arXiv:2305.02951v1 [math.GR] 4 May 2023

单射性、立方近似与等变墙结构：超越 CAT(0) 立方复形

Abdul Zalloum

ABSTRACT. 这是一篇综述，旨在实现两个目标。

(1) 首要目标是探讨并凸显几何群论中两个近期颇具影响力的思想所产生的影响。第一个思想是 *injective metricspace* 的概念，这是一类丰富的空间，由 Lang [Lan13] 引入几何群论，并已展现出巨大作用。第二个是 Behrstock-Hagen-Sisto 的 *cubical approximation* 定理 [BHS21]，它为研究映射类群（有限型曲面的映射类群）以及更一般的层级双曲群提供了一种新颖且特别成功的方法。

(2) 我们的第二个目标是展示，许多测地度量空间——包括双曲空间、CAT(0)空间和分层双曲空间——都具有极其丰富的等变墙结构。这一发现受到上述工具的启发；这些工具包括立方近似定理和内射度量空间。Petyt、Spriano 和作者最早在 [PSZ22] 中强调了这种墙结构的存在。

CONTENTS

第1部分。引言与启发式讨论 2

1. 两个有影响力的思想及其部分影响 2 2. 你会在这篇综述中读到什么？详细摘要 3 3. CAT(0)立方复形、其中位数结构及内射距离 6 4. 粗中位数空间 8 5. 等变墙结构 8 6. 以及它们与单射性和立方近似的联系 9 7. 为什么要关注一般帘幕？一个示例引理 12 8. 将映射类群、CAT(0)群和内射空间结合起来 14

第2部分。详细讨论 15

9. 内射度量空间及其异常包容的几何 15 10. CAT(0)立方复形及其超平面 24 11. 从中位数视角看层级双曲性 29 12. 从层次双曲空间到帘幕 35 13. CAT(0)空间、其帘幕和帷幕模型 37 14. 结语 45 15. 问题 46 附录：若干证明 47 参考文献 50

第1. 部分　引言与启发式讨论

1. Two influential ideas and some of their impact

过去几年间，大量新思想被引入几何群论，并产生了显著影响。其中，有两项与本综述最为相关：

(1) 内射度量空间。首先是 Lang 的工作 [Lan13]，它使内射度量空间 受到几何群论领域的关注。回顾一下，若一个度量空间 X 是测地的，并且任意一族两两相交的闭球 $\{B_i\}_{i\in I}$都有非空总交，即存在一个点 x属于 $\cap_{i\in I}B_i$，则称该度量空间为内射的。等价地，若 $Y\subset Z$ 且 $f:Y\to X$ 是一个 1-利普希茨映射，那么该映射可以扩张为一个 1-利普希茨映射 $f:Z\to X$，并且对所有 $y\in Y$，都有 $f(y)=f(y)$，则称度量空间X 是内射的，见 [AP56]。值得注意的是，内射性并非**粗略概念**，而是一个非常精细的概念；例如，内射度量空间是可缩的，并且具有许多与 CAT(0)空间相同的基本性质。它们共有的一个特征是，正如 CAT(0)立方复形 X 可以赋予 CAT(0)距离一样，也可以赋予一种距离 d_∞，使得$(X,\ \mathsf{d}_\infty)$ 成为内射度量空间。尽管内射度量空间与 CAT(0)空间相似，但它们似乎容易处理得多。例如，双曲群是否为 CAT(0)群的问题至今仍悬而未决，而在 [Lan13], 中，Lang 证明了一个卓越的定理：双曲群可以在内射度量空间上作真余紧作用。

最近，Haettel-Hoda-Petyt [HHP20]证明，有限型曲面的映射类群 G 以及更一般的层级双曲群，都可在某些内射度量空间 X_{inj}上具有几何（适当且余有界）作用。鉴于内射度量空间精细且类似 CAT(0)空间的性质，这一结论相当令人意外；尤其是，Kapovich 和 Leeb 已在 [KL96]中证明，有限型曲面的映射类群不能在 CAT(0)空间上具有适当作用（由半单等距变换给出；另见[Bri10]）。在本综述余下部分中，我们所说的映射类群，均指有限型曲面的映射类群。Sisto 与作者随后的一项工作 [SZ22] 表明，Haettel-Hoda-Petyt 的内射度量空间 X_{inj} 是首个已知的映射类群几何模型，其中伪阿诺索夫具有强收缩拟轴；所谓映射类群 G 的几何模型，是指一个空间 X，映射类群 G在其上适当地余有界作用；因此，该空间与其任一凯莱图等变准等距。事实上，结合 Yang 的工作 [Yan20], ，在 X_{inj} 中存在这样的强收缩拟轴，证实了 Thurston 关于伪阿诺索夫轨道在底层映射类群 X_{inj} 的几何模型中稠密的猜想（另见 Choi 的工作 [Cho21]，他证明每个映射类群都存在一个有限生成集，使 Thurston 先前提出的稠密性猜想成立）。此外，结合 [HHP20], [SZ22] 与 Arzhantseva、Cashen 和 Tao 的工作 [ACT15]，可知空间 X_{inj} 是首个已知的映射类群几何模型，使其具有增长紧致作用；关于这一概念的详细讨论，见 [ACT15] 。最后，尽管映射类群凯莱图中的测地线性质很差，并且在曲线图$\mathcal{CS}$中可以任意程度地回折， [RV21], 表明， X_{inj} 中的测地线均在 $\mathcal{CS}$中定义了具有一致质量的重参数化拟测地线；这项结果由 Rafi 与作者在一篇即将发表的工作中证明。

上述论述表明，与映射类群的凯莱图相比，Haettel-Hoda-Petyt 的内射空间 X_{inj} 是更合适的几何模型，也促使人们进一步研究内射度量空间及群。除了立方化群和层级双曲群之外，内射度量空间及群

可在其上实现几何作用的内射度量空间及群范围广泛，包括有限表示的图形 C(4)-T(4) 小消去群 [CCG+20]、有限型和 FC 型的弱 Garside 群[HO21], 、一些欧几里得建筑和单纯复形 [Hae21]，以及许多对称空间 [Hae22]。

(2) **立方近似**。与本综述相关的第二种重要机制，是 Behrstock、Hagen 和 Sisto 的工作 [BHS21]。他们基于 Bowditch 的思想 [Bow13]，证明映射类群（更一般地说，层次双曲空间）中有限个点的“凸包”在“中位数”意义下与一个 CAT(0)立方复形准等距。我们将其称为立方近似定理。通俗地说，这意味着映射类群中包含有限个点的最小“凸”集“看起来像”一个 CAT(0)立方复形。该定理在映射类群与 CAT(0)立方复形这两个领域之间架起了一座坚实的桥梁，使人们能够将丰富的立方工具引入对后者的研究。近年来，这一理念已在多项工作中成功应用，并推动解决了该领域两个长期悬而未决的问题，其中包括 Behrstock-Hagen-Sisto 在 [BHS21]中解决的 Farb 拟平坦猜想，以及 Durham-Minsky-Sisto 在 [DMS20] 中独立证明的映射类群的半双曲性，还有 Haettel-Hoda-Petyt 在 [HHP20]中给出的独立证明。有趣的是，后两项独立证明几乎同时出现，距映射类群半双曲性被提出为猜想已有三十年；尽管两种方法截然不同，它们都高度依赖这一立方近似机制。值得一提的是，最近 Bowditch 在一些出人意料地弱的假设下，给出了 Farb 拟平坦猜想的另一种证明 [Bow19b]。

最后，我们讨论立方近似机制的两项近期推广。第一项是 Durham 与笔者在 [DZ22] 中的工作，我们在其中推广了立方近似定理，允许有限集包含“边界点”。具体而言，我们证明，层级双曲群的紧化（按 [DHS17] 的意义）中有限多个点的“凸包”也与 CAT(0) 立方复形中位数准等距。这一结果的用处在于，它使我们能够运用 CAT(0) 立方复形技术，不仅分析层次双曲空间的内部，也分析其所带有的各种边界概念；更多详情见 [DZ22]，关于更多应用，另见 Abbott 与 Incerti-Medici 的 [AIM22]。第二项是 Petyt 近期令人惊讶的定理：映射类群（更一般地说，可着色分层双曲群）与 CAT(0) 立方复形“中位数”准等距，从而实现了立方近似机制的整体化 [Pet21]。不同于立方近似定理 [BHS21] 及其边界推广 [DZ22], , Petyt 的拟等距并非等变。尽管如此，在这一背景下，这已经是所能期待的最佳结果，因为映射类群无法在 CAT(0) 空间上几何作用 [KL96], [Bri10]，也无法在 CAT(0) 立方复形上适当作用；Genevois 在 [Gen19] 中证明了这一点。

本综述的目的有二。首先，探讨并突出上述两项陈述近期产生的影响。其次，说明众多非正曲率空间都具有丰富的等变墙结构；这一发现受到这两个思想的启发，并最先由 [PSZ22] 中的 Petyt、Spriano 和作者加以强调。

2. What will you find in this survey? A detailed summary

在综述的第1部分中，您将看到以下内容。

第1节 讨论了推动综述其余部分展开的两个主要对象：内射度量空间和立方近似定理。还重点介绍了这两个思想近期对该领域的影响。

第 2 节 是这样的。

第 3 节 简要讨论了 CAT(0)立方复形：一方面，它们是内射度量空间的主要实例；另一方面，它们为立方近似机制提供了基本构件。具体而言，本节介绍了研究 CAT(0)立方复形所使用的基本工具，包括其超平面、中位数结构，以及使其成为内射度量空间的 d_∞-距离。

第 4 节 讨论粗中位数空间 [Bow13]这一类别，它既是理解立方近似机制的先决条件，也是证明映射类群以及层次双曲群在内射度量空间上作几何作用的关键要素。

第 5 节 开始讨论超越 CAT(0)立方复形的等变墙结构的存在性。

第 6 节 简要概述了 Haettel-Hoda-Petyt 的证明：层级双曲群可在内射度量空间上具有几何作用。该证明依赖于立方近似机制，并受到 Bowditch 关于中位空间的研究启发 [BOW18]。本节还讨论了他们的证明与立方近似定理如何启发 Petyt、Spriano 和作者发现，许多非正曲率空间都具有等变墙结构。最后，我们讨论一些存在此类等变墙结构（称为帘幕）的例子。

第7节展示了这些帘幕的用途。例如，它说明了如何利用HHG群中的帘幕来描述其基本几何组成部分，包括距离、中位结构、凸集和层次路径。

第8节概述了过去五年间有关映射类群、CAT(0)空间和内射度量空间之间联系的研究进展。

在第2部分中，我们将详细讨论内射度量空间、CAT(0)立方复形、层次双曲空间和CAT(0)空间，并列出许多研究这些对象的工具，其中一些广为人知，另一些则较为新近。具体而言：

第9节定义了内射度量空间，探讨其容纳几何的若干方面，并讨论证明有关这类空间的命题时所采用的主要思路。尤其是，我们展示了内射度量空间的泛性质如何立即带来许多关于其几何的强有力推论。这包括存在一族连接任意两点的伴行测地线，称为测地线梳理；对任意给定的三点，存在一个等距嵌入三叉树；更一般地，对任意有限点集，都存在与之对应的中心。最后，我们讨论内射包，并从一般度量几何和几何群论的角度，凸显内射度量空间的典范性。

第10节 将更详细地讨论CAT(0)立方复形，并展示其几何如何完全由其超平面描述。这一点通过其超滤子和Sageev构造体现得最为明显；本节将讨论这两者。

第11节 简要概述层级双曲性理论，并说明空间的整体粗几何如何通过其所配备的双曲空间集合 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$来记录。我们还将介绍这个集合 $\mathcal{U}$ 中包含一个极其强大的双曲空间 $\mathcal{CS}$，我们称之为全知空间。值得先指出的是，虽然层次双曲空间通常配备多种HHS结构，但全知空间指的是

一个配备特定HHS结构的特殊双曲空间，该结构由 [ABD21]引入。或许可以这样说：“起初一无所有，后来Abbott、Behrstock和Durham提出了全知空间” [ABD21]。接着，我们给出许多层次双曲空间中有用的构造和结论示例，它们利用了整个双曲空间集合$\mathcal{U}$——例如粗中位数的存在性 [BHS19]；此外也介绍一些仅利用全知空间 $\mathcal{CS}$的例子，例如Russell、Spriano和Tran在 [RST22]中确立的Morse 局部到整体性质。

第12节 讨论了如何从 CAT(0)立方复形出发，利用其超平面$\mathcal{H}$ 集合构造双曲空间 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ （例如 Hagen[Hag14] 的接触图，以及 Genevois [Gen20b]的分离空间），这些空间通常能将该立方复形转化为层次双曲空间；具体如下图所示：

$$X_{\text{CAT(0) cube complex}} \to \mathcal{H}_{\text{hyperplanes}} \to \mathcal{U}_{\text{hyperbolic spaces}} \to X_{\text{ HHS}}.$$

随后，它提出一个问题：上述图示在多大程度上可以逆转？也就是说，从任意一个层次双曲空间（不一定是立方复形）及其双曲空间 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$集合出发，能否利用这些双曲空间提供“超平面”，从而逆转上述图示中的第二个箭头？如果可以，这些超平面能否用于构造CAT(0)立方复形，从而逆转第一个箭头?

接着我们说明，虽然第二个问题的答案已知是否定的，但第一个问题的答案是肯定的，而且意义非常重大。具体而言，我们有如下图示：

$$\mathcal{H}_{\text{curtains}} \leftarrow \mathcal{U}_{\text{hyperbolic spaces}} \leftarrow X_{\text{HHS}}.$$

第13节 在 CAT(0)空间的背景下讨论帘幕 [PSZ22] ，并将其与层次双曲空间中存在的帘幕进行比较。此外，我们还说明这些帘幕如何构成帷幕模型的基本构件；帷幕模型是曲线图的一种对应物，也是底层 CAT(0)空间中秩一元素的一个通用 δ双曲空间 X.最后，我们说明CAT(0)空间中的测地线在帷幕模型中产生距离意味着什么。

第 14节 概述综述中讨论的思想和对象 y.

第 15节 列出了一些与综述所讨论主题相关的问题 .

附录A。本综述提出了一个新想法，并给出了一些此前未见于文献的相关引理。这个新想法是：双曲空间、层次双曲空间以及许多其他具有非正曲率的空间都具有等变墙结构，可用于描述其几何中的许多有趣方面。这些墙结构的存在，以及本综述中出现的每一个新引理（它们都围绕这些墙结构展开），均是在与 Petyt 和 Spriano 合作时得出的。这些新引理的证明构成了附录A的内容。

致谢。 首先，我非常感谢 Anthony Genevois 对这篇综述的初稿提出了全面且有益的意见，这些意见极大地改善了文章的阐述。此外：

(1) 我非常感谢 Jenny Beck 作了一场精彩的报告，让我了解了第9节中许多关于内射空间的构造；尤其是，该节的标题正是受 Jenny 报告标题的启发。

(2) 我十分感谢 Mathew Durham 耐心地向我解释 Behrstock-Hagen-Sisto 的立方近似机制的证明及其用途。(3) 我非常感谢 Thomas Haettel 对这篇综述的早期草稿提出了一些极有帮助的意见，也感谢他与我协调这篇综述与他即将发表的关于 Helly 群和内射度量空间的综述之间的联系。(4) 我尤其感谢 Mark Hagen 教授我许多立方技术，并让我领略 CAT(0)立方复形及其超平面的魅力；没有他的帮助，这篇综述确实不可能完成。(5) 我非常感谢 Urs Lang 对这篇综述的第一份草稿提出了一些有益的反馈。(6) 我由衷感谢 Harry Petyt 对这篇综述的早期草稿提出了许多有益的意见，详尽地向我解释了他与 Haettel 和 Hoda 合写的论文，并向我展示了许多运用内射性的构造。(7) 我非常感谢 Kasra Rafi 与我就这篇综述进行的各种讨论、一直以来给予我的支持，以及他总是慷慨地拨冗相助。(8) 衷心感谢 Alessandro Sisto 对这篇综述的第一份草稿提出有益的意见。(9) 我非常感谢 Davide Spriano 教授我层级双曲性的诸多方面。(10) 我衷心感谢我的合作者 Harry Petyt 和 Davide Spriano，他们友善地允许我从我们正在进行的项目中摘取一些论述，因为这些内容与本综述相关；本综述中出现的所有新引理和证明都是与他们合作完成的。(11) 最后，我要感谢犹他大学数学系的所有成员，包括 Mladen Bestvina、Kenneth Bromberg、Elizabeth Field、Vivian He、Michael Kopreski、Priyam Patel、Alexander Rasmussen，尤其是 George Shaji，感谢他们在我于2023年4月5日至14日访问期间的热情款待；这篇综述的第一份草稿正是在此期间完成的。

由于我们希望这篇综述内容自成一体，因此先讨论 CAT(0)立方复形。

3. CAT(0) cube complexes, their median structure and injective distance

暂且不谈形式化定义，CAT(0)立方复形 X 可以看作一个可缩空间，它由单位欧几里得立方体 $[0,\ 1]^k$ 沿着面等距粘合而成。如果最大的 k （其中 $[0,\ 1]^k \subset X$ ）被某个整数 n 所限制，则称其为**有限维**；这个整数称为 X. 的**维数**。例如，如果将图 1 中的 3 维立方体及所有其他 2 维立方体填充起来，那么环境空间就是一个 CAT(0)立方复形，否则就不是。每个立方体 $[0,\ 1]^k$ 都有 k 个不同的**中立方**，它们定义为将 $[0,\ 1]^k$ 的一个坐标限制到$_1$ $_2$所得的集合。最后，**超平面**是从一个中立方 c出发得到的：如果 c 在相邻立方体中与中立方 c' 相接，我们就纳入$c \cup c'$ 并继续归纳进行；也就是说，如果 c' 在另一个相邻立方体中与中立方 c'' 相接，我们就纳入 $c \cup c' \cup c''$，依此类推。见图 1：我们从一条蓝色边所表示的中立方出发，将其延伸为完整的蓝色超平面。

如图 1 所示，每个超平面 h 确定两个不相交的子集 h^+, h^-，称为**半空间**，满足 $X = h^+ \cup h^-$。我们称两个点 $x, y \in X$ （更一般地，两个子集 $A, B \subset X$）被 h **分隔**，如果其中一个位于 h^+，另一个不中返

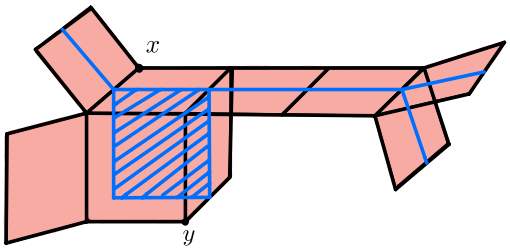

FIGURE 1. 一个超平面。

属于 h^-. 考虑 CAT(0) 立方复形时采用的标准度量是组合度量或出租车帽度量，记作 d；对于任意一对顶点 x， $y \in X$，它记录将 x， y. 分隔开的超平面 h 的数量。等价地，它是为每个立方体 $[0,\ 1]^k$ 赋予距离后得到的度量。

$$\mathsf{d}((x_1, \cdots x_k), (y_1, \cdots y_k)) = |x_1 - y_1| + \cdots |x_k - y_k|,$$

并以显而易见的方式将度量 d 扩展到 X。所谓组合测地线，或简称测地线，是指关于组合度量 d的测地线。

超平面及其半空间都是凸的（端点位于超平面上的组合测地线始终留在该超平面内），众所周知，CAT(0)立方复形中的凸集满足*Helly* 性质：两两相交的凸集族C_i完全相交，也就是说，如果 $C_i \cap C_j \neq \varnothing$ 对所有 C_i， $C_j \in \{C_i\}_{i\in I}$，那么存在一个点$x \in \cap_{i\in I} C_i$.

不难看出，一对相交的超平面必定在某个给定的立方体中相交。特别是，这些超平面的凸性结合 Helly 性质表明，两两相交的超平面的基数不超过 CAT(0)立方复形 X 的维数，前提是它是有限维的。

每个 CAT(0)立方复形 X 都具有一个度量 d_∞，使得 $(X,\ \mathsf{d}_\infty)$ 是一个内射度量空间。CAT(0)立方复形 X 上的 d_∞-距离定义为：同一个立方体中任意两个不同顶点 x， y 之间的距离为 1，见图 2。

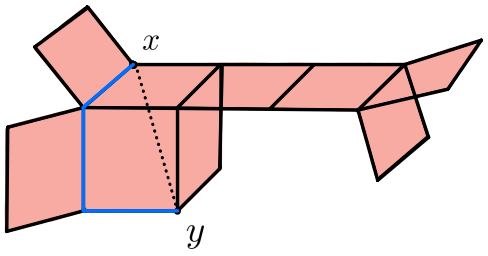

FIGURE 2. 蓝色的边表示一条组合测地线，说明 $\mathsf{d}(x,\ y) = 3$。另一方面，$\mathsf{d}_\infty(x,\ y) = 1$.

回顾一下，链是由一组超平面组成的 $c = \{h_1,\ \cdots h_k\}$ 这些超平面将 h_{i-1}与 h_{i+1}. 分隔开来 h_i。特别地， c 中的元素两两不相交。

下面总结 CAT(0)立方复形上的内射距离 d_∞ 满足的主要性质：

1) 忽略维数：相对于组合距离 d，立方体 $[0,1]^n$ 的直径恰好为 $n.$。也就是说，点 $(0,\cdots,0),(1,\cdots,1)$ 之间的距离为 n，因为它们恰好被 n 个超平面分隔。另一方面，与 n 无关，任意两个不同顶点 x,y（它们属于同一个立方体 $[0,1]^n.$）之间的内射距离 $\mathsf{d}_\infty(x,y)=1$ 均为 ∞。因此，立方体 $[0,1]^n$ 上的内射 d-距离会忽略其维数，或者等价地说，不计相交超平面对总距离的贡献。

2) 链距离：由于相交的超平面不会被立方体上的 d_∞-内射距离记录，因此对于立方复形 X 中的任意一对顶点 x,y，我们有

$$\mathsf{d}_\infty(x,y)=\sup\{|c|\,:\,c \text{ is a chain of hyperplanes separating } x,y\}.$$

最后，CAT(0)立方复形上的组合距离 d X 使 X 成为中位数度量空间。回忆一下，若一个度量空间中任意 x_1、x_2、x_3都存在唯一一点 $m=m(x_1、\ x_2、\ x_3)$ 满足以下条件，则称该度量空间为中位空间：

$$\mathsf{d}(x_i,x_j)=\mathsf{d}(x_i,m)+\mathsf{d}(m,x_j),$$

对于所有 $i\neq j.$，用超平面的语言来说，这个中位数恰好是这样得到的：将每个超平面朝向 $\{x_1、\ x_2、\ x_3\}$ 中的多数点（选择包含 $\{x_1、\ x_2、\ x_3\}$中至少两点的半空间），并取所有此类半空间的交集。

4. Coarse median spaces

若一个空间中的任意三个点 x_1、x_2、x_3 都存在一点 μ，称为粗中位数（或简称中位数），且满足若干类似于上述不等式的粗略条件，则称该空间具有粗中位数 性质。

粗中位数空间的子集 A 称为 K-中位凸的，如果对于任意 $x、\ y\in A$以及任意 $z\in X$，点 $\mu(x、\ y、\ z)$ 都位于 $A.$ 的 K-邻域内。对于两个粗中位数空间$X_1、\ X_2$，映射 $f\colon X_1\to X_2$称为 K-中位映射，如果 $\mathsf{d}(f(\mu(c_1、\ c_2、\ c_3))、\ \mu(f(c_1)、\ f(c_2)、\ f(c_3)))\leqslant K$。路径 $\gamma\colon [a、\ b]\to X$ 称为 K-中位路径，如果按照上述意义，它是一个 K-中位映射。对于熟悉层次双曲空间的读者，值得注意的是，K-中位路径恰好就是 K'-层次路径，例如参见 [Pet22] 或 [DZ22]。最后，K-中位拟等距映射 $f\colon X_1\to X_2$ 是一个 $(K、\ K)$-拟等距映射，且为 K-中位映射。

5. Equivariant wall structures

正如我们将在后续章节中详细讨论的那样，CAT(0)空间、双曲空间和分层双曲空间都具有等变墙结构，可以记录其几何中的许多有趣性质。特别地，如果 X 是上述任一空间，那么就存在一组 $\mathrm{Aut}(X)$-不变子空间 $\mathcal{H}=\{h_i\}_{i\in I}$，称为帘幕，满足以下条件（以及更多条件，但其精确定义将在后文给出）：

1) 帘幕分离：每个 h 都粗略路径连通，且 $X-h\subseteq h^+\sqcup h^+$，其中 h^+,h^-是 $X.$的不相交路径连通子空间。

2) 链 d 距离：存在常数 $K=K(X)$，使得对于任意 $x,\ y\in X$，我们有 e

$$\mathsf{d}(x,y)\underset{K}{\sim}\sup\{|c|\,:\,c \text{ is a chain of curtains separating } x,y\}.$$

此处的记号 $\widetilde{K}$ 表示这些量在加法和乘法误差范围内相等，而误差仅取决于 K.

例如，在 CAT(0)空间的情形下，CAT(0)空间 X 中的帘幕被定义为：沿测地线 α，单位区间 I 在最近点投影映射 π_α 下的原像： $X \to \alpha$。不同于有限维 CAT(0) 立方复形中的超平面，在上述任一空间中，两两相交的帘幕数量都没有上界。然而，即使是在 CAT(0) 立方复形的背景下，帘幕的上述一般性也提供了一种在 CAT(0)空间 X的整个等距变换群作用下保持不变的墙结构，而立方超平面则不具备这一性质，这一点可从 $\mathbb{R}^2$上的旋转看出。事实上，给定一个 CAT(0)空间 X 和 $G <$Isom(X)，空间 X 当且仅当存在一个 G-不变的离散帘子子集时，才允许赋予一个由 G 作用的立方复形结构。

6. And their connections with injectivity and cubical approximations

正如我们刚才提到的，CAT(0)空间、双曲空间和分层双曲空间所具有的墙结构并非离散的：任意一对点 x，y 通常会被无限多个墙分隔。然而，分隔 x，y的帘幕极大链 的基数总是有限的；事实上，它与 $\mathsf{d}(x,\ y)$. 粗略相符。这让人联想到这样一个事实：CAT(0)立方复形 X 上的 d_∞- 内射距离忽略了相交的超平面，只计算分隔 x，$y \in X$ 的极大超平面链，因此不再反映其维数；这暗示了内射性与这些等变墙结构之间存在某种联系。

一个 E-分层双曲空间 是拟测地度量空间 $(X,\ \mathsf{d})$，它配有一族 E-双曲空间 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 以及 $(E,\ E)$-粗略利普希茨满射$\{\pi_{U_i} :\ X \to U_i\}_{i\in I}$ 它们满足某些条件，见 [BHS19]。常数 E 称为*HHS*常数，它量化空间的“粗糙程度”，并给出某些命题或不等式不成立时的误差界。正如 [BHS19], 所示，层次双曲空间是粗中位数空间。

如我们将在第11.2节中所述，双曲空间$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$及映射$\pi_{U_i} :\ X \to U_i$ 这一集合描述了层次双曲空间的全部粗几何。例如，著名的距离公式 定理 [MM99a], [MM00a], [BHS19]指出，两点 $x, y \in X$之间的距离，大致等于 $\pi_U(x), \pi_U(y)$之间距离的总和，其中求和遍历所有满足 $\mathsf{d}(\pi_U(x), \pi_U(y))$ 显著（至少为 E）的 $U \in \mathcal{U}$。

由于层次双曲空间是粗中位数空间，我们可以讨论刚才描述的中位数凸性和中位路径。对于具有 $K = E$（即 HHS常数）的 K-中位凸子集 $A \subseteq X$，我们将简称为中位凸 集，因为该常数是一致的。类似地，中位数路径 是 E-中位数路径。最后，将 E 增加一个仅依赖于 X 的一致量后，集合 A 的中位包 可定义为所有包含 A. 的 E-中位凸集的 E-邻域的交集。值得注意的是，对于层次双曲空间和粗中位数空间中的中位包及凸包，还有其他多种定义；然而，得益于 [RST18] 和 [Bow19a], ，所有这些概念都是等价的，因此只需采用前述定义即可。

现在我们可以陈述立方近似定理。

定理 6.1 ([BHS21，定理 F])。 给定一个层次双曲空间 X，存在一个常数 v，使得以下结论成立。对于任意有限的 $F \subset X$，存在常数 $K = K(|F|, X)$，使得凸包(F) 与一个 *CAT(0)* 立方复形 Q 之间存在 K-中位数拟等距映射，且其维数$(Q) \leqslant v$.

前述定理有一种特别有趣的解读：层次双曲空间（无论它们究竟是什么）可以被视为高维双曲空间：正如中位数

双曲空间中有限个点的中位包与树准等距，层次双曲空间的中位包则与“高维树”（即CAT(0)立方复形）中位准等距。CAT(0)立方复形可以被视为高维树，其中一个原因是：CAT(0)立方复形的维数为 1，当且仅当它是树。值得注意的是，在[DZ22], 中，作者将上述定理推广到包含来自 X，“边界”的点；也就是说，有限集 F 中的点不必仅来自 X，还可以包含中位射线。

在 [HHP20], 中，Haettel、Hoda 和 Petyt 利用定理 6.1，将近似立方复形 Q 上的 d_∞-内射距离推广到其底层的层次双曲空间 X. 。由于他们的构造对本综述十分重要，我们将记录他们的定理，并简要讨论其证明。

定理 6.2 ([HHP20，定理 A])。设 (X,d) 是一个层次双曲空间。存在一个定义在 X 上的粗单射度量 ρ_∞，它与 d 准等距。

回顾一下，如果存在常数 δ，使得对于任意一族两两相交的球 $\{B(x_i,\ r_i)\}_{i\in I}$ 都存在一点 $x\in\cap_{i\in I}B(x_i,\ r_i+\delta)$，那么这个测地度量空间就称为粗单射。值得牢记的主要例子是双曲空间，参见 [BF21] 中的定理 6.1 和 [HHP20] 中的命题 1.1。

6.0.1. 定理 *6.2* 证明简述。设 (X,d) 是一个层次双曲空间，其双曲空间集为 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$。受 Bowditch [BOW18],的启发，他们定义了

$$\rho_\infty(x,y):=\sup\{|f(x)-f(y)|:f:X\to\mathbb{R}\text{ is a coarse median contraction}\},$$

其中，粗中位数收缩映射是一个映射 $f\colon X\to\mathbb{R}$，它粗略地缩短距离，并近似保持中位数。随后，他们依赖立方近似（定理 6.1）证明 (X,ρ_∞) 与 (X,d) 准等距，并利用双曲空间 $U\in\mathcal{U}$ 中度量球的粗Helly性质，在 (X,ρ_∞), 中建立类似的度量球 Helly 性质，从而完成证明。

他们的新距离 ρ_∞ 的主要要素是粗中位数收缩映射f 的概念：$X\to\mathbb{R}$. 注意，当 X 是CAT(0)立方复形，且上文 ρ_∞ 定义中的映射 $f\colon X\to\mathbb{R}$ 取为中位数收缩映射（即不存在粗糙性）时，我们有 $\mathsf{d}_\infty=\rho_\infty$。为此，回想一下，CAT(0)立方复形上的 $\mathsf{d}_\infty(x,\ y)$ 是分隔 x, y的极大超平面链的基数，而这些超平面恰好是中位数收缩映射 $f\colon X\to\mathbb{R}$ 的纤维 $\{f^{-1}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$，该映射尽可能远地将 $x,\ y$映到$\mathbb{R}$，见图 3。这个关于 CAT(0)立方复形中的超平面可视为中位数收缩映射 $f\colon X\to\mathbb{R}$ 的原像的观察，使我们能够在任意粗中值空间 X 中理解超平面的含义：它是粗中位数收缩映射 $f\colon X\to\mathbb{R}$下某个点（或区间）的原像；Petyt、Spriano 和作者曾提出这一观察。事实上，我们可以作出以下更一般的观察：

6.0.2. 主要观察。受上述内容启发，Petyt、Spriano 和作者观察到了以下现象。每当存在一个从任意空间 X 到 $\mathbb{R}$ 的“良态”收缩映射 f 时，或者更一般地，存在一个到 CAT(0)立方复形 Q的“良态”映射时，都可以尝试将 X 中的“帘幕”或“超平面”定义为 Q. 中超平面的原像。满射 f 的“良态”程度越高，这些超平面所具有的性质就越强。具体而言，满射 f 的质量决定了由此得到的纤维的质量。例如，若 X 是一个 CAT(0)立方复形，且 $f\colon X\to\mathbb{R}$ 是一个中位数映射，那么超平面 $f^{-1}(p_i)$ 的纤维——其中 p_i 是一个点，即 $\mathbb{R}$ 中的一个超平面——本身就是凸的。



FIGURE 3. 每幅图中的两个点分别是 $x=(1,1), y=(5,3)$，它们在 4 个竖直超平面和 2 个水平超平面上不同。左图展示了两个显而易见的中位数收缩映射 f_1, f_2，它们是到x 轴和 y 轴的最近点投影；$|f_1(x)-f_1(y)|=4$ 而 $|f_2(x)-f_2(y)|=2$。右图展示了第三个中位数收缩映射 f，它是 f_1 之后再压缩 x轴，使得 $|f(x)-f(y)|=1$。在这三个收缩映射中，最优的是 f_1。

6.0.3. 适用此观察结论的示例。以下是上述现象的几个示例：

例 6.3.（双曲空间与分层双曲空间）受上述内容启发，若X 是任意度量空间，且 $f_0: X \to Y$是到双曲空间 Y的粗满射，那么可通过以下方式得到到维数为 1 的立方复形的粗满射：将f_0 与最近点投影映射 $\pi_l: Y \to l$ 复合，投影到 Y中的一条测地线 l 上（不一定非得是直线，但这样更容易想象），从而得到 $f_l=\pi_l\circ f_0: X\to l\cong\mathbb{R}$。现在可以将“$l$-超平面”定义为纤维 $\{h_n^l=f_l^{-1}([n, n+10\delta])\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 而“超平面”就是$l$–中对应于某条测地线 $l\subset Y$.的超平面

下面的备注进一步揭示了 CAT(0)立方复形与可满射到双曲空间的度量空间之间的联系。

备注 6.4.（超平面与非参数化拟测地线）这里有一个有趣而且显而易见的事实。继续上面的例 6.3，显然，路径 $\alpha\subset X$ 在 Y 中投影为非参数化拟测地线，当且仅当 α 在 X 中不会两次穿过同一个超平面（忽略一些常数）。也就是说，由于超平面被定义为在映射 $f_l: X\to l$ 下“厚”区间 $I=[n,n+10\delta]\subset l\subset Y$ 的原像，因此，两次穿过超平面$h_n^l=f_l^{-1}([n, n+10\delta])$（意指从半空间 $(h_n^l)^+$出发，进入另一个半空间 $(h_n^l)^-$，再返回 $(h_n^l)^+$）会导致沿 l 长时间回溯；反过来的论证稍微棘手一些，但可以通过中位数的考量轻松证明，参见引理 . 1 第 2 项的证明。对于熟悉层次双曲空间语言的读者，我们将利用上述观察证明：层次双曲空间中的拟测地线是层次路径，当且仅当它不会两次穿过同一个超平面（忽略一些常数）；这里的超平面将以与前例基本相同的方式定义（我们将取每个双曲空间 $U\in\mathcal{U}$ 中的每条测地线，并以类似方式定义超平面）。

CAT(0)空间中，满射到CAT(0)立方复形的映射尤其丰富。

例 6.5。（CAT(0)空间）CAT(0)空间 X 的一个基本且几乎具有特征性的性质，是存在唯一的到凸集的最近点投影。特别地，对于一条测地线 $\alpha\subset X$，存在 1-Lipschitz映射 $\pi_\alpha: X\to\alpha$，将每个

$x \in X$ 沿着 α. 的最近点。这提供了一组自然的“超平面”，称为帘，它们只是单位区间的纤维 $\pi_\alpha^{-1}(I)$ $I \subset \alpha$。

一个有助于理解上述观察的典型例子，是那些存在一条强收缩测地线的空间。

定义 6.6。若测地线 l 满足：对任意与 l 不相交的球 B，其最近点投影（记作 $\pi_l(B)$,）的直径至多为 D.，则称 l 是 D-强收缩的。

基本上，通过对上述定义取逆否命题，可以很容易证明：若 l 是 D-强收缩的，且 x, $y \in X$ 满足 $\mathsf{d}(\pi_l(x),\ \pi_l(y)) > 5D$，则 l 上位于 $\pi_l(x),\ \pi_l(y)$ 之间的子线段包含在任意连接 x 的测地线 α 的 $6D$-邻域内。

例 6.7。（收缩测地线）给定一条强收缩测地线 l，最近点投影给出到立方复形 π_l 的粗满射： $X \to \mathbb{R}$，其纤维 $\{h_i := \pi_l^{-1}(n)\}_{n\in 20D\mathbb{Z}}$ 可以看作 X. 中的“超平面”。这些“超平面”以高效且凸的方式剖分空间。具体来说，根据上文定义 6.6 后的评注，若 α 与 h_i, h_{i+1} 相交，则它必定会在 h_i, h_{i+1} 之间近距离经过 l。特别是，由于 α 是测地线， α 不可能折返并再次与 h_{i+1}, h_i. 相交。另一种表述方式是：每条测地线 $\alpha \subset X$ 都投影为 $\mathbb{R}$ 中某条 (D', D')-非参数化拟测地线 $\pi_l(\alpha)$，其中 D' 仅取决于 D.

7. Why care about general curtains? A sample lemma

我们已经讨论了帘幕存在的三个基本例子，即具有强收缩测地线的空间、CAT(0)空间、双曲空间和分层双曲空间。在本节中，我们将探讨这类帘幕在双曲空间和分层双曲空间背景下的用途（不过值得注意的是，我们的大多数构造和陈述仅涉及这些空间上的粗中位数结构 [Bow13]）。对于CAT(0)空间，其用途见 [PSZ22], ；特别是，这些帘幕及其帷幕模型 （一种通过帘幕构造的δ-双曲空间）使得能够将映射类群和CAT(0)立方复形中已知的定理广泛推广到CAT(0)空间，包括Ivanov风格的刚性定理、具有秩刚性特征的二分性，以及秩一元素的一个普适双曲空间；即使对于真余紧立方复形而言，这一陈述此前也尚不为人所知。

最后，对于包含强收缩测地线的空间（例如，内射度量空间 [SZ22] 和 Garside 群 [CW21]），这些帘幕似乎也能提供一些强有力的构造；不过，Petyt、Spriano 和作者仍在通过一项进行中的工作探索完整图景。

在上一节中，我们已略微提及，如何在带有到 CAT(0)立方复形 π_Y 的满射 X 的测地度量空间中定义帘幕 $X \to Y$，即将 π_Y 下的超平面 Y 的原像作为帘幕。

我们还讨论了这一方法如何适用于带有到双曲空间（例如层次双曲空间）的满射的空间。具体而言，若 X 是一个层次双曲空间，其包含一族双曲空间 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$，并带有映射 $\{\pi_{U_i} : X \to U_i\}_{i\in I}$，那么一种合理的帘幕定义可以是 $(\pi_U \circ \pi_l)^{-1}(I)$，其中 $U \in \mathcal{U}$ 是双曲空间，$l \subset U$ 是一条测地线，而 $I \subset l$ 是一个（可能较厚的）区间。此外，如果我们希望这些“帘幕”是中位凸的，也可以改为取集合 $(\pi_U \circ \pi_l)^{-1}(I)$ 的中位包。

上述子集将是我们帘的主要来源；不过，为了使定义尽可能简洁且灵活，我们选择如下定义HHS帘。

定义 7.1。（HHS帘）设 X 是一个层次双曲空间，并设 E 为 HHS常数。HHS帘 定义为一个中位凸集 h，满足 $X - h \subseteq h^+ \sqcup h^-$，其中 h^+、h^- 是不相交的中位数凸集，且 $\mathsf{d}(h^+, h^-) \geqslant 10E$. 。见图 4。

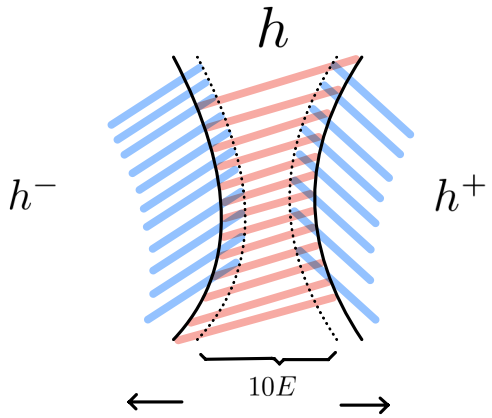

FIGURE 4. 一个帘幕及其半空间。

根据定义显然，任何保持中位数的群 G 在 X 上的作用都必须将帘幕映射为帘幕。集合 h^+, h^- 称为 h 的**半空间**，如果一条路径 α 与 h **相交**，则称集合 $\gamma \cap (h^+ - h)$, $\gamma \cap (h^- - h)$ 均非空。我们的 HHS 帘的主要示例将来自映射 $\pi_U \colon X \to U$，其中 $U \in \mathcal{U}$。具体而言，可以直接验证，集合 $\mathrm{hull}[(\pi_U \circ \pi_l)^{-1}(I)]$ 是一个 HHS 帘，其中 U, I, l，与上一段中的情况相同。

回忆一下，层次双曲空间中的中位凸集满足 粗*Helly*性质 [HHP20]。也就是说，如果一族中位凸集 $\{C_i\}_{i\in I}$ 满足 $C_i \cap C_j \neq \varnothing$，其中至少有一个 C_i 有界或 $|I| < \infty$，那么存在一点 $x \in X$属于交集 $\cap_{i\in I} N(C_i,\ E)$，其中 $N(C_i,\ E)$ 表示 E的 C_i-邻域。特别地，当 I 有限时，上述性质适用于前面的帘幕及其半空间。如果 I 不是有限的，那么该性质仍然成立，但需要确保存在一个常数 K，使得对于所有 $i \neq j$，$C_i \cap C_j$ 的直径都有上界 K.

以下引理摘自 Petyt、Spriano 和作者即将发表的一项工作。值得注意的是，我们在那里采用的框架比层次双曲空间更为一般，仅依赖于该空间的中位数结构 X. 不过，为了使本综述完整且自洽，我们将在附录A中给出该结论的另一种证明，该证明依赖于 X.的层次结构

引理7.2 (Petyt-Spriano-Zalloum)。 设 X 为一个层次双曲空间；将 *HHS*常数E 统一增加一定量后，对于任意 x、y、$z \in X$.，以下结论成立

(1) 距离$\mathsf{d}(x, y)$ 与分隔 x, y. 的帘子的极大链的大小粗略一致。也就是说，$\mathsf{d}(x, y) \underset{E}{\asymp} \max\{|c| \colon c \text{ 是分隔 } x, y\}$.的帘幕链。*(2)* 拟测地线 α 是层次路径（等价地，是中位数路径），当且仅当它不会两次穿过同一帘幕。*(3)* 中位数 $\mu(x, y, z)$ 粗略而言是唯一一个位于所有包含 x, y, z.中多数点的半空间的E-邻域交集中的点。*(4)* 对于任意集合 A，A 的中位包粗略而言是所有严格包含 A.的半空间的 E-邻域的交集。

或许可以作为此类帘幕具有典范性的证据，上述相对较长陈述中的每一项，其证明都不超过几行（证明见附录A）。对于熟悉层次双曲空间的读者，值得注意的是，上述引理7.2的第1项仅仅是距离公式与Behrstock不等式共同作用的体现。也就是说，在双曲空间 $U \in \mathcal{U}$ 中产生较大距离，等价于穿过许多来自该双曲空间的帘；而对于两个一般的（横向的）双曲空间U，$V \in \mathcal{U}$，Behrstock不等式控制着来自 U的帘与来自 V，的帘如何相互作用，即保证它们形成一条链。

8. Marrying mapping class groups, $\mathrm{CAT}(0)$ groups and injective spaces

截至五年前，我们用于研究 CAT(0)群和映射类群的工具相当丰富，但它们本质上彼此排斥。

8.0.1. 适用于 *CAT(0)*群但不适用于映射类群的工具。与 CAT(0)群不同，映射类群无法在CAT(0)空间上进行几何上的（适当且共有界的）作用；而已知唯一具有精细（即非粗）几何、可容许映射类群作用的可缩空间是 Teichm¨uller 空间；然而，这种作用并非共有界。简而言之，直到最近，我们还不知道任何适用于映射类群的精细、可缩几何模型（即一个 G 在其上进行几何作用的空间）。

此外，与 CAT(0)群不同的是，人们尚不知道映射类群是否存在这样一种几何模型：其中Morse （等价地说，伪阿诺索夫 [Beh06]）元素具有强收缩拟轴。拥有强收缩拟轴是一种极其理想的性质；已知它能够揭示作用群的大量信息，例如伪阿诺索夫元素的一般性 [Yan20], 作用的增长紧性 [CM19], 非柱双曲性、Morse测地线的正则性 [EZ22], [RST22] 以及许多其他性质。事实上，Rafi 和 Verberne 证明，在映射类群的显然几何模型——即其凯莱图——中，Morse元素的轴可能并不具备强收缩性 [RV21]。



Figure 5. 映射类群不存在类似 CAT(0)的空间，CAT(0)空间也不存在类似曲线图的空间

8.0.2. 适用于映射类群、但不适用于 *CAT(0)* 群的工具。 另一方面，与拥有曲线图的映射类群不同，人们此前并不知道 CAT(0) 群——包括立方化的 CAT(0) 群——能够作用于某个双曲空间，并且该空间相对于其莫尔斯元素（等价地，秩一 [CS15], [BF09]）具有普适性。众所周知，立方化群可以有效地作用于许多双曲空间，包括 Hagen 的接触图和 Genevois 的分离空间；然而，这两者都不相对于 G 的所有 Morse 元素具有普适性，见图5。

8.0.3. 让这些工具相结合。过去几年间，[HHP20]发现，映射类群（更一般地说，层次双曲群）在细致、可缩的度量空间上具有几何作用，这些空间与 CAT(0) 空间非常相似；具体而言，它们是内射度量空间。他们的定理使得许多已知关于 CAT(0) 群的结论能够推广到映射类群（以及层次双曲群），包括半双曲性、Morse 测地线与强收缩测地线等价 [SZ22]，以及有限子群的共轭类只有有限多个这一性质。见图6。



FIGURE 6. 映射类群在一个内射空间上存在几何作用，其中莫尔斯元素具有强收缩拟轴；而CAT(0)群在帷幕模型 X_{D}上存在普适W.P.D作用。特别地，所有强收缩测地线都准等距嵌入于 $\mathcal{C}S$ 和 X_{D}.

另一方面，Petyt、Spriano与作者近期的工作表明，每个CAT(0)群 G 都在一个与曲线图极为相似的空间上存在作用：一个称为帷幕模型、记作 X_{D}的 δ-双曲空间。此外，类比于映射类群在其曲线图上的作用，G 在帷幕模型 X_{D} 上的作用是W.P.D 普适的，这意味着 G 的所有莫尔斯元素都在 X_{D} 上作双曲地作用，且为W.P.D等距变换。

第2. 部分 详细讨论

9. INJ ECTIVE METRIC SPACES AND THEIR EXCEPTIONALLY TOLERATING GEOMETRY

9.1. **其定义及其容纳几何的若干方面**。范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 X 称为内射的，如果对于任意态射 $f\colon Y \to X$ 以及任意单态射 $i\colon Y \to Z$，都存在态射 $f\colon Z \to X$，使其在 Y 上限制为 f，也就是说，我们有 $f \circ i = f$.。内射度量空间是指在度量空间范畴（其态射为1-Lipschitz映射）中的内射对象。更具体地说，若度量空间 X 满足以下条件，则称其为内射的：给定度量空间 Y 和 1-Lipschitz映射 $f\colon Y \to X$，该映射 f 可延拓到每个度量空间 Z，只要 Y 等距嵌入其中。见图7。

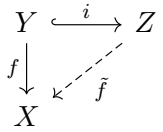

FIGURE 7. 对象 X 是内射的。

根据定义，某个范畴中的内射对象是“很容易将事物映射进去”的对象。特别地，对于内射空间 X 的每个子空间 Y，如果 Y 等距嵌入到另一个度量空间 Z，中，那么 Z 也可以通过一个 1-Lipschitz 映射映入 X。对于 X 而言，这样的泛性质使我们能够在抽象层面进行某些构造

度量空间 Z，其中包含 X 的某个子空间 Y，并将它们带入我们的空间；这是内射空间中的核心主题。

换句话说，内射度量空间内部有充足的空间，因此其几何具有很强的容错性。我们通过一些例子来说明这一点：

1) 嵌入区间：给定内射度量空间 (X,d) 中的两点 x, y，如果我们关于 X 内部拥有丰富空间的主张成立，那么必定存在一条连接 x, y 的测地线。确实存在，证明可直接由定义得出。令Y为由两点组成的度量空间 $Y = \{x, y\}$，且 $\mathsf{d}_Y(x, y) = \mathsf{d}(x, y)$。我们知道 Y等距嵌入到 X 和区间 $Z = [0, \mathsf{d}(x, y)]$ 中。根据单射性的定义，等距嵌入 $f\colon \{x, y\} \to X$ 可扩展到 $Z = [0, \mathsf{d}(x, y)]$，从而得到一个˙ ˙映射 $f\colon [0, \mathsf{d}(x, y)] \to X$，它在端点上的限制为 f。由于映射 f 是 1-利普希茨˙，且在端点 $\{0$ 上的限制为 f，$\mathsf{d}(x, y)\}$，三角不等式意味着 f是一个等距嵌入。

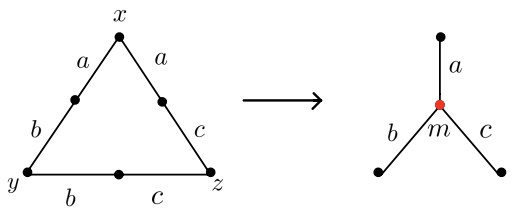

FIGURE 8. 任意度量空间中与测地三角形相关联的抽象三脚架。

2) 三脚架： 给定一个度量空间 X，为简单起见，设 X 是测地的（但这并非严格要求）。对于任意三个点 x、y、$z \in X$，总能找到非负实数 a、b、c，使得：

$$\begin{aligned}\mathsf{d}(x, y) &= a + b\\ \mathsf{d}(x, z) &= a + c\\ \mathsf{d}(y, z) &= b + c.\end{aligned}$$

也就是说，在任意测地度量空间 X 中，对于三个点 x、y、$z \in X$，都存在一个自然映射，将给定的连接 x、y、z 的测地三角形 Δ 映射到一个以 x、y、z、m 为顶点的三脚架 T 上，使得 $\mathsf{d}_T(x, m) = a$，$\mathsf{d}_T(y, m) = b$ 和 $\mathsf{d}_T(z, m) = c$ 分别满足上述条件，其中 a、b、c 如上所述，参见图 8。然而，三脚架 T 通常并不能等距嵌入 X，它仅仅是一个抽象三脚架，由测地三角形 Δ 映射到其上。作为内射度量空间具有包容性这一特性的进一步证据，如果 X 是内射的，那么该三脚架确实可以等距嵌入 X（例如，参见 [Lan13]）。为此，只需运用前一个例子中的相同思路，即考虑由 $Y = \{x, y, z\}$ 构成的三点度量空间，使单射 $f\colon Y \to X$ 成为一个等距嵌入，并注意到 Y 可以等距嵌入上述三脚架 T 中。X 的内射性保证映射 f 可以延拓为一个 1-利普希茨映射 ˜$f\colon T \to X$，使得其在 $\{x, y, z\}$ 上的限制是一个等距嵌入，从而完成˜的证明。这意味着 f 也是一个等距嵌入。注意，这种三脚架的存在可以被视为测地度量空间这一性质的“高维”类比。也就是说，如果对于任意一对点 x、y，在 X. 中都存在一个以 x、y 为端点的等距嵌入的 I，那么度量空间 X 就是测地的。另一方面，一个度量

如果对于任意三个点 x呈三足架状y，z，都存在一棵等距嵌入的三脚架 T，其端点为 x，y，z，且位于 X. 中，那么我们就称该空间具有三足架状性质。

给定内射度量空间中的三个点 x，y，z，我们已经证明，存在一个等距嵌入三叉树 T，其中心有一个类中位点 m 。值得注意的是，即使对于相同的 x，y，z.，这样的三叉树（及其中位点 m）也并不唯一。也就是说，可能找到两个等距嵌入三叉树 T_1，T_2，它们的端点为 $\{x,\ y,\ z\}$，且其中位点 $m_1 \neq m_2$ 彼此不同。考虑到内射度量空间内部有充足的空间，使得其几何性质具有很强的容错性（在这里或许容错性过强？），这并不令人意外。

尽管如此，正如 Lang 在他的文章 [Lan13]，中指出的那样，是否存在这样一个等距嵌入的三脚架，通常是检验相关度量空间是否为内射空间的一个很好的首要测试。

3) 中心： 给定度量空间 X 中的一个有限点集 $\{x_1, \cdots x_n\}$，通常希望为这些点指定一个“中心”或“质心”。例如，如果 G 在存在中心的度量空间 X 上几何作用，通常可以利用这些中心证明每个有限子群 F 都必须固定一个点（即一个 F-轨道的中心），进而推出 G. 中有限子群只有有限多个共轭类。

回顾一下，对于给定的度量空间 $X,$，空间 $\mathbb{R}^X$ 就是由所有映射 $f\colon X \to \mathbb{R}.$ 组成的向量空间。正如 Petyt [Pet22] 在其论文中所述（建立在 [Des16] 和 [Nav13] 的思想之上），$\mathbb{R}^X$ 上的向量空间结构使得为有限点集 $\{f_1, \cdots f_n\} \subset \mathbb{R}^X$ 指定中心变得容易：只需将各点相加，再除以点的个数。也就是说，$\{f_1, \cdots f_n\}$ 的中心 定义为

$$c = c(f_1, \cdots f_n) = \frac{1}{n}(f_1 + f_2 \cdots f_n).$$

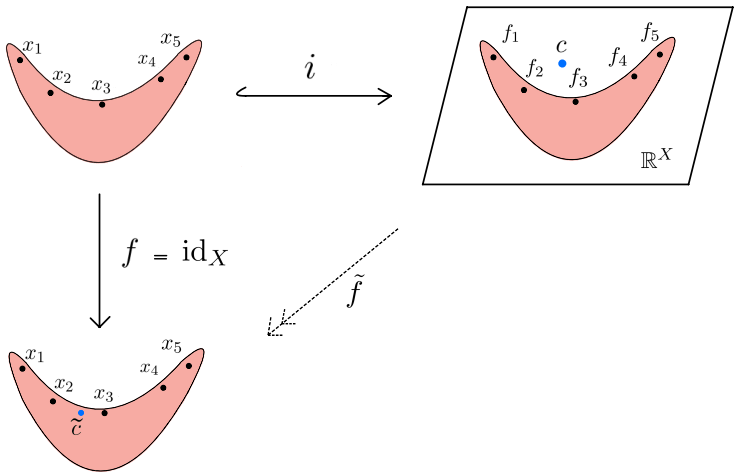

FIGURE 9. 对于 X 中的一个有限点集，我们构造其典范像 $i(X)$ 在 $\mathbb{R}^X$ 中的中心，而泛性质使我们能够将其向下推至 X.

给定内射度量空间 $X,$中的有限点集 $\{x_1, \cdots x_n\}$，我们将利用 $\mathbb{R}^X$中存在中心这一事实，为 $\{x_1, \cdots x_n\},$关联一个中心；具体而言，将 $\{x_1, \cdots x_n\}$等距嵌入到 $\mathbb{R}^X$中，在 $\mathbb{R}^X$中找到它们的中心，再通过泛性质将其映射回 X。

更准确地说，考虑等距嵌入单射 $i: X \to \mathbb{R}^X$，其由 $x \mapsto \mathsf{d}(x,-)$给出，其中 $\mathbb{R}^X$是相对于距离 $\mathsf{d}_\infty(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)|$给出的，其中 $x \in X\}$. 点 $\{x_1,\cdots x_n\}$的像——我们希望为它们指定一个中心——由 $\{f_1,\cdots f_n\}$给出，其中 $f_i: X \to \mathbb{R}$ 由 $f(z) = \mathsf{d}(x_i,z)$给出。正如我们刚才所讨论的，点$\{f_1,\cdots f_n\}$存在一个中心 $c \in \mathbb{R}^X$.。值得注意的是，这个中心 c通常并不位于 $i(X) \subset \mathbb{R}^X$中，见图 9；不过， X 的单射性保证恒等映射$f = \mathrm{id}_X: X \to X$ 可以延拓为映射 $\tilde{f}: \mathbb{R}^X \to X$，特别是，点 $c \in \mathbb{R}^X$ 在 X. 中有一个˜ ˜自然像。此外，映射 f 是 1-利普希茨这一事实保证 $f(c)$ 确实˜表现得像是 $\{x_1,\cdots x_n\}$的一个中心，也就是说，点 $f(c)$ 到每个 x_i的距离至少不大于 c到 f_i.的距离。

注 9.1。必须区分上文第 1、2 项中的例子与第 3 项中的例子。在例 1 和例 2 中，我们从一个有限点集 Y 出发，希望它满足某种性质；为了确立这一性质，我们将 Y 等距嵌入到一个具有该性质的度量空间 Z 中。随后， X 的单射性发挥作用，使我们能够将这一性质传递到 X 上，从而得到所需的结论。重要的是， Z 具有这一性质，仅依赖于 Z 的度量结构，而不依赖其他任何条件。

在例 3 中，我们同样从一个有限点集 $Y \subset X$ 出发，希望它满足某种性质；这里的性质是存在一个中心。为此，我们将 X 等距嵌入到一个存在中心的度量空间中，即向量空间 向量空间 $\mathbb{R}^X$。随后， X 的单射性使我们能够将这个中心传递到 X.上。与第 1、2 项不同， $\mathbb{R}^X$ 中存在中心这一事实并非只依赖于 $\mathbb{R}^X$上的度量结构， 还依赖于 $\mathbb{R}^X$ 是一个向量空间（利用加法在 $\mathbb{R}^X$中构造中心）。这表明，利用向量空间结构的构造往往可以推广到内射度量空间，尽管后者不一定是向量空间。

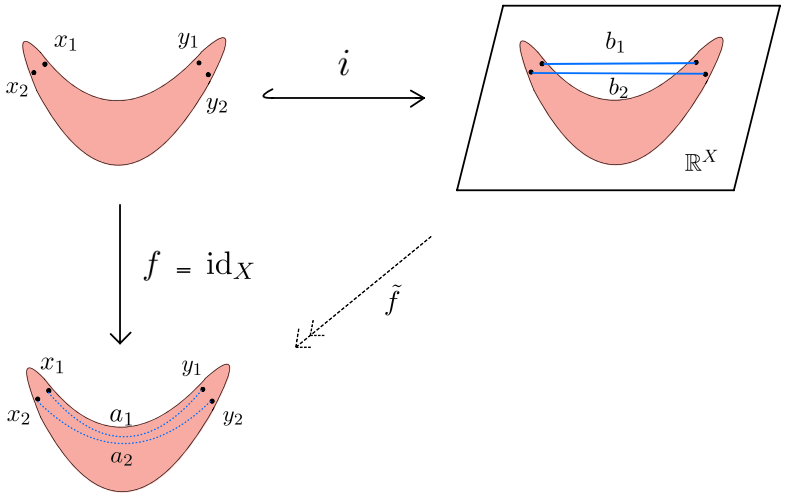

FIGURE 10. 对于两对点 x_1， x_2， y_1， $y_2 \in X$，我们用仿射测地线 b_1， $b_2 \subset \mathbb{R}^X$ 连接它们在 $i(X)$ 中的典范像，并将这些测地线映射到X；这依赖于单射性的泛性质。

4) 伴行测地线：我们将证明，每个内射度量空间 X 都存在一组测地线 $\mathcal{G}$，连接任意一对点，且这些测地线彼此伴行。正如

迄今为止构造所秉持的理念，我们只需找到一个度量空间Z，使其具有我们所需的性质，将 X（或 X中的一个有限点集）包含在 Z中，再利用 X 的内射性，将这一性质传递到 X。

我们就这样做。具体来说，给定两对点 $\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\}$，其中 $\mathsf{d}(x_1,x_2)$ 和 $\mathsf{d}(y_1,y_2)$ 都很小，假设它们都等于 1，我们希望构造一对测地线 $\{a_j\}_{j=1}^2$，连接 $\{x_j,y_j\}$，且彼此之间的距离始终不超过 1。同样，我们将 X 等距嵌入 $\mathbb{R}^X$，映射为 $i\colon X\to\mathbb{R}^X$，并考虑由 $b_j=(1-t)x_j+ty_j.$ 给出的连接 $i(x_j),i(y_j)$ 的仿射测地线。由于我们处于 $\mathbb{R}^X$ 中，这些仿射测地线 b_1,b_2 的起点和终点分别是 $i(x_j),i(y_j)$，且满足 $\mathsf{d}(x_1,x_2)=\mathsf{d}(i(x_1),i(x_2))=1$，以及 $\mathsf{d}(y_1,y_2)=\mathsf{d}(i(y_1),i(y_2))=1.$，因此它们彼此之间的距离始终不超过 1。根据单射性的定义，恒等映射 $f\colon X\to X$ 可延拓为 $\tilde{f}\colon\mathbb{R}^X\to X$；又由于 $\tilde{f}$ 是 1-利普希茨的，路径 $a_j=\tilde{f}(b_j)$ 彼此之间的距离始终不超过 1。最后，根据三角不等式可知，$\{a_j\}_{j=1}^2$ 也都是测地线，见图 10。

在几何群论的研究中，度量空间 X 最令人向往的性质之一，是具有测地线双梳：一族 Isom(X)-不变的测地线$\mathcal{G}$，连接每一对点 $x,\ y\in X$ 并满足某种类似于我们上文得到的同行条件。虽然前面的描述给出了一族连接每一对点 $x,\ y\in X$的同行测地线，但无法保证这族测地线是 Isom(X)-不变的（感谢 Thomas Haettel 指出这一点）。尽管如此，证明不变测地线双梳存在的方法与前述思路非常相似，不过必须显式构造“向下推”映射，以确保 Isom(X)-不变性，见 [Lan13]。同样的说明也适用于上文第 3 项中的中心构造：为了确保中心的 Isom(X)-不变性，应当使用这样的映射。

4) Helly 性质：上文第 3 项中三脚架的存在，体现了更一般的球的 Helly 性质，而该性质刻画了内射度量空间。具体来说，一个度量空间是内射的，当且仅当它是测地的，并且任意一族两两相交的闭球$\{B(x_i,r_i)\}_{i\in I}$ 都有非空交集。内射空间具有 Helly 性质，这与“内射空间拥有格外包容的几何结构”这一信条十分契合。也就是说，一族球两两相交，可以视为它们有非空交集的最低前提。因此，这里的 Helly 性质表明：一旦一族度量球满足有非空交集这一最低前提，内射度量空间的包容性（其形式化体现就是泛性质）便保证了它们确实有非空交集。该命题（正向部分）的证明也遵循“构造一个具有所需性质的度量空间，再将其映射到 X”这一信条；我们现在就来这样做，见图 11。设 $\{B(x_i,r_i)\}_{i\in I}$ 是一族两两相交的球，即对于所有 $i,j\in I$，都有 $\mathsf{d}(x_i,x_j)\leqslant r_i+r_j$，并设 $Y=\{x_i\}_{i\in I}.$。考虑（可能是无限的）带权图 Z，其顶点集为 $\{x_i\}_{i\in I}\cup\{\star\}$；任意两个顶点 $x_i,x_j\in\{x_i\}_{i\in I}$之间都以一条权重为 $\mathsf{d}(x_i,x_j)$的边相连，并且 $\star$ 通过一条权重为 $r_i.$ 的边与每个 x_i 相连。由三角不等式可立即得出，我们有一个等距嵌入 $i\colon Y\to Z$。由于 Y 也通过包含映射 $f\colon Y\to X$等距嵌入 X，内射性的泛性质给出一个映射 $f\colon Z\to X$。由于 f 是 1-利普希茨，点 $f(\star)$ 满足 $\mathsf{d}(f(\star),f(x_i))\leqslant\mathsf{d}(\star,x_i)=r_i$，对每个 $i.$均成立。证明至此完成。

5）**内射空间是完备的**：此时这或许是一道很好的练习题，因为其证明与上述第 1—4 项中的证明非常相似。

9.2. **内射空间的典范性：**在引言中，我们讨论了内射度量空间的例子，以及内射度量空间近来对几何群论领域的影响。本节将介绍几个原因，说明为何

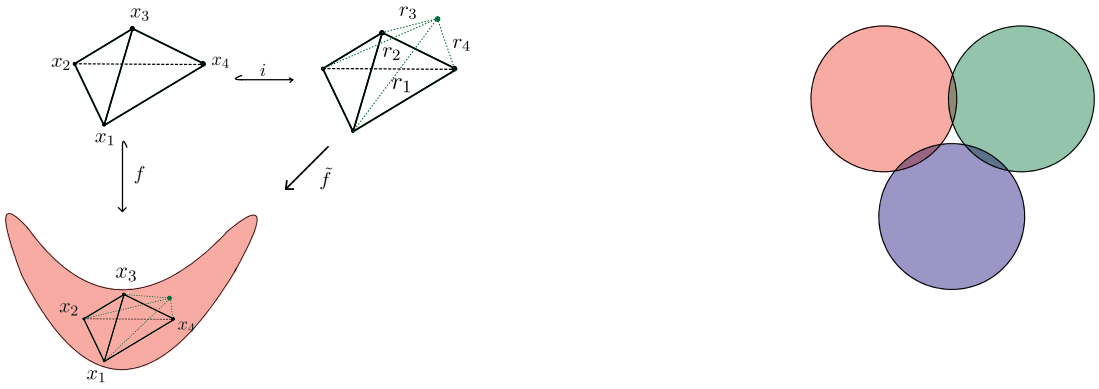

FIGURE 11. 右侧的图示展示了在通常的欧几里得度量下， $\mathbb{R}^2$中 Helly 性质失效的情形。左侧的图示则展示了单射性如何蕴含 Helly 性质。

内射空间是非常典范的对象，无论是在一般度量几何中，还是尤其是在几何群论中。然而，鉴于它们是通过泛性质定义的，其典范性并不令人意外。首先值得指出的是，每个度量空间都可以等距嵌入到一个“最小”的内射度量空间中。

9.2.1. 内射包络。 假设 X 是一个非内射度量空间，这意味着 X 没有足够的点来使其几何结构足够宽容。一个自然的尝试是向 X 添加更多点，添加所需数量的点，使 $Y = X \cup \{$ 中的额外点 $\}$ 足够宽容，也就是说，使其成为内射空间。另一方面，如果我们希望得到的更大空间 $Y = X \cup \{$ 中的额外点 $\}$ 能够体现 X 原有的几何结构，那么重要的是不要添加超出必要数量的点，也就是说，我们希望 $Y = X \cup \{$ 中的额外点 $\}$ 构成内射空间 $Y - X$，同时尽可能小。这两者之间的张力定义了度量空间 X 的内射包 。

给定一个度量空间 X，考虑集合 $\Delta := \{f \in \mathbb{R}^X | f(x) + f(y) \geqslant \mathsf{d}(x,\ y)\ \forall x,\ y \in X\}$.称元素 $f \in \Delta$ 为度量形式。定义集合 $\Delta^1 := \Delta \cap \mathrm{Lip}^1(X,\ \mathbb{R})$ 其中 $\mathrm{Lip}^1(X,\ \mathbb{R})$ 表示所有 1-利普希茨映射 $f : X \to \mathbb{R}$ 构成的空间。我们在集合 Δ^1 上赋予距离 $\mathsf{d}_\infty(f,\ g) := \sup\{|f(x) - g(x)|$，其中 $x \in X\}$。

空间 Δ 具有自然的偏序结构，其中当且仅当对所有$x \in X.$，都有 $f(x) \leqslant g(x)$ 时，$f \leqslant g$ 。度量空间 X的内射包 （有时也称为内射包络 或紧包），记为 $E(X)$，定义为上述偏序集在 Δ上的所有极小元素的集合:

$$E(X) := \{f \in \Delta |\ \text{if } g \in \Delta, \text{we have } g \leqslant f \implies g = f\}.$$

作为度量空间，内射包是配备了 d_∞-距离的集合 $E(X)$ 。内射包最初由 Isbell [Isb64] 引入，此后又被独立地重新发现了两次：第一次是 Dress 在 [Dre84] 中，第二次是 Chrobak 和 Larmore 在 [CL94] 中。现在我们总结 $E(X)$的一些性质，更多详情请参见 [Lan13] 的第 3 节。

引理 9.2 ([Lan13，第 3]节。 对于任意度量空间 X，内射包 $E(X)$ 关于 d_∞-距离构成一个测地度量空间。此外，我们有以下结论。

(1) 存在一个等距嵌入 $e\colon (X,\mathsf{d}) \hookrightarrow (E(X),\mathsf{d}_\infty)$，由 $x \mapsto \mathsf{d}(x,-)$. 给出。*(2)* 对于任意 $f \in \Delta^1$，我们有 $f(x) = \mathsf{d}_\infty(e(x), f)$，对所有 $x \in X$. 均成立。*(3)* 对于 $f \in \mathbb{R}^X$，当且仅当 $f \in \Delta$ 时， $f \in E(X)$ 成立；并且对于任意 $\epsilon > 0$ 和任意 $x \in X$，存在某个 $y \in X$，使得 $f(x) + f(y) \leqslant \mathsf{d}(x,y) + \epsilon$.。

(4) $E(X) \subseteq \Delta^1$. 事实上，嵌入 $e\colon\ X \hookrightarrow E(X)$ 是 $\mathrm{Isom}(X)$-等变的。

关于度量空间的内射包，一种理解方式是将其视为一个凸化过程：我们向 X 中添加了一些点，而这些点有“规范的理由”应属于 X. 。也就是说，所有新添加的点 $f\colon\ X \to \mathbb{R}$ 都具有度量形式（即满足 $f(x)+f(y) \geqslant \mathsf{d}(x,\ y)$) 这实质上使它们与点 $\mathsf{d}(x,\ -) \in e(X) \cong X$无法区分，因为两者都满足相同的类三角不等式。

9.2.2. 乘积上的自然度量。 给定范畴 $\mathcal{C}$中的两个对象 $X_1,\ X_2$ ，X_1 与 X_2 的乘积 是一个对象 X，通常记作 $X_1 \times X_2$，并配有一对态射$\{\pi_i : X \to X_i\}_{i=1}^2$ ，使得对于任意对象 Y 及态射 $\{f_i : Y \to X_i\}_{i=1}^2$，都存在唯一的态射 $f\colon\ Y \to X_1 \times X_2$ ，使图 12 中的图表可交换。举例来说，在集合、拓扑空间和群的范畴中，上述乘积的泛概念给出了这类对象上的通常乘积结构；特别地，对于拓扑空间，它给出 $X_1 \times X_2$ 上的通常乘积拓扑；对于群，乘积恰好就是这两个群的直积。有趣的是，如果我们考虑度量空间与 1-Lipschitz映射构成的范畴，那么由上述泛性质得到的两个度量空间 $X_1 \times X_2$的乘积，是度量空间 $(X_1 \times X_2,\ \mathsf{d}_\infty)$，也就是说，$\mathsf{d}((x_1,\ x_2),\ (x_1',\ x_2')) = \max\{|x_1 - x_1'|,\ |x_2 - x_2'|\}$。特别地，在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上值得考虑的自然度量是 d_∞-距离，而非欧几里得度量或组合度量（出租车度量）。换言之， $\mathbb{R}^n$ 上的“正确”度量结构（当态射选为 1-Lipschitz映射时），恰恰是使其成为内射度量空间的度量结构。

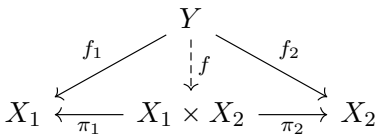

FIGURE 12. 任意范畴中的积。

到目前为止，我们已经看到内射度量空间具有高度典范性的两个原因。首先，每个度量空间都自然带有唯一的内射包。其次，在两个度量空间的积上赋予的典范度量是 d_∞-度量，它与内射性密切相关。现在，我们将探讨从几何群论的角度来看，内射度量空间为何具有吸引力。

9.2.3. 粗注入度量空间。 若存在常数 C ，使得 $E(X)$ 中的每个点到 $e(X)$中的某个点的距离都不超过 C ，则称度量空间 X 为粗单射的，其中 e 是映射 $e\colon\ X \to E(X)$。等价地，若一个测地度量空间满足其球的粗*Helly*性质，则它是粗单射的：存在常数 C ，使得对于任意一族两两相交的球 $\{B(x_i,\ r_i)\}_{i\in I}$，都存在一点 $x \in \cap_{i\in I} B(x_i,\ r_i + C)$；粗注入度量空间的等价定义见 [JL22]中的命题 5.2。值得牢记的主要例子是格罗莫夫双曲空间 [Lan13]。此外，在 [HHP20], 中，作者证明每个层次双曲空间 HHS $(X,\ \mathsf{d})$ 都带有一种内射距离 ρ_∞ ，它与 X. 上的原距离 d 等变准等距。粗注入度量空间可以看作已经非常接近内射的空间，因此通过映射 $e\colon\ X \to E(X)$ 使其内射化，并不会增加太多点：每个新添的点到 X. 中的某个点的距离都不超过一个统一常数。最后，若将 X 的内射包视为

如上所述的凸化过程，那么双曲空间在其内射包中粗稠密便不足为奇，因为众所周知，它们具有很强的凸性性质。

9.2.4. 强收缩测地线。对于空间 X 包含一条“类双曲”测地线这一性质，有多种相互竞争的量化方式。通常，这些测地线具有某些类似于双曲空间中测地线的凸性。上述“类双曲”概念中最强的是 D-强收缩测地线。若一条测地线 γ 满足：对于每个满足 $B \cap \gamma = \varnothing$ 的球 B，都有 $\operatorname{diam}(\pi_\gamma(B)) \leqslant D$，则称其为 D-强收缩的，其中 $\pi_\gamma : X \to \gamma$ 是最近点投影。

强收缩测地线的特征在于具有强烈的“瓶颈式”行为。具体而言，不难验证：一条测地线 γ 是 D-强收缩的，当且仅当对于任意两个点 $a,\ b \in X$ 若它们沿 γ 的投影距离很远（超过 $6D$），则连接 $a,\ b$ 的每条测地线都必须经过 $4D$附近的每个点 p，其中这些点位于 $\pi_\gamma(a),\ \pi_\gamma(b)$ 之间并沿 γ.

一个测地度量空间是 δ-双曲的，当且仅当存在一个常数 $D \geqslant 0$，使得每条测地线都是 D- 强收缩的；从这个意义上说，这些测地线可以被视为 “ 类双曲 ” 测地线。群 G 或空间 X 中存在（无限）强收缩测地线，且 G 在其上作用，这将带来诸多理想的结果，包括其增长、某些元素的一般性、可缩圆双曲性等方面的性质，以及更多其他结果。

另一方面，这些“类双曲”概念中最弱的是 M-莫尔斯测地线。对于函数 $M\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，如果一条测地线 γ 满足：每一条端点位于 γ 上的 (q,Q)-拟测地线 β 始终处于 $M(q,Q)$-邻域 γ. 内，则称其为 M-莫尔斯测地线。这类 M-莫尔斯测地线也刻画了双曲性，即一个测地度量空间是双曲的，当且仅当存在一个映射 $M\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，使得每条测地线都是 M-莫尔斯的。

对于任意测地度量空间，强收缩测地线都是 Morse 的，但反之则远非如此（见 [Fin17]）。

从这个意义上说，一个空间中存在 Morse测地线可以被视为存在强收缩测地线的一个非常基本的前提。内射空间具有极强的容错性，这保证了这样一个最低限度的前提条件就足够了：

定理 9.3 ([SZ22，定理 A])。 内射度量空间中的一条测地线是 M-*Morse* 的，当且仅当它是 D-强收缩的，其中 M 和 D 可以相互确定。

如果 α 是 X中的一条强收缩测地线，那么没有理由认为它在空间 Y 中仍然保持强收缩性，即使 Y 是内射的。例如，直线 $X = \mathbb{R}$ 在 X中是强收缩的，然而它可以等距嵌入到内射度量空间 $(\mathbb{R}^2,\ \mathbf{d}_\infty)$ 中，而其中没有任何测地线是强收缩的。另一方面，度量空间 X 的内射包 $E(X)$ 被定义为包含 X的最小内射度量空间，因此，人们自然希望，这种极小性能够保证 X 与 $E(X)$ 的几何结构在强收缩测地线方面相似；事实上，它们确实相似。

定理 9.4 ([SZ22，定理 B])。 度量空间 X 中的一条测地线 γ 是 D-强收缩的，当且仅当它在 $E(X)$ 中的像是 D'-强收缩的，其中 D 与 D' 彼此确定。

原则上，上述定理提供了一种检验任意度量空间 X 中的测地线 l 是否强收缩的方法，即考察其在内射包 $E(X)$ 中的像 $i(l)$，并检查它在该空间中是否强收缩。

然而，在实际操作中，这要求事先了解 $E(X)$ 的具体形态，而这通常相当困难（恰恰是因为内射空间具有很强的包容性且规模庞大）。上述定理的意义恰恰在于揭示了相反的情况；它阐明了包含一条强收缩测地线 $l \subset X$ 的测地度量空间 X 的内射包 $E(X)$ 的形态。也就是说， l 在 $E(X)$ 中仍然保持强收缩这一事实，意味着 l 在 X 中所满足的强瓶颈性质在其内射包 $E(X)$, 中依然成立，即，如果 $a, b \in E(X)$ 沿着 $e(l)$ 投影得足够远，那么连接 a, b 的每一条测地线都必须经过测地线 $e(l)$ 附近。此类瓶颈性质得以保持这一事实意味着，沿着测地线 l 并未向 X 中添加太多额外的点；这可以理解为， l 周围的区域原本就已经非常接近内射空间。这并不令人十分意外，因为强收缩测地线刻画了双曲性（当且仅当存在某个 $D \geqslant 0$ ，使得每条测地线都是 D-强收缩测地线时，空间 X 才是双曲的），而众所周知，双曲空间在其内射包中是稠密的。

上述定理还可作如下解读：由于强收缩测地线 $l \subset X$ 已经具备非常强的类似凸性的性质，这些性质与双曲空间中的性质相似，因此将空间 X 凸化（将其嵌入内射包 $E(X)$）并不会在这类测地线上增加太多点。事实上，正如 [SZ22], 所指出的，上述定理 9.4 推广了 Lang 的定理 [Lan13] ：双曲空间在粗意义下稠密于其内射包中。

在 [SZ22], 之前，已知 Morse 与强收缩这两个概念等价的主要两类例子是：配备 CAT(0)距离的 CAT(0)空间 [CS15], ，以及配备组合距离的 CAT(0)立方复形 [Gen20a]。

度量空间 X 中仅仅存在莫尔斯测地线，就意味着 X 具有“类似双曲的”性质；至少在这些测地线存在的区域是如此。当 X 同时是 CAT(0) 或内射的时，来自 X 的额外非正曲率与莫尔斯性质相结合，使其升级为一条强收缩测地线。

特别是，CAT(0) 概念和内射概念都足够强，能够将莫尔斯测地线提升为强收缩测地线；一个自然的问题是，在这两种概念中，哪一种非正曲率概念更强：CAT(0) 概念还是内射概念?

9.2.5. 内射空间比 *CAT(0)* 空间更双曲还是更不双曲？两种截然不同的观点。如果我们同意将格罗莫夫双曲空间作为衡量一个测地度量空间“负曲率”程度的参照，那么可以认为，内射度量空间比 CAT(0) 空间具有更强的非正曲率性质。让我们用一个例子来说明这一点。假设 X 是一个 CAT(0)立方复形，并且 $c = [0, 1]^n \subset X$ 是一个维数为 $n \geqslant 3$的立方体。由于存在连接其端点 $(0, 0 \cdots, 0), (1, 1 \cdots, 1)$ 的（组合）测地线α, β，它们彼此相距甚远，且距离取决于 n，因此这样的立方体并非 1-双曲的。然而，立方体 c ——以及其他所有维数的立方体——相对于内射 d_∞-距离都是 1-双曲的，因为 c 中的任意两个顶点之间的距离都是 1。因此，与组合距离相比，内射 d_∞-距离可以被视为在局部层面上更具双曲性。

事实上，假设我们从一个非 δ-双曲的 CAT(0)立方复形 X （维数为 $\dim(X) \geqslant 100\delta$ ）出发，并希望将 X 的某些部分锥化，使所得空间 $Y = X/\sim$ 成为 δ-双曲的（可以想到一个简单的例子，例如带有 $k \geqslant 100\delta$的平坦树 $\mathbb{R}^k$ ）。这种锥化可以看作一个两步过程，每一步都会使 X 更接近双曲空间。第一步是通过对所有 $n \geqslant 1$的每个 n-立方体进行锥化，解决双曲性在局部失效的问题；这可以通过

为 X 赋予其内射 d_∞-度量来实现。第二步则是解决双曲性在整体上的失效，这可以通过将每个平坦区域或每个乘积区域锥化来实现。这种两步过程的描述表明，与通常的组合距离相比，d_∞-距离可以被视为在通向双曲性的道路上“更进一步”。

另一方面，CAT(0)空间相较于内射度量空间的一个优点是，CAT(0)空间自带其欧几里得距离或 CAT(0) 距离 $\mathsf{d}_{\mathbb{E}}$ ，使得 $(X，\mathsf{d}_{\mathbb{E}})$ 成为 CAT(0) 空间；特别是，CAT(0) 立方复形也具有这样的距离。与 CAT(0)立方复形 X上的内射距离不同，欧几里得距离会产生唯一的测地线，并且 $(X，\mathsf{d}_{\mathbb{E}})$ 中的三角形至多与 $\mathbb{R}^2$中的三角形一样“肥”，而$(X，\mathsf{d}_\infty)$ 中的三角形则可能非常“肥”。最后，CAT(0)立方复形中的超平面相对于 CAT(0)距离和组合距离都是凸的，但相对于 d_∞-测地线则不是。肥三角形的存在、测地线不唯一以及超平面凸性失效，都可以被视为使我们进一步远离双曲性的因素，这与上一段中的说法形成对照。关于这一点，读者可以自行选择一种看法。对上述现象的一种解释是，内射度量空间的泛性质 X 迫使它包含了过多不必要的内容，从而导致 X 中出现过多测地线，进而造成肥三角形的存在以及凸性类性质的缺失。

注记 9.5。 完成本综述的初稿后，Anthony Genevois 指出了以下非凡现象，清楚地表明，在局部层面上，内射性更具双曲性，这为上述两步过程提供了支持。首先，超平面构成的网格 由两条链 $c = \{h_1、 \cdots h_m\}$、 $c' = \{k_1、 \cdots k_n\}$ 组成，满足 $h_i \cap h_j \neq \varnothing$ 对所有 $1 \leqslant i \leqslant m$ 和$1 \leqslant j \leqslant n.$ 成立。若 $\min\{m、 n\} \leqslant L.$ ，则称网格为 L-薄 网格。我们陈述两个定理，它们用薄网格刻画 CAT(0)立方复形的双曲性。

定理 9.6 ([Gen20b，定理 3.1 和 3.6])。 设 X 为任意 *CAT(0)*立方复形，并令 d、d_∞ 分别表示组合度量和内射度量。我们有如下结论：

(1) (X,d) 是双曲的，当且仅当其网格一致地较薄，且 X 是有限维的。*(2)* (X,d_∞) 是双曲的，当且仅当其网格一致地较薄。

10. CAT(0) cube complexes and their hyperplanes

虚拟哈肯猜想[Wis21、Ago13], 的解决离不开 CAT(0)立方复形的基础性作用，因此它们一直是几何群论的核心研究对象。谈到 CAT(0)立方复形时，我们通常设想这样一个单连通空间：由单位欧几里得立方体沿着面等距粘合而成 $[0，\ 1]^i$ 且不存在“空立方体”；也就是说，如果一个立方体的各个面都存在，那么这个立方体也存在。CAT(0)立方复形通常采用的标准度量是组合度量或出租车帽度量，记作 d：在每个立方体 $[0，\ 1]^i \subset X$ 上赋予如下度量：

$$\mathsf{d}((x_1,\cdots x_i),(y_1,\cdots y_i)) = \sum_{1\leqslant j\leqslant i} |x_j - y_j|,$$

并以显而易见的方式将度量扩展到立方复形 X 上。在 CAT(0)立方复形中给定三个顶点x_1、x_2、 x_3，可以指定第四个点 $m = m(x_1、 x_2、 x_3)$，称为 x_1、 x_2、 x_3的中位数，其定义为满足以下条件的唯一顶点：对所有 $i \neq j.$，$\mathsf{d}(x_i、 m) + \mathsf{d}(m、 x_j)$ =$\mathsf{d}(x_i、 x_j)$

中立方的定义是将立方体 $[0,1]^i$ 的一个坐标限制为 1 2。超平面可通过以下过程得到：给定一个中立方 c，若 c 与相邻立方体中的一个中立方 c'相接，则考虑 $c \cup c'$ 并递归继续；也就是说，若 c' 与另一个相邻立方体中的一个中立方 c''相接，则考虑 $c \cup c' \cup c''$，依此类推。更形式化地说，超平面h 是 X 的一个子空间，对于任意（闭）立方体 c，交集 $h \cap c$ 要么是一个中立方，要么为空。见图 1。每个超平面 h 定义两个不相交的路径连通半空间 h^+, h^-，且 $X = h^+ \sqcup h^-$。若 $x \in h^+, y \in h^-$，则称 h 分离 $x, y.$。类似地，若 $A \subseteq h^+, B \subseteq h^-.$，则称$h$ 分离 $A, B \subset X$。最后，若一组超平面 $\{h_1, \cdots h_n\}$ 中的每个 h_i 都分离 $h_{i-1}, h_{i+1}.$，则称这组超平面为一条链。

10.1. **通过超平面理解立方复形的基本几何概念。** Sageev 的开创性工作 [Sag95, Sag97] 表明，CAT(0)立方复形的几何完全由其超平面及其相互作用方式所记录。例如，尽管距离、测地线、凸包、中位数和投影都是纯粹通过几何术语定义的，但它们可以作如下描述，而这些描述只涉及超平面：

- 距离：将顶点 $(x, y) = |$分开的超平面数量，对于任意顶点 $x, y|$均成立。 $x, y \in X$.
- 测地线：一条边路径是测地线，当且仅当它从不两次穿过同一个超平面。
- 中位数：任意 $x, y, z \in X$ 的中位数，是所有包含 x, y, z中多数元素的半空间的交集。
- 凸包：一个集合 A 的凸包（回忆一下，它是包含 A) 的最小凸集）是所有适当包含 A的半空间的交集。
- 投影/门：使顶点 x 到凸集 C 的距离最小的顶点 $P_C(x)$，其特征是：它是 C 的唯一顶点，使得每个分隔 $x, P_C(x)$ 的超平面 h 都分隔 x, C.

10.2. **超平面为何如此引人入胜?** 为了理解数学中的某个对象，一种非常典型的方法是将其分解成更小、更简单的部分，理解这些部分，再将它们重新组合起来，从而认识原对象。其思路是把对象分解成基本构件，通过理解这些简单的基本构件及其相互作用，来把握原对象。CAT(0)立方复形的基本构件是超平面。它们之所以简单，是因为它们纯粹是组合对象，记录了二元信息：每个点 $x \in X$ 要么位于某个超平面的“左”半空间 h^-，要么位于“右”半空间 h^+ h。我们将举出各种例子，展示超平面及其半空间的二元性所带来的强大结构与构造。

1) 中位数： 给定三个顶点 x、 y、 $z \in X$，假设你想要找出这三个点的“中心”。由于 $X = h^+ \cup h^-$，这三个点中至少有两个必定位于同一个半空间。在继续之前，我们强调一下：至少有两个 x、 y、 z位于同一个半空间这一结论，之所以成立，只是因为我们的基本构件具有二元性。继续讨论：既然已经确定两个点 x、 y、 z 必定位于 h 的同一个半空间，那么无论中心是什么，它似乎都应该位于包含三个点中多数点的那个半空间内，比如说 h^+. 因此，为了得到中心，我们首先对每个超平面选取包含 x、 y、 z中多数点的半空间，并取所有这类半空间的交集（这个交集非空且唯一并非显然，但事实确实如此）。这样的中心称为 x、 y、 z的中位数，记作 $m(x$、 y、 $z)$.

2) 双曲性。 测地度量空间 X 的 Gromov 双曲性也是一种纯粹的几何度量性质；而在 CAT(0)立方复形的语境下，双曲性可以用以下基于超平面的刻画来描述。首先，回顾一下：如果一对不相交的超平面 h、k 满足，任何同时与两者 h、k 相交的超平面链 c 的基数至多为 $L.$，那么就称它们是 L-分离的 。这一性质可以理解为：两个超平面 h、k之间存在一个宽度为 $\leqslant L$ 的瓶颈。有限维 CAT(0)立方复形是 δ-双曲的，当且仅当每对满足 $\mathsf{d}(h$、$k) > \delta'$ 的超平面 h、k 都是 L-分离的，其中常数 L、δ、δ' 彼此决定。尽管这是一个简单且不错的练习，这一结论的证明见 [Gen20b]中的引理 6.51。

3) 经由着色墙的距离。如果在 CAT(0)立方复形 X 中任取超平面 $\mathcal{C}$ 的一个子集，那么可以通过规定如下方式，在 X 上定义一个新的距离 $\mathsf{d}_{\mathcal{C}}$

$$\mathsf{d}_{\mathcal{C}}(a,b) = 1 + |\text{ hyperplanes in } \mathcal{C} \text{ that separate } a,b|,$$

对于任意不同的顶点 $a,b \in X$ ，以及对于任意顶点 $x \in X.$ ，$\mathsf{d}_{\mathcal{C}}(x,x) = 0$ 。也就是说，我们不再计算所有分隔 x,y 的超平面——那样得到的是它们通常的组合距离——而是计算分隔 $x,y,$ 的“着色”超平面，也就是说，我们只计算来自特殊子集 $\mathcal{C}.$ 的超平面

在证明某个函数定义了度量时，通常最难验证的条件是三角不等式；然而，我们的超平面具有二元性，因此可以非常简单地证明 $\mathsf{d}_{\mathcal{C}}$ 满足三角不等式。设 x,y,z 是 X 的顶点，令 $h \in \mathcal{C}$ 为一个分隔 x,z 的超平面；特别地， h 对 $\mathsf{d}_{\mathcal{C}}(x,z)$ 有贡献。第三个顶点 y 必定位于 h 的某一侧，即包含 x 的一侧或包含 z 的一侧。换言之，该超平面要么分隔 x,y，在这种情况下，它对 $\mathsf{d}_{\mathcal{C}}(x,y)$ 有贡献；要么分隔 y,z，在这种情况下，它对 $\mathsf{d}_{\mathcal{C}}(y,z)$ 有贡献；由此便证明了三角不等式。这里加上 1 的原因是，点 x,y 可能不会被来自着色子集 $\mathcal{C}$ 的任何超平面分隔。

Genevois 的研究 [Gen20b]利用了这一思想，其中，对于任意 CAT(0)立方复形X，作者定义了距离 d_L ，其定义为

$$\mathsf{d}_L(x,y) = \max\{|c|:\ c \text{是一个链，其元素两两 } L- \text{分离}\}.$$

度量空间 (X,d_L) 是双曲的，其常数仅取决于 $L,$。对于每个秩一元素（即不存在任何轴围出半平坦区域的半单等距变换） g，都存在一个 L ，使得 g 在 $X_L.$ 上双曲型作用。该构造的实用价值在于，它提供了一族“递增”的双曲空间 (X,d_L) ，这些空间共同捕捉了底层 CAT(0) 立方复形的双曲特征。“递增”这一术语源于恒等映射 $i\colon (X,\mathsf{d}_{L+1}) \to (X,\mathsf{d}_L)$ 是 1-利普希茨的这一事实；并且，如果 g 在 X_L 上双曲型作用，那么它也会在所有满足 $L' \geqslant L$ 的 $X_{L'}$ 上双曲型作用。

4) 定向。 我们关于超平面描述 CAT(0) 的整体几何这一论断，在这个例子中或许表现得最为明显。首先请注意，CAT(0)立方复形的一个顶点 x 可以通过将每个超平面定向于包含该顶点的半空间 x而唯一确定；换言之，一个顶点 $x \in X$ 恰好是所有包含该顶点的半空间的交集。

现在，若 $\mathcal{H}$ 是 X 中所有超平面的集合，那么每个顶点 $x \in X$ 都通过对每个超平面 h 选取包含 x 的半空间，并将 $\{h^+,h^-\}$ 记为 $\{0,1\}.$，从而确定 $\{0,1\}^{\mathcal{H}}$ 中的一个唯一点。自然会产生这样一个问题： $\{0,1\}^{\mathcal{H}}$ 中的每个点是否都定义了 X 中的一个顶点? 但显然答案是否定的，例如，如果 h,k 是

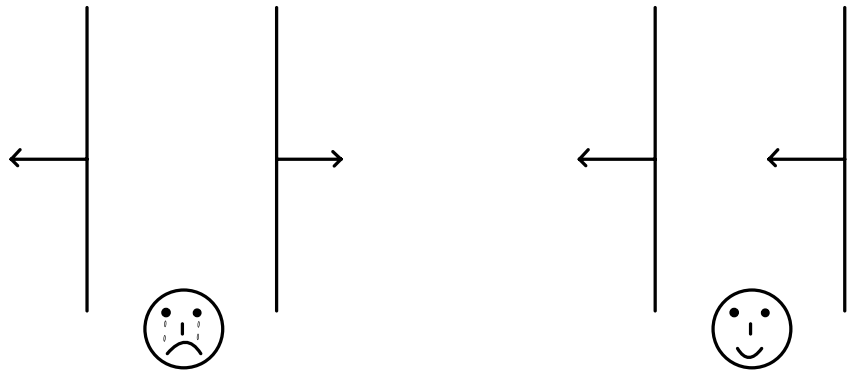

FIGURE 13. 左图中选取的两个半空间不能构成相干定向，而右图中的则可以。

两个指向相反方向的不相交超平面不可能指向同一个顶点，换句话说，它们不可能定义一个顶点 $x \in X$，见图13。

这促成了相干定向的定义，它是 $\{0,\ 1\}^{\mathcal{H}}$ 中的一个特殊点。更确切地说，相干定向是满足以下条件的一组半空间 $\mathcal{C}$：

1）穷尽性：对于每个超平面 $h \in \mathcal{H}$，$\{h^+,\ h^-\}$ 中恰有一个半空间属于 $\mathcal{C}$。

2）向上闭合性：如果 $h^+ \in \mathcal{C}$ 和 $h^+ \subset k^+$，那么 $k^+ \in \mathcal{C}$。

3）终止 自然数集的每个下降链 $\cdots h_1^+ \supseteq h_2^+ \supseteq \cdots$ 都有一个极小元素。

有限维 CAT(0)立方复形 X. 的超平面 $\mathcal{H}$ 上的相干定向与其顶点之间显然存在一一对应关系。此外，立方复形中的一条边 e 对应于两个相干定向 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$，它们恰好在一个超平面上存在差异。

5) Sageev构造。上述例子展示了 CAT(0)立方复形与其超平面集合之间的密切联系，但这种联系确实更为深刻。取一组对 $\mathcal{H}$ 的二分划分 $\mathbb{N}$，也就是说，$\mathcal{H}$ 的每个元素都是一个集合 $W = \{W^+,\ W^-\}$，其中 $\mathbb{N} = W^+ \cup W^-$，且 $W^+,\ W^-$ 均非空。假设 $\mathcal{H}$ 满足如下性质：对于任意不同的 $x,\ y \in \mathbb{N}$，集合 $\mathcal{H}$ 中仅有有限多个元素 $W = \{W^+,\ W^-\}$ 满足 $x \in W^+$ 和 $y \in W^-$.。相干定向的定义与前面第 6 项完全相同，只需用 $\mathbb{N}$ 替换 X。现在，我们可以通过集合 $\mathcal{H}$ 如下定义一个 CAT(0)立方复形 X：

1) 顶点：X 的顶点集定义为 $\mathcal{H}$上所有可能的相干定向。

2) 边：两个相干定向若恰好在 $\mathcal{H}$.的一个元素上不同，则用一条边将它们连接起来。

3) 立方体：只要立方体的各个面都已存在，我们就将该立方体粘合进去。

通过上述构造得到的对象是否为CAT(0)立方复形，并非一目了然，但事实确实如此；关于这一构造的精彩说明，参见 [CN05]。

简而言之，从一组满足一致性条件的二分划分 $\mathcal{H}$ on $\mathbb{N}$ 开始，即 $\mathbb{N}$中的每一对点仅在有限个 $W = \{W^+$中有所不同，$W^-\} \in \mathcal{H}$，便可构造出与 $\mathcal{H}$. 相关联的规范 CAT(0)立方复形。事实上，每个 CAT(0)立方复形 X

都可以通过这种方式得到：首先，固定一个双射 $f\colon \mathbb{N}\to X^0$（如果 X^0 是有限集，则固定一个满射），将 X 的顶点集与自然数 $\mathbb{N}$对应起来；然后， X-超平面自然地通过映射 f. 在 $\mathbb{N}$ 上定义出一族二分划分。对这样一族二分划分应用 Sageev构造，即可恢复原来的 CAT(0)立方复形 X。这正是我认为 CAT(0)立方复形最吸引人的地方：每一个 CAT(0)立方复形都规范地源自 $\mathbb{N}$ 的一族满足简单一致性条件的二分划分。

10.3. **中位数视角**。 除了超平面之外，CAT(0)立方复形上的中位数结构还记录了其几何的各种有趣特征。具体而言，CAT(0)立方复形中的半空间、测地线、凸包和组合投影也具有如下中位数描述。

1）通过中位数描述半空间：对于连接两个顶点 $a_1,a_2\in X$ 的边 e，如果 h 是与 e 对偶的超平面（也就是说， h 将 a_1,a_2) 分隔开），那么对应于 h 的两个半空间恰好是集合 $\{x\in X|m(a_1,a_2,x)=a_1\}$ 和 $\{x\in X|m(a_1,a_2,x)=a_2\}$。

2）通过中位数描述测地线：连接一对顶点 $x,y\in X$ 的测地线集合与其中位数区间 一致，定义如下：

$$[x,y]=\{m(x,y,z)|z\in X\}.$$

3）通过中位数得到凸包：令 $A^0=A$、 $A^1=\cup_{x、\,y\in A}[x、\,y]$ 并定义 $A^i=(A^{i-1})^1$。众所周知（例如见 [Bow19a]），如果 CAT(0)立方复形 X 的维数为n，那么我们有 $A^n=A^{n+1}$，特别地，凸包 $(A)=A^n$。

4）组合投影：对于任意（组合意义下的）凸集 $Y\subset X$，以及任意顶点$x\in X$，存在唯一的顶点 $P_Y(x)\in X$，称为（组合）投影或门，它实现距离 $\mathsf{d}(x,\ Y)$，即 $\mathsf{d}(x,\ P_Y(x))=\mathsf{d}(x,\ Y)$. 如上文所述，这个门可以用超平面来刻画，但也可以通过中位数加以描述，即我们有

$$P_Y(x)=\cap_{y\in Y}[x,y].$$

关于这一陈述的一个参考文献是 [DZ22], ，但该陈述及其证明当然是众所周知的，很可能也见于其他地方，参见 [HW07]。

5）通过中位数刻画 CAT(0) 立方复形：回顾一下，如果一个图 Γ 满足：对于任意三个顶点 $x_1,x_2,x_3\in\Gamma$，都存在唯一一个顶点 $m=m(x_1,x_2,x_3)$，称为 x_1,x_2,x_3 的中位数，并且对所有 $i\neq j$. 均满足 $\mathsf{d}(x_i,m)+\mathsf{d}(m,x_j)=\mathsf{d}(x_i,x_j)$，则称该图为中位图。CAT(0) 立方复形与其中位数之间的紧密联系，在下面的定理中体现得最为明显。

定理 10.1 ([Che00])**.** 一个图 Γ 是中位图，当且仅当它是一个（唯一确定的）*CAT(0)*立方复形的 *1*-骨架。

10.4. **总结**。 若 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是所有可数 CAT(0) 立方复形的集合，而$\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$ 是满足某些一致性条件的 $\mathbb{N}$ 的所有二分划分的集合，则我们有以下一一对应：

$$\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}\longleftrightarrow\{X_i\}_{i\in I},$$

而底层 CAT(0)立方复形的几何结构 X 完全由其超平面集合描述：

$$\mathcal{H}\longleftrightarrow X.$$

正如我们所提到的，CAT(0)立方复形也可以通过其中位数来理解，但对于本综述而言，超平面才是最相关的对象。

11. Hierarchical hyperbolicity from a median perspective

11.1. 什么是层次双曲空间? 受具有重要影响的 Masur-Minsky 层次化机制[MM99a], [MM00a], 的启发，Behrstock、Hagen 和 Sisto 引入了分层双曲空间（简称 HHS）的概念，将其作为研究空间和群的一般性框架，这些空间和群可以被**分解**为一组**相互协调的**双曲空间 [BHS17], [BHS19]。每个 HHS X 都带有一个常数 E，称为*HHS*常数，用于描述该空间的“粗糙程度”，也就是说，它给出了某些不等式无法成立时的误差上界。以下两点概括了 HHS 的核心本质：

(1) 解构：每个层次双曲空间 X 都配备一个（通常是无限的）(E,E)-利普希茨满射族 $\{\pi_{U_i}: X \to U_i\}_{i\in I}$，它们映射到一组 E-双曲空间 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$，这些空间称为域，参见例11.1和图14。

(2) 相干性：映射 $\{\pi_{U_i}: X \to U_i\}_{i\in I}$ 以一种非常具体且预先规定的方式相互作用，并满足某些“相容性”条件。例如，尽管双曲空间 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 的族通常是无限的，但它满足以下有限性条件：

> 对于任意 x、$y\in X$ 以及任意 $K\geqslant E$，只有有限多个域 $U\in\mathcal{U}$ 满足 $\mathsf{d}(\pi_U(x),\pi_U(y))>K$。换言之，$x$、$y$只有对有限多个域具有较大的投影，然而，这个有限数并不具有一致性，因为它取决于 x、$y\in X$.的选择。事实上，如果 $\mathsf{Rel}_K(x,y)$ 表示满足 $\mathsf{d}(\pi_U(x),\pi_U(y))>K$的域 U的集合，那么数量 $\mathsf{d}(x,y)$和 $\sum_{U\in}\mathsf{Rel}_{K(x,y)}\mathsf{d}(\pi_U(x),\pi_U(y))$是相同的，误差仅在一个加性和乘性误差范围内，该误差只取决于 K. 参见图14的第二幅图。• 如果 $\alpha:[a,b]\to X$ 是 X 中连接 x、y的一条粗连续路径，那么，$U\in\mathcal{U}$ 中投影 $\alpha(t)$ 同时发生变化的域的数量是一致有界的，参见例11.1以及图14底部的图片。也就是说，当$\alpha(t)$ 在 X中移动时，如果其在某个域 U中的投影发生了实质性变化，那么除了统一有限多个域 $V\in\mathcal{U}$.之外，它在所有域中都必须粗略地保持不变。

关于层次双曲空间理论的精彩综述，参见 Russell 的 [RM20] 第 3.1 节、Spriano 的 [Spr20] 示例 1.2.2，以及 Sisto 的 [Sis17] 。

例 11.1. 考虑图14所示的空间 X，它由一条直线 $\mathbb{R}$ 和在每个整数点 $n\in\mathbb{Z}$. 处粘接的一份 $\mathbb{R}^2$ 副本组成。与 X 相关联的双曲空间族如下。首先，有一条直线 $\mathbb{R}$，记作 $\mathcal{CS}$，所有 $\mathbb{R}^2$ 的副本都粘接在这条直线上。其次，对于每个粘接在整数 $n\in\mathbb{Z}$ 处的 $\mathbb{R}^2$，我们关联两个双曲空间，它们显然是 $\mathbb{R}$ 的水平和垂直副本，定义了 $\mathbb{R}^2$；将它们记作 U_n^h，U_n^v；见图14。映射 $\pi_U: X\to U$ 是通常的最近点投影。

每个层次双曲空间都是一个粗中值空间 [BHS19]。可以将其视为这样的度量空间：对于任意三个点 x_1，x_2，$x_3\in X$，都可以指定一个点 $\mu(x_1,\ x_2,\ x_3)$，称为粗中位数，简称中位数，它的表现类似于 x_1，x_2，x_3 的粗中心；更多详情参见[Bow13] 。

一个值得牢记的粗中值空间例子是一个 E格罗莫夫双曲空间X。具体而言，给定三个点 x_1、x_2、$x_3\in X$，由于连接 x_i、x_j的测地线都与一个半径为 $2E$的B 球相交，因此可以任选 B 中的一点，并将其定义为 $\mu(x_1$、x_2、$x_3)$.。显然，这个点的选取并非典范的（尽管它在粗略意义上是典范的）。

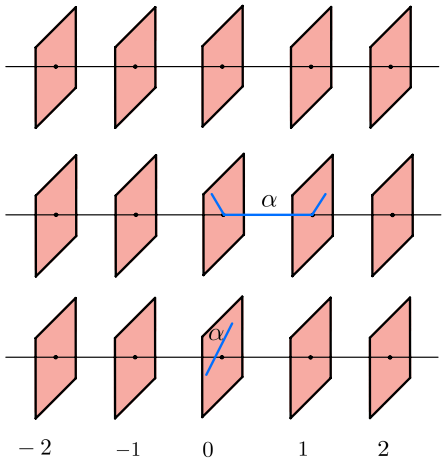

FIGURE 14. 上方的图是一个无限层次双曲空间，由一条直线 $\mathcal{C}S = \mathbb{R}$ 以及在每个整数点处粘接的一个副本 $\mathbb{R}^2$ 组成，如图所示。第二幅图中的路径 α 只有在 5 个域上的投影非平凡，即水平直线 U_0^h，U_1^h、垂直直线 U_0^v，U_1^v以及直线 $S.$。最后，底部的图展示了路径 α 的投影如何只能在一致有界有限多个域上同时（非平凡地）递增；此例中的数量为 2；这里的 2 是一致的，且与所选路径无关 α.

粗中值空间（例如层次双曲空间）中的子集 A，若对任意 x、$y \in A$以及任意 $z \in X$，点 $\mu(x$、y、$z)$ 都位于 A.的 K邻域内，则称其为 K-中位凸的。对于两个粗中位数空间 X_1、X_2，若映射 $f\colon X_1 \to X_2$ 满足 $\mathsf{d}(f(\mu(c_1$、c_2、$c_3))$、$\mu(f(c_1)$、$f(c_2)$、$f(c_3))) \leqslant K$，则称其为 K-中位映射。若路径 $\gamma\colon [a$、$b] \to X$在前述意义下是一个 K-中位映射，则称其为 K-中位数路径。层次双曲空间中满足 K-中位凸且 $K = E$为层次双曲空间常数的子集 A，简称中位凸集，因为该常数是统一的。同样，中位数路径就是 E-中位数路径。在层次双曲空间中，每对点 x、y 都可以由一组性质特别良好的路径连接，这些路径称为中位数路径或层次路径。若路径 $\alpha\colon [a$、$b] \to X$ 满足：对于任意满足 $t_1 < t_2 < t_3$的 $\{t_i\}_{i=1}^3$，都有 $\mathsf{d}(\alpha(t_2)$、$\mu(\alpha(t_1)$、$\alpha(t_2)$、$\alpha(t_3)) \leqslant E$，其中 E为层次双曲空间常数，则称该路径为中位数路径。这些是层次双曲空间中的“典范”路径。例如，若一个CAT(0)立方复形 X 同时也是层次双曲空间，那么连接 x、$y \in X$ 的所有0-中位数路径恰好就是连接它们的所有测地线。

将 E 增加一个仅依赖于 X 的统一量后，集合 A 的 中位包可定义为所有包含 $A.$ 的 E-中位数凸集的交集。

最后，如果 Y 是 HHS 中的一个中位凸集，那么每个点 $x \in X$ 都唯一确定一个粗略意义下的点 Y，称为 x 到 Y的门，记作 $P_Y(x)$；对于所有 $y \in Y$，它都是满足 $\mathsf{d}(P_Y(x), \mu(x, y,$ $P_Y(x))) < E$的粗略唯一点（见 [DZ22]中的引理2.57）。这给出了一个粗映射 $P_Y\colon$ $X \to Y$，称为门映射。门的存在性最初由 Behrsotck-Hagen-Sisto [BHS19]确立，并由 Russell、Spriano 和 Tran 在 [RST18]中进一步研究。

11.2. 通过域刻画层次双曲空间的基本几何概念。在第10.1小节中，我们看到，CAT(0)立方复形的基本几何概念——包括距离、中位数、投影和凸包——都可以完全用超平面来描述；超平面是CAT(0)立方复形的基本构件。类似地，在层次双曲空间中，距离、中位数、门和中位包等基本几何概念都记录在相应的

超曲空间集合 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 中；这些是层次双曲空间的基本构件。具体而言，我们有如下结论。

- 距离：对于每个 $K\geqslant E$，$\mathsf{d}(x,y)$ 与$\sum_{U\in}\mathsf{Rel}_{K(x,y)}\,\mathsf{d}(\pi_U(x),\pi_U(y))$在粗略意义上相差一个加法常数和乘法常数，这些常数只依赖于 K。
- 中位路径：路径 $\gamma\subset X$ 是 K_1-中位路径，当且仅当对所有 $U\in\mathcal{U}$，$\pi_U(\gamma)$ 都是 K_2-中位路径；其中 K_1,K_2 可相互确定。
- 中位数：任意 $x,y,z\in X$ 的中位数，在粗略意义上是唯一的点；对每个 $U\in\mathcal{U}$，该点在 $\pi_U(x),\pi_U(y),\pi_U(z)$ 下的映射恰为中位数。
- 中位包：点 x 属于 X 中的 A 的中位包，当且仅当对每个 $U\in\mathcal{U}$，$\pi_U(x)$在粗略意义上属于 $\pi_U(A)$ 的中位包。
- 投影／门：点 x 到中位凸集 Y 的门，在粗略意义上是唯一的点 $z\in X$，使得 $\pi_U(z)$ 与 $\pi_U(x)$ 到 $\pi_U(Y)$的最近点投影粗略相同。以上第1、2、3和5项见 [BHS19]，第4项见 [RST18]。

11.3. **HHSes 有什么优点?** 正如我们刚才提到的，双曲空间是层次双曲空间的简单基本构件。它们之所以简单，是因为我们对 Gromov 双曲性已有相当深入的了解，也熟悉许多针对这类空间的强大构造和结论。例如，我们知道双曲空间是粗中位数空间，其中位包与树准等距，其中位数凸集满足粗Helly性质，其格罗莫夫边界尤其性质良好，而且其拟测地线满足局部到整体性质，从而使其测地线构成正则语言。下文将说明，前面提到的每一项关于 Gromov 双曲空间的性质，都能为层次双曲空间带来类似的有力结论。虽然实际构造更为复杂，但我们得以在层次双曲空间中获得此类结论的核心思路很简单：通过映射 $\pi_{U_i}\colon X\to U_i$，将基本构件 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 的相应性质引入环境HHS X。接下来的两个小节将讨论这类构造的实例，以及如何从一族 Gromov 双曲空间 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$. 中得到它们。

我们给出的例子分为两类：第一类构造会用到双曲空间的**全部**集合 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$，而第二类只依赖于一个**特别有用的**双曲空间，它称为全知空间，见 [ABD21]。这个后面提到的双曲空间格外强大，因为它能同时记录环境HHS的全部双曲性；第11.5小节将对此作更深入的讨论。

警告。虽然我们尚未讨论这一点，但一个HHS通常可以配备不同的*HHS*结构，也就是说，可以有两种不同的双曲空间集合 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$，$\mathcal{V}=\{V_i\}_{i\in I}$使得 X 相对于任一集合都是HHS。我们将采用Abbott、Behrstock和Durham在 [ABD21]中引入的一种性质尤佳的HHS结构 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$。要存在这样的结构，HHS必须满足一个称为有界域二分性的额外条件，见 [ABD21]。这一假设影响很小，也不会排除任何主要例子；事实上，所有层级双曲群都满足这一条件。这类HHS还配有满足某些条件的群 G 的适当作用。名称全知空间指的是其结构 $\mathcal{C}S\in\mathcal{U}$ 中的一个特定双曲空间；关于它为何地位特殊的更多细节将在第11.5小节中介绍。

11.4. **充分利用所有基本构件的构造**。在本节中，我们讨论三种基本构造，以及关于充分利用所有基本构件的层次双曲空间的陈述。

基本构件 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$。这些是层次双曲空间的 ***Helly*** 性质 、层次双曲空间的 边界 ，以及立方近似定理（我们已经讨论过该定理，但将进一步阐明其构造）。我们从层次双曲空间的 Helly 性质开始。

(1) 层次双曲空间的 Helly 性质。 E-双曲空间中的中位数凸集满足粗 Helly 性质，也就是说，如果 $\{C_i\}_{i\in I}$ 是一族两两相交的 K-中位数凸集，且对某个 $i \in I$ 有 $|I| < \infty$ 或 $\operatorname{diam}(C_i) < \infty$, 那么存在一个点与所有这些集合的距离都不超过 K'，其中 $K' = K'(K$，例如，参见 [BF21] 中的定理 6.1。HHS构件的这种 Helly 性质可以推广到环境HHS，从而使中位数凸集也具有相同的 Helly 性质。具体而言，在 [HHP20], 中，作者证明了以下结果。设 X 是常数为 E 的层次双曲空间。如果 $\{C_i\}_{i\in I}$ 是一族两两相交的K-中位数凸集，并且对某个 i，满足 $|I| < \infty$ 或 diam $(C_i) < \infty$ ，那么存在一个点 $x \in \cap_{i\in I} N(C_i,\ E')$，其中 E' 仅取决于 E 和 K.

(2) 从双曲树到层次立方体。尽管引入层次双曲空间的最初动机，是发现用于研究映射类群的强大层次理论工具 [MM99a], [MM00a] 同样适用于众多CAT(0)立方复形 [BHS17],从同一层次双曲空间视角研究映射类群和立方复形，使Behrstock-Hagen-Sisto意识到，这些对象之间的联系要深刻得多：我们不仅可以将研究映射类群的技术用于研究CAT(0)立方复形，还可以引入立方复形技术来研究映射类群，以及更一般的层次双曲空间。具体而言，利用双曲空间中的中位凸包与树准等距这一事实，Behrstock、Hagen和Sisto证明了以下结果 [BHS 21]。对于层次双曲空间 $F \subset X$中的任意有限点集，都存在常数 K，仅取决于 $|F|$，使得中位包 hull(F) 是K-中位的 $(K$，且与CAT(0)立方复形 $Q\,K)$-准等距。正如第11.2小节所述，层次双曲空间中有限集 F 的中位包，其特征是由所有满足以下条件的点 $x \in X$组成：对每个 $U \in \mathcal{U}.$，其像 $\pi_U(x)$ 粗略地落在 hull$(\pi_U(F)) \subset U$中。其思路是，既然已知双曲空间的中位凸包与树准等距，那么每个 hull$(\pi_U(F))$ 都与一棵树 T_U. 准等距。上述定理中的CAT(0)立方复形 Q，则是作为$\prod_{U\in \mathrm{Rel}(F)} T_U$的某个子空间构造出来的（通常不是凸子空间）。这里，Rel(F) 是由满足以下条件的 $U \in \mathcal{U}$组成的集合： $\pi_U(F)$ 的直径足够大，且其大小仅取决于 E.

(3)HHS 边界。利用对双曲空间的格罗莫夫边界已有的深入研究， [DHS17], Durham、Hagen 和 Sisto 表明，每个层次双曲空间（HHS） X 都具有一种边界概念∂X ，可为 X提供一种紧化。他们还表明， ∂X 具有许多理想性质，这些性质与双曲空间的格罗莫夫边界所具有的性质相似。

11.5. 利用全知空间的构造。设 X 是一个层次双曲空间（HHS）， $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 是与之相关联的双曲空间集（再次说明，这里我们采用 [ABD21] 中给出的特定 HHS 结构，它要求 X 满足一些非常轻微的额外假设）。在 $\mathcal{U}$ 的元素中，有一个特别重要的双曲空间，记作 $\mathcal{C}S$。在拟等距意义下，空间 $\mathcal{C}S$ 正是将 X 的所有非平凡“乘积区域”压缩后得到的空间。我们将 $\mathcal{C}S$ 称为全知空间。 $\mathcal{C}S$ 的特殊地位源于这样一个事实：它同时记录了环境 HHS 中**全部**的双曲性质，因此格外有用。例如， $Morse$ 边界和次线性 ***Morse***边界——它们是记录完备测地度量空间 [中“双曲性质”的拓扑空间 15], [CS17], [Cor19], [CM22],QR[20]QRT $\mathcal{C}S$ ——都连续地嵌入 [的格罗莫夫边界；关于 Morse 边界，见 21]ABD [；关于次线性 Morse 边界，见 22] DZ。此外，在

亏格为 $g \geqslant 3$ 的有限型曲面的映射类群这一情形下， $\mathcal{CS}$ 的等距变换群与底层映射类群同构；这进一步证明了全知空间 $\mathcal{CS}$ 的特殊意义。

上一节中，我们讨论了如何将相关双曲空间中的各种构造引入 X。本节延续这一思路，但我们在此介绍的构造和结论只会用到全知空间 $\mathcal{CS} \in \mathcal{U}$。此类例子也进一步说明了它的特殊地位。

(1) Morse 局部到整体性质。常数为 E 的格罗莫夫双曲空间，其特征是：足够长的 (λ, ϵ)-准测地线都是全局的 (λ', ϵ')-准测地线，其中 λ', ϵ' 仅取决于 λ, ϵ 和 $E.$。其另一个特征是每条准测地线都是 M-Morse；回顾一下，如果存在一个映射 $M\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，使得每条端点位于 α 上的 (λ, ϵ)-准测地线 β 都处于 $\alpha.$ 的 $M(\lambda, \epsilon)$-邻域内，那么称准测地线 α 是 M-Morse。由于 Morse 测地线能够刻画双曲空间，因此它们出现在其他测地度量空间中，可以被视为双曲性的标志；所以，探究能否将格罗莫夫双曲空间中的结论推广到包含此类 Morse 测地线的测地度量空间，是合乎情理的。这一视角确实颇有成效，格罗莫夫双曲空间的许多性质都推广到了包含无限 Morse 测地线的空间，见 [Cor19]。然而，格罗莫夫双曲空间的各种性质并非仅依赖其测地线的 Morse 性，还依赖这些测地线满足的局部到整体性质，例如测地线语言的正则性以及增长函数的有理性，见 [Can84]。受此启发，Russell、Spriano 和 Tran [RST22] 引入了 Morse 局部到整体空间这一类空间；其中的 Morse 准测地线不仅具有 Morse 性，还满足类似于格罗莫夫双曲空间中的局部到整体性质。他们证明，许多测地度量空间都具有这一性质。特别地，他们证明，若度量空间 X 中所有 Morse 准测地线构成的集合准等距嵌入某个格罗莫夫双曲空间 Y（相关量词需满足适当条件，详见 [RST22] ），那么 X 具有 Morse 局部到整体性质。该定理的证明思路很简单：将 Morse 准测地线嵌入的双曲空间 Y 中的局部到整体性质，引回原空间 $X.$。由于层次双曲空间中的 Morse 准测地线都准等距嵌入全知空间 $\mathcal{CS}$ （同样需要满足某些量词条件），所有层次双曲空间都具有 Morse 局部到整体性质。已证明，具有 Morse 局部到整体性质的空间及群的凯莱图，拥有若干与双曲空间及群类似的理想性质，例如存在无限阶元素 [RST22], 、Morse 测地线的正则性，以及稳定子群增长的有理性，见 [CRSZ22] 和 [HNS22]。

(2) **建立可缩圆双曲性**。受 Bowditch [Bow08],的工作启发， [Osi16], Osin 引入了轴向双曲群 这一类群，并证明该类群具有各种有用的代数性质和几何性质，这些性质与 Gromov双曲群的相应性质相似。此时，这一类群的定义术语并不重要；重要的是，可缩圆双曲性是一种非常理想的性质，并带来众多强有力的推论。在 HHG群这一类群中（即允许在层次双曲空间上进行适当作用的群），可缩圆双曲性完全由全知空间刻画：当且仅当全知空间 $\mathcal{CS}$ 的直径为无穷时，一个 HHG群才是弱双曲作用双曲的。

(3) **莫尔斯元素与稳定子群的刻画**。如果元素 $g \in G$ 拥有一条拟测地线轨道 $\langle g \rangle .p$ ，且该轨道对某个 M是 M-Morse 的，则称 $g \in G$ 为 Morse 元素。更

一般地，如果子群 $H < G$ 满足：对于x和$y \in$ Cay$(G, A) \cap H$中的每一对点，都存在一条 M-Morse 测地线连接它们，且这条测地线在 H的 Cay(G, A)中始终与 H保持 K近，则称该子群为 (M, K)-稳定子群 [DT15] ；另见 [Tra19]。容易看出，循环子群稳定，当且仅当它由一个 Morse 元素生成 $g \in G.$ 。HHG 群中的稳定子群恰好是这样的子群：其在 X 中的轨道映射准等距嵌入到 $\mathcal{C}S.$

(4) 完整地观察莫尔斯边界。如前所述，莫尔斯边界 [ABD21]和次线性莫尔斯边界 [DZ22] 都可以连续单射到全知空间的格罗莫夫边界中。因此，我们可以将全知空间格罗莫夫边界的某些理想拓扑性质传递回层次双曲空间的莫尔斯边界和次线性莫尔斯边界。正如下文将要介绍的，Abbott 和 Incerti-Medici[AIM22]最近成功践行了这一理念。

设群 G 在 CAT(0)立方复形 X上有几何作用。莫尔斯边界和次线性莫尔斯边界可以赋予多种不同的拓扑，每种拓扑都有其优缺点。为这些边界赋予拓扑时，首先想到的、也是最自然的选择，是采用 X 的视觉边界 的子空间拓扑（请回忆，CAT(0)空间的视觉边界由从固定基点 p 出发的所有测地射线组成；如果两条射线在很长一段时间内彼此跟随，那么它们在此拓扑下就很接近）。然而，有些例子表明，这种拓扑在拟等距下并非不变 [Cas16]。另一方面，尽管 Charney-Sultan 在 [CS15] 中给出的直极限拓扑在拟等距下不变，但它通常不可度量化[Mur19]。最后，Cashen-Mackay 在 [CM19]中以及 Qing-Rafi-Tiozzo 在 [QR22] 中给出的拓扑（根据 He 在 [He22]中的工作，它们在莫尔斯边界上相同）是可度量化且在拟等距下不变的拓扑；然而，通常很难理解两个元素在此拓扑下何时彼此接近。如果 X 所作用的 CAT(0)立方复形G 同时也是一个层次双曲空间，那么 Abbott 和 Incerti-Medici [AIM 22] 最近证明，我们最初自然想到的视觉边界子空间拓扑确实可行。具体而言，他们证明了这种拓扑是可度量化的，不依赖于 X 作用其上的空间 G，而且，判断此类边界中的两个元素 α, β 何时彼此接近也相当容易。为证明他们的定理，作者们利用了这样一个事实：层次双曲空间的莫尔斯边界和次线性莫尔斯边界都可以连续单射到全知空间的格罗莫夫边界中 $\mathcal{C}S$；也就是说，他们通过这样的单射传递格罗莫夫边界的拓扑，并证明该拓扑与立方复形的视觉边界子空间拓扑一致 $X.$

(5) Ivanov 定理 层次双曲空间这一类别最主要、也最具启发性的例子是映射类群这一类群。在此情形下，全知空间这一双曲空间就是环境曲面的曲线图$\mathcal{C}S$ 。在这一背景下，全知空间的非凡作用显而易见，这一点由著名的*Ivanov* 定理 充分说明，该定理指出：对于任何亏格至少为 3 的有限型曲面，其映射类群同构于该曲线图的等距变换群。换言之，这里的全知空间洞悉了该曲面底层映射类群的一切。

11.6. 分层双曲空间的例子。层次双曲空间的范围非常广，涵盖了映射类群 [MM99b, MM00b, BHS17] 、有限型曲面的 Teichmüller 空间¨Raf07,Dur16], 、带因子系统的 CAT(0)立方复形 [HS20], 、超大型 Artin 群 [HMS21], 、亏格二把手体群 [Mil20], 、格 Veech 群的曲面群扩张 [DDLS21b, DDLS21a] 以及多曲线稳定子 [Rus21],

$$X_{\text{CAT(0) cube complex}} \to \mathcal{H}_{\text{hyperplanes}} \to \mathcal{U}_{\text{hyperbolic spaces}} \to X_{\text{ HHS}}.$$

FIGURE 15. CAT(0)立方复形 X 自带其超平面 $\mathcal{H}$，这些超平面可用于构造双曲空间 $\mathcal{U}$. 。对于一大类 CAT(0)立方复形，双曲空间 $\mathcal{U}$ 满足一致性条件，从而使立方复形 X 成为层次双曲空间。

以及不含 Nil 或 Sol 分量的 3 维流形的基本群 [BHS19], ，还有这些对象的各种组合与商 [BHMS20,BR20]。

11.7. 总结。 现在我们总结本节的要点，并将其与 CAT(0)立方复形的情形进行比较。

11.7.1. 通过超平面研究立方复形。 正如我们在第10.4小节讨论的，若 $\{X_i\}_{i\in I}$是所有可数 CAT(0) 立方复形构成的集合，且 $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$ 是满足某些一致性条件的 $\mathbb{N}$ 的所有二分划分构成的集合，那么我们有如下的一一对应：

$$\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I} \longleftrightarrow \{X_i\}_{i\in I},$$

而底层 CAT(0) 立方复形 X 的几何完全由其基本构件——与之关联的超平面集合——所刻画：

$$\mathcal{H} \longleftrightarrow X.$$

11.7.2. 通过双曲空间理解层次双曲空间。 令 $\mathcal{B}$ 表示所有双曲空间的集合。事实证明，满足某些一致性条件的子集 $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ 与层次双曲空间 [BHS19] 之间存在类似的一一对应关系。

$$\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I} \longleftrightarrow \{X_i\}_{i\in I},$$

给定 HHS X 的粗几何完全由其相关联的双曲空间集合刻画。

$$\mathcal{U} \longleftrightarrow X.$$

下一节的目标是说明，CAT(0)立方复形的基本构件——超平面——存在于层次双曲空间中，并能捕捉其几何中的许多元素。

12. FROM HHSES TO CURTAINS

推动层次双曲空间这一类的提出及其形式体系的，是 Behrstock、Hagen 和 Sisto 的发现：一大类 CAT(0)立方复形具有丰富的层次结构，类似于映射类群的层次结构。具体来说，可以为给定的 CAT(0)立方复形关联一些标准双曲空间；由于超平面编码了 CAT(0)立方复形的全部几何结构，因此这些双曲空间本身由超平面构造而成，也就不足为奇了。在一大类 CAT(0)立方复形中，这些双曲空间确实满足上述层次双曲空间一致性条件，从而将底层 CAT(0)立方复形 X 转化为层次双曲空间 X。参见图15中的示意图。

此时一个自然的问题是考虑其逆命题，即图15中的箭头在多大程度上可以反向？也就是说，与一个HHS相关联的双曲集合 $\mathcal{U}$是否总能解释为由底层HHS中的一组超平面所产生的双曲集合？出人意料的是，答案是肯定的，

$$\mathcal{H}_{\text{curtains}} \leftarrow \mathcal{U}_{\text{hyperbolic spaces}} \leftarrow X_{\text{HHS}}.$$

FIGURE 16. 层次双曲空间 X 附带一族双曲空间 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$，后者使我们能够证明 X 中的帘幕十分丰富。具体而言，通过考察测地线 $b \subset U$、区间 $I \subset b$，并分析给定点 $x \in X$在 b 上的投影位置（相对于 I.

而且具有非常强的等变性。不过，在继续之前，我们要指出，HHS所具有的超平面结构**并不**满足CAT(0)立方复形中超平面所满足的相同一致性条件；否则，我们就会证明每个层次双曲群都可以立方化，而我们知道这是不对的 [KL96]。现在我们回顾引言中对HHS帘幕的定义。

定义 12.1。（帘幕）设 X 是一个层次双曲空间， E 是其 HHS 常数。帘幕定义为一个中位凸集 h，使得 $X - h \subseteq h^+ \sqcup h^-$，其中 h^+， h^- 是互不相交的中位数凸集，且 $\mathsf{d}(h^+,\ h^-) \geqslant 10E$. 。集合 h^+, h^- 称为 h.的半空间

乍看之下，上述定义在层次双曲空间中可能是空泛的；但正如我们将看到的，层次双曲空间的基本构件，即双曲空间族 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$，将为我们提供丰富的帘幕。设 $\mathcal{U}$ 是与层次双曲空间 X 相关联的双曲空间族，且 $U \in \mathcal{U}$ 是一个 E-双曲空间。沿测地线 $b \subset U$固定一个长度为 $10E$的区间 I 。存在一个从 X 到 b 的自然映射，定义如下：首先通过 π_U : $X \to U$将 X 映射到包含 b 的双曲空间 U，然后应用最近点投影映射 $\pi_b \colon U \to b$。在上述两个映射的复合下，每个点 $x \in X$必定映射到 I内部，或映射到 I的左侧部分或右侧部分。因此，集合 $\pi_U^{-1}\pi_b^{-1}(I)$ 以显而易见的方式将 X分为左侧、中间和右侧三部分。为确保该集合是中位凸的，我们考虑 $\mathsf{hull}(\pi_U^{-1}\pi_b^{-1}(I))$。具体而言，很容易验证，对于每个$U \in \mathcal{U}$，测地线 $b \subset U$ 和区间 $I \subset b$，集合

$$h_{U,b,I} := \mathrm{hull}(\pi_U^{-1}\pi_b^{-1}(I))$$

确实是一道帘幕。事实上，正如 $U = \{U_i\}_{i\in I}$ 描述了层次双曲空间的整个粗几何这一事实所反映的那样，这些帘幕也将发挥相同的作用。

例如，注意到如果 α 是一条在双曲空间 U 中沿测地线 $\alpha_U \subset U$ 行进了很长距离的路径，那么 α 必定会穿过许多形如 $h_{U,\ \alpha_U,\ I}$ 的帘幕。类似地，沿测地线 $\alpha_U \subset U$ 回溯，相当于穿过再穿回许多形如 $h_{U,\ \alpha_U,\ I}$ 的超平面。现在令 $\mathcal{H}$ 表示**所有** 帘幕的集合，并令

$$\mathcal{H}^{\mathcal{U}} := \{h_{U,b,I} | U \in \mathcal{U}, b \subset U \text{ is a geodesic and } I \subset b \text{ is an interval of length } 10E\}.$$

根据定义，我们有 $\mathcal{H}^{\mathcal{U}} \subset \mathcal{H}$，事实上， $\mathcal{H}^{\mathcal{U}}$ 是一个不变子集（在 $\mathsf{Aut}(X)$ 作用下；我们尚未定义它，但目前并不重要）。明确地说，任意一道帘幕只是 $\mathcal{H}$ 中的一个元素 h，它可能属于 $\mathcal{H}^{\mathcal{U}} \subset \mathcal{H}$，也可能不属于。集合 $\mathcal{H}^{\mathcal{U}}$ 的主要用途是证明 $\mathcal{H}$ 是一个足够丰富的集合；这进而意味着集合 $\mathcal{H}$ 能够捕捉到 X 粗几何中的许多非平凡元素。

引理 12.2 (Petyt-Spriano-Zalloum). 设 X 是一个层次双曲空间。将 *HHS*常数 E 统一增加一定幅度后，以下结论成立。

(1) $d(x, y)$ 与分隔x, y.的帘幕极大链的基数粗略相等

(2) 拟测地线 α 是中位数路径（等价地说，是层次路径），当且仅当它不会两次穿过同一帘幕。*(3)* 对任意三个点 $x, y, z \in X$，它们的粗中位数 $\mu(x, y, z)$ 与所有包含 h^+ ,x, y, z.中多数点的半空间的 E邻域之交粗略一致。*(4)* 设 Y 是 X 中的一个中位凸集，且 $x \in X$。门 $P_Y(x)$ 粗略而言是 Y 中唯一满足以下性质的点：每当 c 是分隔$x, P_Y(x)$的帘幕链时，c 中除至多 E个帘幕外，其余帘幕都分隔 x, Y.。*(5)* 对任意集合 A，A 的中位包粗略而言等于所有严格包含 A.的半空间的 E邻域之交

结合上述引理与第11.2小节中的讨论，我们看到，先前通过双曲集合$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 描述的层次双曲空间的基本几何概念，也可以用帘幕来刻画。

此外，请注意，上述引理中对帘幕的描述，恰好是对 CAT(0)立方复形中相应超平面表述的“粗化”，参见第10.1小节。

12.1. **全知空间的帘幕**。正如我们在第11.5小节中所讨论的，每个层次双曲空间都带有一个特殊的双曲空间 $\mathcal{C}S \in \mathcal{U}$，我们称之为全知空间。帘幕集合$\mathcal{H}^{\mathcal{U}}$ 由来自测地线 $b \subset U$ 且满足 $U \in \mathcal{U}$的帘幕组成。鉴于全知空间 $\mathcal{C}S \in \mathcal{U}$的特殊地位，自然会想到：来自生活在全知空间 $\mathcal{C}S$ 中的测地线 b 的帘幕，与 $\mathcal{H}^{\mathcal{U}}$. 中的其他帘幕有何不同？下面的引理回答了这一问题（对于熟悉层次双曲空间的人而言，下面的引理是在 [ABD21], 结构背景下给出的刻画，但这暂且无关紧要）。首先，按照 [PSZ22], 的说法，若一对层次双曲空间帘幕 h_1，h_2 满足：每条同时与二者相交的帘幕链 c 的基数均为 $|c| \leqslant L$.，则称它们是 L-分离的。

引理12.3 (Petyt-Spriano-Zalloum)。对于 $i \in \{1, 2\}$，设 $U = \mathcal{C}S$, $b_i \subset U$ 为一条测地线，$I_i \subset b_i$ 为一个区间，并设 $h_i := h_{U,\, b_i,\, I_i} \subset X$。存在常数 E', L，仅依赖于 E，使得若 $\mathsf{d}(\pi_U(h_1), \pi_U(h_2)) > E'$，则 h_1, h_2 是 L-分离的。

上述引理证明的关键要素是 [DZ22] 中的引理7.10，该引理指出，对于在 $\mathcal{C}S$ 中投影相距很远的任意两个集合 A，B，其中一个集合的中位包到另一个集合的门映射是一致有界的。详细证明见附录A。引理12.3讨论的是全知空间的帘幕，而下一个引理适用于任意一对帘幕，其证明也将在附录A中给出。

引理12.4 (Petyt-Spriano-Zalloum)。设 h_1, h_2 为两条不相交的帘幕，并设 $x, y \in h_1$。若 c 是一条分隔 x, y 的帘幕链，则 c 中至多有 E' 条帘幕不分隔 $P_{h_2}(x), P_{h_2}(y)$，其中 E' 是一个仅依赖于 E. 的常数

下面的引理可由结合 [DZ22] 中的引理7.10和推论7.11立即得出（另可将该陈述与 [Gen16] 中的命题14以及[DZ22]中的引理7.12进行比较），更多细节见附录A。

引理12.5 (Petyt-Spriano-Zalloum)。设 X 是一个层次双曲空间。两个不相交的帘幕 $h_1, h_2 \subset X$ 是 L-分离的，当且仅当直径$(P_{h_1}(h_2)) \leqslant L'$，其中 L, L' 彼此确定。

13. CAT(0) spaces, their curtains and curtain model

13.1. **与层次双曲空间的比较**。CAT(0)空间与层次双曲空间的一个相似之处是，正如层次双曲空间带有一族双曲空间 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 以及

到这些空间 $\{\pi_U$ 的投影： $X \to U_i\}_{i\in I}$，CAT(0)空间也带有到双曲空间的投影。具体而言，CAT(0)空间几乎具有的一个特征性质是，存在到闭凸集、尤其是到测地线的最近点投影，且该投影唯一。因此，若 $\mathcal{L}$ 表示 X中的所有测地直线组成的集合，那么，对于每个 $l \in \mathcal{L}$ ，我们都有最近点投影映射 π_l： $X \to l \cong \mathbb{R}$ （这里假设 X 具有测地线延拓性质，不过这是一个非常技术性的问题，而且并非严格必需）。见下方图17。

$$X_{\text{HHS}} \to \mathcal{U}_{\text{hyperbolic spaces}} \qquad\qquad X_{\text{CAT(0)}} \to \mathcal{L}_{\text{hyperbolic lines}}$$

FIGURE 17. 层次双曲空间配备了一组双曲空间 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 以及到这些双曲空间的投影 π_U： $X \to U$，而 CAT(0) 空间则配备了一组双曲直线 $\mathcal{L}$ 以及到这些双曲直线的投影 π_l： $X \to l$。

然而，这两种情形之间的一个主要区别在于，规定 $\mathcal{L}$ 中的双曲空间与 $\mathcal{U}$ 中的双曲空间如何相互作用的一系列规则。具体而言，在层次双曲空间情形中，双曲空间 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 和映射 π_{U_i}： $X \to U_i$ 满足各种**有限性**条件，而这些条件在 CAT(0) 情形中则完全不存在。例如，在层次双曲空间中，任意一对点 x, y 仅在有限多个双曲空间 $U \in \mathcal{U}$, 上具有较大的投影。然而，正如从 $X = \mathbb{R}^2$ 这样的简单 CAT(0) 空间中可以看出的，一对点 x, y 可以在不可数多个直线 $l \in \mathcal{L}$. 上具有较大的投影。

13.2. **帘幕过多：缺点还是优点？** CAT(0) 示例 $\mathbb{R}^2$ 确实是一个层次双曲空间，但并非相对于上述所描述的集合 $\mathcal{L}$ 而言。为了证明 $\mathbb{R}^2$ 是一个层次双曲空间，可以考虑两条显而易见的水平和垂直直线（即 x-轴和 y-轴），分别记为 l_h， l_v 其最近点投影映射为 π_h： $\mathbb{R}^2 \to l_h$, π_h： $\mathbb{R}^2 \to l_v$. 这两条直线 $\mathcal{U} = \{l_h, \ l_v\}$ 足以理解 $\mathbb{R}^2$的粗几何；例如，注意到一对点 x, $y \in \mathbb{R}^2$ 之间的欧几里得距离与距离之和 $\mathsf{d}(\pi_h(x), \ \pi_h(y)) + \mathsf{d}(\pi_v(x), \ \pi_v(y))$.粗略一致。

然而，重要的是，双曲空间 $\mathcal{U} = \{l_v, l_h\}$ 在 Isom$(\mathbb{R}^2)$作用下并非不变，它们所定义的HHS帘也并非不变（这些帘要么平行于 l_v ，要么平行于 l_h）。由于我们稍后会用到这一观察，故将其单独记录为一条注记（事实上，下面的注记比我们刚才讨论的情形稍微一般一些，但证明思路相似）。

注记 13.1. CAT(0)空间 $\mathbb{R}^2$ 在欧几里得距离下，不存在一个在 Isom$(\mathbb{R}^2)$ 作用下保持不变的层次双曲空间结构。

类似地，如果暂且不考虑层次双曲空间的视角，只把 $\mathbb{R}^2$ 看作一个 CAT(0)立方复形，并考虑其通常的超平面集合 $\mathcal{H}$，那么集合 $\mathcal{H}$ 也不会在整个等距变换群 Isom$(\mathbb{R}^2)$ 的作用下保持不变。例如，固定原点的 $\frac{\pi}{4}$ 旋转不会将 $\mathcal{H}$ 映到 $\mathcal{H}$. 。因此，若要从超平面的视角研究整个等距变换群 Isom$(\mathbb{R}^2)$，就有必要考虑更大的超平面类。Petyt、Spriano 和作者在 [PSZ22] 中正是这样做的。具体而言：

定义 13.2 (CAT(0)帘幕)。 设 X 为 CAT(0)空间。CAT(0)帘幕 ——或简称为帘幕——定义为 $\pi_l^{-1}(I)$ ，其中 l 是测地线， $I \subset l$ 是长度为一的区间，且π_l： $X \to l$ 是最近点投影映射。

根据定义可知，所有帘幕 $\mathcal{H}$ 构成的集合在 CAT(0)空间 X. 的整个等距变换群作用下保持不变。事实上，以下命题表明，帘幕是超平面概念一种相当自然的推广。

观察：设 G 是一个通过等距变换作用于 CAT(0)空间 X 上的群，并令 $\mathcal{H}$ 表示 X中所有帘幕的集合。空间 X 具有一个 G-不变的立方结构，当且仅当存在一个离散的 G-不变帘幕子集 $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$.

为避免混淆，我们先简要提醒读者：我们在 HHS情形中定义帘幕的方式，与在 CAT(0)情形中的定义有所不同。在 HHS情形中，帘幕仅仅是一个E-中位凸集 $h \subset X$，满足 $X - h \subset h^+ \sqcup h^-$，其中 h^+，h^-是互不相交的 E-中位凸集；我们将所有此类帘幕的集合记为 $\mathcal{H}$.。这一情形中的帘幕主要来自映射 π_U： $X \to U$；具体而言，固定一条测地线 $l \subset U$、一个长度为 $10E$ 的区间 $I \subset l$，并考虑纤维 $(\pi_l \circ \pi_U)^{-1}(I)$. 的中位包。对于$U \in \mathcal{U}$，我们将来自 U中直线的帘幕集合记为 $\mathcal{H}^U$。回顾一下， $\mathcal{H}^{\mathcal{U}}$被定义为 $\mathcal{H}^{\mathcal{U}} := \cup_{U\in\mathcal{U}}\mathcal{H}^U$.。特别地，所有 HHS帘 $\mathcal{H}$的集合包含一个特别容易理解的子集合 $\mathcal{H}^{\mathcal{U}}$；尽管如此，“帘幕”仅仅是$\mathcal{H}$ 中的一个元素，并不一定是 $\mathcal{H}^{\mathcal{U}}$.。最后，如果每一条连接二者的帘幕链的基数至多为 L.，我们就称两个帘幕 h_1，h_2是 L-分离的。

13.3. 迈向 HHS 全知空间的类比。回到图17中的示意图，层次双曲空间（HHS）与 CAT(0) 空间之间的主要相似之处在于，二者都配备了一组向双曲空间的投影；对于层次双曲空间，这组投影 $\mathcal{U}$ 通常并不由直线构成；而对于 CAT(0) 空间，则是由直线组成的集合 $\mathcal{L}$ 。

正如我们在第12节中讨论的，对于每个 $U \in \mathcal{U}$，投影 π_U： $X \to U$ 可以通过最近点投影“拆分”为一组到测地线 $l \subset U$ 的投影。也就是说，每个映射 π_U： $X \to U$ 都会诱导出一组（通常是无限多个）映射 $\{\pi_l \circ \pi_U \colon X \to$，其中 $l \mid l$ 是 $U\}_{l\subset U}$. 中的一条测地线。我们将 U 中所有测地线的集合记作 $\mathcal{L}^U$，尤其是， $\mathcal{L}^{\mathcal{C}S}$ 是双曲空间 U 为全知空间 $U = \mathcal{C}S$ 时的测地线集合。

这为层次双曲空间与CAT(0)空间之间提供了一个略强的类比：二者都带有到测地直线的投影族；在CAT(0)情形中，是所有直线的集合 $\mathcal{L}$ ，而在层次双曲空间情形中，则是集合 $\mathcal{L}^{\mathcal{U}} := \cup_{U\in\mathcal{U}}\mathcal{L}^U$ 。然而，两种情形的主要区别在于：不同于CAT(0)情形，层次双曲空间情形中的直线集合 $\mathcal{L}^{\mathcal{U}}$ 被归入一个“相容的”双曲空间集合 $\{U_i\}_{i\in I}$ ，并满足某些强有限性条件。此时，一个自然的问题是下面这个问题，见下方的图18。

问题 1：是否可以将来自 CAT(0)空间 X 的直线 $\mathcal{L}$ “组织”或“组装”为一组双曲空间 $\mathcal{U}$，使得 $(X, \mathcal{U})$ 是一个 Isom(X)-不变的层次双曲空间?



FIGURE 18. 每个层次双曲空间都允许映射到测地直线的投影映射，并且这些映射可通过其到双曲空间的投影进行分解。我们能否将CAT(0)投影到其测地直线 π_l 的映射 $X \to l$ 通过某些双曲空间进行分解?

上述问题的答案很简单：不行，尤其是在目标是获得一个如上一节所述的 Isom(X)-不变空间时。那么一个自然的后续问题是：全知空间又如何？也就是说：

问题 2：鉴于 HHS全知空间 $\mathcal{C}S$ 的非凡效用，既然我们无法将 $\mathcal{L}$ 中的所有 CAT(0) 直线组装成一组双曲空间 $\mathcal{U}$，使得 $(X,\ \mathcal{U})$ 是一个 Isom(X)-不变的层次双曲空间，那么我们至少能否组装这些直线 $\mathcal{L}'\subsetneq\mathcal{L}$ 中的**一些**，以获得一个类似于 HHS全知空间的单一 Isom(X)-不变双曲空间？见图 19。



FIGURE 19. 到 CAT(0) 直线子族的投影 $\mathcal{L}'\subset\mathcal{L}$ 能否通过类似于 HHS全知空间的双曲空间进行分解?

如果我们要使用 CAT(0)空间 X 中 $\mathcal{L}$ 的一组直线来构造全知空间的类比，首先需要准确找出这组直线。为此，合理的做法是从一个层次双曲空间 X入手，分析来自全知空间 $\mathcal{C}S$的直线子集 l，确定它们满足的性质，并在 CAT(0)空间 X 中寻找具有相似性质的直线 $l\in\mathcal{L}$。令 $\mathcal{L}^{\mathcal{C}S}\subset\mathcal{L}^{\mathcal{U}}$ 表示这类直线的集合。每条这样的$l\subset\mathcal{C}S$ 都配有投影映射 $\pi_l\circ\pi_{\mathcal{C}S}\colon\ X\to l$; 根据引理12.3，取中位凸包后，$\pi_l\circ\pi_{\mathcal{C}S}$ 的纤维彼此 L-分离（前提是它们投影到 $\mathcal{C}S$中相距足够远的集合上，但这是一个技术细节），其中 L 只取决于 X。因此，为了在 CAT(0)空间 X 中找出能够组合起来构造全知空间类比的直线 $l\in\mathcal{L}$，明智的做法是在我们的 CAT(0)空间 X 中寻找直线 $l\in\mathcal{L}$，使得 $\pi_l\colon\ X\to l$的纤维彼此 L-分离。这个思路确实奏效。也就是说，我们的方法是定义一个距离 d_L，使得 $\mathsf{d}_L(x,\ y)$ 等于被 $[x,\ y]$穿过的、两两 L-分离的帘幕的极大链的基数。更准确地说，将 X_L 定义为一个配备距离的 X 集合。

$$\mathsf{d}_L(x,\ y)=1+\text{上确界}\{|c|\text{ 其中，}\ c\text{ 是一个链，其元素两两 }L\text{-分离}\ \}.$$

每个空间 $(X_L,\ \mathsf{d}_L)$ 都是 δ-双曲的，其中 δ 的阶为 L^2，根据定义可立即得到，对于每个 L，$\mathsf{d}_L\leqslant\mathsf{d}_{L+1}\leqslant 1+\mathsf{d}$。此外，正如 [PSZ22], 所示，集合$\{(X_L,\ \mathsf{d}_L)\}_{L\geqslant 0}$ 见证了 CAT(0)空间 X的全部双曲特征；例如，每个秩一元素都在某个 X_L上双曲型作用。

最后，一条无限测地线 $l\subset X$ 在 X_L 中的投影是无限的，当且仅当来自 l 的帘中有无穷多个彼此 L-分离 [PSZ22], 我们将这类直线的集合记为 $\mathcal{L}^L\subset\mathcal{L}$。特别地，空间 X_L 可以被看作由直线 $\mathcal{L}^L$组装而成的空间。这为上面的问题2提供了一个——略显不尽如人意的——答案，即图19中的问号和集合 $\mathcal{L}'$ 可以如下填写：

图 20 给出的答案并不完全令人满意，原因很简单：在层次双曲空间情形下，只有一个双曲空间 $\mathcal{C}S$ 能够见证底层HHS的所有双曲特征。然而，在上述语境中，要捕捉 CAT(0) 空间的所有双曲特征，就需要考虑一个无限的双曲空间族。下一小节的目标是将双曲空间 $\{(X_L,\ \mathsf{d}_L)\}_{L\geqslant 0}$ 合并为一个单一空间，即**帷幕模型**。

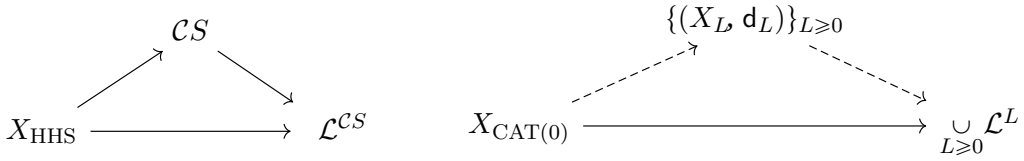

FIGURE 20. 补全前一幅图

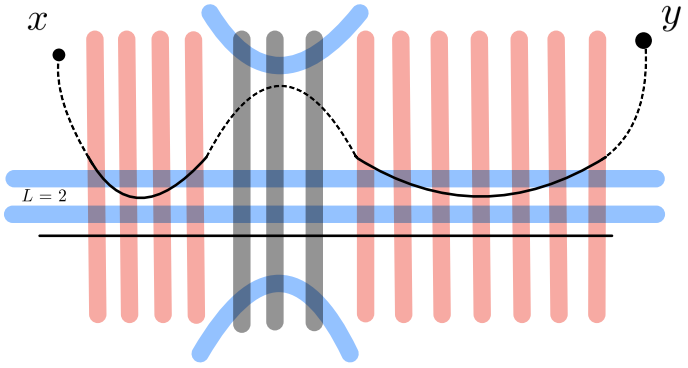

FIGURE 21. 在 L 瓶颈中花费的时间

13.4. **帷幕模型；HHS全知空间的对应物**。给定与 CAT(0) 空间 X 相关联的双曲空间 (X_L, d_L)，整数 $L \geqslant 0$ 用来量化测地线 $[x, y]$ 穿过的瓶颈宽度，而 $\mathsf{d}_L(x, y)$ 则衡量 $[x, y]$ 在此类瓶颈中所花费的时间。例如，图 21 中的距离 $\mathsf{d}_2(x, y)$ 为 11，也就是连接 x，y 的测地线在 2-瓶颈中所花费的时间。

一般 CAT(0)空间中的瓶颈行为并未受到统一控制，也就是说，很容易构造出这样的例子：CAT(0)空间 X 包含宽度任意大的瓶颈，例如见图 22。这反映了这样一个事实：CAT(0)空间 X 的曲率仅被上界零所限制，特别是，X 中可能包含这样的区域 Y_L，其曲率 κ_L 任意接近于零。令人惊讶的是，如图 22 所示，瓶颈厚度的这种任意增加也可以在适当的余紧 CAT(0)空间中找到，事实上是在 CAT(0)立方复形中，见 [She22]。具体而言，Shepard 给出了一个适当的余紧 CAT(0)方形复形 X，其中包含无穷多对不相交的超平面 $\{(h_i, k_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得 h_i，k_i 恰好被一个基数为 i的链穿过。

特别地，秩一元素（即具有一条不围住半平坦区域的轴 l 的半单等距变换）可能围住任意宽度 L.的矩形条带 $l \times [0, L]$

鉴于上述情况，似乎不可能找到一个单一的双曲空间，能够综合见证底层 CAT(0) 空间的所有瓶颈行为：如果我们希望构造一个类似于全知空间 $\mathcal{CS}$ 的对象，以见证 X的所有双曲性方面，那么一方面，我们不得不纳入任意大的瓶颈宽度 L，以确保所有秩一元素都以双曲型方式作用。另一方面，纳入任意大的瓶颈 L会破坏双曲性；具体而言，如果 g_L 是一个沿矩形条带$[0, L] \times \mathbb{R}$作用的秩一元素，那么，当 L 过大时，将瓶颈 $[0, L] \times \mathbb{R}$纳入所期望的双曲空间就会与双曲性相矛盾。

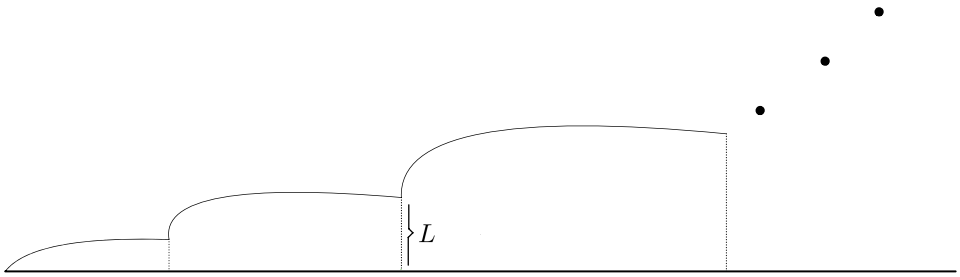

FIGURE 22. 递增的瓶颈宽度 L

一种应对瓶颈行为减弱（即 L 增大）这一问题的自然尝试，是将每个 L-瓶颈区域压缩至原来的 $\frac{1}{L}$ 倍或更小。具体而言，可以将距离 $\mathsf{d}_L(x,y)$ 乘以一个小于或等于 $\frac{1}{L}$ 的量。回顾一下，该距离衡量的是 $[x,y]$ 在 L-瓶颈中所花费的总时间。我们希望这样得到的这些 $X_L's$ 的双曲性常数将变为一致有界。我们将采用的正是这一方法。具体而言，通过调整 X_L 上的距离 d_L，将每个L-瓶颈区域压缩 $\frac{1}{L^4}$ 倍，使其距离改为$\mathsf{d}_{\frac{L}{L^4}}$。（不过，$\frac{1}{L^4}$ 的选择未必是最优的；但从几何和分析的角度来看，我们将会看到，对于某个 $p>1$，乘以 $\frac{1}{L^p}$ 是必要的。原则上，$\frac{1}{L^{1.1}}$ 也可能奏效。）

在处理了双曲性常数任意增大的问题后，我们现在需要在 X 上定义一个新的距离，记作 D，其中 $\mathsf{D}(x,\ y)$ 计算 $[x,\ y]$ 所花费的时间；所计算的不仅是在单个 L-瓶颈中的时间，还包括在任意整数 $L\geqslant 0$ 对应的 任意 L-瓶颈中的时间。为此，将 X_L，中的（修正后的）距离相加似乎是合理的，即定义距离

$$\mathsf{D}(x,y)=\sum_{L\geqslant 1}\frac{\mathsf{d}_L(x,y)}{L^4}.$$

我们用 X_{D} 表示 $(X,\ \mathsf{D})$，于是有如下结论。

定理13.3 ([PSZ22])。 存在某个 δ，使得对于任意 *CAT(0)*空间 X，我们都有：
(1) 空间 X_{D} 是 δ-双曲的；*(2)* X 中每条 *CAT(0)*测地线都是 X_{D} 中未参数化的 $(1,\delta)$-拟测地线；*(3)* $\mathrm{Isom}(X)<\mathrm{Isom}(X_{\mathsf{D}})$；*(4)* X 的半单等距变换是秩一元素，当且仅当它在 X_{D} 上是双曲型的；*(5)* 若 $G<\mathrm{Isom}(X)$ 在 X 上适当作用，则 G 的所有秩一元素在 X_{D}. 上都作为 *W.P.D* 等距变换作用

空间 X_{D} 称为 $X,$ 的帷幕模型，而这个双曲空间确实是层次双曲空间全知空间的一个类比。

关于帷幕模型与 HHS全知空间“相似”这一说法，需要给出论证。具体而言，双曲空间 X_{D} 与 HHS全知空间“相似”究竟意味着什么？任意一个 $\mathrm{Isom}(X)$-不变的双曲空间都符合这一条件吗？显然不是。

判断“类似于 HHS 全知空间”的程度，应通过比较 X_{D} 所具备的性质与全知空间所具备的性质来进行。也就是说，正如我们在第11.5小节中讨论的，决定全知空间之所以是全知空间的，是它满足的一系列强性质，这些性质使它能够见证底层 HHS 的所有双曲方面。

见证一个空间的所有双曲方面，相当程度上是一种哲学性的说法；不过，它最重要的两个体现是包含整个 *Morse* 边界 ——请回想一下，它是记录完备测地度量空间 X的双曲方向的一个空间——以及对 Isom(X)的所有莫尔斯元素都具有无限轨道。

第11.5小节中第1—5项所述、利用HHS全知空间的所有陈述和构造，同样适用于CAT(0)空间 X的帷幕模型 X_{D} 。也就是说，帷幕模型及其格罗莫夫边界包含 X的整个Morse边界，刻画Morse元素和稳定子群；通过伊万诺夫型刚性定理记录 X 的等距变换群；最后，它还可用于建立 X 的Morse局部到整体性质，以及在 X中对 G 作几何作用的群的可缩圆双曲性，参见 [PSZ22]。不过值得注意的是，帷幕模型上的作用通常预期并不具有可缩圆性（尽管可以通过WPD 元素利用它建立可缩圆双曲性）。 [She22] 中给出的例子很可能不会在其帷幕模型上作可缩圆作用。

13.5. **帷幕模型中的距离意味着什么？** 要理解帷幕模型中所记录距离的几何意义，有两个密切相关的方面，首先是以下这一点。

1）在较窄的瓶颈附近花费的时间更有价值。根据帷幕模型中的距离公式

$$\mathsf{D}(x,y)=\mathsf{d}_1(x,y)+\frac{\mathsf{d}_2(x,y)}{2^4}+\frac{\mathsf{d}_3(x,y)}{3^4}+\cdots,$$

可以看出，与在较宽的瓶颈附近花费相同时间 t 相比，在较窄的瓶颈附近花费时间 t 对 $\mathsf{D}(x,y)$的贡献要大得多。也就是说，若一条测地线 $[x,y]$穿过 t 个间距为 1 的帘幕（即，它在 1-瓶颈中至少花费 t时间），那么 $\mathsf{D}(x,y)$ 至少为 t X_{D}.。然而，若 $[x,y]$ 在比如说 5-瓶颈中花费 t时间，那么这些 5-瓶颈对总量 $\mathsf{D}(x,y)$ 的贡献仅为 $\frac{t}{5^4}$。简而言之，对于固定的$L\geqslant 1$，若要让 L-瓶颈对 $\mathsf{D}(x,y)$贡献 1 的距离，测地线 $[x,y]$必须在这些 L-瓶颈中至少花费 $1.L^4$时间。

2）双曲性衰减与在瓶颈中耗费的时间：双曲性的衰减（即瓶颈宽度 L 的增加）必须通过在此类 L 瓶颈中耗费非常长的时间——至少 L^4——来弥补；否则，这段总时间几乎等同于在 X_{D} 中暂停。也就是说，瓶颈行为与在这些瓶颈中耗费的时间必须彼此平衡；为了抵消瓶颈宽度的增加，在这个新出现的、更大的瓶颈中耗费的时间必须相当长。换一种说法，瓶颈宽度的增加必须是关于在固定宽度的瓶颈中耗费时间的一个次线性 函数。

例如，图23底部的测地射线投影到 X_{D}. 中是一个有限集。这是因为，尽管这条测地射线经过无限多个瓶颈，但它在每个瓶颈 L 中耗费的时间约为 L ，不足以弥补瓶颈的衰减（另外，直观来说，我们确实不希望这样的测地射线在帷幕模型中有无限投影，因为它并没有任何双曲性）。另一方面，图24底部的测地射线在帷幕模型中投影为一条无限拟射线。

13.6. **与次线性莫尔斯性的比较**。图24中示例的瓶颈行为呈次线性增长，这表明 X_{D} 与 Qing-Rafi-Tiozzo [QR22], [QRT20], 的次线性 *Morse* 边界 $\partial_\kappa X$ 之间存在某种关系；事实上，这样的关系

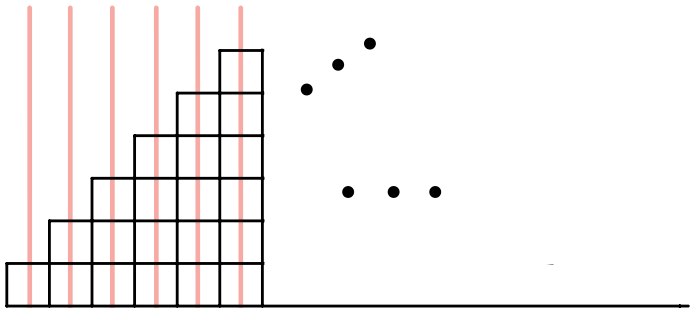

FIGURE 23. 双曲性的衰减体现在瓶颈常数的增大上 L，该常数在此处取遍 $\mathbb{N}$ 所有值。底部的测地射线穿过所有红色帘幕，但它并未在任何 $(\geqslant L^4)$ L-瓶颈区域内停留足够长的时间，因此它会在帷幕模型中消失。

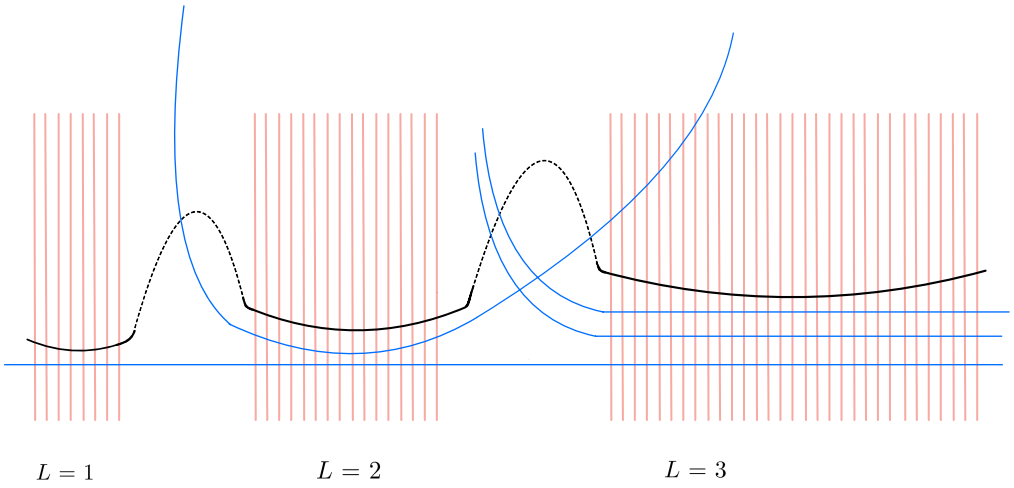

FIGURE 24. 双曲性的衰减体现在瓶颈常数 L的增大上。然而，这种衰减可以通过在此类瓶颈中停留极长时间来弥补，（至少 L^4）如此；这使得黑色测地射线能够在定义其格罗莫夫边界中一个点的帷幕模型中存续。

确实存在。回想一下，若存在一个次线性函数 κ 和一个映射 $m\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，使得对于任意端点位于 γ 上的 (q,Q)-拟测地线$\beta\colon [0,A] \to X$，均满足 $\mathsf{d}(\beta(t),\gamma) \leqslant m(q,Q)\kappa(d(\gamma(0),\beta(t)))$，其中任意$t \in [0,A]$.，则称拟测地射线 γ 为 κ-次线性 Morse。κ-边界 $\partial_\kappa X$ 是所有 κ-Morse 拟测地射线在适当等价关系和拓扑下构成的集合。

Vest 即将发表的工作 [Ves23] 对 CAT(0)空间的 κ-边界与其帷幕模型的格罗莫夫边界之间的相互作用进行了深入分析 $\partial_\kappa X$ 。特别是，Vest 证明，对于大多数次线性函数 ∂X_{D}. κ，次线性 Morse 测地射线会投影为 X_{D}中的无穷直径拟测地射线。

上一小节的讨论结合图 23 和图 24，似乎表明，投影到帷幕模型中后成为无限集的 X 测地射线只有

˜次线性 Morse 测地射线，但这并不正确。例如，在环面与圆的楔和的万有覆盖 X 中，测地射线 b 是次线性 Morse 的（次线性函数为 κ），当且仅当存在常数 C，使得 $[b(0), b(t)]$在任意平坦 $\mathbb{R}^2$ 中停留的总时长不超过 $C\kappa(t)$。然而，任何会经过无限多个不同 $\mathbb{R}^2$ 的测地射线——不论它在给定的 $\mathbb{R}^2$中停留多久——都会在 X_{D}中定义一条无限拟测地射线。这是因为，尽管在平坦区域中停留的时长不受控制，但这里的瓶颈厚度受到一致控制（为零）。

简言之，虽然射线 b 穿过的瓶颈的增长具有次线性上界，是它要在帷幕模型 X_{D} 中产生无限距离的必要条件，但“介于”这些瓶颈之间所花的时间无需受到控制；这不同于 κ-次线性莫尔斯测地射线，后者还必须控制这段时间。

14. 后记

在本综述中，我们讨论了四种彼此竞争的非正曲率概念，每一种都配有丰富的组合对象和工具箱，能够在很大程度上描述其几何：

1）CAT(0)立方复形，其几何由超平面 $\mathcal{H} = \{h\}$及它们彼此之间的相互作用充分刻画。

2）内射度量空间具有泛性质，使其几何具有非凡的适应性。给定一个子空间 $Y \subset X$，如果希望为 Y 关联一个点、一个量或一种性质，通常第一步是找到某个 Y-上空间 Z（意为 $Y \subset Z$），其中存在所需的点、量或性质；随后，内射的泛性质便发挥作用，使我们能够将其向下映射到 X.

3）分层双曲空间与群，其粗几何完全由一族满足特定一致性条件的双曲空间 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 所刻画。如果要衡量这些双曲空间 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 的重要性，那么其中有一个显然最为突出，那就是全知空间 $\mathcal{C}S.$ 。它具有非凡的实用价值，这一点可由它单独捕获的底层HHS信息量得到充分证明，正如我们在第11.5小节中详细阐述的那样。此外，还有三种更现代的工具，为理解分层双曲空间与群提供了大量额外手段，下面将对它们进行概述：

- 每个HHG都允许在一个内射度量空间上作适当余紧作用。特别地，得益于 [HHP20]，所有用于研究内射度量空间的工具都适用于HHG。• HHS中有限多个点（可能包括“边界”点）的中位凸包看起来像CAT(0)立方复形，因此可以将大量立方工具移植到HHS情形中。这表明，HHS以两种彼此正交的方式推广了树。首先，HHS推广了双曲空间，而后者推广了树；其次，立方近似定理指出，HHS推广了CAT(0)立方复形，而后者也推广了树。理解立方近似定理的一种有用方式或许如下：尽管HHS的整体几何可能与立方复形的几何截然不同，但如果我们在HHS中固定有限多个点 F，并考察在这些点之间高效移动的各种方式，即hull(F)，那么后者看起来非常像CAT(0)立方复形 Q_F。此外，hull(F) 这种“看起来像”CAT(0)立方复形的性质是等变的，即每个 $g \in \mathrm{Aut}(X)$ 都诱导两个保中位数的

等距映射 $g\colon\ Q_F \to Q_{gF}$ 和 $g\colon \mathrm{hull}(F) \to \mathrm{hull}(gF)$，使得逼近映射 $f_F\colon\ Q_F \to \mathrm{hull}(F)$、$f_{gF}\colon\ Q_{gF} \to \mathrm{hull}(gF)$ 满足 $g \circ f_F = f_{gF} \circ g$。

- 此外，HHS还可以从超平面或帘幕的视角来研究，从而将更多立方工具应用于HHS。这些帘幕只是一些中位凸集 h，它们将HHS X 分割成两个中位凸“半空间” h^+，h^-。它们的用途在于能够以纯组合的方式描述底层HHS中的许多重要几何概念，包括将HHS距离刻画为分隔两点的帘幕极大链的基数，并将粗中位数和中位凸集描述为适当半空间族的交集，见引理 12.2。

4) CAT(0)空间附带两个组合对象，用以描述其几何的诸多有趣方面：帘幕是立方超平面的类似物，而帷幕模型则是HHS全知空间的对应物。给定一个CAT(0)空间 X，如 [PSZ22]所示，这两个组合对象记录了其几何中的许多有趣特征。

15. Questions问题

如果要沿用 Caprace 和 Sageev [CS11] 在其秩刚性证明中采用的路线，那么下面第 1—3 项中的问题就很重要：

(1)（偏斜）设 X 是具有测地线延拓性质的余紧 CAT(0)空间，且 h^+、k^+ 是满足 $k^+ \subsetneq h^+$ 的半空间。是否存在一个元素 $g \in \mathrm{Isom}(X)$，使得对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $g^n h^+ \subsetneq k^+$？(2)（翻转）设 X 是具有测地线延拓性质的 CAT(0)空间，且 h^+、k^- 是不相交的半空间。假设 $G < \mathrm{Isom}(X)$ 在 X 上余紧作用，且在无穷远处没有不动点，是否存在 $g \in G$（甚至在 $\mathrm{Isom}(X)$ 中）使得对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $g^n k^- \subsetneq h^+$？(3)（X_L 的直径）设 X 是具有测地线延拓性质的 CAT(0)空间，且 h、k 是一对对某个 $L \geqslant 0$. 而言相距 L 的帘。若 G 在 X 上余紧作用，G 是否包含一个秩一元素？[PSZ22] 的命题 6.1 表明，对于任意在 X. 上有余有界作用的群 G，若存在一个链 $\{h_1、h_2、h_3、h_4\}$，其元素两两相距 L，则必存在秩一元素。前一个问题询问数字 4 能否降为 2。(4) 设 G 是一个在 X 上适当余紧作用的群。假设 X 是以下任一种空间：• CAT(0)空间，• CAT(0)立方复形，或 • 内射度量空间。若每个 $g \in G$ 都是无限阶莫尔斯元素，那么 G 是否是双曲的？在 CAT(0)空间的背景下，一个自然的思路是考虑 G 在帷幕模型 X_{D} 上的作用。具体而言，我们知道 G 在 X_{D} 上余有界地作用；又因为每个元素 $g \in G$ 都是莫尔斯的，所以 g 在 X_{D} 上必为双曲型元素；这是否足以推出 G 的双曲性？(5) 每个 CAT(0)空间 $(X、\mathsf{d})$ 是否都存在一个距离 ρ，使得 $\mathrm{Isom}(X、\mathsf{d})$ 在 $(X、\rho)$ 上以等距变换作用，且恒等映射 $i\colon (X、\mathsf{d}) \to (X、\rho)$ 是拟等距？(6) 设 X 是 CAT(0)空间或内射度量空间，且 G 在 X. 上有适当余紧作用。此外，假设 G 包含一个莫尔斯元素。那么，G 是否包含一个长度有统一上界的莫尔斯元素，且该上界与所选的 G 的有限生成集无关？这样的结论将意味着秩一 CAT(0)群具有一致的指数 еиц

增长；关于一致指数增长的定义及近期结果示例，参见 [Fuj08], [Fuj14], [Man10], [ANS+19]和 [Ker21]。(7) 对于一个 CAT(0)空间 X，在什么自然条件下，空间 X_L 会稳定下来？这里，稳定下来是指存在一个 L_0 ，使得对所有 $L \geqslant L_0$.， X_L 都准等距于 X_{L+1} 。(8) 对于一个 CAT(0)空间 X，双曲空间 X_L 的构造深受 Genevois 在 CAT(0)立方复形背景下类似构造的启发；在该背景下， X_L 的定义本质上相同，只是以超平面取代了帘幕 [Gen20b]。一个自然的问题是：对于 CAT(0)立方复形 X，通过超平面构造的空间 X_L 与通过帘幕构造的空间 X'_L有何关系？(9) 设 G 是一个群，它通过立方等距变换在不可约 CAT(0)立方复形 X上适当地余紧作用。假设存在一个 L ，使得每对不相交的立方超平面 h、k 要么是 L-分离的，要么被无限多个超平面交叉。 X 是否具有因子系统？Genevois的工作 [Gen20b] 表明，CAT(0)立方复形 X 具有因子系统意味着存在这样一个常数 L_0；上述问题探究的是 Genevois 这一论断的逆命题。(10) 设 G 是一个有限型曲面的映射类群。 G 是否具有一个有限生成集 A ，使得 Cay(G, A) 是粗单射的？(11) 设 G 是一个包含莫尔斯元素 g. 的莫尔斯局部到整体群。如果 G 并非几乎循环，是否可推出 G 是弱双曲作用双曲的？(12) 或许可以利用层次双曲空间中的帘幕，应用 Sageev定理证明每个层次双曲空间都准等距于某个 CAT(0)立方复形？(13) 设 G 是一个有限生成群， X 是对应于 G 某个有限生成集的固定凯莱图。如果 $g \in G$ 是莫尔斯的，且 $p \in E(X)$，那么根据 [SZ22], 中的定理A和B，拟直线 $\langle g \rangle.p$ 通常不是莫尔斯的（当且仅当 g在 X中具有强收缩拟轴时，它才是莫尔斯的）。拟直线 $\langle g \rangle.p$ 是否在 $E(X)$中“保留”了某种双曲性?

Appendix: a few proofs

本节给出引理7.2的证明。为方便读者，我们重新陈述该引理。

引理 .1 (Petyt-Spriano-Zalloum)。 设 X 为一个层次双曲空间（*HHS*）。通过将 *HHS*常数E 统一增加一个适当的量，以下结论成立：

(1) $d(x, y)$ 与分隔x, y.的帘幕极大链的基数粗略相等。*(2)* 拟测地线 α 是中位数路径，当且仅当它不会两次穿过同一个帘幕。*(3)* 对任意三个点 $x, y, z \in X$，它们的粗中位数 $\mu(x, y, z)$ 与所有包含x, y, z.中多数点的半空间的 E-邻域之交粗略一致。*(4)* 设 Y 是 X 中的一个中位凸集，且 $x \in X$。门 $P_Y(x)$ 粗略而言是 Y 中唯一满足以下性质的点：每当 c 是分隔$x, P_Y(x)$的帘幕链时， c 中除至多 E个帘幕外，其余帘幕都分隔 x, Y.。*(5)* 对任意集合 A， A 的中位包粗略而言等于所有真包含 A.的半空间的 E-邻域之交

作为证明 HHS帘幕具有典范性的证据，这些证明逐字逐句地粗化了 CAT(0)立方复形背景下相应的陈述。回忆一下，HHS帘幕定义为一个 E-中位凸集 h，使得对于某些不相交的 E-中位凸集 h^+，h^-，有 $\mathsf{d}(h^+,\ h^-) > 10E.$

证明：（1）引理7.2的第一项直接体现了距离公式与 Behrstock不等式的结合。具体来说，回顾一下，$\mathsf{Rel}_\theta(x,y)$ 表示所有满足 $\mathsf{d}(\pi_U(x),\pi_U(y)) > \theta.$ 的双曲空间 U 所组成的集合。根据命题 [，若 RST18],且 $\theta \geqslant 100E$，则集合 $\mathsf{Rel}_\theta(x,y)$ 可划分为 n 个子集 $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$，其中 n 仅取决于 E，且每个 $\mathcal{U}_i$ 只包含横向域。令 $\mathcal{U}$ 为 $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ 中的元素，使得在所有 $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ 中，$\mathsf{d}_V(x,y)$ 最大。根据 Behrstock不等式，$\mathcal{U}$ 中的元素 V_i 可全序排列为 $V_1 < V_2 < \cdots V_{m-1} < V_m$.。现在，令 α_{V_i} 表示连接 $\pi_{V_i}(x)$ 与 $\pi_{V_i}(y)$ 的测地线，并令 $I_i \subset \alpha_{V_i}$ 为长度为 $10E.$ 的区间。现在，对于每个 V_i 和每个 $I_i \subset V_i.$，集合 $h_{I_i} = \mathsf{hull}(\pi_{V_i} \circ \pi_\alpha^{-1}(I_i))$ 都是中位凸的。特别地，通过选取一些 $h_{I_i^1}$、$\cdots h_{I_i^k}$，每个 α_i 都确定了一个两两不相交的帘幕集合（即一条链）

避开 α_i端点的 E邻域并满足 $\mathsf{d}(I_i^j, I_i^{j+1}) = 4E$的区间 I_i^j。此外，k这里粗略地有 $\mathsf{d}(\pi_{V_i}(x), \pi_{V_i}(y))$。令 $c_i = \{h_{I_i^1}, \cdots h_{I_i^k}\}$ 表示 X 中通过 $\alpha_i \subset V_i$, 定义的链；由 Behrstock不等式立即可知，$\cup_{i=1}^m c_i$ 是将x与 $y.$ 分开的链。也就是说，$V_1 < V_2 \cdots V_m$ 上的全序以及每个 I_i^j 都被选为避开 α_i 上的端点这一事实保证了，通过 $\alpha_i \subset V_i$ 定义的帘幕均与通过 $\alpha_j \subset V_j$ 定义且满足 $i \neq j$.的帘幕不相交

（2）如果路径 α 同时与 h^+、h^-相交，我们就说路径 α 穿过 h。因此，两次穿过帘幕 h意味着 α 包含点 $\{\alpha(t_i)\}_{i=1}^3$，满足 $t_1 < t_2 < t_3$ 和 $\alpha(t_1)$、$\alpha(t_3) \in h^+$ 以及$\alpha(t_2) \in h^-.$。设 α 是中位数路径；回忆一下，这意味着对于 HHS常数 E，γ 是 E-中位数路径。为导出矛盾，假设 α 依次在点 $\alpha(t_1)$、$\alpha(t_2)$、$\alpha(t_3)$ 处穿过 h^+、h^-、h^+，则 h^+ 的中位数凸性保证 $\alpha(t_2)$ 位于 E的邻域中。另一方面，由于 α 是 E-中位的，$\mu(\alpha(t_1)$、$\alpha(t_2)$、$\alpha(t_3))$ 位于 E 的 $\alpha(t_2) \in h^-.$ 内。这与我们的定义 $\mathsf{d}(h^-, h^+) > 10E.$ 矛盾。反过来，假设 α 从不两次穿过同一帘幕，但 $\mu = \mu(\alpha(t_1)$、$\alpha(t_2)$、$\alpha(t_3))$ 距离 $\alpha(t_2)$很远。根据第1项，存在一条帘幕链 $c = \{h_i\}$ 将 μ 与 $\alpha(t_2).$ 分开。将 c 替换为其基数为 $|c'| \geqslant |c| - 2$的子链 $c' \subseteq c$ 后，不妨设 c' 中没有任何元素包含 $\alpha(t_1)$ 或 $\alpha(t_2).$。令 h 为 c' 中最接近 $\alpha(t_2)$ 的帘幕，并设 h^- 是包含 $\alpha(t_2)$的半空间。我们断言 α 不穿过 h，反设确实如此。由于假定 α 不会两次穿过任何帘幕，$\alpha(t_1)$、$\alpha(t_3)$中至少有一个（设为 $\alpha(t_3)$）必须位于 h^-中。由于 h^- 是中位凸的，$\mu = \mu(\alpha(t_1)$、$\alpha(t_2)$、$\mu(t_3))$ 位于 E的 h^-邻域内，这与 $\mu \in h^+$ 以及 $\mathsf{d}(h^+, h^-) > 10E.$的事实相矛盾

(3) 对于第 3 项，令 $\mathcal{H}$ 为所有帘幕的集合，令 $\mathcal{H}^+_{x,y,z}$ 为所有包含 $\{x,y,z\}$中至少两个点的半空间的集合。值得注意的是，由于帘幕是厚的，$\mathcal{H}$ 不必为每个帘幕 $h \in \mathcal{H}$都包含一个半空间；也就是说，定义$\mathcal{H}^+_{x,y,z}$ 的帘幕不一定是所有帘幕的集合，也可能只是其中一个较小的子集。由于每个$h^+ \in \mathcal{H}^+_{x,y,z}$ 都包含三个点中的至少两个点，将粗Helly性质应用于$\mathcal{H}^+_{x,y,z} \cup \{\mathsf{hull}(x,y,z)\}$可知，存在一点$w \in \bigcap_{h^+ \in \mathcal{H}} N(h^+, E) \cap \mathsf{hull}(x,y,z)$，特别地，$w \in \bigcap_{h^+ \in \mathcal{H}} N(h^+, E).$。考虑集合 $\mathsf{hull}(x,y,z)$ 的原因是，粗Helly性质要求所考虑的集合族中存在一个有界集合。注意，利用 h^+ 的中位数凸性以及$h^+ \in \mathcal{H}^+_{x,y,z}$这一事实，$\mu(x,y,z)$ 也属于 $\bigcap_{h^+ \in \mathcal{H}} N(h^+, E)$。现在，我们证明 $\mathsf{diam}(\bigcap_{h^+ \in \mathcal{H}} N(h^+, E))$ 有一个仅依赖于 E的统一上界。假设对于某个 $w, w' \in \bigcap_{h^+ \in \mathcal{H}} N(h^+, E)$，$\mathsf{d}(w, w')$ 很大，那么

这给出了一条按此顺序排列的链 $c = \{h_1,\ h_2,\ \cdots h_n\}$，且 $\mathsf{d}(w,\ w') \asymp_E n$。不失一般性，设 h_1 是 c 中距离 $w.$ 最近的帘幕。由于 $w \in h_1^+$，多数点 $x,\ y,\ z$ 必定落在 $h \cup h^+$ 中；如果它们落在 h^-中，那么根据我们对$w.$的选择，w就会位于 h^- 中。特别地，h_i^+必须包含 $x,\ y,\ z$中的多数点，例如 $x,\ y,$ 对所有 $1 < i \leqslant n.$ 都成立。若 n很大，就会与 $w' \in \bigcap_{h^+ \in \mathcal{H}} N(h^+,\ E)$ 这一事实矛盾，从而完成证明。

回顾一下，对于中位凸集 Y，我们有门映射 $P_Y\colon X \to Y$，其中 $P_Y(x)$ 被刻画为在 Y 中粗略唯一的点，满足 $\mathsf{d}(\mu(x, P_Y(x), y), P_Y(x)) < E'$ 对所有$y \in Y,$ 成立，并且对某个仅取决于 HHS常数 $E,$ 的 E' 成立；参见 [DZ22] 中的引理 2.57。从帘幕的视角来看，该引理可立即证明第 (4) 项。

(4) 设 c是一条分隔 x、$P_Y(x)$ 的链，并设 $c' = \{h_1$、$\cdots h_n\} \subset c$是其子链，其中每个元素 h_i都与 Y相交。假设 h_1、$h_2 \cdots h_n$ 按其与 x的接近程度排序，特别地，h_1 是 c' 中最接近 x的帘幕。对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$，假设$h_i^+$、$h_i^-$分别是包含 x、$P_Y(x)$ 的半空间。根据假设，h_1与 Y相交，因此存在一点 $z \in Y \cap h_1$。由于 x、$z \in h_2^+$，h_2^+的中位数凸性保证，对于任意 $w \in X.$，$\mu(x$、z、$w)$ 粗略地位于 h_2^+中。然而，由 [DZ22], 中的引理2.57可知 $\mathsf{d}(\mu(x, z,$ $P_Y(x)), P_Y(x)) < E'$，较大的 n 将与 c'的元素分隔x、$P_Y(x)$ 这一事实相矛盾，证毕。

(5) 对于一个子集 A，如果 $\mathcal{H}$ 是适当包含 A 的半空间的集合，那么 $H = \bigcap_{h^+ \in \mathcal{H}} N(h^+,$ $E)$ 是一个包含 $A.$ 的中位凸集。由于 $\mathsf{hull}(A)$ 被定义为所有包含 A 的中位凸集的 E-邻域的交集，因此集合 $N(H, E)$ 包含 $\mathsf{hull}(A).$。现在我们需要证明它不可能更大，即对于 $x \in N(H, E),$ 我们希望对 $\mathsf{d}(x, P_{\mathrm{hull}(A)}(x))$ 给出一个一致的上界。等价地，如果 $c = \{h_1, \cdots h_k\}$ 是分离 $x,$ $P_{\mathrm{hull}(A)}(x)$ 的一条链，我们希望对 k 给出一个一致的上界。根据第 4 项，除去一致有界数量的帘幕外，所有帘幕 h_i 都分离 x 和 $\mathsf{hull}(A)$。因此，在从 c 中忽略一致有界数量的帘幕后，我们可以假设对于每个 $i.$，都有 $\mathsf{hull}(A) \subset h_i^+$。现在，根据 H 的定义，点 x 必须位于每个 h_i^+ 的 E-邻域内，这就一致地限制了数量 k，且该上界仅取决于 $E.$。

现在我们重新陈述并证明引理 12.4、12.5 和引理 .4。

引理 .2 (Petyt-Spriano-Zalloum)。设 h, k 是两条不相交的帘幕，并设 $x, y \in h$。若 c 是一条分隔 $P_k(x), P_k(y)$ 的帘幕链，那么 c 中至多有 E' 条帘幕不分隔 x, y，其中 E' 是仅依赖于 $E.$ 的常数

证明。设 c 是一条分隔 $P_k(x)$、$P_k(y)$ 的帘幕链，并设 $c' = \{h_1$、$\cdots h_n\} \subset c$ 是 c 中不分隔 x、$y.$ 的极大子集。引理 .1 的第 4 条告诉我们 $|c'| \leqslant E'$；否则，我们就有一条帘幕数多于 E' 的链，它分隔 x、$P_k(x)$（或 y、$P_k(y)$），却不将 x（或 y）与 $k.$ □分隔开

在 CAT(0)立方复形的背景下，下面的引理恰好是 [Gen16], 中的命题 14；将其与 [DZ22] 中的引理 7.12 进行比较。

引理 .3 (Petyt-Spriano-Zalloum)。设 X 是一个层次双曲空间。两个不相交的帘幕 h、$k \subset X$ 是 L-分离的，当且仅当 直径$(P_k(h)) \leqslant L'$，其中 L 和 L' 互相确定。

证明。这个引理的证明是对 [Gen16], 中命题 14 的逐行粗化。为完整起见，我们给出证明。若 h, k 彼此 L-分离，那么根据前一个引理，对于任意 $x, y \in h$，若 $\{h_1, \cdots h_n\}$ 是分隔 $P_k(x), P_k(y)$的一条链，那么 $\{h_1, \cdots h_n\}$ 会分隔 x, y；特别地，它们都会与 k 相交，但这个数量至多为 L，这是由 L-分离

假设得出的。反过来，若 c 是一条与 $h, k,$ 都相交的帘幕链，那么我们断言， c 中除去一致有界多个帘幕后，其余帘幕都必须与 $P_k(h)$ 相交，由此即可得出结论。假设 $c' = \{h_1, \cdots h_n\} \subset c$ 是一条链，其中的元素都不与 $P_k(h)$相交，并假设在 c'. 中的帘幕里，距离 $P_k(h)$ 最远的帘幕是 h_1。令 $x \in h_1 \cap h$，注意到帘幕 $\{h_2, \cdots h_n\}$将 x与集合 $P_k(x) \subset P_k(h)$ 分隔开来，但与 k相交，因此根据引理 .1 的第 4 条，我们有 $|c'| - 1 \leqslant E'$，证明完毕。□

回想一下，我们考虑过的一类特殊帘幕具有如下形式

$$h_{U,b,I} := \mathrm{hull}(\pi_U^{-1}\pi_b^{-1}(I)).$$

引理 .4 (Petyt-Spriano-Zalloum)。 对于 $i \in \{1, 2\}$，设 $U = \mathcal{C}S$, $b_i \subset U$ 是一条测地线， $I_i \subset b_i$是一个区间，并且令 $h_i := h_{U,b_i,I_i} \subset X$。存在常数 E', L，它们仅依赖于 E，使得若 $\mathsf{d}(\pi_U(h_1), \pi_U(h_2)) > E'$, 则 h_1, h_2 是 L-分离的。

证明。 结合引理7.10、 [DZ22] 中的推论7.11以及上文的引理 .3，便可立即得到该引理的证明。

□

References

[ABD21] Carolyn Abbott、Jason Behrstock 和 Matthew Durham。层级双曲群中最大的无圆作用与稳定性。 *Transactions of the American Mathematical Society, Series B*, 8 3 66 37 104，2021 5，31，32，34，( ): –。（引用第 和 页）。[ACT15] Goulnara Arzhantseva、Christopher Cashen 和 Jing Tao。增长紧作用。 *Pacific Journal of Mathematics* 278 1 1 49, 2015 2 ，( ): – 9月。（引用第 页）。[Ago13] Ian Agol。虚 Haken 猜想。 *Doc. Math.*，18:1045–1087，2013年。附有 Agol、Daniel Groves 和 Jason Manning 撰写的附录。（引用第 24 页）。[AIM22] Carolyn Abbott 和 Merlin Incerti-Medici。次线性莫尔斯边界的双曲投影与拓扑不变性，2022年。（引用第 3 和 34 页）。[ANS+19] Carolyn Abbott、Thomas Ng、Davide Spriano、Radhika Gupta 和 Harry Petyt。层级双曲群与一致指数增长，2019年。（引用第 47 页）。[AP56] Nachman Aronszajn 和 Promboon Panitchpakdi。一致连续变换的延拓与超凸度量空间。 *Pacific Journal of Mathematics*，6:405–439，1956年。（引用第 2 页）。[Beh06] Jason A. Behrstock。映射类群和 Teichm¨uller 空间的渐近几何。*Geom. Topol.*，10:1523–1578，2006年。（引用第 14 页）。[BF09] Mladen Bestvina 和 Koji Fujiwara。通过有界上同调刻画高秩对称空间。 *Geometric and Functional Analysis*，19(1):11–40，2009年4月。（引用第 14 页）。[BF21] Emmanuel Breuillard 和 Koji Fujiwara。关于非正曲率空间等距变换的联合谱半径与一致增长。 *Annales de l' Institut Fourier*，71(1):317–391，2021年6月。（引用第 10 和 32 页）。[BHMS20] Jason Behrstock、Mark Hagen、Alexandre Martin 和 Alessandro Sisto。对层级双曲性及其在映射类群商中的应用的组合性研究。 *arXiv preprint arXiv:2005.00567* 2020 35 ，。（引用第 页）。[BHS17] Jason Behrstock、Mark F. Hagen 和 Alessandro Sisto。层级双曲空间 I：立方群的曲线复形。 *Geom. Topol.*，21(3):1731–1804，2017年。（引用第 29、32 和 34 页）。[BHS19] Jason Behrstock、Mark Hagen 和 Alessandro Sisto。层级双曲空间 II：组合定理与距离公式。 *Pacific Journal of Mathematics*，299(2):257–338，2019年5月。（引用第 5、9、29、30、31 和 35 页）。[BHS21] Jason Behrstock、Mark F Hagen 和 Alessandro Sisto。层级双曲空间中的拟平坦集。 *Duke Mathematical Journal*，1(1):1–88，2021年。（引用第 1、3、9 和 32 页）。[Bow08] Brian H. Bowditch。曲线复形中的紧测地线。 *Invent. Math.*，171(2):281–300，2008年。（引用第 33 页）。[Bow13] Brian Bowditch。粗中位数空间与群。 *Pacific Journal of Mathematics*，261，2013年02月。（引用第 3、4、12 和 29 页）。

[BOW18] BRIAN H. BOWDITCH。中位空间与内射度量空间。 *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 168 1 43 55, 2018 4 10 , ( ): – July 。（引用见 pp. and）。[Bow19a] Brian H. Bowditch。粗中位数空间中的凸包。 *preprint*, 2019年。（引用见 pp. 9 and 28）。[Bow19b] Brian H. Bowditch。粗中位数空间中的准平坦, 2019年。（引用见 p. 3）。[BR20] Federico Berlai and Bruno Robbio。层级双曲群的一个精细组合定理。 *Groups, Geometry, and Dynamics*, 14(4):1127–1203, 2020年。（引用见 p. 35）。[Bri10] Martin R. Bridson。映射类群在 CAT(0 *Geometry of*) 空间上的半单作用。载于 *Riemann Surfaces* 1 14 2010 2 3 , pages – . Cambridge University Press, February 。（引用见 pp. and）。[Can84] James W. Cannon。余紧离散双曲群的组合结构。 *Geometriae Dedicata* 16 2 1984 33 , ( ), jun 。（引用见 p.）。[Cas16] Christopher H. Cashen。准等距映射未必会在 Gromov 乘积拓扑下诱导收缩边界之间的同胚。 *Analysis and Geometry in Metric Spaces*, 4(1), September 2016年。（引用见 p. 34）。[CCG+20] J´er´emie Chalopin, Victor Chepoi, Anthony Genevois, Hiroshi Hirai, and Damian Osajda。Helly 群, 2020年。（引用见 p. 3）。[Che00] Victor Chepoi。一些 CAT(0) 复形的图。 *Adv. Appl. Math.*, 24:125–179, 2000年。（引用见 p. 28）。[Cho21] Inhyeok Choi。伪阿诺索夫在映射类群中呈指数级普遍。 *arXiv preprint arXiv:2110.06678* 2021 2 , 。（引用见 p.）。

[CL94] M. Chrobak and L.L. Larmore。慷慨有益，或一个用于三台服务器的 11-竞争算法。*Journal of Algorithms*, 16(2):234–263, March 1994。（引用见 p. 20）。[CM19] Christopher H. Cashen and John M. Mackay。群的收缩边界上的可度量化拓扑。 *Transactions of the American Mathematical Society*, 372(3):1555–1600, May 2019年。（引用见 pp. 14, 32, and 34）。[CN05] INDIRA CHATTERJI and GRAHAM NIBLO。从墙空间到 CAT(0) 立方复形。 *International Journal of Algebra and Computation*, 15(05n06):875–885, October 2005。（引用见 p. 27）。[Cor 17] Matthew Cordes。完备测地度量空间的莫尔斯边界。 *Groups Geom. Dyn.*, 11 4 1281 1306, 2017 32 ( ): – .（引用见 p.）。[Cor19] Mathew Cordes。关于莫尔斯边界与稳定性的综述。载于 *Beyond Hyperbolicity*, pages 83– 116. Cambridge University Press, July 2019年。（引用见 p. 33）。[CRSZ22] Matthew Cordes, Jacob Russell, Davide Spriano, and Abdul Zalloum。莫尔斯测地线的正则性与稳定子群的增长。 *Journal of Topology*, 15(3):1217–1247, June 2022年。（引用见 p. 33）。[CS11] Pierre-Emmanuel Caprace and Michah Sageev。CAT (0) *Geom.* 立方复形的秩刚性。 *Funct. Anal.* 21 4 851 891, 2011 46 , ( ): – .（引用见 p. ）。[CS15] Ruth Charney and Harold Sultan。CAT(0) 空间的收缩边界。 *J. Topol.*, 8(1):93–117, 2015年。（引用见 pp. 14, 23, 32, and 34）。[CW21] Matthieu Calvez and Bert Wiest。Garside 群中的莫尔斯元素是强收缩的。 *preprint arXiv:2106.14826* 2021 12 *arXiv* , 。（引用见 p.）。

[DDLS21a] Spencer Dowdall, Matthew G Durham, Christopher J Leininger, and Alessandro Sisto。Veech 群的扩张 II：层级双曲性与准等距刚性。 *arXiv:2111.00685* 2021 34 *arXiv preprint* , 。（引用见 p.）。

[DDLS21b] Spencer Dowdall, Matthew G Durham, Christopher J Leininger, and Allesandro Sisto。Veech 群的扩张 I：一个双曲作用。 *arXiv preprint arXiv:2006.16425*, 2021年。（引用见 p. 34）。[Des16] Dominic Descombes。具有双梳理的空间的渐近秩。 *Math. Z.*, 284 960, 2016 3 4 947 17 (-): – .（引用见 p.）。[DHS17] Matthew Durham, Mark Hagen, and Alessandro Sisto。层级双曲空间的边界与自同构。 *Geom. Topol.*, 21(6):3659–3758, August 2017。（引用见 pp. 3 and 32）。[DMS20] Matthew G Durham, Yair N Minsky, and Alessandro Sisto。稳定立方化、双梳理与重心。 *To appear in Geometry & Topology (arXiv:2009.13647)*, 2020年。（引用见 p. 3）。[Dre84] Andreas W. M. Dress。树、度量空间的紧致扩张以及某些群的上同调维数：关于度量空间组合性质的札记。 *Advances in Mathematics*, 53 321 20 : –402, 1984。（引用见 p.）。[DT15] Matthew Durham and Samuel J Taylor。映射类群中的凸余紧性与稳定性。 *Algebraic & Geometric Topology*, 15(5):2837–2857, 2015年。（引用见 p. 34）。

[Dur16] Matthew Gentry Durham. 曲面的增广标记复形。 *Journal of the London Mathematical Society* 94 3 933 969, 2016 34 , ( ): –。(引用见第 页)。[DZ22] Matthew Gentry Durham 和 Abdul Zalloum。通过 CAT(0)立方复形研究映射类群与 Teichmüller 空间中一般性的几何，2022年。(引用见第 3、8、10、28、30、32、34、37、49 和 50 页)。[EZ22] Joshua Eike 和 Abdul Zalloum。收缩测地线的正则语言。 *Bulletin of the London Mathematical Society* 54 3 961 976, 2022 14 , ( ): –，4月。(引用见第 页)。[Fin17] Elisabeth Fink。挠群中的 Morse 测地线，2017。arXiv:1710.11191。(引用见第 22 页)。[Fuj08] Koji Fujiwara。映射类群中由两个伪阿诺索夫元素生成的子群。I. 一致指数增长。载于 *Advanced Studies in Pure Mathematics*。日本数学会，2008。(引用见第 47 页)。[Fuj14] Koji Fujiwara。映射类群中由两个伪阿诺索夫元素生成的子群。II. 指数的统一上界。 *Transactions of the American Mathematical Society*, 367(6):4377–4405，2014年12月。(引用见第 47 页)。[Gen16] Anthony Genevois。由 CAT(0)立方复形上的作用得到可缩圆双曲性：若干判据，2016。(引用见第 37 和 49 页)。[Gen19] Anthony Genevois。CAT(0)立方复形中等距变换的中位数集及其若干应用。*arXiv: Group Theory*，2019。(引用见第 3 页)。[Gen20a] Anthony Genevois。CAT(0) 立方复形中的收缩等距变换与图表群的可缩圆双曲性。 *Algebr. Geom. Topol.*，20(1):49–134，2020年。(引用见第 23 页)。[Gen20b] Anthony Genevois。CAT (0) 65 1 2 33 100, 立方复形中的双曲性。 *Enseign. Math.*，(–): –。(引用见第 页和 页)。[Hae21] Thomas Haettel。格、内射度量与 k(π,1) 猜想，2021年。(引用见第 3 页)。[Hae22] Thomas Haettel。建筑与对称空间上的内射度量。 *Bulletin of the London Mathematical Society* 54 6 2297 2313, 2022 3 , ( ): –，6月。(引用见第 页)。[Hag14] Mark Hagen。立方复形与准树状群的弱双曲性。 *J. Topol.*，7(2):385–418，2014年。(引用见第 5 页)。[He22] Vivian He。收缩边界上的等价拓扑，2022年。(引用见第 34 页)。[HHP20] Thomas Haettel、Nima Hoda 和 Harry Petyt。粗内射性、层级双曲性与半双曲性。 *To appear in*《几何与拓扑》*; arXiv preprint arXiv:2009.14053*，2020年。(引用见第 2、3、10、13、15、21、32 和 45 页)。[HMS21] Mark Hagen、Alexandre Martin 和 Alessandro Sisto。超大型型 Artin 群具有层级双曲性。 *arXiv preprint arXiv:2109.04387*，2021年。(引用见第 34 页)。[HNS22] Sam Hughes、Patrick S. Nairne 和 Davide Spriano。拟测地线的正则性刻画双曲性，2022年。(引用见第 33 页)。[HO21] Jingyin Huang 和 Damian Osajda。Helly 与 Garside 和 Artin 相遇。 *Inventiones mathematicae*，225 2 395 2021 3 ( ): –426，2月。(引用见第 页)。[HS20] Mark F. Hagen 和 Tim Susse。关于立方群的层级双曲性。 *Israel Journal of Mathematics* 236 1 45 89, 2020 34 , ( ): –，1月。(引用见第 页)。[HW07] Fr´ed´eric Haglund 和 Daniel T. Wise。特殊立方复形。 *Geometric and Functional Analysis*, 17 5 1551 1620，2007 28 ( ): –，10月。(引用见第 页)。[Isb64] John R. Isbell。关于内射度量空间的六个定理。 *Commentarii Mathematici Helvetici*，39 65 20: –76，1964年。(引用见第 页)。[JL22] Martina Jørgensen 和 Urs Lang。组合型高秩双曲性条件，2022年。(引用见第 21 页)。[Ker21] Alice Kerr。映射类群中的乘积集增长，2021年。(引用见第 47 页)。[KL96] Michael Kapovich 和 Bernhard Leeb。离散群在非正曲率空间上的作用。 *Mathematische Annalen*，306(1):341–352，1996年9月。(引用见第 2、3 和 36 页)。[Lan13] Urs Lang。某些离散度量空间与群的内射包。 *J. Topol. Anal.*，5 331，2013 3 297 1，2，16，17，19，20，21，23 ( ): –。(引用见第 页和 页)。[Man10] Johanna Mangahas。构造短词伪阿诺索夫元素的方法。 *American Journal of Mathematics*，135 1087 1116，2010 47: –。(引用见第 页)。[Mil20] Marissa Miller。亏格二把手体群的稳定子群。 *arXiv preprint arXiv:2009.05067* 2020 34 。(引用见第 页)。[MM99a] Howard A. Masur 和 Yair N. Minsky。曲线复形的几何。I. 双曲性。 *Invent. Math.* 138 1 103 149, 1999 9, 29, 32 , ( ): –。(引用见第 页和 页)。

[MM99b] Howard A Masur 和 Yair N Minsky。曲线复形的几何 I：双曲性。 *Inventiones mathematicae* 138 1 103 149, 1999 34 ，( ): –。(引用见第 页)。[MM00a] Howard A. Masur 和 Yair N. Minsky。曲线复形的几何。II. 层次结构。 *Geom. Funct. Anal.*，10(4):902–974，2000年。(引用见第 9、29 和 32 页)。[MM00b] Howard A Masur 和 Yair N Minsky。曲线复形的几何 II：层次结构。*Geometric and Functional Analysis*，10(4):902–974，2000年。(引用见第 34 页)。[Mur19] Devin Murray。余紧 CAT(0) 空间的收缩边界的拓扑与动力学。*Pacific J. Math.*，299(1):89–116，2019年。(引用见第 34 页)。[Nav13] Andr´es Navas。通过典范重心映射得到取值于非正曲率空间的一个 L^1 遍历定理。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*，33(2):609–623，2013年。(引用见第 17 页)。[Osi16] D. Osin。轴向双曲群。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，368(2):851–888，2016年。(引用见第 33 页)。[Pet21] Harry Petyt。映射类群是拟立方的。 *arXiv preprint arXiv:2112.10681*，2021年。(引用见第 3 页)。[Pet22] Harry Petyt。 *On the large-scale geometry of mapping class groups*。博士论文，布里斯托大学，2022年。(引用见第 8 和 17 页)。[PSZ22] Harry Petyt、Davide Spriano 和 Abdul Zalloum。CAT(0 *arXiv*)空间的双曲 *preprint arXiv:2207.14127* 2022 1, 3, 5, 12, 37, 38, 40, 42, 43, 46 模型。，。(引用见第 页和 页)。[QR22] Yulan Qing 和 Kasra Rafi。次线性 Morse 边界 I：CAT(0)空间。 *Adv. Math.*，404：论文编号 108442，51，2022年。(引用见第 32、34 和 43 页)。[QRT20] Yulan Qing、Kasra Rafi 和 Giulio Tiozzo。次线性 Morse 边界 II：恰当地测地空间。*arXiv preprint arXiv:2011.03481*，2020年。(引用见第 32 和 43 页)。[Raf07] Kasra Rafi。Teichmüller 度量的组合模型。，( ): –。(引用见第 页)。[RM20] Jacob Samuel Russell-Madonia。 *Convexity and Curvature in Hierarchically Hyperbolic Spaces*。博士论文，纽约市立大学，2020年。(引用见第 29 页)。[RST18] Jacob Russell、Davide Spriano 和 Hung Cong Tran。分层双曲空间中的凸性。即将发表于 *Algebraic & Geometric Topology* (arXiv:1809.09303)，2018年。(引用见第 9、30、31 和 48 页)。[RST22] Jacob Russell、Davide Spriano 和 Hung Cong Tran。Morse 拟测地线的局部到整体性质。 *Math. Z.*，300(2):1557–1602，2022年。(引用见第 5、14 和 33 页)。[Rus21] Jacob Russell。多曲线稳定子扩张具有层级双曲性。 *arXiv preprint arXiv:2107.14116* 2021 34 。(引用见第 页)。[RV21] Kasra Rafi 和 Yvon Verberne。映射类群中的测地线。 *Algebr. Geom. Topol.*，21 6 2995 2 14 3017，2021年 ( ): –。(引用见第 页和 页)。[Sag95] Michah Sageev。群对的端与非正曲率立方复形。 *Proc. London* ，( ): –。(*Math. Soc. (3)* 71 3 585 617, 1995 25 引用见第 页)。[Sag97] Michah Sageev。余维一 *J. Algebra*389，1997 189 2 377 25子群与群的分裂。[，( ): –。(引用见第 页)。22] She[Sam Shepherd。一个不含因子系统的立方化，2022年。(引用见第 41 和 43 页)。17] Sis[Alessandro Sisto。什么是分层双曲空间？，2017年。(引用见第 29 页)。20] Spr *On the geometric and algebraic structure of hierarchically hyperbolic groups*Spriano, Davide。[。博士论文，苏黎世联邦理工学院，2020年。(引用见第 29 页)。22] SZ[Alessandro Sisto 和 Abdul Zalloum。内射空间的 Morse 子集是强收缩的，2022年。(引用见第 2、12、15、22、23 和 47 页)。19] Tra *Geom. Topol.*Hung Cong Tran。关于强拟凸子群。[，23(3):1173–1235，2019年。(引用见第 34 页)。23] Ves *To appear*Elliott Vest。次线性 Morse 测地线的帝幕刻画。[，2023年。(引用见第 44 页)。21] Wis *The structure of groups with a quasiconvex hierarchy* 209 *Annals of* Daniel T. *Mathematics Studies* 2021 24 Wise。[，第 卷，共 。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，。(引用见第 页)。20] Yan *Math. Ann.* Wen-yuan Yang。群中收缩元素的一般性。，376(3-4):823–861，2020年。(引用见第 2 和 14 页)。

Mathematics department, 40 St. George Street, University of Toronto, Toronto, Canada*Email address*: abdul.zalloum@utoronto.ca