arXiv:2305.02953v1 [math.GR] 4 May 2023

陡峭不可数群

Samuel M. Corson、ALEXANDER OLSHANSKII 和 OLGA VARGHESE

Abstract. 我们构造了一个基数为 $\aleph_1$ 的单群 G，它是阿廷的（每条严格递降的子群链都是有限的），满足一个 Burnside 定律，并且对于每个不可数子集 $Y \subseteq G$，都存在一个自然数 n_Y，使得 G 中的每个元素都可以表示为至多由 $Y^{\pm 1}$ 中元素构成的长度为 n_Y 的乘积。

特别地，该群是 J´onsson 群（每个真子群的基数都严格更小），并且是强有界的（在度量空间上的每个抽象作用都有有界轨道）；这是首个在不使用连续统假设的情况下构造出的、同时具有这两种性质的不可数群。还可以使群 G 的所有子群都是单群，并且所有非平凡子群在 G 中都是自正规的。

1. Introduction

我们构造具有反常性质的不可数群。主定理如下。

定理 1. 存在一个单群 G，使得

(1) $|G| = \aleph_1$；(2) 对任意不可数 $Y \subseteq G$，都存在一个自然数 $n_Y \in \omega$，使得 G 中的每个元素都可以写成至多由 $Y^{\pm 1}$中的元素构成的长度为 n_Y的乘积；(3) G 的每个子群都是循环群或单群；(4) 若 $K \leq G$ 不是 G 的某个循环子群的真子群，则 K 是自正规群，也就是说，对每个 $g \in G \setminus K$，都有 $K \cap gKg^{-1} = \{1_G\}$；(5) G 可以取为：(a) 满足 Burnside 定律 $x^M = 1_G$（其中 M 是足够大的奇数）且为阿廷群（每个严格下降的子群链都是有限的），或 (b) 为无挠群，且每个严格下降的非循环群子群链都是有限的。

由 (5) (a) 给出的群在向上和向下的行为上都很“陡峭”：从任意不可数子集出发，只需有限步就能生成该群，而进入真子群也只需有限步。我们还可以令 (5) (a) 中的指数 M 为素数，这样每个子群

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：03E75、20A15、20E15。

Key words and phrases. 阿廷性质、J´onsson 群、强有界群。第一作者的研究工作得到巴斯克政府拨款 IT1483-22、西班牙政府拨款 PID2019-107444GA-I00 和 PID2020-117281GB-I00，以及海尔布隆数学研究所和菲尔兹研究所的支持。第二作者的研究工作部分得到美国国家科学基金会拨款 DMS 1901976 的支持。第三作者的研究工作由德国科学基金会拨款 VA 1397/2-2 资助。

G 根据 (3) 都是单群，而 G 的每个非平凡子群根据 (4) 都是自正规子群。基数为 $\aleph_1$ 的群具有上面的性质 (2)，当且仅当它满足以下两个性质（见引理 3）。群 H 是

- 若 H 的每个真子群的基数都严格小于$|H|$，则称 $\prime$为 Jónsson 群；
- 如果 H 的每个由等距变换构成的度量空间上的抽象作用都有有界轨道，则称 H 为强有界。

Obraztsov 构造了一个满足 (1) 和 (5) (a) 的单 J´onsson 群（见 [5] 或[6, 推论 35.4]），而性质 (3) 和 (4) 也可以通过检查他的构造得到验证。我们将对他的论证作一些修改，以获得我们的结果。

在 [8] She lah 使用连续统假设构造了一个基数为 $\aleph_1$ 的无挠单群 S，其中存在一个自然数 $\mathfrak{n}$，使得对于任意不可数的 $Y \subseteq$ S，每个元素 $s \in$S 都可以写成至多长度为 $\mathfrak{n}$ 的 Y 中元素的乘积。请注意，这里没有使用 Y 中元素的逆元（他的群是一个 J´onsson 半群）。Banakh [1] 最近的创新大幅降低了常数 $\mathfrak{n}$，同时仍使用连续统假设。本文中与之相应的无挠结果是变体 (5) (b)。我们的证明只使用标准的 ZFC 公理（不使用连续统假设），但也付出了两项代价：数目 n_Y 取决于 Y，而且我们生成该群时也使用集合 Y 中元素的逆元。在挠变体 (5) (a) 中，该群是一个 J´onsson 半群，因为 $g^{-1} = g^{M-1}$。

Shelah 还构造了一个基数为 $\aleph_1$ 的 J´onsson 群，其构造只使用 ZFC。直到最近，人们才知道是否可能仅用 ZFC 构造出基数为 $\aleph_1$ 的强有界群。我们的群是已知的首批基数为 $\aleph_1$、同时具有 J´onsson 性质且强有界、仅由 ZFC 构造出的例子。

我们指出，不存在满足性质 (2) 的类似性质的可数无限群：由 [7, 引理 5] 可立即得出，对于每个可数无限群 G，都存在一个无限子集 $Y \subseteq G$，使得对于每个$n \in \omega$，都存在一个元素 $g \in G$，它不能写成 $Y^{\pm 1}$ 中长度至多为 n 的词。可以将这种差异视为 Todor˘cevi´c 强着色定理 $\aleph_1 \not\to [\aleph_1]^2_{\aleph_1}$ 与 Ramsey 定理 $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_2$ 的群论反映（分别参见 [9] 和 [4, 定理 9.1]）；事实上，这些组合学定理用于证明相应的不可数与可数情形。

2. Proof of the Main Theorem

我们论证定理 1 的性质 (2) 与同时满足强有界性和 J´sson 之间的联系，随后证明定理 1。若 H 是一个群，并且 $Y \subseteq H$ 我们令

$$Y^{[n]} := \{g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_m^{\varepsilon_m} \mid 0 \leq m \leq n \text{ and } (\forall 1 \leq i \leq m)[g_i \in Y \text{ and } \varepsilon_i \in \{-1, 1\}]\}$$

and

$$\mathcal{G}(Y) := Y^{[2]}.$$

以下为 [2, 命题 2.7]。

引理 2. 群 H 是强有界的，当且仅当对于任意满足 $G(Y_n) \subseteq Y_{n+1}$ 且$\bigcup_{n\in\omega} Y_n = H$ 的 H 子集序列 $\{Y_n\}_{n\in\omega}$，都有 $Y_N = H$，其中某个$N \in \omega$。

按照惯例，一个序数是所有小于它的序数所组成的集合，因此例如 $3 = \{0, 1, 2\}$ 和 $\omega+1 = \{0, 1, \ldots, \omega\}$，并且序数上的序关系恰好与属于关系 $\in$ 一致。基数是具有该基数的最小序数，因此 $\aleph_1$ 是所有可数序数所组成的集合。序数 α 的子集 X 是无界的，如果不存在 $\beta \in \alpha$ 使得 β 严格大于 X 中的所有元素。回忆一下，序数 α 的共尾数是 α 的无界子集的最小基数（例如：后继序数 $\alpha + 1$ 的共尾数为 1，因为集合 $\{\alpha\}$ 在 $\alpha + 1$ 中无界；而 $\aleph_1$ 的共尾数是 $\aleph_1$）。

引理 3. 假设 H 是一个具有 $|H|$ 不可数上确界性的群。以下条件等价:

(1) H 是强有界且为 J´onsson；(2) 对于任意满足 $|Y| = |H|$ 的 $Y \subseteq H$，存在某个 $n_Y \in \omega$ 使得 $H = Y^{[n_Y]}$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 设 $Y \subseteq H$ 满足 $|Y| = |H|$。由于 H 是 J´onsson，且 $|H| = |Y| \trianglelefteq Y| \leq |H|$，我们看到 $Y = H$。对于每个 $n \in \omega$，我们令 $Y_n = Y^{[2^n]}$，并注意到 $\bigcup_{n\in\omega} Y_n = Y = H$，且 $G(Y_n) \subseteq Y_{n+1}$。由于 H 是强有界的，根据引理 2，存在某个 $N \in \omega$，使得 $Y_N = H$，因此 $Y^{[2^N]} = H$。

(2) $\Rightarrow$ (1) 令 $L \leq H$ 满足 $|L| = |H|$。则存在某个 $n_L \in \omega$ 使得 $H = L^{[n_L]}$，但由于 L 是一个群，我们看到 $L = L^{[n_L]} = H$，因此 H 是J´翁松的。接下来令 $\{Y_n\}_{n\in\omega}$ 为 H 的子集序列，满足 $G(Y_n) \subseteq Y_{n+1}$且 $\bigcup_{n\in\omega} Y_n = H$。由于 $|H|$ 具有不可数余终性，必定存在某个$m \in \omega$ 满足 $|Y_m| = |H|$。现在选取 $n_{Y_m} \in \omega$ 使得 $Y_m^{[n_{Y_m}]} = H$，并注意到$H = Y_m^{[n_{Y_m}]} \subseteq Y_{m+n_{Y_m}+1}$，由引理2可知，$H$ 是强有界的。

□

证明主定理所需的主要创新是以下嵌入引理（参见 [6, 定理35。1] 和 [3, 引理2。4]），其证明将在本文末尾给出。引理4用于提供满足（5）（a）的群，而引理5用于（5）（b）。

引理4。存在一个群词 $W(x_0, x_1, y)$，使得下述结论成立。若M 是足够大的奇数（例如 $M > 10^{75}$），L 是满足关系式 $x^M = 1$ 的非平凡可数群，且 $f : (L \setminus \{1_L\})^2 \to L \setminus \{1_L\}$是一个函数，则存在一个可数无限单群 H 和 $c \in H$，使得

(a) $L \leq H$；(b) $c \in H \setminus L$；(c) $H = L \cup \{c\}$；(d) 对所有的（g_0, g_1），若 $\in (L \setminus \{1_L\})^2$，则有 $W(g_0, g_1, c) = f(g_0, g_1)$; (e) 若 $h_0 \in L \setminus \{1_L\}$ 且 $h_1 \in H \setminus L$，则 $H = h_0, h_1$；(f) H 的每个真子群要么是阶整除 M 的循环群，要么在 H 中共轭于 L的一个子群；(g) 若 $h \in H \setminus L$，则 $L \cap hLh^{-1} = \{1_H\}$，并且若 $h \in H$不与 L 的某个元素共轭，则 H 中 h 的中心化子是循环群，且在 H中自正规。

引理5. 存在一个群词 $W(x_0, x_1, y)$，使得以下结论成立。如果L 是一个非平凡无挠可数群，并且 $f : (L \setminus \{1_L\})^2 \to L \setminus \{1_L\}$ 是一个函数，那么存在一个可数无限单无挠群 H 和$c \in H$，使得

(a) $L \leq H$;

(b) $c \in H \setminus L$; (c) $H = L \cup \{c\}$; (d) 对所有 $(g_0, g_1) \in (L \setminus \{1_L\})^2$，都有 $W(g_0, g_1, c) = f(g_0, g_1)$; (e) 若 $h_0 \in L \setminus \{1_L\}$ 且 $h_1 \in H \setminus L$，则 $H = h_0, h_1$; (f) H 的每个真子群要么是循环群，要么在 H 中共轭于 L 的某个子群；(g) 若 $h \in H \setminus L$，则 $L \cap hLh^{-1} = \{1_H\}$；并且若 $h \in H$ 不与 L 中的元素共轭，则 H 中 h 的中心化子是循环群，且在 H 中自正规。

注6. 注意，令 L 为阶为 M 的循环群，我们便可应用引理4，得到一个满足关系式 $x^M = 1$ 的可数无限群 H，其中每个真子群都是阶整除 M 的循环群，并且 H 中每个不是某个循环群的真子群的真子群 K 都是自正规的。特别地， H 是一个满足 $x^M = 1$ 的无限阿廷单群。

以下结果出自 Todorˇcevi´c。

引理7. ([9, § 4]) 若 E 是基数为 $\aleph_1$ 的集合，则存在一个函数 $J : E \times E \to E$，使得对于任意不可数 $Z \subseteq E$，都有 $J(Z \times Z) = E$。

定理1的证明。我们首先构造满足定理陈述中 (5) (a) 的群 G 。固定一个引理4中所述的奇自然数 M 。取 E 为基数 $\aleph_1$ 的集合，并令 $E = \{e_\delta\}_{\delta \in \aleph_1}$ 为其元素的一个枚举。令 $J : E \times E \to E$ 为引理7中所述的对象。我们定义一个由 E 的子集构成的集族 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \aleph_1}$，使得

- $E = \bigcup_{\alpha \in \aleph_1} E_\alpha$;
- $E_\alpha \subseteq E_{\alpha'}$ 当 $\alpha < \alpha'$;
- 对于每个 $\alpha \in \aleph_1$， E_α 是可数无限的;
- 对于每个 $\alpha \in \aleph_1$， $E_{\alpha+1} \setminus E_\alpha$ 是可数无限的;
- $E_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} E_\beta$ 每当 $\alpha \neq 0$ 是极限序数时；以及
- 对于每个 $\alpha \in \aleph_1$， $J(E_\alpha \times E_\alpha) \subseteq E_\alpha$ 。

我们令 $E_{0,0} = \{e_\delta\}_{\delta \in \omega}$ ，并对每个 $n \in \omega$ 取 $E_{0,n+1} = E_{0,n} \cup J(E_{0,n} \times E_{0,n})$。取 $E_0 = \bigcup_{n \in \omega} E_{0,n}$。到目前为止，所有要求的性质均已满足。若 $\alpha \in \aleph_1 \setminus \{0\}$ 是极限序数，则令 $E_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} E_\beta$。若已定义 E_α，而尚未定义 $E_{\alpha+1}$，由于 E_α 是可数的，我们选取 $\epsilon_\alpha \in \aleph_1$，使得 $\epsilon_\alpha > \alpha$，并且 $\sup\{\delta \in \aleph_1 \mid e_\delta \in E_\alpha\}$ 是无限的。令 $E_{\alpha+1,0} = \{e_\delta : \delta < \epsilon_\alpha\}$，并对每个 $n \in \omega$ 取 $E_{\alpha+1,n+1} = E_{\alpha+1,n} \cup J(E_{\alpha+1,n} \times E_{\alpha+1,n})$，以及 $E_{\alpha+1} = \bigcup_{n \in \omega} E_{\alpha+1,n}$。验证这些性质均已满足是直接的。

让我们向 E 中添加一个新元素，取 $x_0 \notin E$ 并将 X 定义为不交并 $E \sqcup \{x_0\}$；对于每个 $\alpha \in \aleph_1$，令 $X_\alpha = E_\alpha \sqcup \{x_0\}$。我们将通过在 X_α 上赋予群结构 G_α，归纳地在 X 上定义群结构，使得只要 $\alpha < \alpha'$， G_α 就是 $G_{\alpha'}$ 的子群。根据注记6，给 X_0 赋予群结构 G_0，使得 G_0 是满足群关系式 $x^M = 1$ 的可数无限单阿廷群，并且元素 x_0 对应于 G_0 的单位元，从而 G_0 的任意真子群都是 。

假设我们已为每个满足 $\beta < \alpha$ 的 X_β 赋予群结构 G_β，且当 $\beta < \beta'$ 时，G_β 是 $G_{\beta'}$ 的子群。若 $\alpha \neq 0$ 是极限序数，则赋予 X_α 唯一的群结构 G_α，使得当 $\beta < \alpha$ 时， G_β 是 G_α 的子群。若 α 是后继序数，例如 $\alpha = \gamma + 1$，则选取一个元素 $c_\gamma \in X_\alpha \setminus X_\gamma$。由于 $X_\alpha \setminus X_\gamma$ 是可数无限的，我们应用引理4，为 X_α 赋予群结构 G_α，使得

(i) G_γ 是 G_α 的子群；(ii) $G_\alpha = G_\gamma \cup \{c_\gamma\}$；(iii) 对所有 g_0， $g_1 \in G_\gamma \setminus \{x_0\}$，都有 $W(g_0, g_1, c_\gamma) = J(g_0, g_1)$；(iv) 若 $g_0 \in G_\gamma \setminus \{x_0\}$ 且 $g_1 \in G_\alpha \setminus G_\gamma$，则 $G_\alpha = g_0, g_1$；(v) 群 G_α 满足关系式 $x^M = 1$，且 G_α 的每个真子群要么是阶整除 M 的循环群，要么共轭于 G_γ 的一个子群；(vi) 群 G_α 是单群；(vii) 若 $g \in G_\alpha \setminus G_\gamma$，则 $G_\gamma \cap gG_\gamma g^{-1} = \{1_{G_\alpha}\}$；并且若 g 不共轭于 G_γ 中的元素，则 g 的中心化子在 G_α 中是循环群且自正规。

最后，我们赋予 $X = \bigcup_{\alpha\in\aleph_1} X_\alpha$ 唯一的群结构 G，该结构由群结构 G_α、$\alpha < \aleph_1$，给出，使得每个 G_α 都是 G 的子群。

我们必须检查群 G 是否满足所需性质。设 $Y \subseteq G$ 不可数，不失一般性，$Y \cap G_0 = \varnothing$。定义函数 $Q : Y \to \aleph_1$，令 $Q(g) = \min\{\alpha < \aleph_1 \mid g \notin G_\alpha\}$（我们取最小值的集合非空，因为我们已将 G_0 中的元素从 Y 中排除）。根据 G_α 上的群结构在 α 为极限序数时的定义可知， $Q(y)$ 总是后继序数。此外，由于 Y 是 X 的不可数子集，且对于每个 $\alpha \in \aleph_1,$， X_α 都是可数的，我们可知 $Q(Y)$ 是不可数的（因而在 $\aleph_1$ 中无界）。

我们注意到，对于每个 $\alpha \in Q(Y) \setminus \min(Q(Y))$，都存在某个自然数$k_\alpha$ 使得 $c_\alpha \in Y^{[k_\alpha]}$。为此，我们固定 $\alpha \in Q(Y) \setminus \min(Q(Y))$，并选取$g_0 \in Y$，使得 $Q(g_0)$ 最小，且 $g_1 \in Y$ 满足 $Q(g_1) > \alpha + 1$。根据上面的条件 (iv)，我们有 $c_\alpha \in G_{\alpha+1} \leq G_{Q(g_1)-1} = g_0, g_1$。由于 $g_0, g_1 = \bigcup_{k\in\omega}\{g_0, g_1\}^{[k]}$，我们得出，对于某个 $k = k_\alpha \in \omega$，有 $c_\alpha \in \{g_0, g_1\}^{[k]} \subseteq Y^{[k]}$。

接下来我们注意到，对于某个 $n \in \omega$， $Y^{[n]} \cap \{c_\alpha\}_{\alpha\in Q(Y)}$ 是不可数的。为此，注意到根据前一段中的论证，$\bigcup_{n\in\omega} Y^{[n]} \supseteq \{c_\alpha\}_{\alpha\in Q(Y)\setminus\min(Q(Y))}$。如果对每个 n，$Y^{[n]} \cap \{c_\alpha\}_{\alpha\in Q(Y)}$ 都是可数的，那么 $\{c_\alpha\}_{\alpha\in Q(Y)\setminus\min(Q(Y))}$ 就是可数的，因为它是可数个可数集 $Y^{[n]} \cap \{c_\alpha\}_{\alpha\in Q(Y)\setminus\min(Q(Y))}$ 的并集，但这显然荒谬。因此，正如所需，对于某个 $n \in \omega$， $Y^{[n]} \cap \{c_\alpha\}_{\alpha\in Q(Y)}$ 是不可数的。

现在，由于 $Y^{[n]} \cap \{c_\alpha\}_{\alpha\in Q(Y)}$ 是不可数的，我们令 $g \in G$ 已给定。若 $g = 1_G = x_0$，则显然 $g \in Y^{[1]}$，因此不妨设 $g \in G \setminus \{1_G\}$。选取 c_{α_0}、$c_{\alpha_1} \in Y^{[n]} \cap \{c_\alpha\}_{\alpha\in Q(Y)}$，使得 $J(c_{\alpha_0}, c_{\alpha_1}) = g$。选取 $c_{\alpha_2} \in Y^{[n]} \cap \{c_\alpha\}_{\alpha\in Q(Y)}$，满足 $\alpha_2 > \alpha_0$、α_1，于是有 $W(c_{\alpha_0}, c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}) = g$。因此令 $n_Y = n \cdot \mathrm{Length}(W)$，我们就得到了所需的常数。于是，定理的条件 (1) 和 (2) 成立。特别地， G 是一个 J´onsson 群。

注8。我们指出，如果 $\alpha < \aleph_1$ 是一个极限序数，且 K 是 G_α 的真子群，那么对于某个 $\beta < \alpha$， K 是 G_β 的子群。为反证，假设结论不成立。给定 $g \in G_\alpha$，我们选取 $\beta_0 < \alpha$ 和 g_0、$g_1 \in K$，使得 $g \in G_{\beta_0}$、 $g_0 \in G_{\beta_0} \setminus \{1_G\}$ 且 $g_1 \in K \setminus G_{\beta_0}$。由 (iv) 可得 $g \in G_{\beta_0} \leq g_0, g_1 \subseteq K$。因此 $K = G_\alpha$，因为 g 是任意的，这与假设 K 是 G_α 的真子群矛盾。

群 G 作为单群的直极限是单群。通过归纳法可以证明，G 的每个子群要么是单群，要么是循环群。我们知道， G_0 是单群，且 G_0 的每个真子群都是循环群。假设对于所有 $\beta < \alpha$，每个 G_β 的子群要么是单群，要么是循环群。如果 $\alpha < \aleph_1$ 满足 $\alpha = \gamma + 1$，那么根据条件（v），我们知道 G_α 的所有子群要么是循环群，要么共轭于 G_β 的某个子群（因而要么是单群，要么是循环群）。如果 $\alpha < \aleph_1$ 是极限序数

那么根据条件（vi），我们知道 G_α 是单群；根据注8， G_α 的任意真子群都是某个 G_β 的子群，且 $\beta < \alpha$，由此可见，在这种情况下，对于 G_α 该结论同样成立。因此，对于所有 $\alpha <$ ℵ$_1$, , G_α 的每个子群要么是循环群，要么是单群。由于我们知道 G 是单群，并且根据（1）和（2）， G 的任意真子群K 都是可数的，因而是某个 G_α的子群，所以我们得出， G 的任意子群要么是循环群，要么是单群，性质（3）成立。

为证明性质 (4) 成立，我们首先用归纳法证明：若 K 是 G_α 的真子群，且不是 G_α 的某个循环群的真子群，则 K 在 G_α 中是自正规子群。根据构造，这对 G_0 成立。假设对每个 $\beta < \alpha$，该断言对G_β 都成立。设 $\alpha = \gamma + 1$，且 K 是G_α 的真子群，但不是 G_α 的某个循环群的真子群。若 K 共轭于 G_β 的一个真子群，则 K 在 G_α 中是自正规子群，因为 G_γ 在 G_α 中是自正规子群（由 (vii) 得出），且 K 在 G_γ 中是自正规子群（由归纳法得出）。若 K 在 G_α 中共轭于子群 G_γ，则 K 在 G_α 中是自正规子群，因为 G_γ 在 G_α 中是自正规子群（由 (vii) 得出）。根据 (v)，唯一的其他可能是 K 为循环群，设其由 h 生成，且 h 不共轭于 G_γ 中的某个元素。在这种情况下，我们知道 h 的中心化子包含 K （因此等于 K），并且根据 (vii)，它在 G_α 中是自正规子群。设 $\alpha <$ ℵ$_1$ 是一个极限序数，且 K 是 G_α 的真子群，但不是 G_α 的某个循环群的真子群。根据注8， K 是 G_β 的一个子群，且满足 $\beta < \alpha$。于是对所有 $\beta \le \beta' < \alpha$， K 在 $G_{\beta'}$ 中都是自正规子群，这意味着 K 在 G_α 中是自正规子群。由此我们证明了归纳断言。当然， G 作为 G 的子群是自正规子群。现在，若 K 是 G 的真子群，且不是 G 的某个循环群的真子群，那么由于 G 是 J´onsson 群，我们有 K 是可数的，并且是某个 $\alpha <$ ℵ$_1$ 对应的 G_α 的真子群。于是根据归纳法，对所有 $\alpha \le \alpha' <$ ℵ$_1$， K 在 $G_{\alpha'}$ 中都是自正规子群，因此 K 在 G 中是自正规子群。由此性质 (4) 成立。

由于该关系式在每个 G_α 中都成立，因此 $x^M = 1$ 在 G 中成立。

我们通过归纳法检验每个群 G_α 都是阿廷群。群 G_0 被选定为阿廷群。若 $\alpha = \gamma + 1$ 和 G_γ 是阿廷群，则根据构造，群 $G_{\gamma+1}$ 也是阿廷群，因为任何真子群要么是阶整除 M 的循环群，要么与阿廷群 G_γ 的某个子群共轭。若 $\alpha <$ ℵ$_1$ 是极限序数，则根据注8， G_α 的任何真子群 K 都是某个 $\beta < \alpha$ 对应的 G_β 的子群，因此 G_α 是阿廷群。于是每个 G_α 都是阿廷群。由于 G 是 J´onsson 群，我们知道 G 的任何真子群 K 都必须是可数的，因此 K 是某个阿廷群 G_α 的子群。于是 G 本身是阿廷群。因此我们得到 (5) (a)，此情形下的证明也就完成了。

情形（5）（b）中的无挠构造与此类似。我们赋予 G_0 一个无限循环群结构，并在每个后继阶段使用引理5代替引理4，将假设（v）替换为

(v*) 群 G_α 是无挠的，且 G_α 的每个真子群要么是循环群，要么共轭于 G_γ的某个子群。

对所得群 G 为单群且具有性质 (2)、(3) 和 (4) 的验证不变，而 G 为无挠群则可由它是无挠群的递增并这一事实得出。通过对 (5)(a) 中阿廷性质的验证稍作修改，即可看出每条严格递降的非循环群子群链都是有限的。

□

接下来需要证明引理 4 和引理 5。这些嵌入引理是通过对 [6, 定理 35 的精彩证明稍作修改而得出的；该定理最初由 Obraztsov 得到，是对 [6, 定理 28 的证明的修改。我们假定读者熟悉 [6, 第 11], 章，尤其是 § 34 和 § 35，并将使用其中的概念和记号（若在本文中完整介绍这套方法，还会增加相当多的篇幅）。

引理4的证明。我们首先固定正实数。

$$\delta > \eta > \iota$$

这些数足够小，可用于标准的分级图论证；此外还有整数 $h = \delta^{-1}$、 $d = \eta^{-1}$、 $n = \iota^{-1}$ 和 $n_0 = M$，其中 $n = \lfloor (h+1)^{-1} \cdot n_0 \rfloor$ 是一个奇数，而 $\lfloor r \rfloor$ 表示小于或等于 r 的最大整数。单词 $W(x_0, x_1, y)$ 如下所示

$$W \equiv (zx_0)^{n+3} x_1 (zx_0)^{n+7} x_1 \cdots x_1 (zx_0)^{n+4h-1}.$$

假设引理的假设成立。令 G_1 为群 L， G_2 为阶为 M 的有限循环群 c_M。我们在自由积 $G_1 * G_2$ 上定义一个满足条件 R 的表示。关系在字母表 A 中定义，其中 A 是来自 G_1 和 G_2 的所有非平凡元素组成的集合。下面将按照秩 $i \geq 0$ 归纳定义，同时定义秩为 i 的简单词、秩为 i 的周期以及群 $G(i)$。

秩 0 和 1 中既没有周期，也没有关系。（这是因为我们不想破坏 G_1 和 G_2。）秩分别为 0 和 1 的群 $G(0)$ 和 $G(1)$ 就是自由积 $G_1 * G_2$。秩 $i = 0$ 1 中的简单词，都是那些不与秩 i 中较短词的幂共轭的词，也就是说，它们属于群 $G(i)$。例如，每个词 $A \equiv cg$（其中 $g \in G_1 \setminus \{1\}$）的长度都是 2，并且在秩 1 中是简单词，因为它不与自由因子 G_1、 G_2 中的元素共轭。

假设 $i \geq 2$ 以及上述概念已定义于秩 $\leq i-1$。秩 i 的周期集合 $\mathfrak{X}_i$ 被定义为一组长度为 i、在秩 $i-1$ 中为简单词的词，并且关于以下性质是极大的：如果 A、 B 是来自 $\mathfrak{X}_i$ 的不同词，那么 A 在秩 $i-1$ 中不与 $B^{\pm 1}$ 共轭（即在 $G(i-1)$ 中不共轭）。例如，所有词 $A(g) \equiv cg$、 $g \in G_1 \setminus \{1\}$ 都可以包含在 $\mathfrak{X}_2$ 中，因为对于不同的 g，它们在 $G(1)$ 中不共轭。

现在我们如下引入新关系集 S_i。首先，对每个 $A \in \mathfrak{X}_i$，我们引入关系

$$A^{n_0} = 1. \tag{I}$$

按照第 11] 章的术语，这些是第一类关系。接下来我们引入第二类关系。对每个 $A \in \mathfrak{X}_i$，我们固定一个极大集 Y_A，使得

(1) 若 $T \in \mathrm{Y}_A$，则 $1 \leq \|T\| < d\|A\|$（这里 $\|\cdot\|$ 表示字母表 A 中的词长）；
(2) 在 $G(i-1)$ 中，每个双陪集 A,A 至多包含 Y_A 中的一个词，且该词在这个陪集的代表元中长度最小。

如果 $a_1 \notin A \leq G(i-1)$，那么对于 $T \in \mathrm{Y}_A \setminus A a_1 A \subseteq G(i-1)$，我们添加关系

$$a_1TA^nTA^{n+4}\cdots TA^{n+4h-4} = 1. \tag{II}$$

如果 $a_2 \notin A \leq G(i-1)$ 且 $a_2 \notin Aa_1A$，那么对于 $T \in \mathrm{Y}_A \setminus Aa_2A$，我们添加关系

$$a_2TA^{n+1}TA^{n+5}\cdots TA^{n+4h-3} = 1. \tag{III}$$

接下来，令 s 为 A 表达式中出现的字母数的最大值。若 a_{s+1} 存在且 $a_{s+1} \notin Aa_1$，$a_2A \subseteq G(i-1)$，则对于 $T \in \mathrm{Y}_A \setminus Aa_{s+1}A$，我们添加关系

$$a_{s+1}TA^{n+2}TA^{n+6}\cdots TA^{n+4h-2} = 1. \tag{IV}$$

最后，若 $i = 2$，对于每个形式为 $A = cg$ 的 $A \in \mathfrak{X}_2$，其中 $g \in G_1 \setminus \{1\}$，以及每个$T = g' \in G_1 \setminus \{1\}$，我们添加关系

$$(f(g,g'))^{-1}A^{n+3}TA^{n+7}\cdots TA^{n+4h-1} = 1 \tag{V}$$

其中 f 是引理陈述中的抽象函数。我们令 S_i 为这个新的关系集合，并写作 $\mathrm{R}_i = \mathrm{R}_{i-1} \cup \mathrm{S}_i$。群 $G(i)$ 定义为商群 $G_1 * G_2/\mathrm{R}_i$。为完成归纳定义，我们称秩为 $i \geq 2$ 的简单词，是指在 $G(i)$ 中不与较短词的幂共轭，且不与秩为 $j \leq i$ 的周期的任何幂共轭的词。

关系序列 $\{\mathrm{R}_i\}_{i\in\omega}$ 将满足性质 R，其证明与引理 34.14] 的证明思路相同。形式为 (I)–(IV) 的关系对应于 [6, § 34.3], 中的 (2)–(5)，只是对 A 上的指数稍作调整，以适应我们的目的。证明 $H = G(\infty) = G_1 * G_1/\bigcup_{i\in\omega}\mathrm{R}_i$ 是可数无穷单群，且条件 (e) 和 (f) 成立的方法，与定理 35.1] 的证明相同。对于性质 (g)，若 $h \in H \setminus L$，则由引理 34.11] 可得 $L \cap hLh^{-1} = \{1_H\}$。此外，若 h 不与 L 中的元素共轭，则要么 h 与 c_M 的非平凡元素共轭，此时不失一般性可设 h 被群 c_M 中心化，而由引理 34.11], 可知该群在 H 中自正规；要么 h 与某个周期的幂共轭。由引理 34.7 (3)] ，不失一般性可设 h 是周期 A 的非平凡幂，而 A 显然中心化 h；结合引理 34.7 (2) 和 (4)] 与引理 34.9], 可知它在 H 中自正规。群 H 的性质 (a)、(b) 和 (c) 由构造显然成立，而性质 (d) 则由形式为 (V) 的关系保证。□

引理5的证明。只需对引理4的证明稍作修改即可。固定参数 $\delta > \eta > \iota$，与前文相同。假设引理的假设成立。令 G_1为群 L， G_2 为无限循环群c_∞。令 $G(0) = G(1) = G_1 * G_2$。与引理4中一样，我们没有秩为0和1的周期或关系子。类似地，我们将秩为0和1的简单词定义为：在群 $G(0) = G(1) = G_1 * G_2$中不共轭于较短词的幂的词。

假设我们已经为所有 $j < i$ 定义了秩为 j 的周期、关系集 $\mathrm{R}j$以及秩为 j 的简单词，并且 $1 < i$。我们按照引理4中的做法，精确地选取秩为 i 的周期集 $\mathfrak{X}_i$。像之前一样定义新关系集 S_i，但不添加任何第一类关系（即 (I) 中的关系）。记 $\mathrm{R}_i = \mathrm{R}_{i-1} \cup \mathrm{S}_i$，并且$G(i) = G_1 * G_2/\mathrm{R}_i$。显然，在秩为 i 时去掉第一类关系，会改变 $G(i)$ 以及后续归纳定义的内容，因此与挠情形相比，后续各秩的所有关系集都会发生变化。像之前一样，将秩为 i 的简单词定义为在 $G(i)$ 中不共轭于某个较短词的幂的词

且不共轭于秩为$j \leq i$的任何周期的幂。

按照之前的相同论证，序列 $\{\mathrm{R}_i\}_{i\in\omega}$ 满足条件 R 和$H = G(\infty) = G_1 * G_2/\bigcup_{i\in\omega} \mathrm{R}_i$，并使用相同的单词$W$具有所需的性质。□

References

[1] *A non-polybounded absolutely closed 36-Shelah group* 2212 01750 T. [2] *Strongly bounded groups and infinite powers of finite groups* Banakh, , 《arXiv》。Y. de Cornulier, 《Comm. Alg.》34（2006），2337–2345。[3] S. Corson, S. Shelah, *Strongly bounded groups of various cardinalities*, 《Proc. Amer. Math. Soc.》148（2020），5045–5057。[4] T. Jech, 《集合论：第三个千年版，修订并扩充》，数学专著丛书, Springer-Verlag，柏林（2003）。[5] V. N. Obraztsov, *An embedding theorem for groups and its corollaries*, 《Mat. Sb.》180（1989），529–541。[6] A. Yu. Ol'shanskii, 《群的定义关系几何学》，Kluwer Academic Publisher，1991。[7] I. V. Protasov, *Counting* Ω*-ideals*, 《Algebra Univers.》62（2009），339–343。[8] S. Shelah, *On a problem of Kurosh, Jónsson groups, and applications*, 《Word Problems II》。North-Holland Publ. Company（1980），373–394。[9] S. Todor˘cevi´c, *Partitioning pairs of countable ordinals*, 《Acta Math.》159（1987），261–294。

Matematika Saila, UPV/EHU, Sarriena S/N, 48940, Leioa - Bizkaia, Spain.
Email address: sammyc973@gmail.com

Department of Mathematics, Vanderbilt University, Nashville, Tennessee 37240.
Email address: alexander.olshanskiy@vanderbilt.edu

Institute of Mathematics, Heinrich-Heine-University Düsseldorf, Universitätsstraße 1, 40225, Düsseldorf, Germany.*Email address*: olga.varghese@hhu.de