arXiv:2305.02964v1 [math.CO] 4 May 2023

# 两个符号图的 s-邻域冠的谱

Tahir Shamsher[a]、Mir Riyaz ul Rashid[b] 和 S. Pirzada[c]$_{a,\ b,\ c}$克什米尔大学数学系，印度克什米尔斯利那加tahir.maths.uok@gmail.com; mirriyaz4097@gmail.com pirzadasd@kashmiruniversity.ac.in

**摘要**。符号图 $S=(G,\sigma)$ 是一个二元组，其中 $G$ 是底层图，$\sigma$ 是从边集到 $\{\pm 1\}$ 的函数。对于分别具有 $n_1$ 和 $n_2$ 个顶点的符号图 $S_1$ 和 $S_2$，$S_1$ 和 $S_2$ 的符号邻域冠 $S_1 \star_s S_2$（简称 s-邻域冠）是这样得到的符号图：取 $S_1$ 的一个副本以及 $S_2$ 的 $n_1$ 个副本，并将 $S_1$ 的第 $i$ 个顶点的每个邻点与 $S_2$ 的第 $i$ 个副本中的每个顶点相连，且边的符号与关联边的符号相同。在本文中，我们根据 $S_1$ 和 $S_2$ 的相应谱，研究 $S_1 \star_s S_2$ 的邻接谱、拉普拉斯谱和净拉普拉斯谱。我们确定了：$(i)$ 任意 $S_1$ 和净正则 $S_2$ 下 $S_1 \star_s S_2$ 的邻接谱；$(ii)$ 正则 $S_1$ 以及正则且净正则 $S_2$ 下的拉普拉斯谱；$(iii)$ 净正则 $S_1$ 以及任意 $S_2$ 下的净拉普拉斯谱。作为推论，我们得到具有 4 个和 5 个不同邻接特征值、拉普拉斯特征值及净拉普拉斯特征值的符号图。最后，我们证明，两个符号图的符号邻域冠不能由其邻接谱（分别为拉普拉斯谱、净拉普拉斯谱）唯一确定。

关键词：符号图、谱、符号邻域冠、克罗内克和以及少量不同特征值。

美国数学会学科分类：05C22，05C50。

## 1 引言

符号图定义为一对 $S=(G,\sigma)$，其中 $G=(V_G,E_G)$ 是其底层图，$\sigma:\ E_G \to \{-1,1\}$ 是符号函数。若 $\sigma \sim +$（分别为 $\sigma \sim -$），则称该符号

函数 $\sigma$ 等价于全正号函数（分别为全负号函数）。在符号图中，一个圈的符号定义为其各边符号的乘积。如果一个符号圈的符号为正（分别为负），则称其为正的（分别为负的）。如果符号图中的所有圈都不是负的，则称该符号图是平衡的；否则称其为不平衡的。

在顶点集为 $V_G = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 的图 $G$ 中，如果两个不同的顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 相邻，我们记作 $v_i \sim v_j$；否则记作 $v_i \nsim v_j$。符号图 $S$ 的邻接矩阵 $A_S$ 是一个 $n$ 阶的 (0, 1, $-1$) 对称方阵，其中 $a_{ij} = \sigma(v_iv_j)$ 当且仅当 $v_i \sim v_j$，这里 $\sigma(v_iv_j)$ 是边 $v_iv_j$ 的符号。

许多广为人知的图论概念都可直接应用于符号图领域。例如，如果底层图是正则的，则符号图也是正则的。同样，$S$ 中顶点 $v$ 的度就是其在 $G$ 中的度。然而，某些概念仅适用于符号图。符号图 $S$ 中顶点 $v$ 的正度 $d_S^+(v)$ 是与 $v$ 相 incident 的正边数。同样，我们定义负度 $d_S^-(v)$。在 $S$ 中，$v$ 的净度定义为 $d_S^{\pm}(v) = d_S^+(v) - d_S^-(v)$。如果将净度视为定义在顶点集上的函数后为常数，则称该符号图为净正则图。符号图 $S$ 的拉普拉斯矩阵定义为 $L_S = D_S - A_S$，其中 $A_S$ 和 $D_S$ 分别是 $S$ 的邻接矩阵和顶点度对角矩阵。符号图 $S$ 的净拉普拉斯矩阵定义为 $N_S = D_S^{\pm} - A_S$，其中 $D_S^{\pm}$ 是 $S$ 的净度对角矩阵。“净拉普拉斯”一词首次出现于 [12]。显然，对于无符号图，净拉普拉斯矩阵与拉普拉斯矩阵相同。

对于一个阶为 $n$ 的方阵 $C$，记 $\psi_C(t) = \det(tI_n - C)$ 为 $C$ 的特征多项式，其中 $I_n$ 是 $n$ 阶单位矩阵。对于符号图 $S$，我们称 $\psi_{A_S}(t)$（分别称 $\psi_{L_S}(t)$、$\psi_{N_S}(t)$）为 $S$ 的邻接（分别为拉普拉斯、净拉普拉斯）特征多项式，其根称为 $S$ 的邻接（分别为拉普拉斯、净拉普拉斯）特征值。$S$ 的特征值及其重数构成的集合称为其邻接谱。对于 $L_S$ 和 $N_S$，也采用类似的术语。若 $X$ 是 $S$ 的顶点集的子集，则记 $S^X$ 为通过反转恰有一个端点属于 $X$ 的每条边的符号而得到的符号图。我们称 $S^X$ 与 $S$ 切换等价。切换等价的符号图具有相同的邻接矩阵谱和拉普拉斯矩阵谱。有趣的是，对于净拉普拉斯矩阵的谱，这一结论并不成立。若将 $C_S$ 的特征值写作 $c_1(S) \leqslant c_2(S) \leqslant \cdots \leqslant c_n(S)$，则其谱记为 $\sigma_C(S) = \{c_1(S)\ c_2(S) \ldots, c_n(S)\}$.

这是公认的　　明，如果一个连通无符号图只有两个不同的邻接特征值

，那么它必定是完全图。迄今为止，刻画所有具有三个不同邻接特征值的无符号图仍是一个未解决的问题。与无符号图不同，若一个符号图只有两个不同的邻接特征值，它不一定是完全图。Ramezami [10] 证明，若一个符号图有两个不同的邻接特征值，那么它必定是正则图。文献 [3,5,13,14]刻画了正则度为 2、3、4 5–且只有两个不同邻接特征值的符号图。具有三个不同邻接特征值的符号图可能是正则图，也可能不是。关于具有三个不同邻接特征值的符号图的一些结果可见 [1,8,9]。因此，利用已知的具有两个和三个不同邻接特征值的符号图，找出具有四个和五个不同邻接特征值的符号图将会很有趣。

如果两个符号图具有相同的邻接谱（分别地，拉普拉斯谱、净拉普拉斯谱），则称它们是邻接余谱（分别地，拉普拉斯余谱、净拉普拉斯余谱）。任意两个切换同构的符号图都是邻接余谱（分别地，拉普拉斯余谱）。如果与某个符号图邻接余谱（分别地，拉普拉斯余谱）的符号图都与其切换同构，则称该符号图由其邻接谱（分别地，拉普拉斯谱）决定。如果与某个符号图净拉普拉斯余谱的符号图都与其同构，则称该符号图由其净拉普拉斯谱决定。一般而言，谱无法决定符号图，这一问题推动了大量研究。因此，对于给定的一类符号图，找出邻接余谱（分别地，拉普拉斯余谱、净拉普拉斯余谱）但非同构的符号图将会很有意义。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍符号图的 s-邻域冠的定义和邻接谱。第 3 节给出符号图的 s-邻域冠的拉普拉斯谱。第 4 节给出符号图的 s-邻域冠的净拉普拉斯谱。第 5 节从已知的具有 2 个和 3 个不同邻接（分别为拉普拉斯、净拉普拉斯）特征值的符号图中，找出具有 4 个和 5 个不同邻接（分别为拉普拉斯、净拉普拉斯）特征值的符号图。

## 2 两个符号图的 s-邻域冠的邻接谱

本节中，我们确定两个符号图的 s-邻域冠的邻接谱。为此，我们需要以下背景知识。

设 $A$ 是一个 $n$ 阶方阵。矩阵 $A$ 的 $A$-冠，记为 $\varkappa_A(t)$，定义为矩阵 $(tI_n - A)^{-1}$ 的所有元素之和，即

$$\varkappa_A(t) = j_n^T (tI_n - A)^{-1} j_n,$$

其中， $j_n$ 表示一个大小为 $n$ 的列向量，其所有元素均等于 1。关于矩阵冠的详细信息，读者可参阅 [2,6]。

如果 $A$ 是一个 $n \times n$ 矩阵，且每一行的行和都等于固定实数 $k$，则众所周知 [6]:

$$\varkappa_A(t) = \frac{n}{t-k}. \tag{2.1}$$

特别地，由于对于任意具有 $n$ 个顶点的符号图 $S$，净拉普拉斯矩阵$N_S$ 的每一行行和都等于 0，因此我们得到

$$\varkappa_{N_S}(t) = \frac{n}{t}. \tag{2.2}$$

对于两个矩阵 $C = (c_{ij})_{m\times n}$ 和 $D = (d_{ij})_{p\times q}$，克罗内克积 $C \otimes D$ 是由 $C$ 得到的$mp \times nq$ 矩阵，即将其中的每个元素 $c_{ij}$ 替换为 $c_{ij}D$。这是一个满足以下性质的结合运算：当乘积 $CE$ 和 $DF$ 存在时，$(C \otimes D)^T = C^T \otimes D^T$ 和 $(C \otimes D)(E \otimes F) = CE \otimes DF$。后者意味着，对于非奇异矩阵 $C$ 和 $D$，有 $(C \otimes D)^{-1} = C^{-1} \otimes D^{-1}$。此外，如果 $C$ 和 $D$ 是 $n \times n$ 和 $p \times p$ 矩阵，则 $\det(C \otimes D) = (\det C)^p (\det D)^n$；克罗内克和为 $D \oplus C = C \otimes I_p + I_n \otimes D$，其中 $I_p$ 和 $I_n$ 分别是阶数为 $p$ 和 $n$ 的单位矩阵。

根据舒尔补公式， $2 \times 2$ 分块矩阵的行列式为

$$\det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \det(X_4) \det(X_1 - X_2 X_4^{-1} X_3),$$

其中， $X_1$ 和 $X_4$ 是方块矩阵， $X_4$ 是非奇异矩阵。此外， $X_1 - X_2X_4^{-1}X_3$ 称为 $X_4$的舒尔补。

两无符号图的邻域冠积在 [4] 中被引入。在同一篇论文中，任意两个无符号图的邻域冠积的邻接谱和拉普拉斯谱由两个因子无符号图的相应谱表示。这里，我们为两个符号图的邻域冠积引入如下定义。

**定义 2.1**。 设 $S_1$ 和 $S_2$ 分别是具有 $n_1$ 和 $n_2$ 个顶点的两个符号图。 $S_1$ 和 $S_2$ 的符号邻域冠记作 $S_1 \star_s S_2$，是通过以下方式得到的符号图：

取一个 $S_1$ 的副本和 $S_2$ 个 $n_1$ 的副本，并将 $S_1$ 的第 $i$ 个顶点的每个邻点与 $S_2$ 的第 $i$ 个副本中的每个顶点相连，且所连边的符号与关联边的符号相同。示意见图 1，其中虚线表示负边，粗线表示正边。

值得注意的是， $S_1 \star_s S_2$ 中新增边的符号由符号图 $S_1 = (G_1, \sigma)$ 的符号函数定义。这启发我们将其称为符号邻域冠（简称 s-邻域冠）。显然，符号图 $S_1 \star_s S_2$ 有 $n_1(n_2 + 1)$ 个顶点。

下述结果将有助于确定符号图$S_1 \star_s S_2$的邻接谱。

**定理 2.2**。 设 $S_1 \star_s S_2$ 是符号图 $S_1$ 和 $S_2$ 的 s-邻域冠，它们分别有 $n_1$ 和$n_2$ 个顶点。若 $S = S_1 \star_s S_2$，则

$$\psi_{A_S}(t) = \left(\psi_{A_{S_2}}(t)\right)^{n_1} \psi_{(A_{S_1} + \varkappa_{A_{S_2}}(t) A_{S_1}^2)}(t),$$

其中 $\varkappa_{A_{S_2}}(t)$ 是符号图 $S_2$的邻接矩阵的冠。

**证明**。 设 $S_1$ 和 $S_2$ 是分别有 $n_1$ 和 $n_2$ 个顶点的符号图。我们首先按如下方式标记 $S = S_1 \star_s S_2$的顶点。设 $V_{S_1} = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_1}\}$和 $V_{S_2} = \{u_1, u_2, \ldots, u_{n_2}\}$。令 $\{u_1^j, u_2^j, \ldots, u_{n_2}^j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n_1$ 表示 $j$个 $S_2$副本的顶点集，其中对每个 $i$， $u_i^j$ 是 $u_i$ 的副本。记

$$V_i = \left\{u_i^1, u_i^2, \ldots, u_i^{n_1}\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n_2.$$

那么，$V_{S_1} \cup V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{n_2}$是 $V_S$的一个划分。利用该划分，符号图 $S_1 \star_s S_2$ 的邻接矩阵为

$$A_S = \begin{pmatrix} A_{S_1} & j_{n_2}^T \otimes A_{S_1} \\ \left(j_{n_2}^T \otimes A_{S_1}\right)^T & A_{S_2} \otimes I_{n_1} \end{pmatrix}.$$

通过舒尔补公式，并将其视为有理函数域 $C(t)$ 上的矩阵，

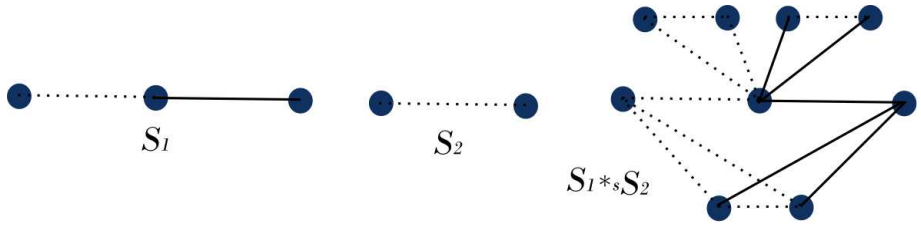


图1：两个符号图的符号邻域冠

我们得到

$$\begin{aligned}
\psi_{A_S}(t) &= \det\left(tI_{n_1(n_2+1)} - A_S\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} tI_{n_1} - A_{S_1} & -(j_{n_2}^T \otimes A_{S_1}) \\ -\left(j_{n_2}^T \otimes A_{S_1}\right)^T & tI_{n_1n_2} - A_{S_2} \otimes I_{n_1} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} tI_{n_1} - A_{S_1} & -(j_{n_2}^T \otimes A_{S_1}) \\ -\left(j_{n_2}^T \otimes A_{S_1}\right)^T & (tI_{n_2} - A_{S_2}) \otimes I_{n_1} \end{pmatrix} \\
&= \det\left((tI_{n_2} - A_{S_2}) \otimes I_{n_1}\right) \times \det\{tI_{n_1} - A_{S_1} - \left(j_{n_2}^T \otimes A_{S_1}\right)\left((tI_{n_2} - A_{S_2}) \otimes I_{n_1}\right)^{-1}(j_{n_2} \otimes A_{S_1})\} \\
&= \left(\det\left(tI_{n_2} - A_{S_2}\right)\right)^{n_1} \times \det\left\{tI_{n_1} - A_{S_1} - \left(j_{n_2}^T \left(tI_{n_2} - A_{S_2}\right)^{-1} j_{n_2} \otimes A_{S_1}^2\right)\right\} \\
&= \left(\det\left(tI_{n_2} - A_{S_2}\right)\right)^{n_1} \det\left(tI_{n_1} - A_{S_1} - \varkappa_{A_{S_2}}(t) A_{S_1}^2\right) \\
&= \left(\psi_{A_{S_2}}(t)\right)^{n_1} \psi_{(A_{S_1} + \varkappa_{A_{S_2}}(t) A_{S_1}^2)}(t).
\end{aligned}$$

因此结论得证。 ■

**定理 2.3.** 设 $S_1$ 是一个具有 $n_1$ 个顶点的符号图， $S_2$ 是一个具有 $n_2$ 个顶点的 $r_2$–净正则符号图。假设 $\sigma_A(S_1) = \{\theta_1(S_1)\ \theta_2(S_1) \ldots, \theta_{n_1}(S_1)\}$ 和 $\sigma_A(S_2) = \{\theta_1(S_2)\ \theta_2(S_2) \ldots, \theta_{n_2}(S_2)\}$，其中 $\theta_k(S_2) = r_2$，对于固定整数 $k$和 $1 \leq k \leq n_2$。则 $S_1 \star_s S_2$ 的邻接谱为

$(i)$的邻接特征值为 $\theta_j(S_2)$，其重数为 $n_1$；对于 $\theta_j(S_2(j = 1, 2, \ldots, n_2$和 $j \neq k)$ 的每个邻接特征值，其对应于 $\sigma_A(S_2)$，

$(ii)$ 两个邻接特征值

$$\frac{\theta_i(S_1) + r_2 \pm \sqrt{(1 + 4n_2)\theta_i(S_1)^2 + (r_2 - 2\theta_i(S_1))\, r_2}}{2}$$

对于 $\theta_i(S_1)\,(i = 1, 2, \ldots, n_1)$ $\sigma_A(S_1)$的每个邻接特征值。

**证明**。 根据定理 2.2，我们有

$$\begin{aligned}\psi_{A_S}(t) &= \left(\psi_{A_{S_2}}(t)\right)^{n_1}\psi_{(A_{S_1}+\varkappa_{A_{S_2}}(t)A_{S_1}^2)}(t)\\ &= \left(\det\left(tI_{n_2}-A_{S_2}\right)\right)^{n_1}\det\left(tI_{n_1}-A_{S_1}-\varkappa_{A_{S_2}}(t)A_{S_1}^2\right).\end{aligned} \tag{2.3}$$

由于 $S_2$ 是具有 $n_2$ 个顶点的 $r_2-$ 净正则符号图，因此由式 (2.1) 可得

$$\varkappa_{A_{S_2}}(t)=\frac{n_2}{t-r_2}.$$

显然，$\varkappa_{A_{S_2}}(t)$ 的唯一极点是 $t=r_2$。因此，由式 (2.3)，对于 $\sigma_A(S_2)$ 的每个邻接特征值 $\theta_j(S_2)$ $(j=1,2,\ldots,n_2$ 和 $j\neq k)$，$\theta_j(S_2)$ 是重数为 $n_1$ 的邻接特征值。现在，$S_1\star_s S_2$ 其余的 $2n_1$ 个邻接特征值可通过求解

$$t-\theta_i(S_1)-\frac{n_2}{t-r_2}\theta_i(S_1)^2=0$$

对于 $\sigma_A(S_1)$ 的每个邻接特征值 $\theta_i(S_1)$ $(i=1,2,\ldots,n_1)$，可得上述结果。因此结论得证。 ■

定理 *2.4.* 设 $S$ 是一个具有 $n$ 个顶点的符号图。对于正整数 $p$ 和 $q$，令 $(K_{p,q},-)$ 表示所有边符号均为负的符号图，其中 $K_{p,q}$ 是一个具有 $p+q$ 个顶点的完全二部图。假设 $\sigma_A(S)=\{\theta_1(S),\theta_2(S)\ldots,\theta_n(S)\}$。那么，$S\star_s(K_{p,q},-)$ 的邻接谱为

$(i)$ 0 重数为 $n(p+q-2)$,

*(ii)* 方程 $t^3-\theta_i(S)t^2-(pq+(p+q)\theta_i(S)^2)\,t+pq\theta_i(S)(2\theta_i(S)-1)=0$的三个根，其中 $\theta_i(S)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 是 $\sigma_A(S)$ 的邻接特征值。

**证明**。 由定理 2.2，可得

$$\psi_{A_{S\star s(K_{p,q},-)}}(t)=\left(\det\left(tI_{p+q}-A_{(K_{p,q},-)}\right)\right)^n\det\left(tI_n-A_S-\varkappa_{A_{(K_{p,q},-)}}(t)A_S^2\right). \tag{2.4}$$

对顶点作适当标记后，符号图 $(K_{p,q},-)$ 的邻接矩阵为

$$A_{(K_{p,q},-)}=\begin{pmatrix}O_p & -j_{p\times q}\\ -j_{q\times p} & O_q\end{pmatrix},$$

其中 $O_p$ 是阶数为 $p$ 的零矩阵，$j_{p\times q}$ 是阶数为 $p\times q$ 且每个元素均为 1 的矩阵。

现在，令 $Z=\mathrm{diag}\left((t-q)I_p,(t-p)I_q\right)$ 为对角矩阵，其中前 $p$ 个对角元素为 $(t-q)$，最后 $q$ 个元素为 $(t-p)$。那么 $(tI_{p+q}-A_{(K_{p,q},-)})Zj_{p+q}=(t^2-pq)\,j_{p+q}$，因此

$$\varkappa_{A_{(K_{p,q},-)}}(t)=j_{p+q}^T(tI_{p+q}-A_{(K_{p,q},-)})^{-1}j_{p+q}=\frac{j_{p+q}^TZj_{p+q}}{t^2-pq}=\frac{(p+q)t-2pq}{t^2-pq}.$$

$(K_{p,\ q},\ -)$ 的邻接谱 [7] 包含重数为 1 的特征值 $\pm\sqrt{pq}$，以及重数为 $p+q-2$ 的 0。由于 $\varkappa_{A_{(K_{p,q},-)}}(t)$ 的极点为 $\pm\sqrt{pq}$，故由式 (2.4) 可得结论。

■

按照定理 2.4 中的类似推导，我们得到以下观察结果。

定理 *2.5*。设 $S$ 是一个具有 $n$ 个顶点的符号图。对于正整数 $p$ 和 $q$，令 $(K_{p,q},+)$ 表示所有边符号均为正的符号图，其中 $K_{p,q}$ 是一个具有 $p+q$ 个顶点的完全二部图。假设 $\sigma_A(S) = \{\theta_1(S)\ \theta_2(S)\ldots,\theta_n(S)\}$。那么，$S\star_s(K_{p,q},+)$ 的邻接谱为

$(i)$ 0，重数为 $n(p+q-2)$,

*(ii)* 方程 $t^3-\theta_i(S)t^2-(pq+(p+q)\theta_i(S)^2)\ t-pq\theta_i(S)\ (2\theta_i(S)\ -1)\ =0$ 的三个根，对每个 $\sigma_A(S)$ 的邻接特征值 $\theta_i(S)\ (i=1,2,\ldots,n)$ 均成立。

# 3 两个符号图的 s-邻域冠的拉普拉斯谱

本节首先给出以下主要结果。

**定理 3.1**。设 $S_1$ 和 $S_2$ 分别是具有 $n_1$ 个和 $n_2$ 个顶点的两个符号图。此外，设$P$是一个非奇异矩阵，使得 $tI_{n_2}-L_{S_2}=P\Omega P^{-1}$，其中 Ω 是一个对角矩阵，其对角元素是 $S_2$的拉普拉斯特征值。若 $S=S_1\star_s S_2$，则

$$\psi_{L_S}(t)=\det\left(-D_{S_1}\oplus(tI_{n_2}-L_{S_2})\right)\times\det(M),$$

其中 $\det(M)\ =$

$$\det\left\{tI_{n_1}-L_{S_1}-n_2D_{S_1}-\left(j_{n_2}^TP\otimes-A_{S_1}D_{S_1}^{-1}\right)\left(\Omega\otimes-D_{S_1}^{-1}+I_{n_2}\otimes I_{n_1}\right)^{-1}\left(P^{-1}j_{n_2}\otimes A_{S_1}\right)\right\}.$$

**证明**。采用定理 2.2 中的标记，符号图 $S=S_1\star_s S_2$的拉普拉斯矩阵为

$$L_S=\begin{pmatrix} L_{S_1}+n_2D_{S_1} & -(j_{n_2}^T\otimes A_{S_1}) \\ -\left(j_{n_2}^T\otimes A_{S_1}\right)^T & D_{S_1}\oplus L_{S_2}\end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{aligned}\psi_{L_S}(t)&=\det\begin{pmatrix} tI_{n_1}-L_{S_1}-n_2D_{S_1} & (j_{n_2}^T\otimes A_{S_1}) \\ \left(j_{n_2}^T\otimes A_{S_1}\right)^T & -D_{S_1}\oplus(tI_{n_2}-L_{S_2})\end{pmatrix}\\ &=\det\left(-D_{S_1}\oplus(tI_{n_2}-L_{S_2})\right)\times\det(M),\end{aligned}$$

其中，$M = (tI_{n_1+n_1n_2} - L_{S_1\star_s S_2}) / (-D_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - L_{S_2}))$ 是关于 $(-D_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - L_{S_2}))$ 的舒尔补。现在，

$$\begin{aligned}\det(M) &= \det\left((tI_{n_1+n_1n_2} - L_{S_1\star_s S_2}) / (-D_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - L_{S_2}))\right) \\ &= \det\left\{tI_{n_1} - L_{S_1} - n_2 D_{S_1} - \left(j_{n_2}^T \otimes A_{S_1}\right)(-D_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - L_{S_2}))^{-1}\left(j_{n_2}^T \otimes A_{S_1}\right)^T\right\}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

此外，

$$\begin{aligned}(-D_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - L_{S_2}))^{-1} &= (tI_{n_2} - L_{S_2} \otimes I_{n_1} + I_{n_2} \otimes -D_{S_1})^{-1} \\ &= \left(\left(tI_{n_2} - L_{S_2} \otimes -D_{S_1}^{-1} + I_{n_2} \otimes I_{n_1}\right)(I_{n_2} \otimes -D_{S_1})\right)^{-1} \\ &= \left(I_{n_2} \otimes -D_{S_1}^{-1}\right)\left(tI_{n_2} - L_{S_2} \otimes -D_{S_1}^{-1} + I_{n_2} \otimes I_{n_1}\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

通过非奇异矩阵 $P$ 对 $tI_{n_2} - L_{S_2}$ 进行特征分解。我们有

$$tI_{n_2} - L_{S_2} = P\Omega P^{-1}, \tag{3.7}$$

其中，$\Omega$ 是一个对角矩阵，其对角线元素为 $S_2$ 的拉普拉斯特征值。由式 (3.6) 和 (3.7)，我们得到

$$\begin{aligned}(-D_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - L_{S_2}))^{-1} &= \left(I_{n_2} \otimes -D_{S_1}^{-1}\right)\left(P\Omega P^{-1} \otimes -D_{S_1}^{-1} + I_{n_2} \otimes I_{n_1}\right)^{-1} \\ &= \left(I_{n_2} \otimes -D_{S_1}^{-1}\right)\left((P \otimes I_{n_1})(\Omega \otimes -D_{S_1}^{-1} + I_{n_2} \otimes I_{n_1})\left(P^{-1} \otimes I_{n_1}\right)\right)^{-1} \\ &= \left(P \otimes -D_{S_1}^{-1}\right)\left(\Omega \otimes -D_{S_1}^{-1} + I_{n_2} \otimes I_{n_1}\right)^{-1}\left(P^{-1} \otimes I_{n_1}\right).\end{aligned} \tag{3.8}$$

将式 (3.8) 代入式 (3.5)，我们得到 $\det(M) =$

$$\det\left\{tI_{n_1} - L_{S_1} - n_2 D_{S_1} - \left(j_{n_2}^T P \otimes -A_{S_1} D_{S_1}^{-1}\right)\left(\Omega \otimes -D_{S_1}^{-1} + I_{n_2} \otimes I_{n_1}\right)^{-1}\left(P^{-1} j_{n_2} \otimes A_{S_1}\right)\right\}.$$

因此，结论得证。 ■

下面的结果给出了克罗内克和的特征值，并将其表示为各因子矩阵的特征值。

**引理 3.2**。[11] 设 $A$ 和 $B$ 分别为阶数为 $n$ 和 $m$的两个方阵。假设 $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ 和 $y_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ 分别是矩阵 $A$和 $B$的特征值。那么，克罗内克和 $B \oplus A$ 的特征值为 $x_i + y_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$ 以及$j = 1, 2, \ldots, m$。

下一个结果完全确定了正则 $S_1$ 以及正则且净正则 $S_2$的 $S_1 \star_s S_2$ 的拉普拉斯谱。

定理 *3.3.* 设 $S_1$ 是一个具有 $n_1$ 个顶点的 $r_1-$ 正则符号图， $S_2$ 是一个具有 $n_2$ 个顶点的 $r_2-$ 正则且 $r_3-$ 净正则符号图。假设 $\sigma_L(S_1) = \{\lambda_1(S_1)\ \lambda_2(S_1)\ldots,\lambda_{n_1}(S_1)\}$ 且 $\sigma_L(S_2) = \{\lambda_1(S_2)\ \lambda_2(S_2)\ldots,\lambda_{n_2}(S_2)\}$，其中 $\lambda_k(S_2) = r_2 - r_3$，对固定整数 $k, 1 \leq k \leq n_2$ 成立。那么，$S_1 \star_s S_2$ 的拉普拉斯谱为

$(i)$ 拉普拉斯特征值 $\lambda_j(S_2) + r_1$，其重数为 $n_1$，对于每个拉普拉斯特征值$\lambda_j(S_2)(j = 1, 2, \ldots, n_2$和 $j \neq k)$ 属于 $\sigma_L(S_2)$,

$(ii)$ 两个拉普拉斯特征值

$$\frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\left(n_2(\lambda_i(S_1) - r_1)^2 - (\lambda_i(S_1) + r_1 n_2)(r_1 + r_2 - r_3)\right)}}{2},$$

其中，对于每个拉普拉斯特征值 $\lambda_i(S_1)\,(i = 1, 2, \ldots, n_1)$，有 $\beta = r_1 + r_2 - r_3 + \lambda_i(S_1) + r_1 n_2$, 其中 $\sigma_L(S_1)$。

**证明**。 由定理 3.1 可得。

$$\psi_{L_S}(t) = \det\left(-D_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - L_{S_2})\right) \times \det(M),$$

其中 $\det(M) =$

$$\det\left\{tI_{n_1} - L_{S_1} - n_2 D_{S_1} - \left(j_{n_2}^T P \otimes -A_{S_1} D_{S_1}^{-1}\right)\left(\Omega \otimes -D_{S_1}^{-1} + I_{n_2} \otimes I_{n_1}\right)^{-1}\left(P^{-1} j_{n_2} \otimes A_{S_1}\right)\right\}. \tag{3.9}$$

如果 $S_1$ 是一个 $r_1$–正则符号图，那么由式 (3.9) 和引理 3.2 可容易得到

$$\psi_{L_{S_1 \star_s S_2}}(t) = \left(\det\left((t - r_1)I_{n_2} - L_{S_2}\right)\right)^{n_1} \times \det(M),$$

其中 $\det(M) =$

$$\det\left\{(t - r_1 n_2)\, I_{n_1} - L_{S_1} - \left(j_{n_2}^T P \otimes -A_{S_1}(r_1 I_{n_1})^{-1}\right)\left(\left(\frac{1}{r_1}\Omega - I_{n_2}\right) \otimes I_{m_1}\right)^{-1}\left(P^{-1} j_{n_2} \otimes A_{S_1}\right)\right\}$$

$$= \det\{(t - r_1 n_2)I_{n_1} - L_{S_1} - \varkappa_{L_{S_2}}(t - r_1)A_{S_1}^2\}$$

$$= \det\{(t - r_1 n_2)I_{n_1} - L_{S_1} - \varkappa_{L_{S_2}}(t - r_1)(r_1 I_{n_1} - L_{S_1})^2\}.$$

因此,

$$\psi_{L_{S_1 \star_s S_2}}(t) = \left(\det\left((t - r_1)I_{n_2} - L_{S_2}\right)\right)^{n_1} \times \det\{(t - r_1 n_2)I_{n_1} - L_{S_1} - \varkappa_{L_{S_2}}(t - r_1)(r_1 I_{n_1} - L_{S_1})^2\}.$$

由于 $S_2$ 是一个具有 $n_2$ 个顶点的 $r_2-$ 正则且 $r_3-$ 净正则符号图，因此， $L_{S_2}$ 的行和为 $r_2 - r_3$。此外，由式 (2.1) 可得

$$\varkappa_{L_{S_2}}(t) = \frac{n_2}{t-(r_2-r_3)}.$$

显然，$\varkappa_{L_{S_2}}(t)$ 的唯一极点是 $t = r_2 - r_3$。因此，对于 $\sigma_L(S_2)$ 的每个拉普拉斯特征值 $\lambda_j(S_2)$ $(j = 1, 2, \ldots, n_2$ 和 $j \neq k)$， $\lambda_j(S_2) + r_1$ 是重数为 $n_1$ 的拉普拉斯特征值。现在， $S_1 \star_s S_2$ 剩余的 $2n_1$ 个拉普拉斯特征值可通过求解得到。

$$t - r_1 n_2 - \lambda_i(S_1) - \frac{n_2}{t - r_1 - (r_2 - r_3)}(r_1 - \lambda_i(S_1))^2 = 0$$

对于 $\sigma_L(S_1)$ 的每个拉普拉斯特征值 $\lambda_i(S_1)$（$i = 1, 2, \ldots, n_1$）。因此，结论得证。 ■

如果 $S$ 是一个具有 $n$ 个顶点的连通符号图，那么众所周知，0 是拉普拉斯特征值当且仅当 $S$ 是平衡的。此外，0 是一个拉普拉斯特征值，其对应的特征向量的每个分量均为 1。类似于定理 3.3 的证明，我们立即得到以下结论。

定理 *3.4.* 设 $S_1$ 是一个具有 $n_1$ 个顶点的 $r_1-$正则符号图， $S_2$ 是一个具有 $n_2$ 个顶点的连通平衡符号图。假设 $\sigma_L(S_1) = \{\lambda_1(S_1)\ \lambda_2(S_1) \ldots, \lambda_{n_1}(S_1)\}$ 并且$\sigma_L(S_2) = \{\lambda_1(S_2)\ \lambda_2(S_2) \ldots, \lambda_{n_2}(S_2)\}$，其中 $\lambda_k(S_2) = 0$，对固定整数 $k, 1 \leq k \leq n_2$成立。那么， $S_1 \star_s S_2$ 的拉普拉斯谱为

$(i)$ 拉普拉斯特征值 $\lambda_j(S_2) + r_1$ 的重数为 $n_1$ ，其中每个拉普拉斯特征值$\lambda_j(S_2)(j = 1, 2, \ldots,$ $n_2$和 $j \neq k)$ 属于 $\sigma_L(S_2)$，

$(ii)$ 两个拉普拉斯特征值

$$\frac{(n_2+1)r_1 + \lambda_i(S_1) \pm \sqrt{((n_2+1)r_1 + \lambda_i(S_1))^2 - 4\lambda_i(S_1)\left((2n_2+1)r_1 - n_2\lambda_i(S_1)\right)}}{2},$$

对于每个 $\lambda_i(S_1)\,(i = 1、2、\ldots\ldots、 n_1)$ 的拉普拉斯特征值 $\sigma_L(S_1)$。

注意，定理 3.4 将定理 3.1 [推广并扩展到了符号图， [4]] 。

# 4 两个符号图的 s-邻域冠的净拉普拉斯谱

本节首先给出以下结果，该结果将有助于确定符号图 $S_1 \star_s S_2$ 的净拉普拉斯谱。

**定理 4.1**。 设 $S_1$ 和 $S_2$ 分别是具有 $n_1$ 个和 $n_2$ 个顶点的两个符号图。此外，设 $P$ 是一个非奇异矩阵，使得 $tI_{n_2} - N_{S_2} = P\Omega P^{-1}$，其中 $\Omega$ 是一个对角矩阵，其对角元素是 $S_2$ 的净拉普拉斯特征值。如果 $S = S_1 \star_s S_2$，则

$$\psi_{N_S}(t) = \det\left(-D^{\pm}_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - N_{S_2})\right) \times \det(M),$$

其中 $\det(M) =$

$$\det\left\{tI_{n_1} - N_{S_1} - n_2 D^{\pm}_{S_1} - \left(j^T_{n_2} P \otimes -A_{S_1} {D^{\pm}_{S_1}}^{-1}\right)\left(\Omega \otimes -{D^{\pm}_{S_1}}^{-1} + I_{n_2} \otimes I_{n_1}\right)^{-1}\left(P^{-1} j_{n_2} \otimes A_{S_1}\right)\right\}.$$

**证明**。 按照定理 2.2 中的标记，符号图$S = S_1 \star_s S_2$ 的净拉普拉斯矩阵为

$$N_S = \begin{pmatrix} N_{S_1} + n_2 D^{\pm}_{S_1} & -(j^T_{n_2} \otimes A_{S_1}) \\ -\left(j^T_{n_2} \otimes A_{S_1}\right)^T & D^{\pm}_{S_1} \oplus N_{S_2} \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{aligned}\psi_{N_S}(t) &= \det\begin{pmatrix} tI_{n_1} - N_{S_1} - n_2 D^{\pm}_{S_1} & (j^T_{n_2} \otimes A_{S_1}) \\ \left(j^T_{n_2} \otimes A_{S_1}\right)^T & -D^{\pm}_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - N_{S_2}) \end{pmatrix} \\ &= \det\left(-D^{\pm}_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - N_{S_2})\right) \times \det(M),\end{aligned}$$

其中，$M = (tI_{n_1+n_1n_2} - N_{S_1\star_s S_2}) / \left(-D^{\pm}_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - N_{S_2})\right)$ 是关于$\left(-D^{\pm}_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - N_{S_2})\right)$的舒尔补。现在，

$$\begin{aligned}\det(M) &= \det\left((tI_{n_1+n_1n_2} - N_{S_1\star_s S_2}) / (-D^{\pm}_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - N_{S_2}))\right) \\ &= \det\left\{tI_{n_1} - N_{S_1} - n_2 D^{\pm}_{S_1} - \left(j^T_{n_2} \otimes A_{S_1}\right)(-D^{\pm}_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - N_{S_2}))^{-1}\left(j^T_{n_2} \otimes A_{S_1}\right)^T\right\}.\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}(-D^{\pm}_{S_1} \oplus (tI_{n_2} - N_{S_2}))^{-1} &= (tI_{n_2} - N_{S_2} \otimes I_{n_1} + I_{n_2} \otimes -D^{\pm}_{S_1})^{-1} \\ &= \left(\left(tI_{n_2} - N_{S_2} \otimes -{D^{\pm}_{S_1}}^{-1} + I_{n_2} \otimes I_{n_1}\right)(I_{n_2} \otimes -D^{\pm}_{S_1})\right)^{-1} \\ &= \left(I_{n_2} \otimes -{D^{\pm}_{S_1}}^{-1}\right)\left(tI_{n_2} - N_{S_2} \otimes -{D^{\pm}_{S_1}}^{-1} + I_{n_2} \otimes I_{n_1}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

现在，通过非奇异矩阵 $P$ 对 $tI_{n_2} - N_{S_2}$ 进行特征分解，使得 $tI_{n_2} - L_{S_2} = P\Omega P^{-1}$，其中 $\Omega$ 是一个对角矩阵，其对角元素为 $S_2$ 的净拉普拉斯特征值，并按照定理 3.1 中的类似方法进行处理，我们得到 $\det(M) =$

$$\det\left\{tI_{n_1} - N_{S_1} - n_2 D^{\pm}_{S_1} - \left(j^T_{n_2} P \otimes -A_{S_1} {D^{\pm}_{S_1}}^{-1}\right)\left(\Omega \otimes -{D^{\pm}_{S_1}}^{-1} + I_{n_2} \otimes I_{n_1}\right)^{-1}\left(P^{-1} j_{n_2} \otimes A_{S_1}\right)\right\}.$$

因此，结论得证。 ■

**定理 4.2**。设 $S_1$ 是一个有 $n_1$ 个顶点的 $r_2$–净正则符号图， $S_2$ 是一个有 $n_2$ 个顶点的任意符号图。假设 $\sigma_N(S_1) = \{v_1(S_1)\ v_2(S_1)\ldots, v_{n_1}(S_1)\}$，且 $\sigma_N(S_2) =\{v_1(S_2)\ v_2(S_2)\ldots, v_{n_2}(S_2)\}$，其中 $v_k(S_2) = 0$，固定整数为 $k$, $1 \leq k \leq n_2$。那么， $S_1 \star_s S_2$ 的净拉普拉斯谱为

$(i)$ 净拉普拉斯特征值 $v_j(S_2)+r_2$ 的重数为 $n_1$， 对每个净拉普拉斯特征值$v_j(S_2)(j = 1, 2, \ldots, n_2$和 $j \neq k)$ $\sigma_N(S_2)$,

$(ii)$ 两个重数为 *1* 的净拉普拉斯特征值

$$\frac{v_i\left(S_1\right)+\left(n_2+1\right)r_2 \pm \sqrt{\left(v_i\left(S_1\right)+\left(n_2+1\right)r_2\right)^2-4v_i\left(S_1\right)\left(\left(2n_2+1\right)r_2-n_2v_i\left(S_1\right)\right)}}{2}$$

对于 $\sigma_N(S_1)$ 的每个净拉普拉斯特征值 $v_i(S_1)\,(i = 1, 2, \ldots, n_1)$。

**证明**。 设 $S_1$ 是一个 $r_2$–净正则符号图。由定理 4.1 和引理 3.2 可得

$$\psi_{N_{S_1\star_s S_2}}(t) = (\det\left((t - r_2)I_{n_2} - N_{S_2}\right))^{n_1} \times \det(M),$$

其中 $\det(M) =$

$$\det\left\{(t - r_2n_2)\, I_{n_1} - N_{S_1} - \left(j_{n_2}^T P \otimes -A_{S_1}(r_2I_{n_1})^{-1}\right)\left((\frac{1}{r_2}\Omega - I_{n_2}) \otimes I_{m_1}\right)^{-1}\left(P^{-1}j_{n_2} \otimes A_{S_1}\right)\right\}$$

$$= \det\{(t - r_2n_2)I_{n_1} - N_{S_1} - \varkappa_{N_{S_2}}(t - r_2)A_{S_1}^2\}$$

$$= \det\{(t - r_2n_2)I_{n_1} - N_{S_1} - \varkappa_{N_{S_2}}(t - r_2)(r_2I_{n_1} - N_{S_1})^2\}.$$

因此，我们有

$$\psi_{N_{S_1\star_s S_2}}(t) = (\det\left((t - r_2)I_{n_2} - N_{S_2}\right))^{n_1} \times \det\{(t - r_2n_2)I_{n_1} - N_{S_1} - \varkappa_{N_{S_2}}(t - r_2)(r_2I_{n_1} - N_{S_1})^2\}.$$

由于净拉普拉斯矩阵 $N_{S_2}$ 的每一行的行和都等于 0，因此，根据公式 (2.2)，我们得到

$$\varkappa_{N_{S_2}}(t) = \frac{n_2}{t}.$$

显然， $\varkappa_{N_{S_2}}(t)$ 的唯一极点是 $t = 0$。因此，对于 $\sigma_N(S_2)$ 的每个净拉普拉斯特征值 $\lambda_j(S_2)$( $j = 1, 2, \ldots, n_2$ 和 $j \neq k$)， $v_j(S_2) + r_2$是重数为 $n_1$ 的净拉普拉斯特征值。现在， $S_1 \star_s S_2$ 剩余的 $2n_1$ 个净拉普拉斯特征值可通过求解以下方程得到

$$t - r_2n_2 - v_i\left(S_1\right) - \frac{n_2}{t - r_2}(r_2 - \lambda_i\left(S_1\right))^2 = 0$$

对于 $\sigma_N(S_1)$ 的每个净拉普拉斯特征值 $\lambda_i(S_1)$（$i = 1, 2, \ldots, n_1$）。由此得证。 ■

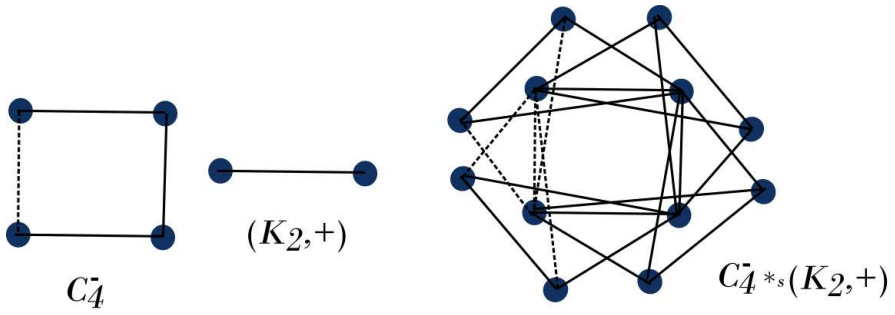


图 2: 具有少量邻接特征值的符号图 $C_4^- \star_s (K_2, +)$ .

# 5 具有4个和5个不同特征值的符号图的构造及谱确定性

在无符号图中，直径与不同的邻接特征值的个数之间存在一个众所周知的关系。不同的邻接特征值的个数不小于直径加 1。然而，对于符号图，这通常并不成立。为说明这一点，考虑一个有 4 个顶点的非平衡圈。

在过去的 $2-3$年中，人们对具有少数不同特征值的符号图进行了大量研究。s-邻域冠积构造有助于利用已知的具有2个和3个不同特征值的符号图，构造出新的具有4个和5个不同特征值的符号图。下面的结果是定理2.3、3.3和4.2的直接推论。

**定理5.1**。 $(i)$ 设 $S_1$ 是一个具有 $n_1$ 个顶点和 $t_1$ $(1 \leq t_1 \leq n_1)$ 个不同的邻接特征值的任意符号图， $S_2$ 是一个具有 $n_2$ 个顶点和 $t_2$ $(1 \leq t_2 \leq n_2)$个不同的邻接特征值的净正则符号图。那么， $S_1 \star_s S_2$ 的邻接谱至多包含$2t_1 + t_2$ 个不同的特征值。

$(ii)$ 设 $S_1$ 是一个具有 $n_1$ 个顶点和 $t_1$ $(1 \leq t_1 \leq n_1)$ 个不同拉普拉斯特征值的任意正则符号图，且 $S_2$ 是一个具有 $n_2$ 个顶点和 $t_2$ $(1 \leq t_2 \leq n_2)$个不同拉普拉斯特征值的正则且净正则符号图。则， $S_1 \star_s S_2$ 的拉普拉斯谱至多由 $2t_1 + t_2$ 个不同的拉普拉斯特征值组成。

$(iii)$ 设 $S_1$ 是一个具有 $n_1$ 个顶点和 $t_1$ $(1 \leq t_1 \leq n_1)$ 个不同净拉普拉斯特征值的任意净正则符号图，且 $S_2$ 是一个具有 $n_2$ 个顶点和 $t_2$ $(1 \leq t_2 \leq n_2)$ 个不同净拉普拉斯特征值的任意符号图。则， $S_1 \star_s S_2$ 的净拉普拉斯谱至多由 $2t_1 + t_2$ 个不同的净拉普拉斯特征值组成。

众所周知，若一个符号图有 $n$ 个顶点且只有两个不同的邻接特征值，

则其谱的形式为 $\{\theta_1^a, \theta_2^b\}$，其中 $\theta_1 \neq \theta_2$ 和 $a+b=n$。因此，以下结果可直接由定理 2.3 得出。

**定理 5.2**。 $(i)$ 设 $S$ 是一个具有 $n \geq 2$ 个顶点且有$2$ 个不同的邻接特征值的任意符号图。则， $S \star_s (K_1, \sigma)$的邻接谱由4 个不同的特征值组成，其中 $K_1$ 是一个具有1个顶点的完全图。

$(ii)$ 设 $S$ 是一个具有 $n \geq 2$ 个顶点且有$2$ 个不同的邻接特征值的任意符号图。则， $S \star_s (K_2, \sigma)$的邻接谱由$5$ 个不同的特征值组成，其中 $K_2$ 是一个具有$2$ 个顶点的完全图。

**示例**。 设 $C_4^-$是一个具有 4 个顶点的非平衡圈。根据定理 5.2，符号图$C_4^- \star_s (K_2, +)$（见图 2）具有 12 个顶点和 5 个不同的邻接特征值。此外，根据定理 2.3， $C_4^- \star_s (K_2, +)$的邻接谱由 $\left\{-1^4, \frac{3\pm\sqrt{33}}{2}^2, \frac{-1\pm\sqrt{41}}{2}^2\right\}$给出

在结束本节之前，我们将证明，对于任意符号图 $S_1$ 和 $S_2$ ，符号图 $S_1 \star_s S_2$ 无法由其邻接谱、拉普拉斯谱和净拉普拉斯谱确定。下面的定理直接由定理 2.2、3.1 和 4.1 得出。

**定理 5.3**。 $(i)$ 设 $S_1$ 和 $S_2$ 是两个邻接余谱且非同构的符号图。那么，对于任意符号图 $S$，符号图 $S_1 \star_s S$ 和 $S_2 \star_s S$ 非同构且邻接余谱。

$(ii)$ 设 $S_1$ 和 $S_2$ 是两个拉普拉斯余谱且非同构的符号图。那么，对于任意符号图 $S$，符号图 $S_1 \star_s S$ 和 $S_2 \star_s S$ 非同构且拉普拉斯余谱。

$(iii)$ 设 $S_1$ 和 $S_2$ 是两个净拉普拉斯余谱且非同构的符号图。那么，对于任意符号图 $S$，符号图 $S_1 \star_s S$ 和 $S_2 \star_s S$ 非同构且净拉普拉斯余谱。

**致谢**。 本研究由 SERB-DST 研究项目 CRG/2020/000109 资助。Tahir Shamsher 的研究获得了印度新德里科学与工业研究委员会 (CSIR) 提供的 SRF 资助。**利益冲突**。 作者声明不存在任何利益冲突。

**数据可用性** 本文不涉及数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

# 参考文献

[1] M. Andelic、T. Koledin 和 Z. Stanic, 《具有三个特征值的正则符号图》, Discuss. Math. Graph Theory 40 (2020) 405-416.[2] S-Y. Cui 和 G-X. Tian, 《冠图的谱与无符号拉普拉斯谱》, Linear Algebra Appl. 437 (2012) 1692–1703.[3] E. Ghasemian 和 G. H. Fath-Tabar, 《关于具有两个不同特征值的符号图》, Filomat31(2017) 6393–6400.[4] I. Gopalapillai, 《图的邻域冠图的谱》, Kragujevac J. Math. 35(2011) 493–500.[5] Y. Hou、Z. Tang 和 D. Wang, 《关于仅有两个不同邻接特征值的符号图》, Discrete Math. 342 (2019) 111615（8页）。[6] C. McLeman 和 E. McNicholas, 《冠图的谱》, Linear Algebra Appl. 435 (2011) 998–1007.[7] S. Pirzada、T. Shamsher 和 M.A. Bhat, 《关于符号完全二部图的特征值》, https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.07262.[8] F. Ramezani、P. Rowlinson 和 Z. Stanic, 《至多具有三个特征值的符号图》, Czechoslovak Math. J. 72 (2022) 59-77.[9] F. Ramezani、P. Rowlinson 和 Z. Stanic, 《关于至多具有三个特征值的符号图的更多结果》, Discuss. Math. Graph Theory 42 (2022) 1313-1331.[10] F. Ramezani, 《关于具有两个不同特征值的符号图》, arXiv:1511.03511v5.[11] K. Schacke, 《关于克罗内克积》, 硕士论文, 滑铁卢大学, 2004.[12] Z. Stanic, 《关于符号图的净拉普拉斯矩阵的谱》, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie 63(2020) 203–211.[13] Z. Stanic, 《具有两个特征值的符号图的谱》, Appl. Math. Comput. 364 (2020) 124627（9页）。[14] Z. Stanic, 《具有两个特征值且顶点度为五的符号图》, Ars Math. Contemp. (2021) doi:10.26493/1855-3974.2329.97a。