中的聚集程度：越接近 1，说明数据分类效果越好。我们决定将数据分为 4 个簇，因为这样既能获得较好的轮廓系数，簇的数量也适中。

表5将初等元胞自动机的 88 个类别划分为四类（即得到的四个簇），图3也用颜色标示了这些类别。第 0 类包含左右准伴随元数量最多的初等元胞自动机，而第 3 类包含左右准伴随元数量最少的初等元胞自动机。

值得注意的是，MMS 大小为 2 和 3 的规则在第1类、第2类和第3类中均有出现。例如，在第1类中，规则 12 和 34 的 MMS 大小为 2，而规则 2 和 8 的 MMS 大小为 3。在第2类中，规则 3 和 136 的 MMS 大小为 2，其余规则的 MMS 大小均为 3。在第3类中，规则 5，

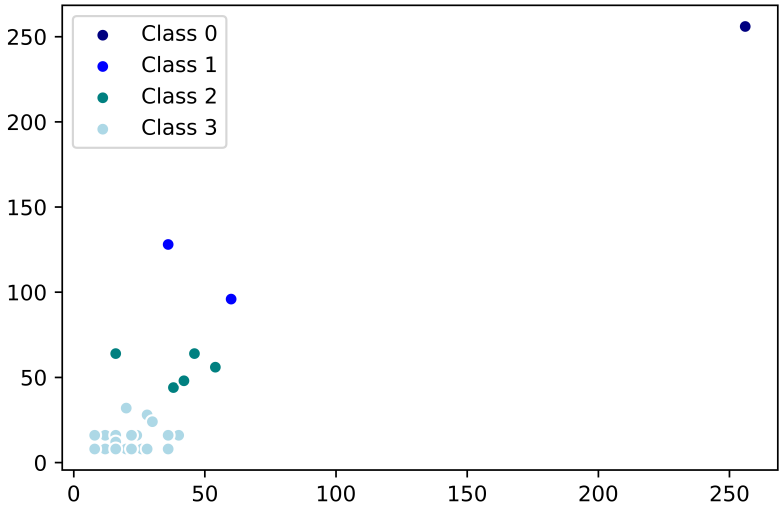


图3：由左准伴随元和右准伴随元表示的初等元胞自动机图。

Ta表 5：根据初等元胞自动机的左准伴随元和右准伴随元数量进行分类

类	规则数量	规则
类 0	5	0 15 51 170 204
第1类	4	2 8 12 34
第2类	9	3 4 14 19 24 32 42 136 200
第3类	70	1 5 6 7 9 10 11 13 18 22 23 25 26 27 28 29 30 33 35 36 37 38 40 41 43 44 45 46 50 54 56 57 58 60 62 72 73 74 76 77 78 90 94 104 105 106 108 110 122 126 128 130 132 134 138 140 142 146 150 152 154 156 160 162 164 168 172 178 184 232

10、60、90 和 160 的 MMS 大小为 2，其余规则的 MMS 大小均为 3。因此，我们的分类提供了一种非平凡的初等元胞自动机分组方式，而这种分组并非基于其 MMS 的大小。

最后请注意，Wolfram 的第 III 类和第 IV 类包含于我们的第3类中。然而，Wolfram 的第 I 类和第 II 类中的元素存在于我们的全部四个类别中。

4 基本半群理论

本节回顾半群理论的一些基本结果。关于这一主题的全面介绍，请参见 [7]。

定义 6。一个半群是一个集合 S，配有一个二元运算 $\circ : S \times S \to S$，该运算满足结合律；这意味着

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \quad \forall x, y, z \in S.$$

一个幺半群 是一个具有单位元 $I \in M$的半群 M；这意味着，

$$x \circ I = I \circ x = x, \quad \forall x \in M.$$

半群 S 的子半群 是 S 的一个子集，在将二元运算 $\circ$ 限制于其上时，该子集本身也是一个半群。我们类似地定义幺半群 M的子幺半群 。

半群 S 的阶就是集合 S的基数。有限半群 S 的凯莱表（其阶为 n）是一个 $n \times n$ 表，行和列按固定顺序分别以 S 中的元素 s_i 为索引，而表中 (i, j) 项为乘积 $s_i \circ s_j$。

给定一个没有单位元的半群 S，可以通过定义 $S^I := S \cup \{I\}$ 来轻松构造一个幺半群，其中 I 是一个形式符号，并将二元运算 $\circ$ 扩展到 S^I，使得对于所有 $x \in S$，$I \circ x := x$ 且 $x \circ I := x$。因此，半群理论和幺半群理论本质上是相同的。

幺半群 M 中的元素 x 若存在 $y \in M$ 使得，则称其为可逆元或单位元

$$x \circ y = y \circ x = I.$$

单位元 $x \in M$ 的逆元是唯一的，记作 x^{-1}。M的单位群记作 $U(M)$，它是 M中所有可逆元素构成的集合。

定义 7. 我们在半群 S中定义几类特殊元素。

1. 若元素 $O \in S$ 满足

$$O \circ x = x \circ O = O, \quad \forall x \in S.$$

2. 若元素 $x \in S$ 满足

$$x^2 := x \circ x = x.$$

若半群 S 的所有元素都是幂等元，则称其为带。

3. 如果 S 有零元 O，若存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得.....，则称元素 $x \in S$ 为幂零元

$$x^n := \underbrace{x \circ x \circ \cdots \circ x}_{n \text{ times}} = O.$$

在半群 S 的任意幂等元集合 E 上，都可以定义一个偏序 $\leq$，称为 E 的自然偏序（见 [7, 第 1.8] 节）。定义如下：对任意 $x, y \in E$，当且仅当 $xy = yx = x$ 时，我们称 $x \leq y$。为完整起见，我们将在此证明这个自然偏序确实是一个偏序。

命题 1. 上述定义在半群 S 的幂等元集合 E 上的自然偏序 $\leq$ 确实是一个偏序。

证明. 我们将证明 $\leq$ 是自反、反对称且传递的关系。

自反性： 对任意 $x \in E$，我们有 $x \circ x = x \circ x = x$，因为 x 是幂等元。因此，$x \leq x$。

反对称性： 假设对于某个 $x,\ y \in E$，有 $x \leq y$ 和 $y \leq x$。根据定义，我们有 e

$$x \circ y = y \circ x = x \quad \text{and} \quad y \circ x = x \circ y = y.$$

因此，$x = y$。

传递性： 假设对于某个 $x,\ y,\ z \in E$，有 $x \leq y$ 和 $y \leq z$。根据定义，我们有

$$x \circ y = y \circ x = x \quad \text{and} \quad y \circ z = z \circ y = y.$$

在第二个等式两边左乘 x，得到

$$x \circ (y \circ z) = x \circ y \implies x \circ z = x.$$

现在，在第二个等式两边右乘 x，得到

$$(z \circ y) \circ x = y \circ x \implies z \circ x = x.$$

因此，$x \leq z$。

□

定义 8. 由 左主理想、右主理想和双边主理想 的 $x \in S$ 分别定义为

$$S^I x := \{a \circ x : a \in S^I\},$$
$$xS^I := \{x \circ a : a \in S^I\},$$
$$S^I x S^I := \{a \circ x \circ b : a, b \in S^I\}.$$

定义 9。半群 S 上的格林关系是定义在 S 上的等价关系，定义如下:

1. $x\mathrm{L}y$ 当且仅当 $S^I x = S^I y$。2. $x\mathrm{R}y$ 当且仅当 $xS^I = yS^I$。3. $x\mathrm{J}\ y$ 当且仅当 $S^I x S^I = S^I y S^I$。4. $x\mathrm{H}\ y$ 当且仅当 $x\mathrm{L}y$ 且 $x\mathrm{R}y$。5. $x\mathrm{D}\ y$ 当且仅当存在 $z \in M$，使得 $x\mathrm{L}z$ 且 $z\mathrm{R}y$。

格林关系是半群理论的基础，在分析半群的结构时很有帮助（参见 [7, 第 2]章）。L 和 R 也可以等价地定义为 S^I的左、右凯莱图中的强连通分量。

如果幺半群 M 的 R 等价关系是平凡的（即所有等价类的大小均为 1），则称其为 R-平凡。这自动意味着 H 等价关系也是平凡的，并且 L = D。事实证明，R-平凡幺半群 M 为定义由 M [1]上的随机游走产生的马尔可夫链提供了合适的框架。尽管最近已有研究探讨任意有限半群 [15], 上的马尔可夫链，但 R-平凡幺半群在表示论方面的特殊性质，使得对相应马尔可夫链的分析更加容易。

An 同构两个半群 S_1 和 S_2 之间的同构是一个双射函数 $f\colon S_1 \to S_2$，使得 at

$$f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in S_1, \text{ and },$$

其中 $\circ$ 是 S_1 的二元运算，$\cdot$ 是 S_2的二元运算。如果存在这样的同构，我们就称 S_1 和 S_2 同构，并记作 $S_1 \cong S_2$。当 $S_1 = S_2$时，我们称 f 为一个自同构。为了考察两个幺半群 M_1 和 M_2之间的同构，我们增加条件 $f(I_1) = I_2$，其中 I_i 是 M_i的单位元，$i \in \{1, 2\}$。类似地，我们将 S_1 和 S_2 之间的反同构定义为一个双射函数 $f\colon S_1 \to S_2$，使得

$$f(x \circ y) = f(y) \cdot f(x), \quad \forall x, y \in S_1.$$

5 初等元胞自动机的半群

根据定理 1，所有在 $A^{\mathbb{Z}}$ 上的元胞自动机的集合，通常记作 End($A^{\mathbb{Z}}$)，或记作 CA($\mathbb{Z}, A$)，在赋予函数复合运算后构成一个幺半群，因为函数复合始终满足结合的性质。End($A^{\mathbb{Z}}$) 的单位元与规则 204 重合。End($A^{\mathbb{Z}}$) 的单位群通常记作 Aut($A^{\mathbb{Z}}$) 或 ICA($\mathbb{Z}, A$)，并且已知它具有许多特殊性质。例如，已知 Aut($A^{\mathbb{Z}}$) 是可数的，但不是有限生成的，并且包含一个与任意有限群同构的子群（见 [12, 第 13.2] 节）。根据引理 1 和 2，反射和补这两种对称性定义了幺半群 End($A^{\mathbb{Z}}$) 的自同构。对于 End($A^{\mathbb{Z}}$) 的一个自同构 r，我们将使用记号 τ^r 来表示 $\tau \in \mathrm{End}(A^{\mathbb{Z}})$ 在 r 下的像。

现在我们将研究 End($A^{\mathbb{Z}}$) 的子半群，其中完全由初等元胞自动机构成。我们首先研究其中的 13 个幂等初等元胞自动机，因为它们中的每一个都会生成一个恰好包含一个元素的子半群。具体而言，幂等初等元胞自动机如下：

$$E := \{0, 4, 12, 68, 76, 200, 236, 204, 205, 207, 221, 223, 255\}.$$

图 4 展示了集合 E 上幂等元自然阶的哈斯图（请记住，哈斯图是有限偏序集图的传递约简）。

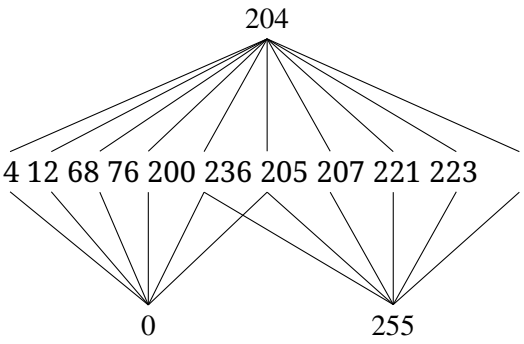


图 4：幂等初等元胞自动机自然阶的哈斯图

如预期，恒等函数规则 204 是最大元素，而常函数规则 0 和 255 是最小元素。不过，只有规则 200 和 236 同时大于 0 和 255；规则 4、12、68 和 76 仅大于规则 0，而规则 205、207、221 和 223 仅大于规则 255。下面的结果解释了其中的原因。

引理 5。 设 $0^{\mathbb{Z}}$ 和 $1^{\mathbb{Z}}$ 分别为全由0和1组成的常值序列。设 $\tau \in \mathrm{End}(A^{\mathbb{Z}})$ 是一个幂等元。

1. $0 \leq \tau$ 当且仅当 $\tau(0^{\mathbb{Z}}) = 0^{\mathbb{Z}}$.
2. $255 \leq \tau$ 当且仅当 $\tau(1^{\mathbb{Z}}) = 1^{\mathbb{Z}}$.

证明。 我们只证明第 (1) 点，因为第 (2) 点的证明类似。由于规则 0 是一个常值映射，因此总有 $0 \circ \tau = 0$。现在，对于任意 $x \in A^{\mathbb{Z}}$，有

$$\tau \circ 0(x) = \tau(0^{\mathbb{Z}}).$$

因此，$\tau(0^{\mathbb{Z}}) = 0^{\mathbb{Z}}$ 当且仅当 $\tau \circ 0 = 0$，而这当且仅当 $0 \leq \tau$。 □

还值得注意的是，End($A^{\mathbb{Z}}$) 的每个自同构 r 都保持幂等元上的自然序：若 $\sigma, \tau \in \mathrm{End}(A^{\mathbb{Z}})$ 是满足 $\sigma \leq \tau$ 的幂等元，则 $\sigma^r \leq \tau^r$。特别地，注意 $0^c = 255$, $0^\star = 0$ 和 $255^\star = 255$。例如，由于 $4^c = 223$ 和 $0 \leq 4$，我们必有$255 \leq 223$。其他关系也可类似地推导。

我们称半群 S 为*ECA*-极大，如果它满足以下两个条件：

1. S 中的所有元素都是初等元胞自动机。
2. 如果 S' 是 End($A^{\mathbb{Z}}$) 的一个子半群，其元素均为初等元胞自动机且 $S \subseteq S'$，那么 $S = S'$。

由于恒等元是一个 ECA，因此任何 ECA-极大半群实际上都必须是一个幺半群。根据运算的封闭性，一个 ECA-极大幺半群 S 必须满足，对于所有 $X \in S$，都有 $X^2 \in S$。因此，为了确定 ECA-极大幺半群，我们考虑集合

$$Q := \{X : X \circ X \text{ is a ECA }\}.$$

直接计算表明

$$Q = E \cup \{8, 51, 64, 239, 253\}.$$

命题 ition 2. 设 S 是一个 ECA-极大幺半群。那么 S 等于以下幺半群之一：

- $M_1 = \{0、4、8、12、64、68、200、204、255\}$
- $M_2 = \{0、204、207、221、223、236、239、253、255\}$
- <escape>• $M_3 =$ {0,12,204,221,255}</escape>
- $M_4 = \{0、68、204、207、255\}$
- $M_5 = \{0，51，204，255\}$
- $M_6 = \{0，76，204，255\}$
- $M_7 = \{0, 204, 205, 255\}$

证明。对于每条规则 X，令 T_X 为 Q 中 X 的双侧伴随元集合：

$$T_X := \{Y : Y \in Q, X \circ Y \text{ and } Y \circ X \text{ are both ECA }\}.$$

首先，我们对所有 $X \in Q$ 得到 T_X。首先注意到 $T_0 = T_{204} = T_{255} = Q$。此外 ，

$$\begin{aligned}
&T_4 = T_8 = T_{64} = T_{200} = \{0, 4, 8, 12, 64, 68, 200, 204, 255\},\\
&T_{12} = T_4 \cup \{221\}，\ T_{68} = T_4 \cup \{207\},\\
&T_{223} = T_{236} = T_{239} = T_{253} = \{0, 207, 221, 223, 236, 239, 204, 253, 255\},\\
&T_{207} = T_{223} \cup \{68\}，\ T_{221} = T_{223} \cup \{12\},
\end{aligned}$$

以及 $T_{51} = \{0，51，204，255\}$、$T_{76} = \{0，76，204，255\}$、$T_{205} = \{0，204，205，255\}$。直接计算表明，$T_4$、$T_{223}$、$T_{51}$、$T_{76}$、$T_{205}$ 在复合运算下封闭，因此它们分别对应于初等元胞自动机的极大幺半群 M_1、M_2、M_5、M_6 和 M_7。注意，$T_{12} \cap T_{221} = \{0，12，204，221，255\}$ 和$T_{68} \cap T_{207} = \{0，68，204，207，255\}$；这些集合在复合运算下也封闭，分别对应于初等元胞自动机的极大幺半群 M_3 和 M_4。□

与群的情况不同，小阶半群的数量极其庞大：例如，已知在同构和反同构意义下，阶为 7 的半群有 836,021 个，阶为 8 的半群有 1,843,120,128 个，阶为 9 的半群有 52,989,400,714,478 个（[9, 表 4.2] 和[10, 第 4] 页）。因此，尽管这些幺半群的阶较小，研究命题 2 所给出的幺半群的结构仍然是一个值得探讨的目标。

对于 $\mathrm{End}(A^{\mathbb{Z}})$ 的任意子半群 S，以及 $\mathrm{End}(A^{\mathbb{Z}})$ 的任意自同构 r，我们使用记号

$$S^r = \{s^r \in \mathrm{End}(A^{\mathbb{Z}}) : s \in S\}.$$

直接计算表明,

$$(M_1)^c = M_2, \quad (M_3)^\star = M_4, \quad (M_6)^c = M_7,$$

so

$$M_1 \cong M_2, \quad M_3 \cong M_4, \quad M_6 \cong M_7.$$

幺半群 M_5 在反射和补下保持稳定（即 $(M_5)^\star = M_5$ 和 $(M_5)^c = M_5$）。此外，我们看到 M_5 与命题 2 中给出的其他任何幺半群都不同构，因为它是唯一一个具有非平凡单位群的幺半群（因为 $U(M_5) = \{51，204\}$）。

表 6 和表 7 给出了幺半群 M_1、M_3、M_5 和 M_6 的凯莱表，我们将它们作为各自同构类的代表。

除 M_5 外，所有这些幺半群都由幂等元生成。事实上，幺半群 M_3和 M_6 是带（它们的所有元素都是幂等元）。M_3 和 M_6 都满足恒等式

$$X \circ Y \circ X = X \circ Y, \quad \forall X, Y \in M_i,\ i \in \{3, 6\},$$

这意味着它们是左正则带。这类特殊的带已被用于 [4] 定义随机游走和马尔可夫链。

表 6：幺半群 M_1 的凯莱表。

M_1	0	4	8	12	64	68	200	204	255
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	4	8	12	64	68	0	4	0
8	0	0	0	0	0	0	8	8	0
12	0	4	8	12	64	68	8	12	0
64	0	0	0	0	0	0	64	64	0
68	0	4	8	12	64	68	64	68	0
200	0	0	0	0	0	0	200	200	255
204	0	4	8	12	64	68	200	204	255
255	255	255	255	255	255	255	255	255	255

表 7：幺半群 M_3、 M_5 和 M_6 的凯莱表。

M_3	0	12	204	221	255
0	0	0	0	0	0
12	0	12	12	12	0
204	0	12	204	221	255
221	255	221	221	221	255
255	255	255	255	255	255

M_5	0	51	204	255
0	0	0	0	0
51	255	204	51	0
204	0	51	204	255
255	255	255	255	255

M_6	0	76	204	255
0	0	0	0	0
76	0	76	76	0
204	0	76	204	255
255	255	255	255	255

命题 3。 *1.* 对于幺半群 M_1，*Green* 等价类别为：

- $\mathcal{L}$-类：{0}、{4,12,68}、{8}、{64}、{200}、{204}、{255}。
- $\mathcal{R}$-类：{0,255}、{4}、{8}、{12}、{64}、{68}、{200}、{204}。
- $\mathcal{J}$-类：{0, 255}、{4, 12, 68}、{8}、{64}、{200}、{204}。
- $\mathcal{H}$-类：{0}, {4}, {8}, {12}, {64}, {68}, {200}, {204}, {255}.
- $\mathcal{D}$-类：{0,255}, {4,12, 68}, {8}, {64}, {200}, {255}.

2. 对于幺半群 M_3，*Green* 等价类如下：

- $\mathcal{L}$-类：{0}, {12}, {221}, {204},{255}.
- $\mathcal{R}$-类：{0,255}, {12,221}, {204}.
- $\mathcal{J}$-类：{0, 255}, {12, 221}, {204}.
- $\mathcal{H}$-类：{0}、{12}、{221}、{204}、{255}。
- $\mathcal{D}$-类：{0,255}、{12, 221}、{204}。

3. 对于幺半群 M_5，*Green* 等价类为：

- $\mathcal{L}$-类：{0}、{51,204}、{255}。
- $\mathcal{R}$-类：{0,255}、{51,204}。
- $\mathcal{J}$-类：{0, 255}、{51}、{204}。
- $\mathcal{H}$-类：{0}、{51、204}、{255}。

- $\mathcal{D}$-类：{0、255}、{51、204}。

4. 对于幺半群 M_6，格林等价类为：

- $\mathcal{L}$-类：{0},{76},{204},{255}.
- $\mathcal{R}$-类：{0,255}、{76}、{204}。
- $\mathcal{J}$-类：{0, 255}, {76}, {204}.
- $\mathcal{H}$-类：{0}、{76}、{204}、{255}。
- $\mathcal{D}$-类别：{0,255}，{76}，{204}。

M_1 的一个重要子幺半群是

$$M_1' = M_1 - \{255\}.$$

注意， M_1' 有一个零元素，即规则 0。此外，它还是右可逆的，因为$M_1'a \cap M_1'b \neq \emptyset$对所有 a, $b \in M_1'$都成立。Ore 研究了这类半群，并证明任何右可逆消去半群都可以嵌入到一个群中（[7, 定理 1.23]）。幺半群M_1 本身并非右可逆。

M_1' 的另一个重要性质是它是 R-平凡的。这意味着 Green 的 R-关系是平凡的，或者等价地说， $aM_1' = bM_1'$蕴含 $a = b$。R-平凡幺半群是有限幺半群中的一个重要类，在马尔可夫链的分析中有应用（见 [16, 第 2] 章和 [1]）。这是对 [4], 中工作的推广，因为左正则带恰好是元素全为幂等元的 R-平凡幺半群。

6 结论

本章的主要结论如下：

1. 根据左准伴随元和右准伴随元的数量，可以将 256 个初等元胞自动机划分为四个类别，分别标记为类 N、 $N = 0$、1、2、3。直观而言，这四个类别通过考察某个规则与其他初等元胞自动机复合时的行为，以间接方式衡量该规则的复杂性。2. 可以根据幂等元上的自然偏序对 13 个幂等初等元胞自动机进行排序，相应的哈斯图见图 4。3. 初等元胞自动机的任何半群都必须包含在七个幺半群 M_i、 $i = 1$、.....、7 之一中。利用反射自同构和补自同构可知， $M_1 \cong M_2$、 $M_3 \cong M_4$ 和 $M_6 \cong M_7$。值得注意的是， M_1 包含一个阶为 8 的子幺半群 M_1'，它有零元、右可逆，且其格林 R 关系是平凡的；这类幺半群十分重要，因为它们可用于马尔可夫链的分析。

以下是一些可拓展本章研究成果的未来研究方向 ：

1. 探索二维元胞自动机复合的行为。2. 找出更多幂等的一维元胞自动机，并使用自然偏序将它们与幂等初等元胞自动机进行比较。3. 找出并分析其元素为准初等元胞自动机的幺半群。4. 将本章所得结果推广到具有更大字母表的一维元胞自动机。

致谢:
我们非常感谢 Andrew Adamatzky、Genaro Martinez 和 Georgios Sirakoulis 邀请我们撰写本章。第一作者获得了墨西哥政府提供的 CONACYT 基础科学资助（编号：A1-S-8013）。第二作者获得了 CONACYT 国家研究生奖学金。

附录

在本附录中，我们列出与第3节结果相关的表格。由于左伴随规则、右伴随规则、分解以及左、右准伴随元的数量在初等元胞自动机的等价关系下保持不变，因此，根据表2，每个ECA类在表格中仅列出一个代表。

表 8：Wolfram的II类中的伴随元数量

规则的类	编号。左侧伴随元	不。没错。伴随元	编号。初等元胞自动机分解	规则的类	编号。左侧伴随元	不。正确。伴随元	否。初等元胞自动机分解
1	32	4	24	51	256	256	4
2	20	60	50	56	4	4	4
3	32	28	14	57	0	0	0
4	34	28	16	58	0	0	0
5	6	0	0	62	2	0	0
6	4	4	4	72	14	4	16
7	8	0	0	73	0	0	0
9	0	0	0	74	0	0	0
10	0	12	8	76	32	4	4
11	4	4	8	77	0	0	0
12	32	60	42	78	0	0	0
13	2	0	4	94	0	0	0
14	2	12	4	104	4	0	0
15	12	12	0	108	6	0	0
19	34	28	12	130	0	0	0
23	8	0	0	132	14	0	0
24	0	28	24	134	0	0	0
25	2	4	0	138	4	4	8
26	0	0	0	140	20	12	0
27	4	4	0	142	0	0	0
28	4	4	4	152	2	4	0
29	8	0	0	154	2	0	0
33	14	0	0	156	0	0	0
34	32	60	42	162	2	0	4
35	20	12	0	164	4	0	0
36	8	4	8	170	12	12	0
37	4	0	0	172	4	4	0
38	8	0	0	178	0	0	0
42	2	12	4	184	8	0	0
43	0	0	0	200	34	28	12
44	8	0	0	204	256	256	5
46	8	4	40	232	8	0	0
50	32	4	4				

参考文献

[1] Ayyer, A., Schilling, A., Steinberg, B., Thiéry, N.M.：马尔可夫链、R-平凡幺半群与表示论。《Int. J. Algebra Comput.》**25**，第 01n02 期（2015），169–231 页。[2] Boyle, M., Lind, D., Rudolph, D.：《有限型移位的自同构群》。《Trans. Amer. Math. Soc.》**306**，第 1 期（1988），71–114 页。[3] Boyle, M.：符号动力学中的开放问题。载于：Burns, K., Dolgopyat, D., Pesin, Y.（编），《动力学中的几何与概率结构》。《Contemp. Math.》**469**，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008 年。

表9：Wolfram类 I、III 和 IV 中伴随元的数量

Wolfram类	规则	左伴随规则数量	右伴随规则数量	ECA分解数量
I 类	0	256	256	818
	8	20	60	50
	32	34	28	16
	40	4	4	4
	128	32	4	24
	136	32	28	14
	160	6	0	0
	168	8	0	0
III 类	18	14	4	16
	22	4	0	0
	30	2	0	0
	45	2	0	0
	60	12	12	6
	90	0	0	6
	105	0	0	0
	122	0	0	0
	126	0	4	8
	146	0	0	0
	150	0	0	0
IV 类	41	0	0	0
	54	6	0	0
	106	2	0	0
	110	2	0	0

表 10：Wolfram的II类中的准伴随元数量

规则的类	编号。左侧准伴随元	不是。正确。准伴随元	规则的类	编号。左侧准伴随元	不。对。准伴随元
1	32	8	51	256	256
2	28	120	56	16	8
3	46	48	57	0	0
4	38	56	58	0	0
5	6	0	62	4	0
6	4	8	72	14	8
7	20	0	73	0	0
9	4	0	74	4	0
10	12	24	76	32	8
11	28	8	77	0	0
12	52	88	78	0	0
13	14	0	94	0	0
14	30	36	104	4	0
15	256	256	108	6	0
19	34	40	130	4	0
23	8	0	132	18	0
24	8	56	134	0	0
25	8	8	138	28	8
26	4	0	140	22	16
27	8	4	142	0	0
28	16	8	152	8	8
29	28	0	154	6	0
33	18	0	156	0	0
34	52	88	162	14	0
35	22	16	164	4	0
36	8	8	170	256	256
37	4	0	172	8	4
38	16	0	178	0	0
42	30	36	184	28	0
43	0	0	200	34	40
44	16	0	204	256	256
46	16	8	232	8	0
50	32	8			

[4] B rown, K. S.：《半群、环与马尔可夫链》。概率论杂志**13** (2000) 871–938。

[5] Castillo-Ramirez, A., Gadouleau, M.：初等、有限且线性的 vN-正则元胞自动机，《信息与计算》**274**，（2020）104533。

表 11：Wolfram I、III 和 IV 类中的准伴随元数量

Wolfram类	Rule	否。左准伴随元	否。右准伴随元
I 类	0	256	256
	8	28	120
	32	38	56
	40	4	8
	128	32	8
	136	46	48
	160	6	0
	168	20	0
III 类	18	14	8
	22	4	0
	30	12	0
	45	6	0
	60	20	20
	90	0	0
	105	0	0
	122	0	0
	126	0	8
	146	0	0
	150	0	0
第四类	41	0	0
	54	6	0
	106	12	0
	110	4	0

[6] Ceccherini-Silberstein, T., Coornaert, M.：《元胞自动机与群》。Springer 数学专著，Springer-Verlag Berlin Heidelberg（2010年）。

[7] Clifford, A.H., Preston, G.B.：《半群代数理论》第一卷（第二版）。美国数学学会，1964年。

[8] Cook, M.：初等元胞自动机中的普适性。《复杂系统》15.1（2004）：1-4 0.

[9] Distler, A.：有限半群的分类与计数，博士论文，圣安德鲁斯大学，2010年。

[10] Distler, A.、Mitchell, J.：Smallsemi：小型半群库。版本 0.6.13，GAP 软件包，2022年。

[11] Kaufman, L., Rousseeuw, P.J.：《数据中的群发现：聚类分析导论》。霍博肯，新泽西州：Wiley-Interscience，1990年。DOI：10.1002/9780470316801。

[12] Lind, D., Marcus, B.：《符号动力学与编码导论》。剑桥大学出版社，1995年。

[13] Magaña-Chavez, M. G.: 关于初等元胞自动机组合的研究。硕士学位论文。瓜达拉哈拉大学，2023年。

[14]Python 软件基金会。Python 语言参考，3.8 版。网址：http://www.python.org。

[15] Rhodes, J., Schilling, A.：有限马尔可夫链的统一理论。《Adv. Math.》**347**(2019年) 739–779。

[16] Steinberg, B.：《有限幺半群表示论》。施普林格国际出版，瑞士，2016年。

[17] Wolfram, S.：《元胞自动机性质表》。载于《元胞自动机理论与应用》，世界科学出版公司，新加坡，第485–557页，1986年。

[18] Martinez, Genaro J.：关于初等元胞自动机分类的注记。《元胞自动机杂志》8.3-4（2013年）233–259。