arXiv:2305.02977v1 [math.GT] 4 May 2023

关于彩色环带 $\mathfrak{sl}_2$ 纽结同调的统一

ANNA BELIAKOVA、MATTHEW HOGANCAMP、KRZYSZTOF PUTYRA 和 STEPHAN WEHRLI

摘要。我们证明，在量子环带 Bar-Natan 范畴的框架下，对于平凡结，Khovanov 模型与 Cooper–Krushkal 模型所定义的彩色 $\mathfrak{sl}_2$ 同调是等价的。同样对于平凡结，我们还证明这两种理论等价于第三种彩色同调理论；该理论利用 Jones–Wenzl 投影子在缆线的量子环面同调上的作用来定义。证明方法是将这三种模型的性质概念化为一个切比雪夫系统，并证明该系统的唯一性。此外，我们证明，Cooper–Hogancamp 投影子在量子水平迹中的类，与 Cooper–Krushkal 投影子在穿过的股上的类相重合。作为应用，我们计算了 Khovanov 弧代数的完整量子 Hochschild 同调。最后，我们提出精确猜想，以形式化缆化运算，并将上述结果推广到所有结。

目录

1. 引言1.1. 广义投影子 1.2. 作为函子的着色结同调 2
1.3. 作为 Hochschild 同调的颜色空间 1.4. 结构安排 4
1.5. 致谢 2. 预备知识 2.1. 约定 2.2. 复形 2.3. 范畴与双范畴上的分次 2.4. Temperley–Lieb 范畴 2.5. Khovanov 同调与 Bar-Natan 的双范畴 2.6. 量子水平迹 2.7. 循环同构 2.8. C_0的量子水平迹 2.9. 与量子垂直迹的联系 3. 同调工具箱 3.1. 同调扰动 3.2. 反向良序扭曲复形 3.3. 梳理毛发 4. 切比雪夫系统 4.1. Jones–Wenzl 系统 4.2. Khovanov 系统 4.3. Cooper–Krushkal 系统 5. 范畴幂等元模型 5
5
6
6
6
7
7
8
9
9
11
13
14
16
17
18
21
22
24
26
27
29
31

5.1. 设置 315.2. 2-周期模型5.3. 量子迹6. 广义投影子的量子迹 386.1. 中的幂等元6.2. 范畴化中心幂等元 426.3. 本原范畴化幂等元 436.4. 范畴化幂等元的量子环带迹 447. 的量子 Hochschild 同调参考文献 46

1. 引言

在本世纪初，纽结理论因 Khovanov 构造的链复形 [Kho00] 而发生了革命性变化：其分次欧拉示性数是 Jones 多项式，而其 Poincar´e 多项式是一种能够检测平凡结的新链环不变量 [KM11]。此后，文献中出现了这一构造的许多变体。与我们最相关的是本文三位作者在 [BPW19] 中构造的量子环带Khovanov同调。这是一种针对加厚环带中的链环的三重分次同调理论 $\mathbb{A}$，并配备一个膜。微分保持量子分次和环带分次，并由环带余边给出；这些余边界视为在固定膜的条件下取同伦，因此，使余边界穿过膜会贡献一个因子 $q^{\pm\chi(S)}$，其中 q 是一个量子参数，而 $\chi(S)$ 是欧拉示性数（见图 1）。这样的余边界构成一个范畴 $\mathcal{BN}_q(\mathbb{A})$。令 $q=1$，我们便得到 Asaeda–Przytycki–Sikora 的通常环带Khovanov同调 [APS04]。

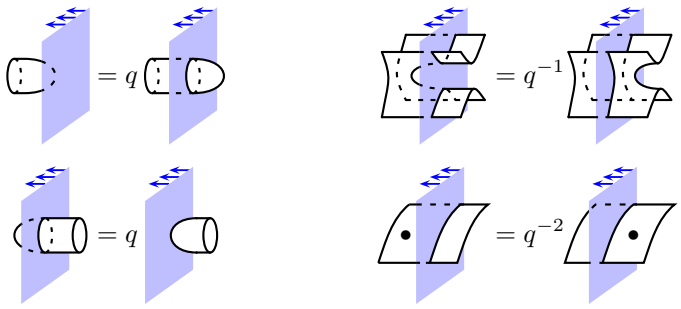


图 1. 膜关系。

本文旨在比较将这一构造推广到着色纽结的不同方法。回顾一下，给定一个带框架定向纽结 $K \subset S^3$，以及量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的一个 $(n+1)$ 维表示 V_n，可以通过将 Jones–Wenzl 幂等元插入表示 n 条 K 的平行缆的图表中，并利用考夫曼括号 skein 关系消解交叉，来定义带色 Jones 多项式 $J(K,\ V_n)$。或者，也可以使用 Reshetikhin–Turaev函子来定义 $J(K,\ V_n)$。

在范畴化框架中，定义着色环带Khovanov同调或其量子化形式有三种不同的方法。为了概述这些构造，我们需要一些

准备。我们将链复形范畴记作 $\mathcal{TL}$ Temperley–Lieb 范畴，其对象为自然数，而从 n 到 m 的态射是平坦的 $(n,\ m)$-缠结（或由 $n+m$ 个点构成的无交叉配对）。作为 $\mathcal{TL}$ 中的 $(0,\ 0)$ 态射，平凡结的取值为 $q+q^{-1}$。对于一般的 q，Temperley–Lieb 代数 $\mathrm{TL}_n := \mathcal{TL}(n,\ n)$ 是半单的，并带有一族幂等元 $\{p_\varepsilon\}, \varepsilon \in \{-1,1\}^n$，它们投影到简单分量上。其中最著名的 p_n 对应于 $\varepsilon = (1,\ \ldots,\ 1)$，称为 Jones–Wenzl 投影算子。存在一个函子 $\mathrm{HH}_0 : \mathcal{TL} \to S(\mathbb{A})$，映射到环带的缠结代数，将 p_n 映射为其辫子闭包 $[p_n]$，并满足以下切比雪夫递归关系：

$$[p_n][p_1] = [p_{n+1}] + [p_{n-1}]$$

这一关系对表示范畴 $\mathcal{R}ep(U_q(\mathfrak{sl}_2))$的 Grothendieck 环中的类 $[V_n]$ 也成立，对后者的 Hochschild 同调中的类也成立，因此得到 $\mathrm{HH}_0(\mathcal{TL})$与 $\mathrm{K}_0(\mathcal{R}ep(U_q(\mathfrak{sl}_2)))$之间的同构。

Bar-Natan 2-范畴 BN 通过加入以平面缠结为边界的曲面作为 2-态射，使 $\mathcal{TL}$范畴化。我们将范畴 $\mathrm{BN}(n,n)$ 记作 $\mathcal{BN}_n$。此外，0 阶 Hochschild 同调也有一种自然的范畴化，称为 2-范畴的水平迹。我们将使用[BPW19], 中发展的水平迹的 q扭曲版本，即量子版本；该文证明量子水平迹 $\mathrm{hTr}_q(\mathrm{BN}^{\oplus})$ 等价于$\mathcal{BN}_q(\mathbb{A})^{\oplus}$。此处符号 $\oplus$ 表示加性闭包。

我们的第一个着色结同调模型使用 Cooper–Krushkal 对 Jones–Wenzl 幂等元 $p_n \in \mathrm{TL}_n$ 的范畴化 P_n，该幂等元存在于 Bar-Natan 范畴 $\mathbf{BN}_n$ 上有界复形范畴的适当完备化中。我们将 $[P_n]$ 在 $\mathrm{hTr}_q(\mathbf{BN}^{\oplus})$ 中的 P_n 的类记为 $[P_n]$。在 Cooper–Krushkal 模型中，着色环带复形是通过将 $[P_n]$ 与 n 的 K 缆线的量子环带复形复合而构造的。

第二种方法归功于 Khovanov，并受到以下$[V_n] \in \mathrm{K}_0(\mathcal{R}ep(U_q(\mathfrak{sl}_2)))$分解的启发。

$$[V_n] = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} \left[V_1^{\otimes(n-2k)}\right]. \tag{1.1}$$

在 [Kho05] Khovanov 构造了一族有限复形 $\mathcal{V}_n$，它们定义在 Temperley–Lieb 范畴 $\mathcal{TL}$上，其欧拉示性数满足（1.1），其中二项式系数被解释为分次移位。将这些复形与对应于 n 的缆线 K 的复形相结合，我们得到 n-着色量子环带复形。

第三种构造利用了一个函子。

$$S^1 \times (-) : \mathcal{TL} \longrightarrow \mathcal{BN}_q(\mathbb{A})$$

将一个对象 n 映射为一组 n 位于 $\mathbb{A}$ 中的本质圆，并将一个帽或杯映射为相邻圆之间的一条带。更一般地说，该函子将一个平坦缠结 T 映射为曲面$S^1 \times T \subset \mathbb{A} \times I$。在 [BPW19] 中证明了，该函子在$\mathcal{TL}^{\oplus}$ 与 $\mathcal{BN}_q(\mathbb{A})^{\oplus}$之间诱导出一个等价。这使我们能够通过将 K 与 $S^1 \times p_n \in \mathcal{BN}_q(\mathbb{A})^{\oplus}$ 同 n 的 K的量子环带复形复合，来定义纽结 K 的着色复形。

总之，所有三种模型都会将一对 $(K,\ V_n)$ 关联到 $\mathcal{TL}^{\oplus}$ 的 Karoubi 包络上的一个（上有界）链复形。我们将此类链复形构成的范畴记为 $\mathrm{Ch}^-(\mathrm{Kar}(\mathcal{TL})^{\oplus})$。此外，固定一个系数环$\mathbb{k}$，使得 q 是$\mathbb{k}$ 中的一个固定可逆元素，并且对于足够大的 N，所有位于 $(0,\ 2N]$ 中的整数 d，$1-q^d$ 都是可逆的。

我们的主要结果确立了这三种模型对 n 色平凡结的等价关系。

定理 A. 三种模型中针对 n 色平凡结的量子环带复形彼此同伦等价，这意味着

$$[P_n] \simeq \operatorname{im} p_n \simeq \mathcal{V}_n \in \mathrm{Ch}^-(\mathrm{Kar}(\mathcal{TL})^{\oplus}).$$

其中，$\operatorname{im} p_n$ 表示幂等元 p_n，并将其视为 $\mathrm{Kar}(\mathcal{TL})$ 的一个对象。

我们注意到，上述定理在通常的（未扭曲）水平迹情形下不成立，并且一般而言，Cooper–Krushkal 彩色同调与 Khovanov 彩色同调并不同构。

为证明定理 A，我们通过引入一个为任意幺范畴 $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ 定义的切比雪夫系统，将所有三个模型的性质形式化如下：

- 一个自对偶对象 V 在 $\mathcal{C}$，
- 一个复形族 $V_{(n)} \in$ 链复形范畴$^-(\mathcal{C})$，其 $V_{(0)} = \mathbb{1}$ 和 $V_{(1)} = V$，
- 链映射 $\pi_{(n)}$: $V_{(n-1)} \otimes V \to V_{(n)}$ 对于 $n \geqslant 1$，

使得 $\pi_{(1)}$: $\mathbb{1} \otimes V \to V$ 是典范同构，并且存在一个区分三角

$$V^{(n-2)} \longrightarrow V^{(n-1)} \otimes V \xrightarrow{\pi^{(n)}} V^{(n)} \longrightarrow V^{(n-2)}[1] \tag{1.2}$$

在以 $\mathcal{C}$ (参见定义 4.6了解更多详情）为底的有界复形的同伦范畴中。我们证明，对于给定的 V，在 $\mathcal{C}$ 中的切比雪夫系统在同伦意义下唯一，并证明我们的三个模型中的每一个都在 链复形范畴$^-(\mathrm{Kar}(\mathcal{TL})^{\oplus})$中定义了一个切比雪夫系统，从而证明了该断言。

1.1. 广义投影子。 请注意，作为阿贝尔群，Hochschild 同调 $\mathrm{HH}_0(\mathrm{TL}_n)$由类 $[p_n]$自由生成。为了在此基底下表示一般的自同态 $x \in \mathrm{TL}_n$，我们使用一组完备的本原正交幂等元 $\{p_\varepsilon \in \mathrm{TL}\}_\varepsilon$，它们由某些长度为 n 的 ± 1序列标记。特别地，对于任意 $x \in \mathrm{TL}_n$，我们将其分解为

$$x = \sum_\varepsilon x p_\varepsilon \quad \text{or} \quad [x] = \left[\sum_\varepsilon p_\varepsilon x p_\varepsilon\right] \in \mathrm{HH}_0(\mathcal{TL}).$$

由于每个 p_ε 都是本原幂等元，$p_\varepsilon \mathrm{TL}_n p_\varepsilon$ 是一维的，因此对于某些标量 $\mathrm{Tr}_\varepsilon(x)$，有 $p_\varepsilon x p_\varepsilon = \mathrm{Tr}_\varepsilon(x)\, p_\varepsilon$】【。

$$[x] = \sum_\varepsilon \mathrm{Tr}_\varepsilon(x)[p_\varepsilon].$$

此外，$[p_\varepsilon]$ 仅取决于整数 $|\varepsilon|$（穿过的股的最大数目），并由 $\operatorname{im} p_\varepsilon \cong \operatorname{im} p_{|\varepsilon|}$ 刻画；等价地，也可由 $\mathrm{HH}_0(\mathrm{TL}_n)$ 中的 $[p_\varepsilon] = [p_{|\varepsilon|}]$ 刻画，其中$p_{|\varepsilon|}$ 是 Jones–Wenzl 投影算子。于是我们有

$$[x] = \sum_\varepsilon \mathrm{Tr}_\varepsilon(x)[p_{|\varepsilon|}].$$

我们猜想，这一结论的范畴化类比也成立。

猜想 B。 对于给定的 $X \in$ 链复形范畴$^-(\mathcal{BN}_n)$，存在复形 $\mathrm{hTr}_{q,\,\varepsilon}(X) \in$ 链复形范畴$^-(\Bbbk$–模)使得

$$[X] \simeq \bigoplus_\varepsilon \mathrm{hTr}_{q,\varepsilon}(X) \otimes_\Bbbk [P_{|\varepsilon|}].$$

其中，$[P_\varepsilon]$ 是量子水平迹中 P_ε 的类，而$\mathrm{hTr}_{q,\,\varepsilon}(X)$ 的特征是

$$[X \star P_\varepsilon] = \mathrm{hTr}_{q,\varepsilon}(X) \otimes [P_\varepsilon]$$

其中 P_ε 是由第二作者和 *B. Cooper* 构造的范畴化 *Temperley–Lieb* 代数幂等元 [CH15], 且 $\star$ 表示**BN**中 *1*-态射的复合。

本文不打算深入研究这一猜想，但我们将证明以下特殊情形。

定理 C. 对于每个满足 $|\varepsilon| = k$ 的 ε，我们有

$$[P_\varepsilon] \simeq [P_k] \in \mathrm{Ch}^-(\mathcal{TL}^\oplus).$$

该定理的证明以及我们对 P_ε 的构造，基于同调扰动理论和一种一般形式的梳理毛发引理；这一结果对同伦论研究者而言或许也具有独立的研究价值。

作为定理C 的一个应用，我们证明 Khovanov 弧代数的高阶量子 Hochschild 同调群 H^n 为零，且零次同调的秩由 n阶 Catalan 数给出。

本文发展的结果和工具是我们研究 Khovanov 同调在缆化运算下行为这一计划的一部分。下面陈述另外两个我们计划在后续工作中探讨的猜想。

1.2. **作为函子的着色结同调**。 给定一个纽结 K、一个复半单李代数 $\mathfrak{g}$以及 $U_q(\mathfrak{g})$的有限维表示 V，Reshetikhin–Turaev 构造会产生一个链环不变量 $P_\mathfrak{g}(K,\ V) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$。范畴化的 Reshetikhin–Turaev 不变量旨在将 Laurent 多项式 $P_\mathfrak{g}(K,\ V)$替换为一个向量空间复形 $C_\mathfrak{g}(K,\ V)$，其分次欧拉示性数为 $P_\mathfrak{g}(K,\ V)$。众所周知，在适当的情况下， $C_\mathfrak{g}(K,\ V)$关于 K 是函子的，这里的态射取为带框架的定向余边界。

同样自然会想到，这类着色结同调理论是否能够关于 V构成函子。也就是说，如果我们固定 K，那么应当期待赋值 $V \mapsto C_\mathfrak{g}(K,\ V)$提升为一个函子

$$\mathcal{R}ep(U_q(\mathfrak{g})) \to \mathrm{Ch}(\Bbbk\text{−mod}).$$

我们计划研究在情形 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$下是否存在这样的函子。在这种情形下，$\mathcal{R}ep(U_q(\mathfrak{g}))$ 等价于 Temperley–Lieb 范畴Kar$(\mathcal{TL})^\oplus$。

接下来，我们将证明以下命题。

猜想 D。 每个带框架定向纽结 K 都确定一个 *dg* 函子

$$C(K;-) : \mathrm{Ch}^-(\mathrm{Kar}(\mathcal{TL})^\oplus) \to \mathrm{Ch}^-(\Bbbk\text{−mod})$$

具有以下性质：

1) $C_1(K;-)$是与 K的 n-缆相关联的量子环带复形。*2)* $C(K;\ V_n)$ 是 *Khovanov* 彩色 $\mathfrak{sl}_2$-同调的量子环形版本。

1.3. **作为 Hochschild 同调的颜色空间**。 设 $K \subset S^3$ 是一个带框架定向纽结。将 K 表示为某个（1,1）缠结图表 D （配备黑板框架）的闭包，并考虑以下构造。假设给定 Temperley–Lieb 代数 $x \in \mathrm{TL}_n$ 中的一个元素。令 D^n 表示 D 的 n-缆线，并令$\langle D^n\rangle \in \mathrm{TL}_n$ 表示 Kauffman 括号。我们可以将 $\langle D^n\rangle x$ 相乘，然后取迹

$$P'(K, x) := \mathrm{Tr}(\langle D^n\rangle x) \in \Bbbk.$$

此对应与 (1,1)-缠结图表 D 的选取无关，并且（由同痕不变性和迹的性质）满足

$$P'(K,xy) = P'(K,yx).$$

事实上，当 $xy \in \mathrm{TL}_n$ 和 $yx \in \mathrm{TL}_m$ 对 $m \neq n$成立时，这个恒等式仍然成立。因此，我们可以将赋值 $x \mapsto P'(K,x)$ 视为一个线性映射

$$\mathrm{HH}_0(\mathcal{TL}) \to \Bbbk\,.$$

由于 TL_n 是半单的，其高阶 Hochschild 同调群均为零。将 Hochschild 同调替换为其完整的范畴化版本，即 [GHW22], 中定义的水平迹的微分分次版本，我们得到以下猜想。

猜想 E. 每个复形 $X \in$ 链复形范畴$^-(\mathcal{BN}_n)$ 都确定一个着色复形

$$C'(K,X) \in \mathrm{Ch}^-(\Bbbk\text{−mod}).$$

赋值 $X \mapsto C'(K,X)$ 关于 X是函子性的，也就是说，它可分解并经过微分分次量子水平迹 [GHW22]。此外，若 P_n 表示 *Cooper–Krushkal* 范畴化的 *Jones–Wenzl* 幂等元，则 $C'(K, P_n)$ 与来自猜想 D的 V_n-着色复形 $C(K, V_n)$ 同伦等价。

尤其是，我们预期，对于所有纽结，彩色量子环带同调的 Khovanov 模型与 Cooper–Krushkal 模型相同。本文的结果以及上一篇论文的结果 [Bel+19] 将在这些猜想的证明中发挥关键作用。

1.4. **结构安排**。 本文结构安排如下。第 2 节介绍范畴迹与影的必要背景，并介绍本文所用的主要范畴和双范畴。第 3 节讨论扭曲复形的同调扰动理论，并证明一个一般版本的梳理毛发引理，这是本文证明所需的结果。第 4 节定义三角范畴中的切比雪夫系统，并证明一个唯一性结果（定理 4.8）。作为切比雪夫系统的例子，我们考察定理 A 中的三个模型。在第四节中，我们证明定理 4.20，该定理断言 Cooper–Krushkal 模型确实是一个切比雪夫系统。为此，我们为 Cooper–Krushkal 投影算子建立一个新的 2-周期模型（定理 5.1）。下一节专门讨论范畴化幂等元 P_ε。我们先给出它们存在性的新证明，然后证明关于 C 的量子水平迹的定理 P_ε。最后，我们计算 Khovanov 弧代数的量子 Hochschild 同调。

1.5. **致谢**。 AB 和 KP 谨向瑞士国家科学基金会（SNF）的 NCCR SwissMAP 致谢。此外，AB 的部分研究经费来自 SNF 项目 200020 207374 和 200021 178767。SW 的部分研究经费来自 Simons 基金会的资助（#632059 Stephan Wehrli）。

2. 预备知识

在本节中，我们将回顾本文后续章节中将要使用的同调与范畴构造。我们还将给出以下事实的自包含证明：对于一般的 q，Temperley–Lieb 范畴等价于 Bar-Natan 双范畴的量子水平迹（定理 2.2）。我们将首先确定一些约定。

2.1. 约定。在本文中， $\Bbbk$ 将是一个交换含幺环， $q \in \Bbbk^{\times}$将是一个固定的可逆元素。我们假设对于所有整数$d \in$ （0， $2n]$ 以及 n 充分大时， $1-q^d$ 均可逆。

我们用 $\star$ 表示双范畴中 1-态射和 2-态射的水平复合。类似地，我们用 $\circ$ 表示 2-态射的垂直复合，以及范畴中态射的通常复合。此外，符号 $\otimes$ 和 $\sqcup$ 分别表示 Temperley–Lieb 范畴和 Bar-Natan 双范畴中的幺半群积。最后，上标 $\oplus$ 表示加性闭包。本文后续各节将省略此上标，因为范畴已按有限直和完备这一点被默认理解。

2.2. 复形。如果 $\mathcal{A}$ 是一个 $\Bbbk$-线性范畴，我们记 Ch($\mathcal{A}$) 为 $\mathcal{A}$ 上复形所成的范畴。该范畴的对象是复形（微分采用上同调约定）

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{k-1}} X^k \xrightarrow{\delta^k} X^{k+1} \xrightarrow{\delta^{k+1}} \cdots$$

其中每个 $X^k \in \mathcal{A}$。Ch($\mathcal{A}$) 中对象 X 与 Y 之间的态射空间是复形

$$\mathrm{Hom}^k_{\mathrm{Ch}(\mathcal{A})}(X,Y) = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^i, Y^{i+k})$$

配备微分

$$f \longmapsto \delta_Y \circ f - (-1)^{|f|} f \circ \delta_X \;=:\; [\delta, f]$$

其中对于 $f \in \mathrm{Hom}^k_{\mathrm{Ch}(\mathcal{A})}(X,Y)$， $|f| = k$是 f 的（上同调）次数。由此，范畴 Ch($\mathcal{A}$) 是一个微分分次范畴，即一个同态空间为$\Bbbk$-模复形，且态射的复合满足莱布尼茨法则相应形式的范畴：

$$[\delta, f\circ g] = [\delta, f]\circ g + (-1)^{|f|} f \circ [\delta, g].$$

我们用上标 $-, +, b$ 分别表示向右有界、向左有界以及同时向右和向左有界的复形。

范畴　　ry Ch($\mathcal{A}$) 是一个对称幺半范畴，其张量积在对象上的定义为

$$(X\otimes Y)^k = \bigoplus_{i+j=k} X^i \otimes Y^j, \quad \delta_{X\otimes Y} = \delta_X \otimes \mathrm{id}_Y + \mathrm{id}_X \otimes Y$$

而对态射 f, g，通过 $(f\otimes g)(x\otimes y) = (-1)^{|x||g|} f(x) \otimes g(y)$ 配以编织

$$c_{X,Y} : X\otimes Y \longrightarrow Y\otimes X \quad \text{given by} \quad c_{X,Y}(x\otimes y) = (-1)^{|x||y|} y\otimes x.$$

对于任意 ℓ，平移$\mathbb{t}^\ell$ 将复形 X 向右平移 ℓ 步，即

$$(\mathbb{t}^\ell X)^k = X^{k-\ell} \quad \text{and} \quad \delta_{\mathbb{t}^\ell X} = (-1)^\ell \delta_X.$$

如果态射 $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{Ch}(\mathcal{A})}(X,Y)$ 满足 $[\delta, f] = 0$，则称其为闭 态射；如果存在某个 $h \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{Ch}(\mathcal{A})}(X,Y)$ 使得 $f = [\delta, h]$，则称为零伦 态射。在后一种情况下， h 称为f的零伦。对于 $f, g \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{Ch}(\mathcal{A})}(X,Y)$，记作 $f \simeq g$，并称 f和 g同伦，如果 $f-g$是零伦的。

我们用 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ 的同伦 范畴。该范畴的对象与 $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ 相同，其态射是 $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ 中次数为零的闭态射的同伦类，即

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X,Y) := \frac{\{f \in \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{Ch}(\mathcal{A})}(X,Y) \,|\, [\delta, f] = 0\}}{\delta\left(\mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{A})}(X,Y)\right)}.$$

同构 $f\colon X \xrightarrow{\sim} Y$ in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 称为同伦等价，此时记作 $X \simeq Y$。如果 $X \simeq 0$，我们称 X 是可缩的。

如果 $f \in \mathrm{Hom}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{A})}(X, Y)$ 是一个 1 次闭态射，则 f 的锥 是对象 $\mathsf{Cone}(f) := X \oplus Y$ in 链复形范畴$(\mathcal{A})$，并配备微分 $\begin{bmatrix} \delta_X & 0 \\ f & \delta_Y \end{bmatrix}$。若 $f\colon X \xrightarrow{\sim} Y$ 是一个 0 次闭态射，则我们将 f 替换为 1 次闭态射 $\mathbb{t}^{-1}X \xrightarrow{\sim} Y$，然后应用前述构造。

锥的构造可以将关于态射的陈述转化为关于对象的陈述。例如，闭映射 $f\colon X \xrightarrow{\sim} Y$ 是同伦等价，当且仅当 $\mathsf{Cone}(f) \simeq 0$。

2.3. 范畴与双范畴上的分次。 若一个$\Bbbk$-线性范畴的态射集带有$\mathbb{Z}$-分次，且分次在复合下可加，则称其为预分次 范畴。若预分次范畴还带有一个“分次移位”自同构$\mathbb{q}$，以及一个从恒等函子到$\mathbb{q}$的自然 1 次同构 $\mathfrak{s}\colon \mathbb{1} \to \mathbb{q}$，则称其为分次 范畴。

若一个双范畴的 2-态射集具有$\Bbbk$-线性 结构，且两种复合均为双线性的，则称其为$\Bbbk$-线性双范畴。若其态射范畴是预分次的，且分次在水平复合（以及垂直复合）下可加，则称该双范畴为预分次 双范畴。在非严格情形下，还要求结合子和单位子均为 0 次。

最后，若预分次双范畴的态射范畴是分次的，且分次移位函子与自然 1 次同构 $\mathfrak{s}\colon \mathbb{1} \to \mathbb{q}$ 在水平复合下具有良好的相容性，则称其为分次 双范畴。具体而言，对于可复合的 1-态射 f 和 g，有 $(\mathbb{q}f) \star g = \mathbb{q}(f \star g) = f \star (\mathbb{q}g)$，相应地还有 $\mathfrak{s} \star \mathbb{1} = \mathfrak{s} = \mathbb{1} \star \mathfrak{s}$。

请注意，虽然分次双范畴中的分次移位函子会将一个 1-态射 f 变为“移位后的”1-态射 $\mathbb{q}f$，但它们不会改变 2-态射的次数。事实上，$|\mathbb{q}\alpha| = |\mathfrak{s} \circ \alpha \circ \mathfrak{s}^{-1}| = |\alpha|$，其中我们用 $|\alpha| \in \mathbb{Z}$ 表示 2-态射 α 的次数。一般而言，分次双范畴中的任意齐次2-态射 $\alpha\colon f \Rightarrow g$ 都对应于一个次数为 $|\alpha| + m - n$ 的齐次2-态射 $\mathfrak{s}^m \circ \alpha \circ \mathfrak{s}^{-n}\colon \mathbb{q}^n f \mathbb{q}^m g$，其中 $m, n \in \mathbb{Z}$。特别地，恒等2-态射 $\mathbb{1}\colon f \to f$ 对应于 $\mathfrak{s}_f\colon f \to \mathbb{q}f$。

给定一个尚未分次、仅为预分次的双范畴，我们可以将其扩展为一个具有相同对象的分次双范畴。这个分次双范畴中的 1-态射由形如 $\mathbb{q}^n f := (f, n)$ 的对给出，其中 f 是原双范畴中的一个 1-态射，而 n 是一个整数，可视为形式分次移位。如果 $\mathbb{q}^n f = (f, n)$ 和$\mathbb{q}^m g = (g, m)$ 是两个这样的对，那么 2-态射 $\mathbb{q}^n f \, \mathbb{q}^m g$ 由原双范畴中的 2-态射 $f \Rightarrow g$ 的副本给出，但其次数提高了 $n - n$。

类似地，一个仅为预分次而尚未分次的范畴，可以扩展为一个分次范畴，其对象形式为 $\mathbb{q}^n x := (x, n)$】【。

如果$\mathbf{C}$ 是一个预分次（可能是分次的）双范畴，那么我们将$\mathbf{C}_0$ 记为这样的双范畴：它包含相同的对象和 1-态射，但只包含$\mathbf{C}$ 中具有

0次。同样，对于一个预分次（可能是分次）范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathcal{C}_0$ 表示其子范畴，该子范畴具有相同的对象，但仅包含次数为 0 的态射。

注意，如果$\mathbf{C}$ 是分次的，那么$\mathbf{C}$ 中的每个 2-态射都可以通过对$\mathbf{C}_0$ 中的某个 2-态射进行前复合和后复合，并使用适当次幂的 $\mathfrak{s}$来得到。类似的说明也适用于分次范畴 $\mathcal{C}$ 及其子范畴 $\mathcal{C}_0$。

2.4. **Temperley–Lieb 范畴**。 与之前一样，设$\Bbbk$ 为交换环， $q \in \Bbbk^\times$ 为一个固定的可逆元素。*Temperley–Lieb* 范畴 是$\Bbbk$-线性范畴 $\mathcal{TL}$ ，其对象为非负整数，态射集由平坦缠结的同痕类生成，并满足以下关系。

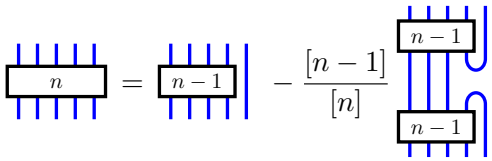
$$T \cup \bigcirc = (q + q^{-1})T$$

对于任意一个圆形分支 $\bigcirc$。这里所说的平坦缠结，是指一个无向紧致 1-流形 $T \subset I^2$ ，其在 $I \times \{0\}$ 上有 n 个底端点，在 $I \times \{1\}$ 上有 m 个顶端点，其中 $n,\ m \geq 0$。

$\mathcal{TL}$ 中的复合 $T \circ T'$ 由缠结的垂直堆叠给出，因此 T 表示将缠结 T' 置于缠结 $\mathcal{TL}$之上并进行垂直缩放的结果。缠结还可以进行水平复合，即将缠结并排放置，这在 $\mathcal{TL}$上诱导出幺半结构。出于技术原因，我们有时会假设 [中的对象带有形式分次移位，其定义见 BN05, 第 6] 节。

自同态代数 $\mathrm{TL}_n := \mathcal{TL}(n, n)$ 称为 *Temperley–Lieb* 代数。如果量子整数 $[k] := q^{k-1} + q^{k-3} + \ldots + q^{1-k}$ 对于 $1 < k \leq n$ 可逆，那么 TL_n 包含一个称为 *Jones–Wenzl* 幂等元 的特殊幂等元 p_n 。幂等元p_n 可递归定义为 $p_0 := \mathrm{id}_0$, $p_1 := \mathrm{id}_1$, and

(2.1)



对于 $n > 1$，其中每个方框表示一个 Jones–Wenzl 幂等元。

2.5. **Khovanov 同调与 Bar-Natan 的双范畴**。 给定一个有向链环图，我们可以通过应用 Kauffman 括号 skein 关系来解析其中的每个交叉

$$\times = q^{(3\epsilon-1)/2}\big)\big(\ -\ q\asymp\big)$$

其中 $\epsilon \in \{\pm 1\}$ 是交叉的符号。将所得各项中的圆替换为 $q + q^{-1}$ 的因子，我们得到该链环的 *Jones* 多项式。同样的算法将一个缠结与 $\mathcal{TL}$ 中的一个态射对应起来。

在 [Kho00] Khovanov 通过在各个分辨之间添加以鞍点协边形式表示的态射，对这一构造进行了范畴化。将交叉分辨排列为超立方体的顶点，并将鞍点协边作为其边，Khovanov 为一个链环图表赋予了一个二维协边范畴中的交换图表。通过应用与 Frobenius 代数 $\Bbbk[x]/x^2$相对应的 TQFT 函子，他随后定义了一个链复形，其同调是一个链环不变量，称为 *Khovanov* 同调。Jones 多项式可以由 Khovanov 同调的分次欧拉示性数恢复。这一构造可推广至曲面中的缠结 [APS04] ，并且相对于缠结协边具有（射影）函子性。

Bar-Natan 指出，Khovanov 构造的大部分内容都可以在复形 $[\![T]\!]$ 这一层面上形式地进行，该复形称为 形式 *Khovanov* 括号，对应于 $T \subset F$ [BN05]。这里， F 可以是任意带边界的光滑定向曲面，并假设 $\partial T = B$对于一个集合 $B \subset \partial F$成立。复形 $[\![T]\!]$ 构造于 *Bar-Natan* 范畴 $\mathcal{BN}(F,\ B)$ 的加性闭包中；这是一个分次的 $\Bbbk$-线性范畴，其对象是 F中边界为 B 的平坦缠结，并带有分次移位；其态射集由 $F \times I$ 中的紧曲面生成，这些曲面饰有点。此类曲面的边界必须具有形式 $\partial S = (T \times \{0\}) \cup (B \times I) \cup (T' \times \{1\})$，并且视为在同痕及以下局部关系下等价：

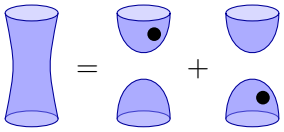
- 球面求值：

(2.2)



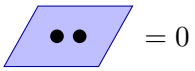
- 颈切关系：

(2.3)



- 点化简：

(2.4)



我们将余边界 $S \subset F \times I$ 的（未平移）次数定义为

$$|S| := -\chi(S) + \frac{\#\{corners\ in\ S\}}{2} + 2\#\{dots\ on\ S\}$$

注意，这些关系保持次数不变，而且颈切关系将附着在平面上的把手求值为乘以 2 的点。因此，即使 2 不是可逆标量，人们也常把点看作把手的“二分之一”。

我们将环带的 Bar-Natan 范畴记为 $\mathcal{BN}(\mathbb{A}) := \mathcal{BN}(\mathbb{A},\ \emptyset)$。此外，我们将分次双范畴记为 $\mathbf{BN}$ ，其对象对应于非负整数，其态射范畴由 Bar-Natan 范畴 $\mathcal{BN}(I^2,\ B_{n,\ m})$ 给出，其中 $B_{n,\ m} \subset \partial I^2$ 由正方形 I^2 底边上的 n 个点和顶边上的 m 个点组成。注意，$\mathbf{BN}$ 中的水平复合由缠结的复合诱导，而$\mathbf{BN}$ 具有幺半结构，对应于平坦缠结范畴上的幺半结构。

形式 Khovanov 括号具有射影函子性 [BN05]。事实上，可以为每个 Reidemeister 变换以及任何包含唯一临界点的余边界关联一个链映射。将余边界分解为上述初等片段组成的序列，并复合相应的映射，即可为任意光滑缠结余边界构造链映射；选择不同的分解，至多会使映射在其同伦类内改变，或改变映射的整体符号。可以利用在 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_2)$泡沫与 $\mathbf{BN}$ 之间构造的显式等价来固定这一整体符号，见[Bel+19]。因此，存在一个良定义的双函子

$$[\![-]\!] \colon \mathbf{Tan} \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbf{BN}^{\oplus}),$$

其中，**Tan** 表示这样一个双范畴：其 1-态射是 I^2 中的定向缠结图（可以带交叉），其 2-态射是 $\mathbb{R}^4$ 中的光滑缠结协边，模同痕等价。

2.6. **量子水平迹**。有一种函子性构造，称为扭曲水-平迹，它将 $F \times I$ 中的适当缠结映射为纤维为 F、单值化为 $\sigma \in$ 微分同胚群 (F)的圆周上的曲面丛中的链环。这种构造更一般地适用于任何配备了自函子$\mathbf{C}$ $\Sigma\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$的双范畴 $\mathbf{C}$。我们来回顾一下 [BPW19]中的定义。

定义 2.1. Σ-扭曲水平迹 是$\mathbf{C}$ 的范畴 $\mathbf{hTr}(\mathbf{C}\ \Sigma)$，其对象是$\mathbf{C}$ 中的 1-态射 $f\colon \Sigma x \to x$，而从 $f \in \mathbf{C}(\Sigma x, x)$ 到 $g \in \mathbf{C}(\Sigma y, y)$ 的态射是下列方形的等价类 $[p, \alpha]$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma x & \xrightarrow{f} & x \\ {\scriptstyle \Sigma p}\downarrow & \swarrow_{\alpha} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Sigma y & \xrightarrow[g]{} & y \end{array}$$

其中 $\alpha\colon p \star f \Rightarrow g \star \Sigma p$ 是$\mathbf{C}$中的 2-态射，模去以下关系

(2.5)
$$\begin{array}{ccc} \Sigma x & \xrightarrow{f} & x \\ {\scriptstyle \Sigma p}\big(\Leftarrow{\scriptstyle \Sigma\tau}\big){\scriptstyle \Sigma p'} & \swarrow_{\alpha} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Sigma y & \xrightarrow[g]{} & y \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{ccc} \Sigma x & \xrightarrow{f} & x \\ {\scriptstyle \Sigma p'}\downarrow & \swarrow_{\alpha} & {\scriptstyle p}\big(\Leftarrow{\scriptstyle \tau}\big){\scriptstyle p'} \\ \Sigma y & \xrightarrow[g]{} & y \end{array}$$

对于 1-态射 $p,\ p'\colon\ x \to y$，以及 2-态射 $\alpha\colon\ p \star f \Rightarrow g \star \Sigma p'$和 $\tau\colon\ p' \Rightarrow p$。这里 $[\mathbb{1}_x, \mathbb{1}_f]$ 是 f上的恒等态射，而复合

(2.6)
$$[q, \beta] \circ [p, \alpha] := [q \star p, (\beta \star \mathbb{1}_{\Sigma p}) \circ (\mathbb{1}_q \star \alpha)]$$

可以通过将正方形一个叠在另一个上面来直观表示：

(2.7)
$$\begin{array}{ccc} \Sigma y & \xrightarrow{g} & y \\ {\scriptstyle \Sigma q}\downarrow & \swarrow_{\beta} & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \Sigma z & \xrightarrow[h]{} & z \end{array} \circ \begin{array}{ccc} \Sigma x & \xrightarrow{f} & x \\ {\scriptstyle \Sigma p}\downarrow & \swarrow_{\alpha} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Sigma y & \xrightarrow[g]{} & y \end{array} := \begin{array}{ccc} \Sigma x & \xrightarrow{f} & x \\ {\scriptstyle \Sigma p}\downarrow & \swarrow_{\alpha} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Sigma y & \xrightarrow[g]{} & y \\ {\scriptstyle \Sigma q}\downarrow & \swarrow_{\beta} & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \Sigma z & \xrightarrow[h]{} & z \end{array}$$

幺正性和结合律可由（2.5）以及结合子和单位子的适当复合得到，如下所示 τ。

当 $\mathbf{C}$ 是 $\Bbbk$-线性的，并且 $\Sigma\colon\ \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ 由态射集上的线性映射给出时，我们修改扭曲水平迹的定义，允许将正方形的形式 $\Bbbk$-线性组合视为态射。这类线性组合需对关系（2.5）以及关系 $[p, a\alpha + \beta] = a[p, \alpha] + [p, \beta]$（其中 $a \in \Bbbk$）取商。该定义确保 $\mathbf{hTr}$（$\mathbf{C}$ Σ）本身是一个 $\Bbbk$-线性范畴。

如果 $\Sigma = \mathbb{1}$，我们便从 [Bel+17] 中恢复水平迹，在这种情况下我们将省略 Σ记号。例如，

$$\mathrm{hTr}(\mathbf{BN}) \simeq \mathcal{BN}(\mathbb{A}),$$

其中，该等价将一个平坦缠结 $T \subset I^2$ 映射为其环带闭包 $\widehat{T} \subset \mathbb{A}$。

若**C** 是预分次的，我们可以定义量子自函子，它在对象和1-态射上作用为恒等映射，并且对任意齐次2-态射α 以及固定的可逆元素 $q \in \Bbbk^\times$，满足 $\Sigma\alpha = q^{-|\alpha|}\alpha$。由此自函子扭曲的水平迹称为量子水平迹，记作 $\mathrm{hTr}_q(\mathbf{C})$。

我们将**BN** 的量子水平迹记作

$$\mathcal{BN}_q(\mathbb{A}) := \mathrm{hTr}_q(\mathbf{BN})$$

并称之为量子环带 *Bar-Natan* 范畴。该范畴有如下图示描述。取一条径向弧 $\mu \subset \mathbb{A}$，连接 $\partial\mathbb{A}$的两个分量，并令$M \subset \mathbb{A} \times I$ 为膜 $M := \mu \times I$。范畴 $\mathcal{BN}_q(\mathbb{A})$ 的定义方式与 $\mathcal{BN}(\mathbb{A})$相同，但要求对象与 μ 横截，并要求其中的余边界与 $\mathbb{A} \times I$横截。若环境同痕逐点固定膜，则同痕的余边界视为相同。否则，我们按图1所示对目标余边界进行缩放，其中膜的余定向由环带核心的定向诱导。

存在一个自然函子

$$S^1 \times (-) : \mathcal{TL} \longrightarrow \mathcal{BN}_q(\mathbb{A})$$

它将对象 n 映射为 $\mathbb{A}$ 中的一组本质圆，并将帽或杯映射为相邻圆之间的一条带。更一般地，该函子将平坦缠结 T 映射为曲面$S^1 \times T \subset \mathbb{A} \times I$，该曲面对应于量子水平迹中的态射 $[T, \mathbb{1}_T]$。

以下结果最初发表于 [BPW19]。

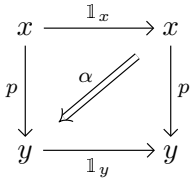
定理 2.2. 假设对于所有 $d \neq 0$， $1 - q^d$ 均可逆。那么函子 $S^1 \times (-)$ 诱导出一个范畴等价

$$\mathcal{TL}^{\oplus} \simeq \mathrm{hTr}_q(\mathbf{BN})^{\oplus} \cong \mathcal{BN}_q(\mathbb{A})^{\oplus},$$

其中，假定所涉及范畴中的对象都带有形式分次移位 *s*.

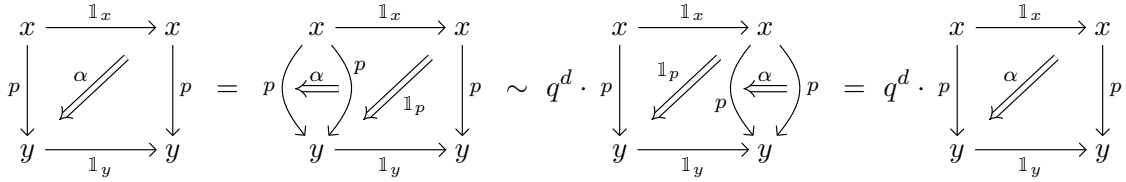
该命题的证明将在第 2.9 小节给出。注意，关于 q的假设意味着，在 $\mathcal{BN}_q(\mathbb{A})$中，余边界 $S \subset \mathbb{A} \times I$ 的本质分支上的点等于零。事实上，将这样的点穿过膜移动，我们看到 $(1 - q^2)$ 乘以该点必须等于零。这是以下结果的一个特例，其中 $\alpha\colon \quad p \quad \succ p$ 是预分次（也可能是分次）双范畴中的一个 2-自同态**C**：

引理 2.3。 假设 $1 - q^d$ 在 $\Bbbk$ 中可逆。若 $|\alpha| = d$，则该方形



在$\mathrm{hTr}_q(\mathbf{C})$中为零。

证明。我们有



这意味着引理中的方形被 $1-q^d$ 消去。结论成立，因为 $1-q^d$ 在 $\mathbb{k}$ 中可逆。

在分次情形下，引理可以推广，其中 $\mathbb{1}_x$ 和 $\mathbb{1}_y$ 被移位副本 $\mathbb{q}^n\mathbb{1}_x$ 和 $\mathbb{q}^m\mathbb{1}_y$ 取代。若要使引理仍然成立，d 必须是将 α 视为连接未移位 1-态射 $p\star\mathbb{1}_x=p$ 和 $\mathbb{1}_y\star p=p$ 的 2-态射时的次数。为说明这一点，考虑一个 2-态射 $\alpha\colon p\star(\mathbb{q}^n\mathbb{1}_x)\,(\mathbb{q}^m\mathbb{1}_y)\star p$，并将引理的原始版本应用于 2-态射 $\mathfrak{s}^{-m}\circ\alpha\circ\mathfrak{s}^n\colon p\star\mathbb{1}_x\Rightarrow\mathbb{1}_y\star p$。

在本节 2.9中，我们将用垂直量子迹的语言重新阐释该引理 .

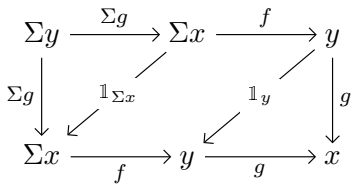
注 2.4. 与引理证明中所用的论证类似可知，若交换环 $\Bbbk$ 带有非平凡分次，且 $a\in\Bbbk$ 的次数为 $|a|=d$，则 $(1-q^d)a$ 会湮灭量子水平迹中的所有态射。

2.7. **循环同构**。对于具有左右对偶的双范畴，扭曲水平迹可视为一个泛扭曲影子(参见 [BPW19])。特别地，这意味着 $\mathrm{hTr}(\mathbf{C}\ \Sigma)$ 还带有以下额外结构：对每个对象 $x\in\mathbf{C}$，都有一个函子 $[-]_x\colon\mathbf{C}(\Sigma x,x)\to\mathrm{hTr}(\mathbf{C}\ \Sigma)$ 定义如下

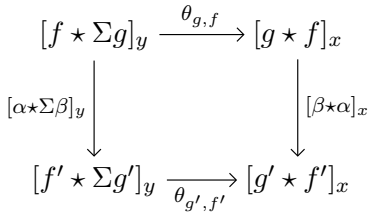
$$[f]_x:=f,\qquad [\alpha]_x:=[\mathbb{1}_x,\alpha].$$

同样，对于 $\mathbf{C}$ 中的每对 1-态射 $\Sigma x\xrightarrow{f}y\xrightarrow{g}x$，都有一个循环态射$\theta_{g,f}\colon[f\star\Sigma g]_y\to[g\star f]_x$，它由恒等2-态射（在非严格情形下则由结合子）给出：

$$\theta_{g,f}:=$$



当$\mathbf{C}$ 具有适当的对偶（本文所讨论的双范畴都满足这一条件）时，态射 $\theta_{g,f}$ 实际上是一个同构。此外，$\theta_{g,f}$ 是自然的，即以下图表交换



对于 2-态射 $\alpha\colon f\Rightarrow f'$和 $\beta\colon g\Rightarrow g'$。

当 Σ 是预分次双范畴 $\mathbf{C}$ 的量子自函子时，我们省略指代对象 x 的下标$[f]_x$，并改为对 $[f]_x \in \mathrm{hTr}_q(\mathbf{C}) = \mathrm{hTr}_q(\mathbf{C}\ \Sigma)$ 写作 $[f]$。在此情况下，θ 的自然性可表述为

$$\begin{array}{ccc} [f \star g] & \xrightarrow{\theta_{g,f}} & [g \star f] \\ {\scriptstyle [\alpha\star\beta]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q^{|\beta|}[\beta\star\alpha]} \\ [f' \star g'] & \xrightarrow[\theta_{g',f'}]{} & [g' \star f'] \end{array}$$

在链复形范畴 $\mathbf{C}$ 的 hTr_q 中，对于任意2-态射 $\alpha\colon f \Longrightarrow f'$ 和任意齐次2-态射 $\beta\colon g \to g'$，该图表是交换的。更一般地，我们有一个类似的交换图表，其中 $[\alpha \star \beta]$ 被 $[\alpha_1 \star \beta_1] + \ldots + [\alpha_n \star \beta_n]$ 替换，而 $q^{|\beta|}[\beta \star \alpha]$ 被替换为

$$q^{|\beta_1|}[\beta_1 \star \alpha_1] + \ldots + q^{|\beta_n|}[\beta_n \star \alpha_n]$$

f或任意2-态射 $\alpha_i\colon f \to f'$ 以及齐次2-态射 $\beta_i\colon g \to g'$。

循环态射 $\theta_{g,\ f}$ 不仅取决于 1-态射 $g \star f$，还取决于将此 1-态射分解为 f 和 g。在分次情形下，这一点很重要，因为形如 $\mathbb{q}^d(f \star g)$ 的 1-态射可以分解为 $(\mathbb{q}^{d-n} f) \star (\mathbb{q}^n g)$，其中 $n \in \mathbb{Z}$为任意整数。量子水平迹中相应的循环态射取决于所选的 n，但利用下一小节中的关系式（2.9），可以看出

$$\theta_{\mathbb{q}^n g, \mathbb{q}^{d-n} f} = q^{n-m} \theta_{\mathbb{q}^m g, \mathbb{q}^{d-m} f} \tag{2.8}$$

对于所有 $m,\ n \in \mathbb{Z}$。因此，改变所选的 n 只会使循环态射整体缩放一个 q 的幂次。

我们通过指出该函子来结束本小节。

$$[-]\colon \mathbf{C}(x,x) \longrightarrow \mathrm{hTr}_q(\mathbf{C})$$

是线性的，因此会诱导一个函子

$$[-]\colon \mathrm{Ch}(\mathbf{C}(x,x)) \longrightarrow \mathrm{Ch}(\mathrm{hTr}_q(\mathbf{C}))$$

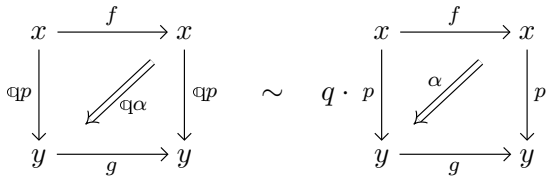
介于相应的链复形范畴及其关联的同伦范畴之间。将此函子应用于一个 (n,n) 切结图的形式巴尔-纳坦括号，我们得到量子环带 Bar-Natan 范畴中的一个链复形。对于一般的 q，此复形可视为 $\mathcal{TL}^{\oplus} \subset \mathcal{R}ep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2))$ 中的一个复形；或者，在遗忘量子群作用后，视为一个 $\Bbbk$-模复形。因此，它推广了 [APS]中定义的环状霍瓦诺夫复形 。

2.8. C 的量子水平迹$\mathbf{C}_0$。在本文中，我们通常使用完整的 Bar-Natan 双范畴 $\mathbf{BN}$。然而，我们的大多数结果也可以用双范畴 $\mathbf{BN}_0 \subset \mathbf{BN}$ 来表述。在该双范畴中，1-态射仍然具有形式分次移位，但要求 2-态射的次数为 0（在考虑这些形式分次移位之后）。为了使我们的结果对 $\mathbf{BN}_0$, 仍然成立，我们必须对量子水平迹的定义作一处细微修改。

因此，设$\mathbf{C}$ 是一个分次双范畴，并设$\mathbf{C}_0 \subset \mathbf{C}$ 是一个双范畴，它具有相同的对象和 1-态射，但只有 0 次的 2-态射。在$\mathbf{C}$ 的量子水平迹中

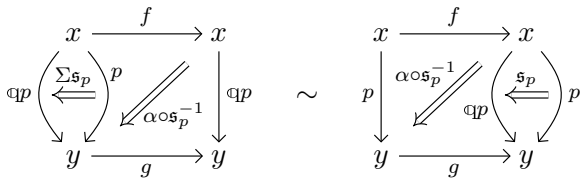
的 $\mathbf{C}$，该关系

(2.9)



这是成立的，因为

(2.10)



其中 Σ 表示量子自函子，而 $\mathfrak{s}$ 是恒等函子与分次移位函子$\mathfrak{q}$之间的自然次数 1 同构。

然而，关系（2.9）在 $\mathrm{hTr}_q(\mathbf{C}_0)$ 中先验地不再成立，因为（ $\mathfrak{s}_p$2.10）中的2-态射具有非零次数。

由于（2.9）对我们的研究目的十分重要，因此我们重新定义hTr_q（$\mathbf{C}_0$），方法是施加（2.9）作为一条额外关系，并要求它与通常的水平迹关系同时成立。由此容易看出，

$$\mathrm{hTr}_q(\mathbf{C}_0) \cong \mathrm{hTr}_q(\mathbf{C})_0 \tag{2.11}$$

其中，$\mathbf{hTr}_q(\mathbf{C})_0$ 表示 $\mathbf{hTr}_q(\mathbf{C})$ 的子范畴，其中仅包含次数为 0 的态射；而 $\mathbf{hTr}_q(\mathbf{C})$ 中态射的次数定义为 $|[p,\alpha]| := |\alpha|$。

额外关系（2.9）（或由此得到的同构（2.11））也确保方程（2.8）在hTr_q（$\mathbf{C}_0$）中仍然成立。（2.11）的另一个推论是，自然性条件

$$q^{|\beta|}[\beta \star \alpha] = \theta_{g',f'} \circ [\alpha \star \beta] \circ \theta_{g,f}^{-1}$$

只要 $|\alpha\star\beta| = 0$，在 $\mathbf{hTr}_q(\mathbf{C}_0)$ 中仍然成立。也可以直接如下看出：设$\sim\alpha$的次数为 $|\alpha| =: n$（因此 $|\beta| = -n$），并设 $\widetilde{\alpha}$：$f\mathfrak{q}^{-n}f'$ 和 β：$g\mathfrak{q}^n g'$ 是 2-$\widetilde{} \Longrightarrow \widetilde{} \Longrightarrow \widetilde{}$态射 $\widetilde{\alpha} := \mathfrak{s}^{-n} \circ \alpha$ 和 $\beta := \mathfrak{s}^n \circ \beta$，因此 $\widetilde{\alpha} \star \beta = \alpha \star \beta$ 和 $\beta \star \widetilde{\alpha} = \beta \star \alpha$。由于 $\widetilde{\alpha}$ 和$\sim\beta$ 的次数为 0，我们便有

$$[\widetilde{\beta} \star \widetilde{\alpha}] = \theta_{\mathfrak{q}^n g',\mathfrak{q}^{-n} f'} \circ [\widetilde{\alpha} \star \widetilde{\beta}] \circ \theta_{g,f}^{-1}$$

in $\mathrm{hTr}_q(\mathbf{C}_0)$，并且由于（2.8）在$\mathrm{hTr}_q(\mathbf{C}_0)$中仍然成立，因此这就得出了所需结果 .

回到整个双范畴 $\mathbf{C}$ 的量子水平迹，我们注意到，根据前面提到的定义 $|[p,\alpha]| := |\alpha|$，$\mathbf{hTr}_q(\mathbf{C})$ 是预分次的。我们可以通过设定，将 $\mathbf{hTr}_q(\mathbf{C})$ 变成一个分次范畴

$$\mathfrak{q}[f] := [\mathfrak{q}f], \qquad \mathfrak{q}[p,\alpha] := [p,\mathfrak{q}\alpha], \qquad \mathfrak{s}_{[f]} := [\mathbb{1},\mathfrak{s}_f]. \tag{2.12}$$

注意，自同构 $\mathfrak{q}$: $\mathbf{hTr}_q(\mathbf{C}) \to \mathbf{hTr}_q(\mathbf{C})$ 将子范畴 $\mathbf{hTr}_q(\mathbf{C})_0 \subset \mathbf{hTr}_q(\mathbf{C})$ 映射到其自身，并且 $\mathbf{hTr}_q(\mathbf{C})$ 中的每个态射都可以通过对 $\mathbf{hTr}_q(\mathbf{C})_0$ 中的某个态射进行前复合和后复合，并使用 $\mathfrak{s}$的适当幂次而得到。

2.9. **与量子垂直迹的联系。** 设 $\mathbf{C}$ 为一个预分次双范畴，且$q \in \Bbbk^\times$ 为一个固定的可逆元素。量子垂直迹 的 $\mathbf{C}$ 是将 $\mathbf{C}$ 中的每个态射范畴 $\mathbf{C}(x,y)$ 替换为其量子迹 $\mathrm{Tr}_q(\mathbf{C}(x,y))$(参见 [BPW19])。等价地：

定义 2.5. $\mathbf{C}$ 的量子垂直迹是一个$\Bbbk$-线性范畴 $\mathbf{vTr}_q(\mathbf{C})$，其对象与$\mathbf{C}$相同，态射由$\mathbf{C}$中的 2-自同态的形式$\Bbbk$-线性组合给出，并满足以下关于 2-态射 $\alpha\colon\ p \Rightarrow p'$和$\beta\colon\ p' \Rightarrow p$的关系：$\alpha \circ \beta \underset{=}{\sim} q^{|\alpha|}\beta\circ\alpha$。$\mathbf{vTr}_q(\mathbf{C})$中的复合由$\mathbf{C}$中的水平复合诱导。

若$\mathbf{C}$ 是分次的，则我们修改 $\mathbf{vTr}_q(\mathbf{C}_0)$ 的定义，额外加入关系$\Bbbk\alpha \sim q\alpha$，其中 α 遍历$\mathbf{C}_0$ 中的所有 2-自同态。这样做是为了确保

$$\mathrm{vTr}_q(\mathbf{C}_0) \cong \mathrm{vTr}_q(\mathbf{C})_0. \tag{2.13}$$

一般而言，量子垂直迹允许一个全忠实嵌入$\mathrm{vTr}_q(\mathbf{C}) \to \mathrm{hTr}_q(\mathbf{C})$，它将每个对象 x 映到其恒等1-态射 $\mathbb{1}_x$，并将每个 $\alpha\colon\ p \Rightarrow p$ 映到引理 2.3中的方块。利用该嵌入可以重新证明引理 2.3的结果。事实上，在 $\mathrm{vTr}_q(\mathbf{C})$中，我们有

$$\alpha \sim \alpha \circ \mathbb{1} \sim q^d(\mathbb{1}\circ\alpha) \sim q^d\alpha$$

对于任意次数为 $|\alpha| = d$ 的齐次2-自同态 α，因此 α 被$1-q^d$ 消去。当 $1-q^d$ 可逆时，这就推出了该引理。此外，如果对于所有 $d \neq 0$，$1-q^d$ 都可逆，那么可以得到的是

$$\mathrm{vTr}_q(\mathbf{C}) = \mathrm{vTr}_q(\mathbf{C})_0 \tag{2.14}$$

因为在这种情况下，不存在非零次数的非零态射。特别是，量子垂直迹通常仅为预分次的，且所有态射都支撑在 0 次。

我们现在可以证明定理 2.2。

定理证明2.2。 忽略分次移位后，$\mathcal{BN}_q(\mathbb{A})$ 中的每个对象都可以视为一个嵌入在环带 C 中的闭1-流形 $\mathbb{A}$。通过对 C施加环境同伦，我们可以将 C 中的平凡分支移离弧 $\mu \subset \mathbb{A}$，并将本质分支拉直，使其成为同心圆。由此得到的1-流形 $C' \subset \mathbb{A}$ 是一个恒等缠结的闭包，并带有若干平凡圆。此外，从 C 到 C' 的同痕可以实现为$\mathrm{hTr}_q(\mathbf{BN})$ 中的循环性同构与 I^2中的同痕的复合。

在 $\mathbf{hTr}_q(\mathbf{BN})^\oplus$ 中，我们还有一个“去环同构” $\bigcirc \cong \Bbbk\emptyset \oplus \Bbbk^{-1}\emptyset$，由矩阵 $\begin{bmatrix} S_\bullet & S \end{bmatrix}^t$ 给出，其中 S 是一个帽状配边，而 $S_\bullet$ 表示带有一个点的 S。将此同构应用于 C'中的每个平凡圆，我们可以将 C' 化简为恒等缠结闭包的移位副本的直和。

由此可知，$\mathbf{hTr}_q(\mathbf{BN})^\oplus$ 可由 $\mathbf{vTr}_q(\mathbf{BN}) \to \mathbf{hTr}_q(\mathbf{BN})$ 的像通过允许分次移位和直和得到。由于 $1-q^d$ 对所有 $d \neq 0$ 都可逆，根据（2.14）和（2.13），我们还有 $\mathbf{vTr}_q(\mathbf{BN}) = \mathbf{vTr}_q(\mathbf{BN})_0 \cong \mathbf{vTr}_q(\mathbf{BN}_0)$，其中后一个同构用到了我们在定义 $\mathbf{vTr}_q(\mathbf{BN}_0)$ 时施加的附加关系$\Bbbk\alpha \sim q\alpha$。

剩下需要证明的是 $\mathrm{vTr}_q(\mathbf{BN}_0) \simeq \mathcal{TL}$。Bar-Natan 在 [BN05的命题 10 中基本上已经证明了这一点。10], 不过，我们将用一种稍有不同的论证来证明该结果。为此，设

$$\varphi\colon \mathcal{TL} \longrightarrow \mathrm{vTr}_q(\mathbf{BN}_0)$$

表示将 $\mathcal{TL}$ 中的每个对象映射到 $\mathbf{BN}_0$，中对应对象，并将每个平坦缠结 T 映射到其恒等 2-自同态 $\mathrm{invTr}_q(\mathbf{BN}_0)$ 的函子。

为了证明 φ 与缠结的同痕以及关系 $\bigcirc = q + q^{-1}$相容，回顾 [BPW19] 指出，指派 $T \mapsto \mathbb{1}_T$ 诱导出一个良定义映射，从 $\mathbf{BN}_0(\overline{n,m})^{\oplus}$ 的分裂格罗滕迪克群到量子迹

$$\mathrm{Tr}_q(\mathbf{BN}_0(n,m)^{\oplus}) = \mathrm{Tr}_q(\mathbf{BN}_0(n,m)^{\oplus}) = \mathrm{vTr}_q(\mathbf{BN}_0)(n,m).$$

由于同痕缠结是$\mathbf{BN}_0(n,m)$中的同构对象，因此它们的恒等 2-态射在垂直迹中相等。同样，“去环同构”意味着$\mathbb{1}_{\bigcirc} \sim \mathbb{q}\mathbb{1}_{\emptyset} + \mathbb{q}^{-1}\mathbb{1}_{\emptyset} \sim q\mathbb{1}_{\emptyset} + q^{-1}\mathbb{1}_{\emptyset}$ 在 $\mathbf{vTr}_q(\mathbf{BN}_0)$中成立，对应于 $\bigcirc = q + q^{-1}$。

显然，φ 在对象上是双射，因此只需证明φ 是满且忠实的，定理便得证。为此，我们可以将讨论限定在单个态射范畴$\mathbf{BN}_0(n,m)$上。利用“去环同构”，以及量子迹在分次等价和加性闭包下的不变性，我们还可以进一步将注意力限定在由不含闭合分支的缠结生成的全子范畴 $\mathcal{T} \subset \mathbf{BN}_0(n,m)$上。也就是说，我们只需考虑形如 α: $\mathbb{q}^i T \mathbb{q}^j T'$的2-态射，其中 T和 T'是不含闭合分支的平坦缠结。 $\Longrightarrow$

设 S：$T \to T'$ 是表示此类 α 的带点协边。我们首先断言， S 的未移位次数必须满足 $|S| \geq 0$，并且当且仅当 S 同痕于某个恒等协边的标量倍时， $|S| = 0$ 。为说明这一点，请注意，曲面 $S \subset I^3$ 可以通过在仅含圆盘分支的余边界 $S' \subset I^3$ 上添加管、点和闭合分支得到。利用无点球面等于零，且 T 和 T' 不含闭合分支，不难看出 $|S| \geq |S'| \geq 0$。断言的第二部分源于闭合分支的取值为标量。

我们得出， $\mathcal{T} \subset \mathbf{BN}_0(n,m)$ 中的任意 2-自同态 $\mathbb{q}^i T \mathbb{q}^i T$ 都必须是恒等2-态射的标量倍，这证明了 φ 是满的。

为证明 φ 是忠实的，考虑如下形式的关系： $\alpha \circ \beta \sim q^{|\alpha|}\beta \circ \alpha$ ，其中 2-态射α：$\mathbb{q}^i T \mathbb{q}^j T'$，以及 β：$\mathbb{q}^j T' \mathbb{q}^i T$ 属于$\mathcal{T}$。我们可以去掉因子 $q^{|\alpha|}$，因为 $|\alpha| = 0$；并且还可以进一步假设 2-态射 α 和 β 分别由带点协边S：$T \to T'$和 S'： $T' \to T$表示。由于 $|S| + |\overline{S'}| = |S \circ S'| = |\overline{\alpha} \circ \beta| = 0$，并且由于 $|S|$和 $|S'|$均为非负数，因此可得 $|S| = |S'| = 0$。然而，这意味着 S 和 S' 同胚于恒等协边的标量倍数，并且 $i = j$。

总之，关系 $\alpha \circ \beta \sim q^{|\alpha|}\beta \circ \alpha$ 的作用仅仅是将 $\mathcal{T}$ 中同位缠结的恒等 2-态射 $\mathbb{q}^i \mathbb{1}_{T'}$ 和 $\mathbb{q}^i \mathbb{1}_T$ 视为相同。应用 Khovanov 的普适拓扑量子场论还可以进一步看出，对于任意 $c \neq 0$ ，$c\mathbb{1}_T$ 在 $\mathcal{T}$中非零（为使这一表述有意义，将 $\mathbb{1}_T \subset I^3$ 视为从空 1-流形到 $\partial \mathbb{1}_T$的余边界）。

我们得出结论： φ 是忠实的，由此完成定理的证明。 □

3. 同调工具箱

本节将讨论扭曲、拼接和同调扰动这些微分分次概念。在讨论 Cooper–Krushkal 投影算子的模型时，这里介绍的工具将不可或缺。

我们将讨论扭曲的概念，并首先在抽象情形下进行。设 $\mathcal{A}$ 是一个$\Bbbk$-线性范畴，并考虑由复形构成的微分分次范畴 $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$。

如果 (X, δ_X) 是 $\mathcal{A}$ 上的复形，那么任何形如 $(X, \delta_X + \alpha)$ 的复形都称为 X 的扭曲，记作 $\mathrm{tw}_\alpha(X)$。如果 X 配备了直和分解 $X =$

$\bigoplus_{i\in I} X_i$（其中 X 上的微分是各个 X_i 上微分的直和），那么 α 可以用其分量 $\alpha_{ij} \in \mathrm{Hom}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{A})}(X_j, X_i)$ 表示，而 $\delta_X + \alpha$ 是 X 上的微分这一条件可以按分量表示为

$$(\delta_{X_i} \circ \alpha_{ij} + \alpha_{ij} \circ \delta_{X_j}) + \sum_k \alpha_{ik} \circ \alpha_{kj} = 0.$$

对所有 $i,\ j \in I$。若存在直和分解 $X \cong \bigoplus_{i\in I} X_i$，使得指标集 I 带有一个偏序，且相对于该偏序，表示 α 的矩阵是严格下三角的（即 $\alpha_{ij} = 0$，除非 $i > j$），则扭曲 $\mathrm{tw}_\alpha(X)$ 是单侧的 。形如 $\mathrm{tw}_\alpha(\bigoplus_i X_i)$ 的表达式也称为单侧扭曲复形。

我们将这种形式的单侧扭曲复形 $\mathrm{tw}_\alpha(\bigoplus_{i\in I} X_i)$ 用图表表示，如下列示例所示：

(3.1a)
$$\mathrm{tw}_{\left[\begin{smallmatrix}0&0\\ \alpha&0\end{smallmatrix}\right]}(X \oplus Y) \ =: \ \left(X \xrightarrow{\ \alpha\ } Y \right)$$

(3.1b)
$$\mathrm{tw}_{\left[\begin{smallmatrix}0&0&0\\ \alpha&0&0\\ \gamma&\beta&0\end{smallmatrix}\right]}(X \oplus Y \oplus Z) \ =: \ \left(\begin{array}{ccccc} & & \overset{\gamma}{\frown} & & \\ X & \xrightarrow{\ \alpha\ } & Y & \xrightarrow{\ \beta\ } & Z \end{array} \right)$$

特别地，次数为零的链映射 $f\colon X \to Y$ 的映射锥将表示为

$$\mathrm{Cone}(f) \ = \ \left(\mathbb{t}^{-1} X \xrightarrow{f} Y \right).$$

这里，与往常一样，我们滥用记号，将次数为零的态射 $f\colon X \to Y$ 也视为次数为 1 的态射 $\mathbb{t}^{-1}X \to Y$。

3.1. 同调扰动。 若 $X \simeq Y$，则给定的扭曲 $\mathrm{tw}_\alpha(X)$ 可能与 Y 的相应扭曲同伦等价，也可能不同伦等价。例如，若 X 是任意一个非零但可缩的复形，且 $Y = 0$，那么显然存在一些 X 的扭曲并不可缩（因而不同伦等价于 Y 的任何扭曲）。

同调扰动研究这样一个问题：在满足某些条件时，如何将一个同伦等价 $X \simeq Y$ 扭曲为同伦等价 $\mathrm{tw}_\alpha(X) \simeq \mathrm{tw}_\beta(Y)$。

引理 3.1. 设 I 是一个偏序集，并满足以下升链条件：对每个 $i \in I$，满足 $j \geq i$ 的 $j \in I$ 只有有限多个。假设我们有一个单侧扭曲$\mathrm{tw}_\alpha(\bigoplus_i X_i)$，并且对所有 i，都有复形 $Y_i \simeq X_i$。那么存在一个单侧扭曲 $\mathrm{tw}_\beta(\bigoplus_{i\in I} Y_i)$，使得 $\mathrm{tw}_\beta(\bigoplus_{i\in I} Y_i) \simeq \mathrm{tw}_\alpha(\bigoplus_i X_i)$。

更具体地说，如果 $f_i \in \mathrm{Hom}^0(X_i, Y_i)$ 和 $g_i \in \mathrm{Hom}^0(Y_i, X_i)$ 是逆同伦等价，且 $h_i \in \mathrm{End}^{-1}(X_i)$ 满足 $[\delta_{X_i}, h_i] = \mathrm{Id}_{X_i} - g_i \circ f_i$，那么扭曲 β 按分量表示为

$$\begin{aligned} \beta_{kl} \ &= \ f_k \circ \alpha_{kl} \circ g_l - \sum_{k>i_1>l} f_k \circ \alpha_{k,i_1} \circ h_{i_1} \circ \alpha_{i_1,l} \circ g_l \\ &\quad + \sum_{k>i_1>i_2>l} f_k \circ \alpha_{k,i_1} \circ h_{i_1} \circ \alpha_{i_1,i_2} \circ h_{i_2} \circ \alpha_{i_2,l} \circ g_l + \cdots \end{aligned}$$

若 $k > l$，否则为 $\beta_{kl} = 0$，而同伦等价 $F\colon \mathrm{tw}_\alpha(X) \to \mathrm{tw}_\beta(Y)$ 按分量表示为 $F_{kk} = f_k$ 且

$$\begin{aligned} F_{kl} &= -f_k \circ \alpha_{k,l} \circ h_l + \sum_{k>i_1>l} f_k \circ \alpha_{k,i_1} \circ h_{i_1} \circ \alpha_{i_1,l} \circ h_l \\ &\quad - \sum_{k>i_1>i_2>l} f_k \circ \alpha_{k,i_1} \circ h_{i_1} \circ \alpha_{i_1,i_2} \circ h_{i_2} \circ \alpha_{i_2,l} \circ h_l + \cdots \end{aligned}$$

若 $k > l$，而 $F_{kl} = 0$否则。

证明。参见 [Mar01、定理 2 和定理 3，以及第 8 节。6]。 □

注 3.2。特别地，若指标 $k < l \in I$ “相邻”，即不存在满足 $k < i < l$ 的指标$i \in I$，则分量 β_{kl} 等于 $g_k \circ \alpha_{kl} \circ f_l$。

注 3.3。假设 I 满足升链条件，可以弱化如下。对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，令 $I_k \subset I$ 为由满足以下条件的 $i \in I$ 所组成的子集：链群 $(X_i)^k$ 非零。引理 3.1 的结论在以下假设下成立：I_k 对所有 k均满足升链条件。我们称之为相对于的局部升链条件 X。

注记 3.4. 作为引理 3.1 的一个特例，如果每个复形 X_i 都是可缩的，那么任意单侧扭曲 $\mathrm{tw}_\alpha(\bigoplus_{i\in I} X_i)$ 也是可缩的，前提是偏序集 I满足升链条件。

注记 3.5。引理 3.1 的一个版本，其中将升链条件替换为 降链条件，并将直和替换为直积。

3.1.1. 拼接。如果我们有扭曲复形（映射锥）

$$X_1 = \left(A \xrightarrow{\alpha} E \right), \qquad X_2 = \left(\mathbb{t}^{-1}E \xrightarrow{\beta} B \right),$$

则 X_1 和 X_2 的拼接 结果是扭曲复形

$$Z = \left(A \xrightarrow{\beta \circ \alpha} B \right).$$

拼接复形 Z 与映射锥同伦等价：

$$Z \simeq \left(X_1 \xrightarrow{-\pi} X_2 \right)$$

其中 π 是 E 直和项的先投影后包含映射；由于 E 在 X_2 中带有移位 $\mathbb{t}^{-1}$，其同调次数为 1。

拼接操作也可以应用于“更长”的单侧扭曲复形。例如，将扭曲复形拼接在一起的结果

$$X_1 = \left(A \xrightarrow{\delta_{BA}} B \xrightarrow{\alpha} E, \quad A \xrightarrow{\alpha'} E \right)$$

and

$$X_2 \;=\; \left(\mathbb{t}^{-1}E \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\delta_{DC}} D \;,\; \mathbb{t}^{-1}E \xrightarrow{\beta'} D \right),$$

是扭曲复形

$$Z \;=\; \left(A \xrightarrow{\delta_{BA}} B \xrightarrow{\delta_{CB}} C \xrightarrow{\delta_{DC}} D \;,\; A \xrightarrow{\delta_{DA}} D \;,\; B \xrightarrow{\delta_{CA}} A \;,\; C \xrightarrow{\delta_{DB}} B \right), \tag{3.2}$$

其中

$$\delta_{CB} = \beta \circ \alpha, \qquad \delta_{CA} = \beta \circ \alpha', \qquad \delta_{DB} := \beta' \circ \alpha, \qquad \delta_{DA} = \beta' \circ \alpha'.$$

我们可以反复进行拼接操作，甚至可以进行可数无穷多次。例如，假设我们有一组形如以下形式的扭曲复形

$$X_i \;=\; \left(\mathbb{t}^{-1}E_{i+1} \xrightarrow{\alpha_i} C_i \xrightarrow{\beta_i} E_i \;,\; \mathbb{t}^{-1}E_{i+1} \xrightarrow{\gamma_i} E_i \right),$$

其中 C_i和 E_i是一些复形（$i = 0$，1，2，.....）。设 $\pi_i \in \mathrm{Hom}^1(X_i,\ X_{i+1})$是一个次数为 1 的链映射，它先投影到再包含 E_{i+1} 项。于是 $\pi_{i+1} \circ \pi_i = 0$，我们得到一个如下形式的复形

$$Y = \left(X_0 \xrightarrow{-\pi_0} X_1 \xrightarrow{-\pi_1} X_2 \xrightarrow{-\pi_2} \cdots \right).$$

严格来说，我们可以将这个复形表示为 $Y = \mathrm{tw}_\alpha(\bigoplus_{i\geq 0} X_i)$，其中扭曲 α 按分量表示为 $-\pi_i$。我们也可以将 Y 表示为一个双复形的全复形。

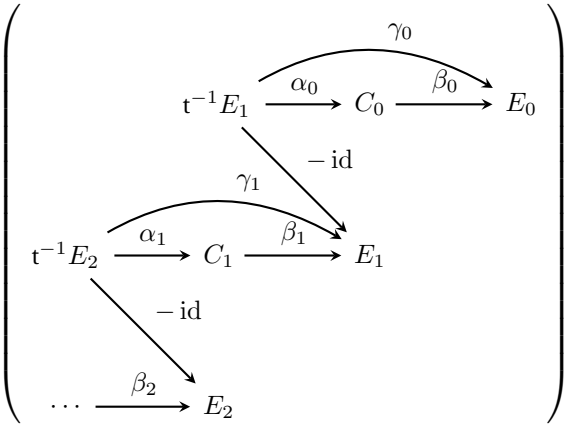
我们将 Y称为由复形 X_i构造出的预拼接复形。下面的引理表明， Y与一个拼接复形同伦等价。

引理 3.6. 沿用上一段中的记号。则 Y 与一个如下形式的扭曲复形同伦等价。

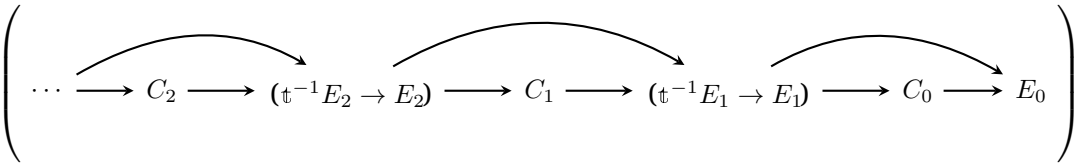
$$Y \simeq \left(\cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow E_0 \;,\; \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow E_0 \;,\; \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \right),$$

其中我们没有画出微分的所有（可数多个）分量，但它们都指向右侧。

证明。 我们可以将 Y 写成如下形式的扭曲复形



这可以重新整理成如下形式的扭曲复形



应用引理 3.1 消去可缩项（$\mathrm{t}^{-1}E_i \xrightarrow{-\mathrm{id}} E_i$）。尽管这样的项有无穷多个，这种消去仍然有效，因为微分保持项上的偏序（满足升链条件）。□

3.2. **op 良序扭曲复形**。

定义 3.7. 偏序集 I 若满足每个非空子集 $S \subset I$ 都有唯一最大元，则称为逆良序。

注意，若 I 是逆良序的，则该偏序是全序：任意一对元素 i，j 都可比较，因为 $\{i, j\}$ 有最大元。此外，每个反序良序集都满足升链条件：任意递增序列 $i_0 \le i_1 \le \cdots$ 最终都会稳定于 $\{i_0, i_1, \ldots\}$ 的最大元。

例 3.8. 设 $r\colon E \to B$ 是一个集合映射，使得基底 B 是逆良序的，并且对所有 b，纤维 $r^{-1}(b)$ 都是逆良序的。那么，如果在 B 中 $r(e) < r(e')$，或者 $r(e) = r(e') =: b$ 且 $e \le e'$ 属于 $r^{-1}(b)$，则 E 具有由 $e \le e'$ 给出的逆良序。

推论 3.9. 如果 I 和 J 都是逆良序的，那么 $I \times J$ 在字典序 $(i, j) \le (i', j')$ 下也具有逆良序，当 $i < i'$ 或 $i = i'$ 且 $j \le j'$ 时。□

逆良序集是作为迭代单侧扭曲复形的指标集出现的。

定义 3.10。 设 $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴。在 $\mathsf{Ch}^-(\mathcal{A})$ 中的反向良序扭曲复形是一个单侧扭曲复形 $\mathsf{tw}_\delta(\bigoplus_{i\in I} \mathrm{t}^{a_i} X_i)$，其中 I 是逆良序的，且平移 a_i 有上界。

若 $\mathcal{X}$ 是 $\mathsf{Ch}^-(\mathcal{A})$ 中复形的一个集合，我们用 $\langle\mathcal{X}\rangle$ 表示 $\mathsf{Ch}^-(\mathcal{A})$ 的全子范畴，该子范畴由满足以下条件的反向良序扭曲复形构成：其项是 $\mathcal{X}$ 中对象的直和项的平移的有限直和。

定义 3.11. 如果 $\mathcal{X}$ 是 $\mathsf{Ch}^-(\mathcal{A})$ 中的复形集合，那么我们用 $\mathcal{X}$ 表示相对于同伦等价的 $\mathcal{X}$ 的闭包。

引理 3.12。 设 $\mathcal{X},\mathcal{Y}\subset$ 链复形范畴$^-(\mathcal{A})$ 为一组复形，其中每个 $N\in\mathcal{X}$ 都与 $\langle\mathcal{Y}\rangle$ 中的一个复形同伦等价。那么 $\langle\mathcal{X}\rangle\subset\langle\mathcal{Y}\rangle$。

证明。 设 $X=\mathrm{tw}_\delta(\bigoplus_{i\in I}X_i)$，其中 $X_i\in\mathcal{X}$ 且 I 逆良序，并设对所有 $i\in I$，每个X_i 都同伦等价于 $\mathrm{tw}^{\varepsilon(i)}(\bigoplus_{j\in J_i}Y_{i,j})$，其中 J_i 逆良序，且$Y_{i,j}\in\mathcal{Y}$。令 E表示满足 $j\in J_i$ 的有序对 (i,j) 的集合，并令 $r\colon E\to I$ 为投影映射 $(i,j)\,i$。那么，如果 $i<i'$ 或 $i=i'$ 且 $j<j'$，则 E具有逆良序集的结构，其中 $(i,j)\le(i',j')$。

由于 I 满足升链条件，因此同调扰动引理适用，所以

$$\mathrm{tw}_\delta\left(\bigoplus_{i\in I}X_i\right)\simeq\mathrm{tw}_{\delta'}\left(\bigoplus_{i\in I}\mathrm{tw}_{\varepsilon_i}\left(\bigoplus_{j\in J_i}Y_{i,j}\right)\right)\cong\mathrm{tw}_{\delta'+\varepsilon}\left(\bigoplus_{(i,j)\in E}Y_{i,j}\right).$$

其中， δ' 严格增加指标 i ，而 $\varepsilon=\sum_i\varepsilon(i)$是若干项之和：这些项保持指标$i$ 不变，但严格增加 j。因此，扭曲 $\delta'+\varepsilon$ 关于 E上的偏序是严格递增的，并且这个最后得到的复形属于 $\langle\mathcal{Y}\rangle$。□

推论 3.13。 范畴 $\langle\mathcal{X}\rangle\subset$ 链复形范畴$^-(\mathcal{A})$ 在取逆良序扭曲复形时是闭的。□

备注 3.14。 如果我们在 $\langle\mathcal{X}\rangle$的定义中只允许$\mathbb{Z}_{\le0}$-指标化的单侧扭曲复形，那么这个推论将不成立。

3.3. **梳理毛发**。 我们使用“梳理毛发”这一短语来指代如下形式的同构态射的构造：$\mathrm{tw}_\delta(\bigoplus_{i\in I}X_i)\cong\mathrm{tw}_{\delta'}(\bigoplus_{i\in I'}X_i)$，其中 I 是一个逆良序集合，而 $I'=I$ 带有一个更粗的偏序 $\le'$。“更粗”意味着，条件 $i\le' j$ 比 $i\le j$更具限制性。以下是一些我们希望应用此类思想的实例（我们马上会对此展开说明）：

1) 假设 $\mathcal{X}$ 是一族复形，使得对于所有 N、$M\in\mathcal{X}$，$\mathrm{Hom}(N,M)$ 在正次数上没有上同调，并且 $X=\mathrm{tw}_\delta(\bigoplus_{i\in I}\mathsf{t}^{a_i}N_i)$ 是一个具有 $N_i\in\mathcal{X}$ 的反向良序扭曲复形。在偏序由 $i<' j$ 给定时，令 $I'=I$ 满足：若 $i<j$，则 $a_i<a_j$。在这种情况下，梳理毛发相当于消去扭曲 $\mathsf{t}^{a_i}N_i\to\mathsf{t}^{a_j}N_j$ 中的分量，这些分量作为 $\mathrm{Hom}(N_i,N_j)$ 的元素时具有正上同调次数。2) 假设 $(\Omega,\trianglelefteq)$ 是一个偏序集，并且 $\mathcal{X}_\omega\subset\mathsf{Ch}^-(\mathcal{A})$ 是一族由 $\omega\in\Omega$ 索引的复形，使得若 $N\in\mathcal{X}_\omega$ 且 $M\in\mathcal{X}_\nu$，则 $\mathrm{Hom}(N,M)\simeq0$，除非 $\omega\trianglelefteq\nu$。假设 $X=\mathrm{tw}_\delta(\bigoplus_{i\in I}X_i)$ 是一个具有$X_i\in\mathcal{X}_{\omega(i)}$的反向良序扭曲复形。在偏序由 $i\le' j$ 给定时，令 $I'=I$ 满足：若 $i\le j$，则 $\omega(i)\trianglelefteq\omega(j)$。在这种情况下，梳理毛发相当于消去扭曲 $X_i\to X_j$ 中的分量，其中 $\omega(j)$ 低于或不可比于 $\omega(i)$。

我们的主要引理将结合上述两种概念。出于技术原因，我们需要对 $\mathcal{X}_\omega$ 中的复形作一些有界性和紧性假设。为此，固定一个加性范畴 $\mathcal{A}$，假设 $(\Omega, \trianglelefteq)$ 是一个偏序集，并且对每个 $\omega \in \Omega$，假设我们有一族复形 $\mathcal{X}_\omega$，满足：

1) $\mathcal{X}_\omega$ 中的每个复形都支撑在非正上同调次数上。
2) 若 $N \in \mathcal{X}_\omega$ 且 $M \in \mathcal{X}_\nu$，则链对象 N^k（当 $k \le 0$ 时为零）满足 fy

$$\mathrm{Hom}(N^k, M) \simeq 0$$

若 $\omega \not\trianglelefteq \nu$ 或 $\omega = \nu$ 且 $k < 0$。

引理 *3.15.* 保留上一段中的设定。假设 I 是一个反序良序集，并且有映射 $I \to \Omega \times Z$、$(i \mapsto (\omega(i), a(i)))$，以及一个扭曲复形 $X = tw_\delta(\bigoplus_{i\in I} t^{a(i)}X_i)$，其中 $X_i \in \mathcal{X}_{\omega(i)}$。假设映射 $a\colon I \to Z$ 的原像有限，且对$k \gg 0$有 $a^{-1}(k) = 0$。令 $I' = I$ 带有偏序 $i <' j$：若 $i < j$ 且 $(\omega(i), a(i)) < (\omega(j), a(j))$，则按字典序排列 $(\omega(i) \lhd \omega(j)$ 或 $\omega(i) = \omega(j)$，且 $a(i) < a(j))$。那么 $X \cong tw_{\delta'}(\bigoplus_{i\in I'} t^{a(i)}X_i)$，其中扭曲 δ' 遵循偏序 $<'$。

证明。我们为证明引入一些术语和记号。我们将 I 的唯一最大元记为 0。我们可以假设 I 有唯一最小元$-\infty \in I$（如果不是这样，那么我们可以用 $\{-\infty\} \sqcup I$ 替换 I 并设定 $X_{-\infty} = 0$）。回忆一下，子集$K \subset I$ 是凸的，如果 $k \le i \le k'$ 和 $k,\ k' \in K$ 则蕴含 $i \in K$。给定 $i \le j$ 属于 I，我们有区间 $[i, j] := \{k \in I \mid i \le k \le j\}$，以及（$i,\ j] = [i, j] \setminus \{i\}$（依此类推）。注意，区间是凸的。

如果 $K \subset I$ 是凸的，那么 $X_K := \mathrm{tw}_{\delta_K}(\bigoplus_{i\in K} \mathbb{t}^{a(i)}X_i)$是一个定义良好的单侧扭曲复形，其中扭曲 δ_K 由 δ 经限制得到。X_K 的梳理是一个对(Y_K, φ_K)，其中 Y_K是陈述中形式的单侧扭曲复形（相对于粗偏序），而 φ_K 是一个同构 $X_K \xrightarrow{\sim} Y_K$，它保持 K上的细偏序。

我们希望证明 $X = X_{[-\infty,0]}$ 可以被梳理。我们的计划是通过超限归纳证明每个 $X_{[i,0]}$ 都可以被梳理。在基例中，我们显然可以看到，$(X_{\{0\}}, \mathrm{id})$ 是 $X_{\{0\}}$的一个梳理。

现在，固定 i，并假设根据归纳法，我们已为所有 $j > i$构造了$X_{[j,0]}$的梳理$(Y_{[j,0]}, \varphi_{[j,0]})$，且假设这些梳理彼此相容，具体来说，若 $j < j'$，则$\varphi_{[j',0]}$ 可由$\varphi_{[j,0]}$ 经限制得到。于是，取 $j > i$对应的梳理$(Y_{[j,0]}, \varphi_{[j,0]})$的并，我们便得到$X_{(i,0]}$ 的一个梳理$(Y_{(i,0]}, \varphi_{(i,0]})$。

为了完成证明，我们必须构造 $X_{[i,0]}$的一个梳理。注意，

$$X_{[i,0]} \cong (\mathbb{t}^{a(i)}X_i \xrightarrow{\partial} X_{(i,0]}) \cong (\mathbb{t}^{a(i)}X_i \xrightarrow{\partial'} Y_{(i,0]}), \tag{3.3}$$

其中第二个同构是 $\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{id}\ 0\ \varphi_{(i,0]} \end{bmatrix}$。我们将 $(i, 0]$ 分解为以下子集。令 J_3 由满足以下条件的 $j > i$ 组成：$\omega(i) \lhd \omega(j)$，或者 $\omega(i) = \omega(j)$ 且 $a(i) < a(j)$。令J_2 由满足以下条件的 $j > i$ 组成：$\omega(i) = \omega(j)$ 且 $a(i) \ge a(j)$。令 J_1 由满足$\omega(i) \not\trianglelefteq \omega(j)$的 $j > i$ 组成。

注意到，每个 J_l 相对于粗偏序都是凸的，因此梳理后的 $Y_{(i,0]}$ 可以写成

$$Y_{(i,0]} = (Y_{J_1} \to Y_{J_2} \to Y_{J_3})$$

（用一条长箭头将 Y_{J_1} 连接到 Y_{J_3}），其中 Y_{J_l} 包含满足 $j \in J_l$ 的那些直和项 $\mathbb{t}^{a_{(j)}}X_j$。

我们断言 $\mathrm{Hom}(X_i, Y_{J_1}) \simeq 0$。为证明这一断言，考虑链对象 $(X_i)^k$ ofX_i。对于所有 $j \in J_1$，我们都有 $\mathrm{Hom}((X_i)^k, X_j) \simeq 0$，因为 $\omega(i) \not\trianglelefteq \omega(j)$。由于 $(X_i)^k$ 是$\mathcal{A}$的一个对象，因此将其视为 $\mathsf{Ch}^-(\mathcal{A})$ 的对象时，它是紧对象。因此

$$\mathrm{Hom}((X_i)^k, \bigoplus_{j\in J_1} X_j) = \bigoplus_{j\in J_1} \mathrm{Hom}((X_i)^k, X_j) \simeq 0.$$

现在，同调扰动告诉我们 $\mathrm{Hom}((X_i)^k, Y_{J_1}) \simeq 0$；这适用是因为指标集 J_1 满足升链条件。最后，$\mathrm{Hom}(X_i, Y_{J_1})$ 是 $\prod_{k\geq 0}\mathrm{Hom}((X_i)^{-k}, Y_{J_1})$ 的单侧扭曲（以带有相反偏序的$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为指标），通过再次应用同调扰动可知其为可缩的。

接下来，我们断言 $\mathrm{Hom}(\mathbb{t}^{a_{(i)}}X_i, Y_{J_2})$ 在次数 1 上没有同调。事实上，对每个 $k < 0$，链群 $(X_i)^k$ 满足 $\mathrm{Hom}((X_i)^k, X_j) \simeq 0$，这是由假设得到的。因此

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{t}^{a(i)}X_i, \mathbb{t}^{a(j)}X_j) \cong \mathbb{t}^{a(j)-a(i)}\mathrm{Hom}(X_i, X_j) \simeq \mathbb{t}^{a(j)-a(i)}\mathrm{Hom}((X_i)^0, X_j),$$

其支撑在上同调次数 ≤ 0 中，因为根据 J_2 的定义，$a(i) \leq a(j)$。两次同调扰动告诉我们，$\mathrm{Hom}(\mathbb{t}^{a_{(i)}}X_i, Y_{J_2})$与一个支撑在上同调次数 ≤ 0中的复形同伦等价。特别地，次数 1 上没有同调。

结合上述两段，我们得到，包含映射 $Y_{J_3} \hookrightarrow Y_{(i,0]}$ 诱导出一个同构 $H_1(\mathrm{Hom}(\mathbb{t}^{a}(i)X_i, Y_{J_3})) \to H_1(\mathrm{Hom}(\mathbb{t}^{a}(i)X_i, Y_{(i,0]}))$。由此可知，(3.3) 中的连接微分 ∂' 同伦于一个元素 $\partial'' = \partial' + d(h)$，该元素仅在 $j \in J_3$ 时具有分量 $X_i \to X_j$（即 j 在粗偏序中大于 i）。因此，$\varphi_{[i,0]} := \begin{bmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ h & \mathrm{id} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \varphi_{(i,0]} \end{bmatrix}$ 给出了一个同构。

$$X_{[i,0]} = (\mathbb{t}^{a(i)}X_i \xrightarrow{\partial} X_{[i,0]}) \to (\mathbb{t}^{a(i)}X_i \xrightarrow{\partial''} Y_{(i,0]}) =: Y_{[i,0]}.$$

这定义了所需的 $X_{[i,0]}$ 梳理，并完成了 X 可以被梳理的归纳证明。□

4. 切比雪夫系统

定义 4.1. 设 R 为一个环。我们称元素族 $v_k \in R\,(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 满足第二类切比雪夫递推，如果 $v_0 = 1$ 且 $v_{n-1}v_1 = v_n + v_{n-2}$ 对于 $n \geq 2$。

注 4.2。在这样的族中，元素 v_1 决定了所有元素 v_2、v_3、.....。

第二类切比雪夫递推与量子$\mathfrak{sl}_2$的表示理论密切相关，以下示例将对此进行说明。

例 4.3. 如果 $R = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$，那么 $v_n := [n] := q^{n-1}+q^{n-3}+\cdots+q^{1-n}$ 满足第二类切比雪夫递推。

例 4.4. 若 $R = K_0(\mathcal{TL})$，则简单对象的类 $v_n := [V_n]$ 满足第二类切比雪夫递推，这是因为 Clebsch-Gordan 规则：

$$V_{n-1} \otimes V_1 \cong V_n \oplus V_{n-2}.$$

现在我们转而讨论第二类切比雪夫递推的范畴论类比。因此，设 $(\mathcal{C},\ \otimes,\ I)$ 为一个幺半范畴。直观地说，我们或许会认为，一组对象 $V_n \in (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 满足范畴化第二类切比雪夫递推 当且仅当 $V_0 \cong \mathbb{1}$ 且 $V_{n-1} \otimes V \cong V_n \oplus V_{n-2}$对 $n \geq 2$成立。然而，这种说法过于粗略；更好的做法是了解这种同构中涉及的映射，并将它们纳入结构的一部分。下文的定义4.6将实现这一点。

定义 4.5. 设 $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ 是一个幺半范畴。 V中的一个自对偶对象 （或自双伴随对象）是一个三元组 $(V, \mathrm{ev}, \mathrm{coev})$，其中 $V \in \mathcal{C}$ 是一个对象，且 $\mathrm{coev}: \mathbb{1} \leftrightarrow V \otimes V$: ev 是满足以下条件的映射

$$(\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{ev}) \circ (\mathrm{coev} \otimes \mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V = (\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{coev}).$$

定义 4.6. 设 $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ 是一个幺半范畴。 $\mathcal{C}$ 中的一个切比雪夫系统 由以下数据构成：

- $\mathcal{C}$中的一个自对偶对象 $(V, \mathrm{ev}, \mathrm{coev})$,
- 一个复形族 $V_{(n)} \in$ 链复形范畴$^{-}(\mathcal{C})$，其中 $V_{(0)} = \mathbb{1}$ 且 $V_{(1)} = V$,
- 链映射 $\pi_{(n)}$: $V_{(n-1)} \otimes V \ \rightarrow V_{(n)}$，适用于 $n \geqslant 1$,

使得 $\pi^{(1)}$: $\mathbb{1} \otimes V \ \rightarrow V$是典范同构，并且存在一个特异三角

$$V^{(n-2)} \xrightarrow{\iota^{(n-2)}} V^{(n-1)} \otimes V \xrightarrow{\pi^{(n)}} V^{(n)} \longrightarrow V^{(n-2)}[1] \tag{4.1}$$

在同伦范畴 $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{C})$中，其中 $\iota^{(n-2)}$ 由三角形的交换性定义

$$\begin{array}{ccc} V^{(n-2)} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev}} & V^{(n-2)} \otimes V \otimes V \\ & \searrow^{\iota^{(n-2)}} & \downarrow{\scriptstyle \pi^{(n-1)}\otimes\mathrm{id}} \\ & & V^{(n-1)} \otimes V \end{array} \tag{4.2}$$

备注 4.7. 我们对切比雪夫系统的兴趣源于它们与带色$\mathfrak{sl}_2$ 链同调之间预期存在的联系。具体而言，我们将切比雪夫系统视为平凡结的带色 $\mathfrak{sl}_2$ 链同调模型。希望借助适当的缆线函子，也能得到其他结的带色 $\mathfrak{sl}_2$ 链同调模型。

下面的结果表明，切比雪夫系统由 $V^{(1)}$ 决定，且在同伦等价意义下唯一。

定理 4.8. 设$(V_{(n)}\, \pi^{(n)})$ 和$(V'_{(n)}\, \pi'^{(n)})$ 是范畴 $\mathcal{C}$中的两个切比雪夫系统，其中$V_{(1)} \cong V'_{(1)}$ 是自对偶对象。那么存在同伦等价 $\theta^{(n)}$: $V_{(n)} \xrightarrow{\simeq} V'_{(n)}$，它们构成区分三角的同构

$$\begin{array}{ccccccc} V^{(n-2)} & \xrightarrow{\iota^{(n-2)}} & V^{(n-1)} \otimes V & \xrightarrow{\pi^{(n)}} & V^{(n)} & \longrightarrow & V^{(n-2)}[1] \\ \downarrow{\scriptstyle \theta^{(n-2)}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta^{(n-1)}\otimes\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta^{(n)}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta^{(n-2)}[1]} \\ V'^{(n-2)} & \xrightarrow{\iota'^{(n-2)}} & V'^{(n-1)} \otimes V & \xrightarrow{\pi'^{(n)}} & V'^{(n)} & \longrightarrow & V'^{(n-2)}[1] \end{array} \tag{4.3}$$

证明。 我们通过对 n 使用归纳法来证明该命题。由于 $V_{(0)} = V'_{(0)} = \mathbb{1}$，我们取 $\theta^{(0)} = \mathrm{id}_{\mathbb{1}}$。令$V := V_{(1)}$ 且 $V' := V'_{(1)}$。我们用 coev 和 coev′ 表示 V 的余评价态射

和 V'。设 $\theta^{(1)}\colon V \longrightarrow V'$ 是自对偶对象之间的同构，因此特别地

$$(\theta^{(1)} \otimes \theta^{(1)}) \circ \mathrm{coev} = \mathrm{coev}'.$$

因此，对于 $n = 2$ （4.3）中的左方块是可交换的（在此情形下， $\iota^{(0)} = \mathrm{coev}$ 和 $\iota'^{(0)} = \mathrm{coev}'$。由此（根据特异三角的性质）可知，存在一个映射 $\theta^{(2)}$，它补全了$\theta^{(0)}$ 和 $\theta^{(1)} \otimes \theta^{(1)}$，使其构成三角形的态射。根据三角范畴中的五引理，$\theta^{(2)}$ 是一个同伦等价。

现在，给定 $n \geq 3$，并假设根据归纳法， $\theta^{(k)}$ 已为 $k < n$构造完成。注意，若存在 $\theta^{(n)}$，使其构成（4.3）中区分三角的态射，则 $\theta^{(n)}$根据五引理便自动是一个同伦等价。为证明 $\theta^{(n)}$ 的存在性，我们必须证明（4.3）的左方块在同伦意义下可交换。为此，考虑以下图表：

$$\begin{array}{ccccc}
V^{(n-2)} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev}} & V^{(n-2)} \otimes V \otimes V & \xrightarrow{\pi^{(n-1)}\otimes\mathrm{id}} & V^{(n-1)} \otimes V \\
\downarrow{\scriptstyle \theta^{(n-2)}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta^{(n-2)}\otimes\theta^{(1)}\otimes\theta^{(1)}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta^{(n-1)}\otimes\theta^{(1)}} \\
V'^{(n-2)} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev}'} & V'^{(n-2)} \otimes V' \otimes V' & \xrightarrow{\pi'^{(n-1)}\otimes\mathrm{id}} & V'^{(n-1)} \otimes V'
\end{array}$$

左侧方块可交换，因为 $\theta^{(1)}$ 是自对偶对象之间的态射；右侧方块可交换，这是因为（4.3）中的中间方块可交换，且 n 的次数降低了 1。水平箭头的复合分别是 $\iota^{(n-2)}$ 和 $\iota'^{(n-2)}$。这证明了（4.3）中的左侧方块可交换，从而得到 $\theta^{(n)}$的存在性。□

注 4.9。对偶切比雪夫系统的概念可由定义 4.6 中的切比雪夫系统得到：将所有箭头反向，并将 Ch^- 替换为 Ch^+。注意，若 $\{V_{(n)}\, \pi^{(n)}\}$ 是刚性范畴中的切比雪夫系统，则 $\{(V_{(n)})^\vee, (\pi^{(n)})^\vee\}$ 是一个对偶切比雪夫系统，其中 $(-)^\vee$ 表示对偶化函子。具体而言，$(-)^\vee\colon \mathsf{Ch}^-(\mathcal{C}) \to \mathsf{Ch}^+(\mathcal{C})$ 会将同调分次取反，并将微分变换为其对偶。

下文将讨论若干切比雪夫系统，位于 $\mathcal{TL}$以及相关范畴中。根据定理 4.8，这些系统在链复形范畴$^-(\mathrm{Kar}(\mathcal{TL}))$中全都等价。

4.1. **Jones–Wenzl 系统**。 本节中我们取 $\mathcal{C} := \mathrm{Kar}(\mathcal{TL})$，即 Temperley–Lieb 范畴 $\mathcal{TL}$的幂等元完备化。回顾一下， $\mathcal{TL}$ 包含 Jones–Wenzl 投影子 p_n，其中每个都表示从 $V_1^{\otimes n}$到其简单的（$n+1$维）商空间V_n的投影。我们将滥用记号，也用 V表示对象 $1 \in \mathcal{TL}$。由于 Jones–Wenzl 投影子满足恒等式。

$$p_n \circ (p_{n-1} \otimes \mathrm{id}_V) = p_n = (p_{n-1} \otimes \mathrm{id}_V) \circ p_n,$$

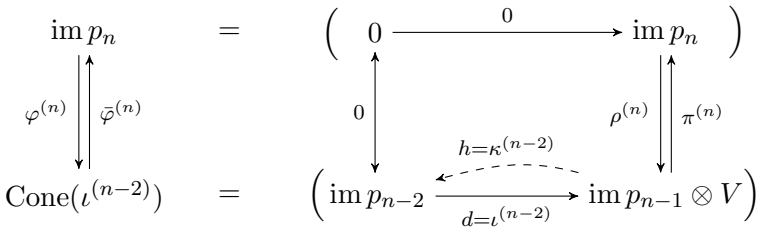
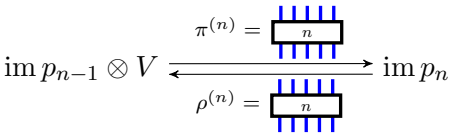
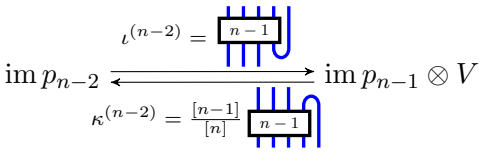


图 2. $\operatorname{im} p_{n+2}$ 与 $\mathrm{Cone}(\iota^{(n)})$ 之间的同伦等价。

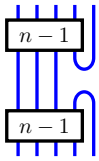
我们在 $\mathrm{Kar}(\mathcal{TL})$ 中有定义良好的态射。

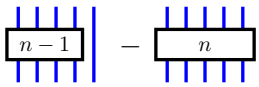


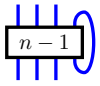


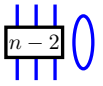
定理 4.10。数据 $\{\operatorname{im} p_n, \pi^{(n)}\}_{n\geq 0}$ 是$\mathrm{Kar}(\mathcal{TL})$中的切比雪夫系统。

证明。 我们必须构造一个同伦等价 $\varphi^{(n)}\colon \operatorname{im} p_n$ 锥($\iota^{(n-2)}$)，使得$\varphi^{(n)} \circ \pi^{(n)}$ 与典范嵌入同伦 $\operatorname{im} p_{n-1} \otimes V \to$ 锥($\iota^{(n-2)}$)。为此，考虑图 2。显然，复合 $\bar{\varphi}^{(n)} \circ \varphi^{(n)}$ 在 $\operatorname{im} p_{n+2}$上是恒等映射。我们计算

$$dh = \frac{[n-1]}{[n]}$$


$$= \quad - \quad = \mathrm{id}_{\operatorname{im} p_{n-1}\otimes V} - \rho^{(n)} \circ \pi^{(n)},$$


$$hd = \frac{[n-1]}{[n]}$$


$$= \frac{[n-1]}{[n]}$$


$$- \frac{[n-2]}{[n-1]}$$


$$= \frac{[n-1][2]-[n-2]}{[n]}$$


$$= \quad = \mathrm{id}_{\operatorname{im} p_{n-2}}.$$


因此， h 是 $\varphi^{(n)} \circ \bar{\varphi}^{(n)}$ 与锥复形上恒等映射之间的一个同伦。注意，上述计算还表明， h 是 $\varphi^{(n)} \circ \pi^{(n)}$ 与 $\operatorname{im} p_{n-1} \otimes V$到锥复形中的典范嵌入之间的一个同伦。□

4.2. **Khovanov 系统**。在本节中，我们取 $\mathcal{C} := \mathcal{K}^b(\mathcal{TL})$，即 Temperley–Lieb 范畴上的复形的有界同伦范畴。在 $\mathcal{C}$ 中，我们将构造一个切比雪夫系统，该系统受到 Khovanov 的带色 Jones 多项式范畴化的启发。

为此，让我们回顾一下赋予由简单的（$n+1$）维表示 V_n 着色的平凡结的复形 $\mathcal{V}_n$，我们将其视为 $\mathsf{Ch}^-(\mathcal{TL})$ 的一个对象。回想一下，

$$[V_n] = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} \left[V_1^{\otimes(n-2k)} \right],$$

在量子 $\mathfrak{sl}_2$的表示范畴的格罗滕迪克群中。沿用 Kho- vanov 的方法，我们将构造一个复形族 $\mathcal{V}_n \in \mathsf{Ch}^-(\mathcal{TL})$，其欧拉示性数满足与上文相同的关系。

二项式系数 $\binom{n-k}{k}$ 表示从水平线上排列的 n 个点中选取 k 对相邻且不相交的点对的方法数。我们将这样的选取称为 k-配对，并用 $I_{k,n}$ 表示所有此类 k-配对的集合。每个$s \in I_{k,n}$ 表示一个由 $n-2k$ 个点组成的对象 $\mathcal{V}_s \in \mathcal{TL}$。

设 Γ_n 是一个图，其顶点是对所有 $k \geq 0$而言由 n 个点构成的 k-配对。若 $s = s' \cup \{p\}$ 只针对单个点对成立，则 Γ_n 的两个顶点之间有一条有向边。我们用对象 $\mathcal{V}_s$ 装饰顶点s，并用态射装饰边 $s \to s'$

$\cup_{s',s} :=$ 

,

其中 i 表示 s 中位于不属于 s'的配对左侧的未配对点的数量。关于 $n=4$ 的一个示例见图 3。注意， Γ_n 是一个位于 $\mathcal{TL}$中的交换图。在

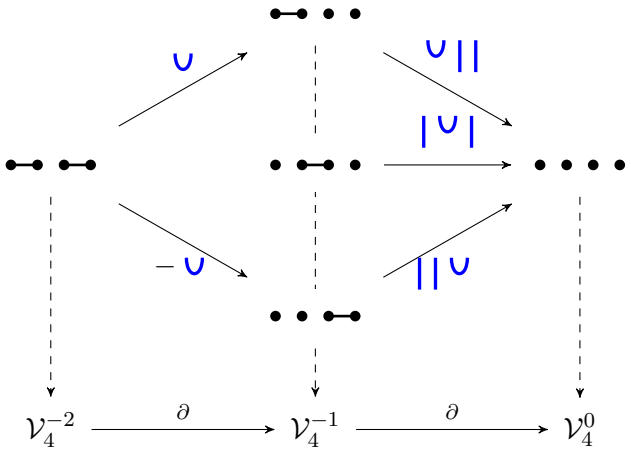


图 3. 图 Γ_4 和复形 $\mathcal{V}_4$。

为了使所有方块都反交换，将 $\cup_{s',s}$ 乘以 $(-1)^{(s,s')}$，其中 (s,s') 是 s 中位于 $s \setminus s'$中唯一一对右侧的配对数。复形 $\mathcal{V}_n$ 是通过将具有相同 k 的 k-配对取直和而将图收缩后得到的：

$$\mathcal{V}_n^{-k} := \bigoplus_{s \in I_{k,n}} \mathcal{V}_s$$

微分 $\delta^{-k}\colon \mathcal{V}_n^{-k} \to \mathcal{V}_n^{-k+1}$由以下元素构成的矩阵给出：

$$\delta_{s',s}^{-k} := \begin{cases} (-1)^{(s,s')\cup_{s',s}} & \text{if there is an edge } s \to s', \text{ and} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们可以将 $\mathcal{V}_n \otimes V$ 视为 $\mathcal{V}_{n+1}$ 的一个子复形，该子复形由满足最右侧的点不属于任何一对的 k-配对所张成。

定理 4.11。 数据 $\{\mathcal{V}_n, \pi^{(n)}\}_{n\geq 0}$ 是 $\mathcal{K}^b(\mathcal{TL})$ 中的切比雪夫系统，其中 $\pi^{(n)}\colon \mathcal{V}_{n-1}\otimes V \to \mathcal{V}_n$ 是子复形的包含映射。

证明。 图 Γ_n 有两种类型的顶点，分别对应两种配对方式：一种是最右侧的点属于某个配对，另一种则是最右侧的点不属于任何配对。第二种类型的顶点生成子复形 $\mathcal{V}_{n-1}\otimes V$，而第一种类型的顶点生成一个商复形，该商复形同构于$\mathbb{t}^{-1}\mathcal{V}_{n-2}$。因此，我们可以将 $\mathcal{V}_n$ 写成一个映射锥。

$$\mathcal{V}_n = \mathrm{Cone}\left(\mathcal{V}_{n-2} \to \mathcal{V}_{n-1}\otimes V\right),$$

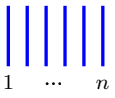
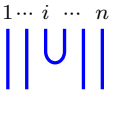
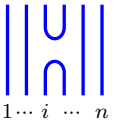
锥中的链映射由所有态射诱导$\cup_{s'}$，s 这些态射对应于 Γ_n 连接两种不同类型顶点的边——每个态射都由其右边缘带有一个杯的图表给出。明确地说，这个链映射可以写成$\mathrm{id}_{\mathcal{V}_{n-2}}\otimes \mathrm{coev}_V$（其陪域限制为 $\mathcal{V}_{n-1}\otimes V$），并且它与$\mathrm{id}_V$）$\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{V}_{n-2}}\otimes \mathrm{coev}_V)$一致。这表明 $\mathcal{V}_{n-2}$、 $\mathcal{V}_n$和 $\mathcal{V}_{n-1}\otimes V$之间存在定义4.6中的区分三角。□

4.3. **Cooper–Krushkal 系统**。本文的主要目标之一是说明 Cooper–Krushkal 范畴化 Jones–Wenzl 幂等元如何产生一个切比雪夫系统。

定义 4.12。回忆一下，平坦缠结 T 的宽度是 T的水平截面上点数的最小值。换言之，(m,n)-缠结 T的宽度是满足以下条件的最小 k： T可以写成 $T = T'\circ T''$，其中 T' 是一个 (m,k)-缠结，而 T'' 是一个 (k,n)-缠结。

若 $X \in \mathsf{Ch}^-(\mathbf{BN}_{m,n})$，则称 X 在同伦意义下的宽度为 $\leq k$，如果 X 与一个复形 $Y \in \mathsf{Ch}^-(\mathbf{BN}_{m,n})$ 同伦等价，且其链群由宽度为 $\leq k$的缠结之和构成。

此后固定一个自然数 n 以及以下缠结

$\mathbb{1}_n =$  $\cup_i =$  $\cap_i =$  $B_i =$ 

对于 $i = 1,\ldots,n-1$。若一个复形 $X \in \mathsf{Ch}^-(\mathbf{BN}_{n,n})$ 满足 $\cap_i \star X \simeq 0 \simeq X \star \cup_i$ 对所有 $1 \leq i \leq n-1$均成立，则称其湮灭回转。

定理 4.13 ([链复形范畴12])。 存在一个复形 $P_n \in$ 链复形范畴$^-(\mathbf{BN}_{n,n})$ 以及一个链映射 η: $\mathbb{1}_n \to P_n$，满足以下性质：

(P1) P_n 湮灭回转。***(P2)*** 锥(η) 在同伦意义下的宽度为 $< n$。

这些性质在同伦意义下唯一确定了这一对 (P_n, η)。

注 4.14. 事实上，可以证明 [Hog12，推论 5。13] 对于任意 $X \in$ 链复形范畴$^-(\mathbf{BN})$ 我们有$X \star \cup_i \simeq 0$ 对所有 $1 \leq i \leq n-1$ 当且仅当 $\cap_i \star X \simeq 0$ 对所有 $1 \leq i \leq n-1$。因此，要证明P_n 湮灭回转，只需证明 P_n 从右侧湮灭回转（$P_n \star \cup_i \simeq 0$ 对于$1 \leq i \leq n-1$）或从左侧（$\cap_i \star P_n \simeq 0$ 对于 $1 \leq i \leq n-1$）。

定义 4.15。一个作用于 n 股的 *Cooper–Krushkal* 投影算子 是任意一对$(P_n,\ \eta)$ 满足定理4.13的公理 (P1) 和 (P2)。

命题 4.16。 若 $X \in$ 链复形范畴$^-(\mathbf{BN}_{m,n})$ 和 $Y \in$ 链复形范畴$^-(\mathbf{BN}_{n,m})$ 在同伦意义下具有宽度 $< n$, 那么

$$X \star P_n \simeq 0 \simeq P_n \star Y.$$

证明。 这直接由定义和同调扰动理论得出。 □

注记 4.17. 在实际应用中，公理 (P2) 通常通过以下方式实现。假设 P_n 可以表示为如下形式的链复形。

$$\cdots \to P_n^{-3} \to P_n^{-2} \to P_n^{-1} \to \mathbb{1}_n,$$

其中每个 $P_n^k$for $k < 0$均由宽度小于 n 的缠结张成，并令 $\eta\colon\ \mathbb{1}_n \to P_n$ 为次数零链对象的包含映射。然后

$$\mathrm{Cone}(\eta)\ \ \simeq\ \ \cdots \to P_n^{-3} \to P_n^{-2} \to P_n^{-1} \to 0$$

并且公理 (P2) 得到了满足。

这些公理意味着， P_n 以如下方式吸收 P_{n-1}。

引理 4.1 8. 设(P_{n-1}, η_{n-1}) 是作用于 $n-1$ 股上的 *Cooper–Krushkal* 投影算子。那么映射

$$P_n \cong \mathbb{1}_n \star P_n \xrightarrow{(\eta_{n-1} \sqcup \mathrm{id}_{\mathbb{1}_1}) \star \mathrm{id}_{P_n}} (P_{n-1} \sqcup \mathbb{1}_1) \star P_n$$

是一个同伦等价。

证明。 回顾一下，链映射 f 是同伦等价，当且仅当$\mathrm{Cone}(f)$ 是可缩的。命题中映射的锥同构于$(\mathrm{Cone}(\eta_{n-1}) \sqcup \mathbb{1}_1) \star P_n$，它是可缩的，因为$\mathrm{Cone}(\eta_{n-1})$ 在同伦意义下的宽度为 $< n$ ，且 P_n 湮灭回折弧。详情参见[CK12，命题 3。3] □

命题 4.19。 存在唯一的映射 $\nu\colon\ \ P_{n-1} \sqcup \mathbb{1}_1 \to P_n$，在同伦意义下具有性质$\nu \circ \eta_{n-1} \simeq \eta_n$。

证明。 对于存在性，我们可以将 ν 定义为链映射的复合

$$P_{n-1} \sqcup \mathbb{1}_1 \cong (P_{n-1} \sqcup \mathbb{1}_1) \star \mathbb{1}_n \xrightarrow{\mathrm{id} \star \eta_n} (P_{n-1} \sqcup \mathbb{1}_1) \star P_n \simeq P_n$$

(我们将其留作练习，证明 $\nu \circ \eta_{n-1} \simeq \eta_n$)。 ν的唯一性及其他性质可由关于范畴幂等元的一般事实 [Hog17，定理 1。6]。□

定理 4.20。 给定 $X \in$ 链复形范畴$^-(\mathbf{BN}_{n,n})$，令 $[X] \in$ 链复形范畴$^-(\mathrm{hTr}^q(\mathbf{BN}))$ 表示 X 的量子水平迹。存在一个切比雪夫系统 $\{[P_n], \pi^{(n)}\}_{n \geq 0}$，其中

$$\pi^{(n)} = [\nu]\colon [P_{n-1} \sqcup \mathbb{1}_1] \longrightarrow [P_n]$$

以及 ν 与命题4.19中的内容相同。

在此定理中，假设 $1 - q^d$ 对所有整数 $d > 0$均可逆。我们将在下一节利用以下引理证明定理4.20:

引理 4.21。 设 $f\colon\ \ P_n \to P_n$ 是一个量子次数为 d 的自同态，并且假设 $1 - q^d$ 可逆。那么诱导的自同态 $[f]\colon\ \ [P_n] \to [P_n]$是零伦的。

证明。 设

$$\theta\colon [P_n \star P_n] \longrightarrow [P_n \star P_n]$$

设链同构的各分量由循环性同构之和给出$^{\theta_{P_n^j,\ P_n^i}}\colon [P_n^i \star P_n^j] \to [P_n^j \star P_n^i]$。那么循环性同构的自然性蕴含

$$[\mathrm{id}\star f] \;=\; \theta \circ [f \star \mathrm{id}] \circ \theta^{-1} \;\simeq\; \theta \circ [\mathrm{id}\star f] \circ \theta^{-1} \;=\; q^d [f \star \mathrm{id}] \;\simeq\; q^d [\mathrm{id}\star f]$$

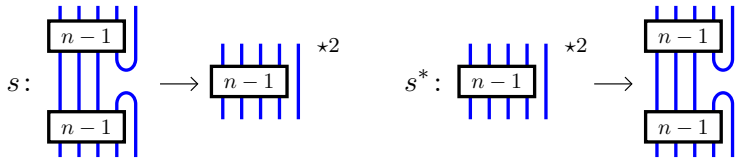
这里我们用到了对于任意自同态 $f\colon P_n \to P_n$，$\mathrm{id}\star f \simeq f \star \mathrm{id}$（这是关于幺元范畴幂等元的一般事实，参见 [BD14, 引理 3.18]）。因此 $(1-q^d)[\mathrm{id}\star f] \simeq 0$，从而 $[\mathrm{id}\star f] \simeq 0$。这也蕴含 $[f] \simeq 0$，因为 $(\eta_n \star \mathrm{id}) \circ f = (\mathrm{id}\star f) \circ (\eta_n \star \mathrm{id})$，且 $\eta_n \star \mathrm{id}$ 是同伦等价。□

5. 范畴幂等元模型

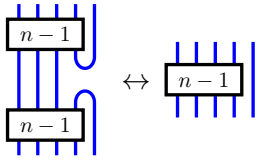
本节的目的是证明定理 4.20。为此，我们必须为 P_n仔细选择首选模型。我们先在 §5.1中做一些准备。然后在 §5.2 中，我们建立 P_n 的模型，它呈现出一种与 P_2类似的二周期性。

5.1. 设定。

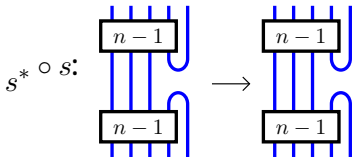
首先，建立一些后文将一直使用的记号会很有帮助。首先，令



表示由鞍点协边诱导的次数为$\mathbb{q}$ 的链映射。通过滥用记号，我们也将s, s^* 视为态射。



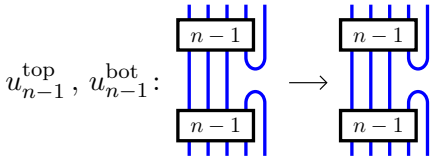
（通过同伦等价 $(P_{n-1} \sqcup \mathbb{1}_1)^{\star 2} \simeq P_{n-1} \sqcup \mathbb{1}_1$）。注意，由于



是“杯”和“帽”上的点之和。

还要回顾一下，在 [Hog14] 中构造了特殊的自同态 $u_1, \dots, u_n \in \mathrm{End}_{\mathrm{Ch}^-(\mathbf{BN}_n)}(P_n)$。自同态 u_k 生成了 P_n中次数为$\mathbb{t}^{2-2k}\mathbb{q}^{2k}$ 的自同态在模同伦意义下的$\Bbbk$-模，并且由这一性质可在相差同伦和可逆标量的意义下唯一确定。

最后，令

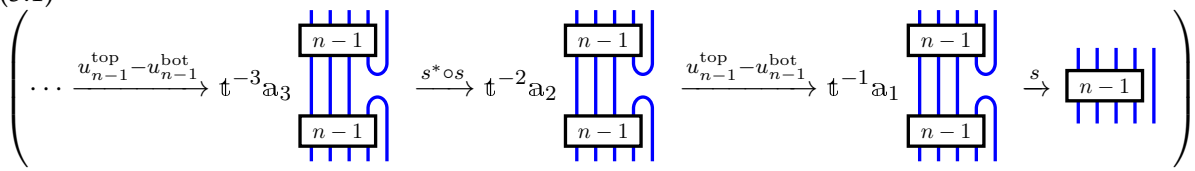


表示通过在 P_{n-1}的顶层或底层因子上作用 u_{n-1} 所给出的次数$\mathfrak{t}^{4-2n}\mathfrak{q}^{2n-2}$ 态射。

5.2. 的 2-周期模型 P_n。 定理 4.20 的证明 P_n。

定理 5.1。 存在一个 P_n 的模型，其形式为

(5.1)

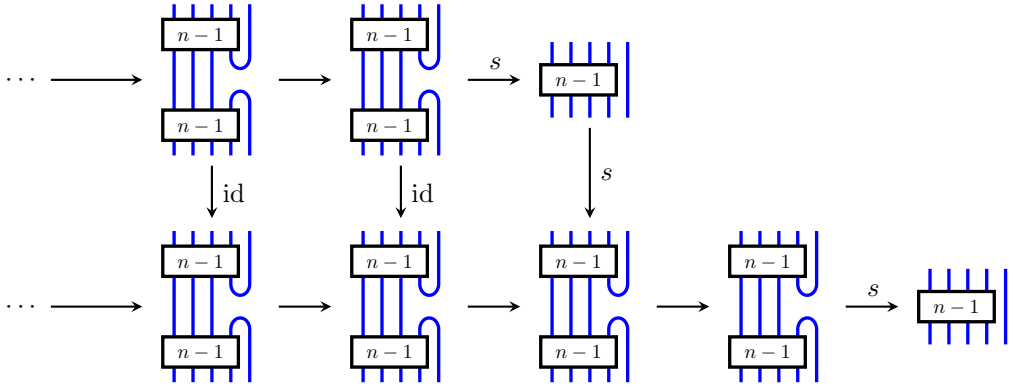


(w（此处省略了指向右侧的较长箭头），其中平移满足 *:*

$$\mathrm{a}_1 := \mathfrak{q} \qquad \mathrm{a}_{2k} = \mathfrak{t}^{4-2n}\mathfrak{q}^{2n-2}\mathrm{a}_{2k-1} \qquad \mathrm{a}_{2k+1} = \mathfrak{q}^2\mathrm{a}_{2k}$$

*f*对所有 $k \geq 1$ 均成立。此外，关于这个表达式，自同态 u_n 的作用为

(5.2)



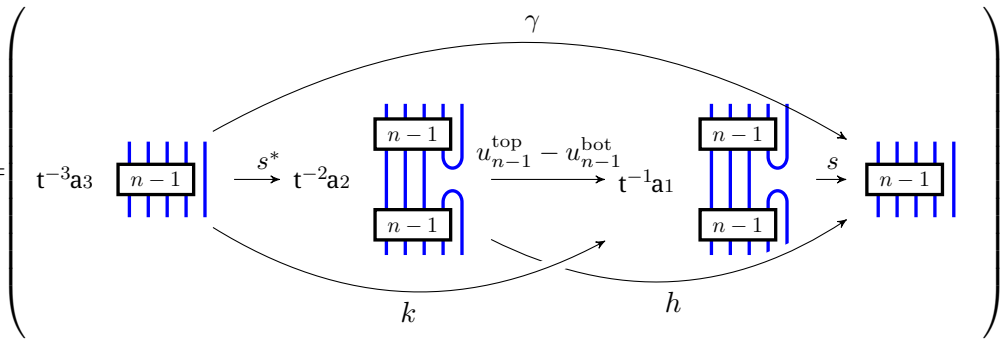
并带有严格指向右侧的箭头。

注 5.2. 表达式 (5.1) 将 Jones–Wenzl 幂等元的递归 (2.1) 右侧范畴化。

该定理将由以下内容推出。

引理 5.3. 存在如下形式的复形

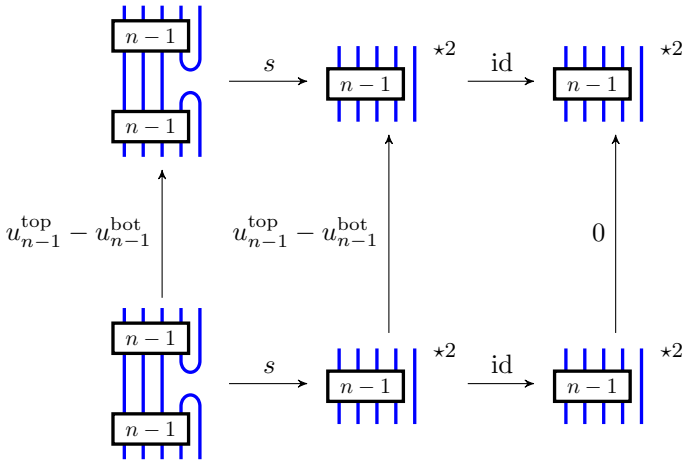
(5.3) $Q_n =$



经过适当的平移a_i。具体而言，$\mathrm{a}_1 = \mathfrak{q}$、$\mathrm{a}_2 = \mathfrak{t}^{4-2n}\mathfrak{q}^{2n-1}$、$\mathrm{a}_3 = \mathfrak{t}^{4-2n}\mathfrak{q}^{2n}$。这个复形会湮灭回转。

将 (5.3) 与 [Hog18]中的表达式 (4.10) 进行比较。

证明。 h 和 k 的存在性将由 $s\circ(u_{n-1}^{\mathrm{top}}-u_{n-1}^{\mathrm{bot}})$以及$(u_{n-1}^{\mathrm{top}}-u_{n-1}^{\mathrm{bot}})\circ s^*$ 在同伦意义下的消失推出。我们只证明其中第一个，因为第二个情形类似。考虑图表



第一个交换图显然是可交换的，第二个交换图也是可交换的，因为对于任意态射 f， $f\star\mathrm{id}\simeq\mathrm{id}\star f$作为 $P_{n-1}\star P_{n-1}$ 的自同态成立（这是关于幺元范畴幂等元的一般事实，参见 [BD14，引理 3.18]）。这意味着 $s\circ(u_{n-1}^{\mathrm{top}}-u_{n-1}^{\mathrm{bot}})\simeq 0$，从而得到 h 的存在性。类似的论证可以得到 k 的存在性。最后，构造 γ 的阻碍是 $P_{n-1}\sqcup\mathbb{1}_1$ 的一个次数为 $\mathrm{t}^{3-2n}\mathrm{q}^{2n}$ 的自同态。根据与 [Hog18，引理 4.34] 中完全相同的论证，任何此类阻碍在同伦意义下都消失。至此， Q_n 的构造完成。□

利用此 Q_n，我们为 P_n构造其 2-周期模型。

定理的证明5.1。 显然，将 Q_n 的无穷多个副本拼接在一起，将得到形如（5.1）的复形。更具体地说， Q_n 带有一个次数为∂ 的自同态$\mathbb{t}^{1-2n}\mathbb{q}^{2n}$，它投影到（5.3）最左端的项，并将该项包含为最右端的项。预拼接复形为

$$\left(Q_n\longrightarrow \mathbb{t}^{2-2n}\mathbb{q}^{2n}Q_n\longrightarrow \mathbb{t}^{4-4n}\mathbb{q}^{4n}Q_n\longrightarrow\cdots\right)\tag{5.4}$$

它显然带有一个次数为 U' 的自同态 $\mathbb{t}^{2-2n}\mathbb{q}^{2n}$，该自同态仅将上述表达式向右平移一个单位。根据构造，$\mathrm{Cone}(U')\simeq Q_n$。消去可缩项后，我们得到真正的拼接复形（5.1），并带有一个形如（ U 的链自同态（5.2）（这是高斯消元中的一个简单练习，但还要注意，同伦等价 $\mathrm{Cone}(U)\simeq\mathrm{Cone}(U')\simeq Q_n$对 U施加了严格限制）。我们将此拼接复形记为 P_n'。一旦我们证明 $P_n'\simeq P_n$，则由于次数的原因， U 是 $\pm u_n$的一个模型这一事实便可得出。

显然， P_n' 满足定理4.13中的公理（P2），因此要完成证明，我们必须说明 P_n' 从右侧湮灭回折弧。单侧扭曲复形（5.4）满足局部升链条件，因为 Q_n 有上界，因此根据同调

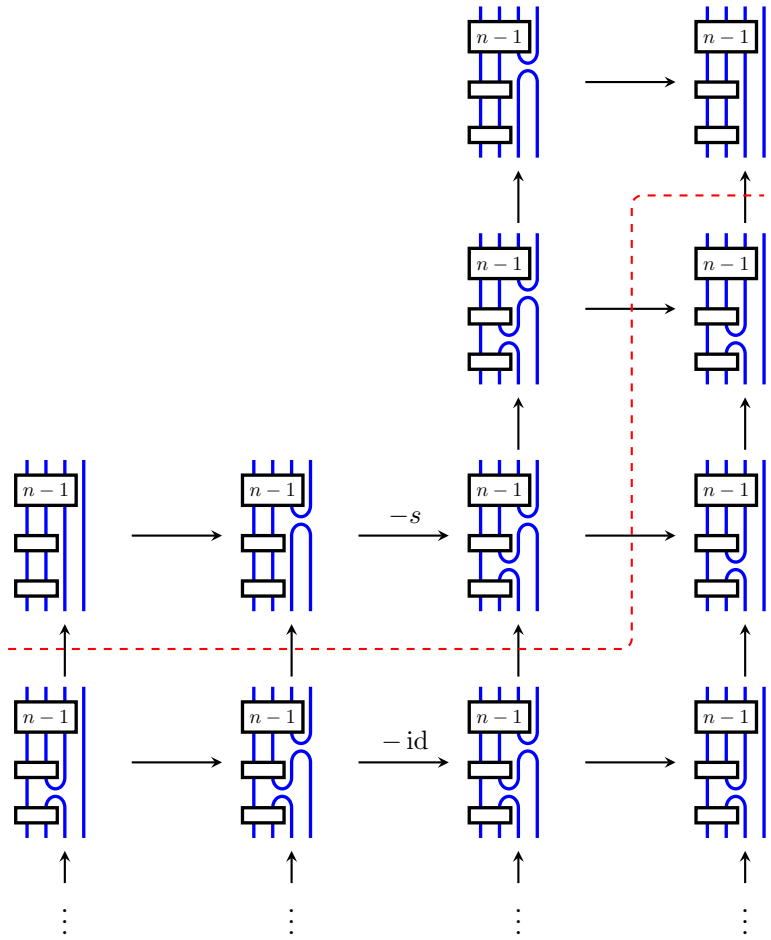


图4。展开下投影算子后的复形 Q_n 。

扰动， P_n' 湮灭回折弧当且仅当 Q_n 如此。我们通过归纳法假设，已经证明了 $P_{n-1}' \simeq P_{n-1}$。

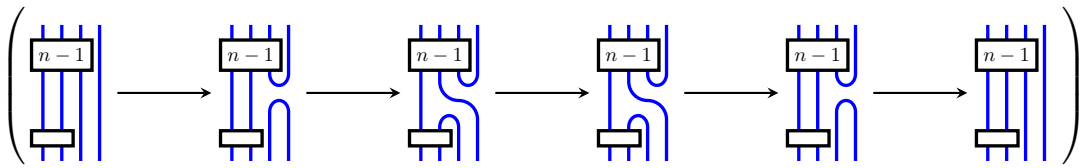
考虑 5.3 中的表达式 Q_n。此复形湮灭 B_k ，当 $1 \leq k \leq n-2$ 时，这是因为 $P_{n-1} \sqcup \mathbb{1}_1$ 也如此。因此我们必须证明 B_{n-1} 湮灭 Q_n。为此，找到 Q_n 的一个“六项”表达式将很有帮助。根据 中的递归 5.1，我们将 P_{n-1} 中右侧的下投影算子展开，得到 P_{n-1}，从而得到 Q_n 的表达式，如图 4 所示。

在此图中，我们省略了较长的箭头，包括严格指向右上方的箭头。标记为 $-s$ 和 $-\mathrm{id}$ 的箭头来自 $-u_{n-1}^{bot}$ 的展开，而对应于 u_{n-1}^{top} 的箭头将指向右上方。

在本证明中，来自映射 h 和 γ 在 Q_n 中的箭头无关紧要，但必须确保映射 k 展开后的所有箭头都（非严格地）指向右上方。这可以通过梳理毛发来实现，也可以直接如下进行。由引理5.3的证明可知， $k = s^* \circ k'$ 其中 s^* 是一个鞍点协边，而k' 是自同态 $u:=u_{n-1}^{\mathrm{top}}-u_{n-1}^{\mathrm{bot}}$ 在 $P_{n-1}^{\star 2} \sqcup \mathbb{1}_1$上的零伦。现在，如果我们展开 $P_{n-1}^{\star 2} \sqcup \mathbb{1}_1$中的下投影算子，就会得到图中所示的单侧扭曲复形

第4幅图最左侧的一列。在这个复形中，第一项之后的所有项都是可缩的。因此，利用同调扰动理论，我们得到一个从该扭曲复形到其首项的同伦等价，记为 F。其逆同伦等价记为G，由包含映射给出；并且存在一个同伦 H，连接 $P_{n-1}^{\star 2} \sqcup \mathbb{1}_1$的恒等映射与 GF，使得 H 中没有向下的箭头。现在，在 k的定义中，我们可以将 k' 替换为一对同伦 $u \simeq GFu \simeq 0$，分别由 Hu 和 GFk'给出。由此得到一个新的映射 k，其各分量都（非严格地）指向右上方。

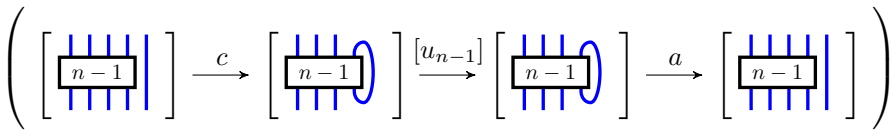
有鉴于此，现在我们可以消去图4 中虚线下方的可缩项。吸收 $(P_{n-1} \sqcup \mathbb{1}_1) \star (P_{n-2} \sqcup \mathbb{1}_2) \simeq P_{n-1} \sqcup \mathbb{1}_1$之后，可得一个同伦等价

$Q_n \simeq$ 

其中所有长度为一的映射都是鞍点映射，除了中间的那个映射，它是$u_{n-2}^{\mathrm{top}} - u_{n-2}^{\mathrm{bot}}$ (这里我们利用了 k 的分量指向右上方这一事实)。左右两半分别被 $- \star B_{n-1}$ 消去（例如参见 [CK12, 第 7.1 小节。1], 因此 Q_n 也被 $- \star B_{n-1}$ 消去。证明完毕。 □

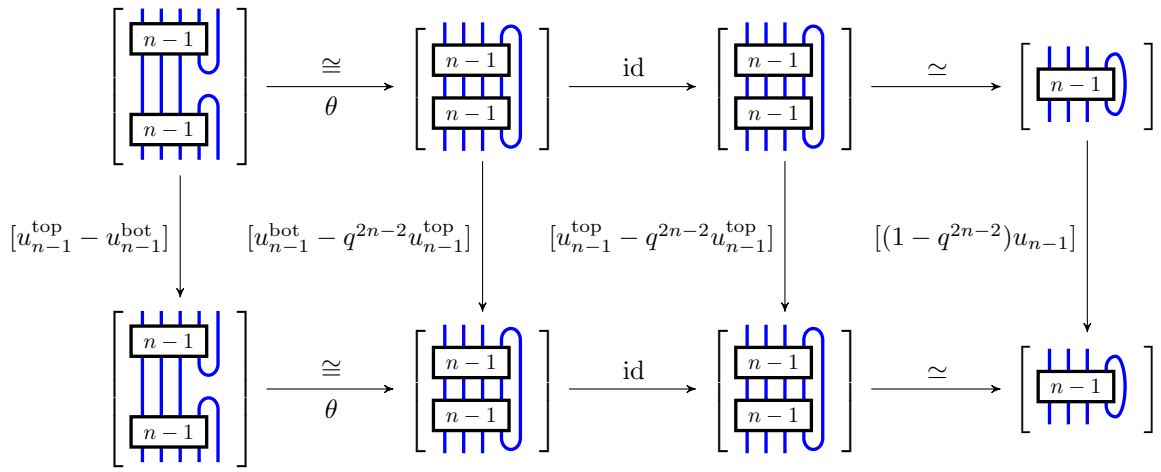
5.3. **的量子迹** P_n。 本节中，我们使用复形 $[Q_n]$ 来证明 $[P_n]$ 与 $V_n := \operatorname{im} p_n$同伦等价。特别是，这将导出定理4.20的证明。

引理 5.4. 我们有

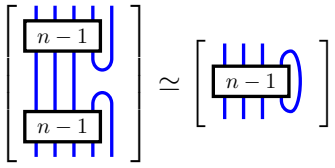
$[Q_n] \simeq$ 

这里我们省略了较长的箭头，其中 a 和 c 均由循环性同构和鞍点诱导。

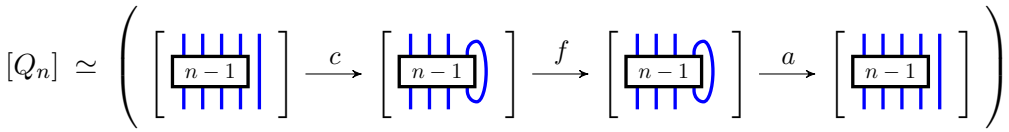
证明。 我们首先注意到，下面的图表在同伦意义下交换：



水平映射的复合给出了一个同伦等价



将此同伦等价应用于 $[Q_n]$中的两个中间项，我们得到 t

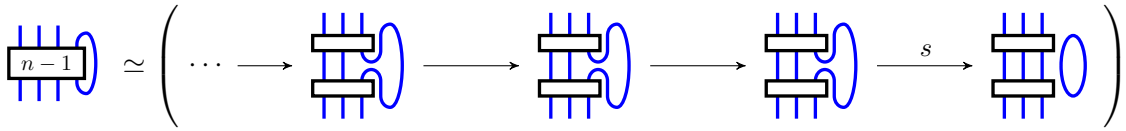


其中 $f = (1 - q^{2n-2})[u_{n-1}]$。由于假设 $1 - q^{2n-2}$ 可逆，引理得证。□

现在我们可以证明：

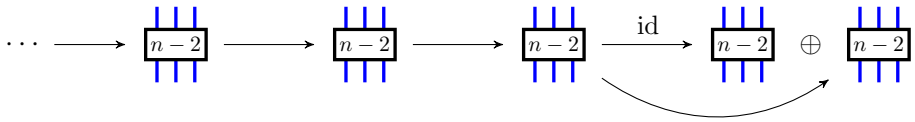
引理 5.5. $[P_n] \simeq V_n$

证明。 由定理5.1，我们有如下展开式



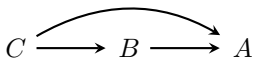
其中右侧与.....同伦

(5.5)



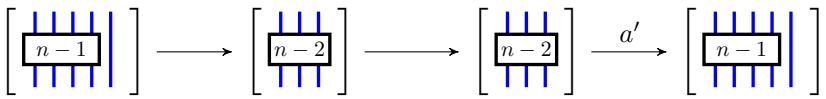
现在，我们用上述展开替换引理 5.4 中复形的中间项。由此得到 $[Q_n]$ 的表达式，如图 5所示。

如虚线所示，图 5 中的复形可视为如下形式的单侧扭曲复形



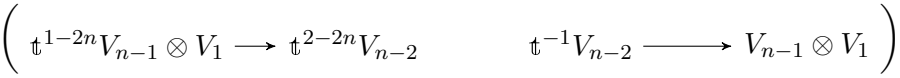
其中 B 和 C 的底部部分是可缩的。将这些可缩部分消去后，此扭曲复形变为

(5.6)



现在我们对 n 使用归纳法，将剩余的 $[P_{n-1} \sqcup \mathbb{1}_1]$ 和 $[P_{n-2}]$ 替换为 $V_{n-1} \otimes V_1$ 和 V_{n-2}。考虑到上同调分次的平移（但不考虑量子分次的平移），可得

(5.7)



另一方面，定理 5.1 的证明表明

$$[Q_n] \simeq \left([\mathbb{t}^{1-2n} P_n] \xrightarrow{[u_n]} [P_n] \right) \simeq \left([\mathbb{t}^{1-2n} P_n] \xrightarrow{0} [P_n] \right) = [\mathbb{t}^{1-2n} P_n] \oplus [P_n] \tag{5.8}$$

其中，第二个同伦等价由引理 4.21 得出，因为 u_n 具有非零量子次数。

考虑到分次移位，现在很容易看出，5.8只有在（5.7）中的两个箭头都非零且 $[P_n] \simeq V_n$ 时才能成立。事实上，我们有 $V_{n-1} \otimes V_1 \cong V_n \oplus V_{n-2}$，而（5.7）中的两个中间项由于分次原因不能通过箭头连接（这里我们可以假设 $n > 2$，因为 $n = 2$情形是直接的）。□

注 5.6。映射 a 由引理 5.4 中的复合诱导 $s \circ \theta^{-1}$ 其中 s 是一个鞍点，且 θ 是由循环性同构给出的链同构。由此可以很容易看出，映射 a' 在（5.6）和图 5 中由一个环带 $[P_{n-2}] \to [P_{n-2} \sqcup \mathbb{1}_2]$诱导。另一方面，（5.6）中最左侧的映射更难描述，因为它可能依赖于连接图 5中的最左侧项与 C的最右侧列的较长箭头。因而，尚不清楚这个映射是否非零，尽管这一点可以从引理5.5的证明中间接得到。

尽管定理 4.20 可由引理5.5 及其证明隐含地推出，但现在我们将给出该定理的具体证明，明确展示 $[P_n]$ 变形收缩到复形 A（见图 5）。不过请注意，此证明的一部分依赖于引理 5.5。

定理的证明 定理 4.20。通过使用引理 5.4的一个类似结果，我们可以将 P_n 的迹写为

$$[P_n] \simeq \left(\cdots \xrightarrow{[u_{n-1}]} \left[\boxed{n-1} \right] \xrightarrow{b} \left[\boxed{n-1} \right] \xrightarrow{[u_{n-1}]} \left[\boxed{n-1} \right] \xrightarrow{a} \left[\boxed{n-1} \right] \right)$$

其中 b 由置于成环线段上的一个点给出。在 $[P_n]$的这一展开中，我们现在将每一项（首项除外）替换为（5.5）中的展开。这便得到图 $[P_n]$ 所示的 $[P_n]$ 表达式，见图 6。

请注意，图 A 和 B 中的复形与图 5 中的复形完全相同。虽然复形 B 显然是可缩的，但 D 是否可缩尚不清楚，因为可能存在更长的箭头，将 D 中最左侧的项连接到其最右侧的列。

然而，一个简单的分次论证表明，A 会成为 $[P_n]$ 的直和项，如果将 $[P_{n-2}]$ 和 $[P_{n-1} \sqcup \mathbb{1}_1]$ 替换为 V_{n-2} 和 $V_{n-1} \otimes V_1$。由于所得复形$V_{n-2} \to V_{n-1} \otimes V_1$ 必然包含 V_n 作为直和项，并且由于根据引理5.5，于是可推出展开式中的复形 $\ldots \to D \to B \to D \to B$ 在 $[P_n]$ 中必须是可缩的。因此，$[P_n]$ 变形收缩为复形

$$A = \left(\left[\boxed{n-2} \right] \xrightarrow{a'} \left[\boxed{n-1} \right] \right)$$

其中 a' 的描述见注 5.6。定理现在由模型的定义得出。□

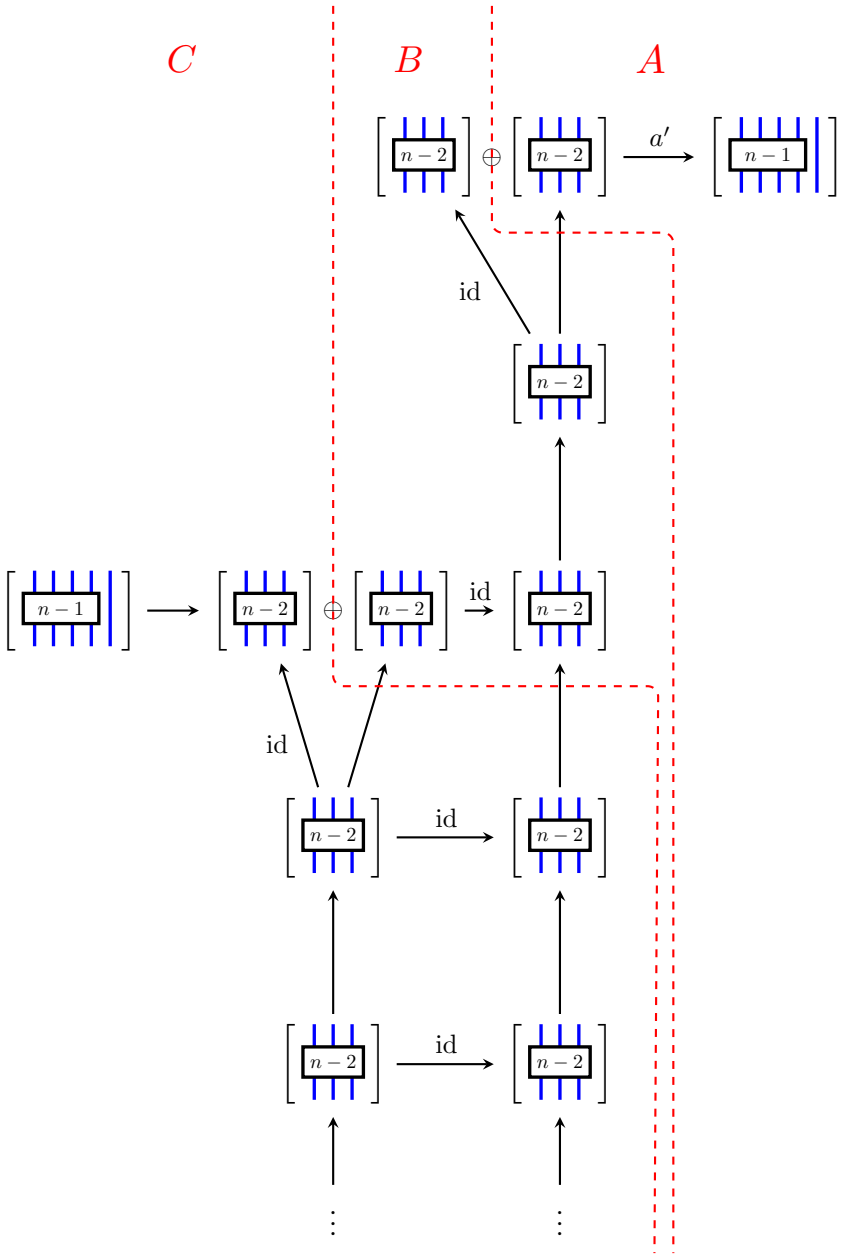


图 5. 不含较长箭头的 $[Q_n]$ 展开。

6. 广义投影子的量子迹

在 [CH15], 中，B. Cooper 和第二作者引入了一个复形族 $P_\varepsilon \in \mathrm{Ch}^-(\mathcal{BN}_n)$，它们将 $\mathcal{TL}$ 中的不可约幂等元范畴化[−]。本节将给出这些复形存在性的一种全新且简洁的证明。随后我们将证明，量子水平迹中的 P_ε 的类只取决于 P_ε的贯穿次数（定理 C）。与前几节一样，我们需要假设 $1 - q^d$ 对于$d > 0$是可逆的。

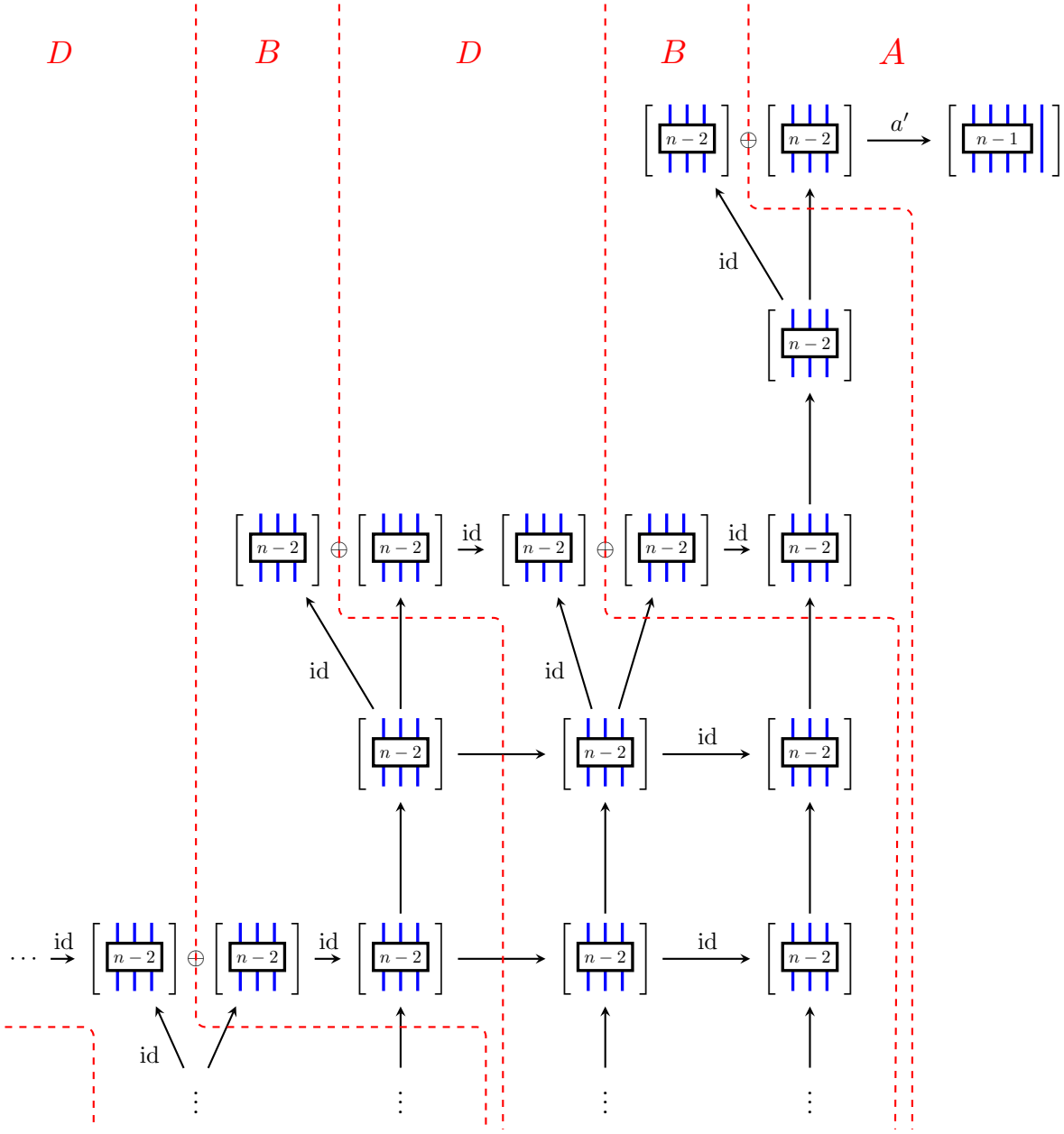


图 6. 不含较长箭头的 $[P_n]$ 展开式。

6.1. 中的幂等元 $\mathcal{TL}$。 回顾一下，$\Bbbk$-线性范畴 $\mathcal{C}$ 的 Karoubi 包络是范畴 Kar($\mathcal{C}$)，其对象是形如 im e的形式表达式，其中 e 是 $\mathcal{C}$中的幂等自同态。若 e，e'是 $\mathcal{C}$中的幂等自同态，那么 $\mathcal{C}$ 中任何形如 $e\circ f\circ e'$的态射，都视为 Kar($\mathcal{C}$)中从 im $e\leftarrow$ 到 im e' 的态射。

回顾一下 Temperley–Lieb 范畴 $\mathcal{TL}$。该范畴有由$n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$索引的恒等映射 id_n，而 im $\mathrm{id}_n\leftarrow$到 im id_m 的态射空间是 $(n,\ m)$ 缠结的 Temperley–Lieb 空间，记作$\mathcal{TL}_{n,\ m}$。我们还将 $\mathcal{TL}_n:=\mathcal{TL}_{n,\ n}$记作。

我们还有 Jones–Wenzl 幂等元 $p_n=\mathrm{id}_n\circ p_n\circ \mathrm{id}_n$。

命题 6.1。 存在一个幺半群函子，从 $\mathrm{Kar}(\mathcal{TL})$ 到有限维$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 表示范畴，并将其映射为

$$\mathrm{im}\,\mathrm{id}_n \longmapsto V_1^{\otimes n}, \qquad \mathrm{im}\,p_n \longmapsto V_n,$$

其中， V_n 表示 U_q（$\mathfrak{sl}_2$）的 $n+1$ 维单表示。该函子是范畴的一个等价。

众所周知

$$V_n \otimes V_1 \cong V_{n+1} \oplus V_{n-1} \tag{6.1}$$

对于 $n \geq 1$，以及

$$V_0 \otimes V_1 \cong V_1.$$

由于上式右端的直和项是互不相同的单对象，因此存在唯一的一对 $V_n \otimes V_1$ 的互补幂等自同态，它们分别投影到与 $V_{n\pm1}$同构的直和项上。

反复应用（6.1）可以得到一组优选的幂等自同态，它们投影 $V_1^{\otimes n}$到其单直和项上。本节的目标是通过适用于范畴化的方法，在 $\mathcal{TL}$中得到这样的幂等元分解。我们首先引入中心幂等元 $p_{n,\,k} \in \mathcal{TL}_n$；在经由函子映射到 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$表示后，它们变为将 $V^{\otimes n}$ 投影到其 V_k-同型分量上的投影。

命题 6.2。 存在唯一的一族元素 $p_{n,k} \in \mathcal{TL}_n$，由满足 $k \equiv n$ （模 2）的整数 $0 \leq k \leq n$ 索引，使得

1) $\mathrm{id}_n = \sum_k p_{n,\,k}$。 *2)* $p_{n,\,k}$ 是若干经由 $p_k \in \mathcal{TL}_k$分解的元素之和。

证明。 存在性证明通过对 n 进行归纳法完成。在基例中，我们有 $p_{0,0} = \mathrm{id}_0$ 和$p_{1,1} = \mathrm{id}_1$。因此，假设 $p_{n,k}$ 已按照陈述中的方式构造。根据假设，$p_{n,k}$可以写成

$$p_{n,k} = \sum_i x_{n,k,i} p_k y_{n,k,i}$$

对于某些元素$x_{n,\,k,\,i} \in \mathcal{TL}_{n,\,k}$ 以及 $y_{n,\,k,\,i} \in \mathcal{TL}_{k,\,n}$。添加一条股线得到

$$p_{n,k} \sqcup \mathrm{id}_1 = \sum_k (x_{n,k,i} \sqcup \mathrm{id}_1)(p_k \sqcup \mathrm{id}_1)(y_{n,k,i} \sqcup \mathrm{id}_1).$$

Jones–Wenzl 幂等元所满足的递归告诉我们， $p_k \sqcup \mathrm{id}_1$ 是由p_{k+1} 以及经过 p_{k-1} 分解的项构成的和。因此，$p_{n,\,k} \sqcup \mathrm{id}_1$ 可以写成经过 p_{k+1} 或 p_{k-1} 分解的若干项之和，进而根据归纳法，id_{n+1} 可以写成经过不同 l 的 p_l 分解的若干项之和，由此完成了关于$\{p_{n,k}\}_{n,\,k}$存在性的归纳证明。

我们做一些观察。如果 $f \in \mathcal{TL}_{n,m}$ 通过 p_k 分解，那么 $l \neq k$ 意味着 $f p_{n,l} = 0$，因此

$$f = f \sum_l p_{n,l} = f p_{n,k}.$$

类似的论证表明 $f = p_{m,\,k} f$。现在，假设 $f \in \mathcal{TL}_n$ 是经由 p_k分解的若干项之和，而 $\mathrm{id}_n - f$ 是对各种 $l \neq k$而言经由 p_l 分解的若干项之和。那么 $p_{n,\,k} f = f$ 且 $p_{n,\,k}(\mathrm{id}_n - f) = 0$。换言之，

$$f = p_{n,k} f = p_{n,k}.$$

这证明了$p_{n,\ k}$的唯一性。 □

以下记录了$p_{n,k}$ 的其他性质。

推论 6.3。 $p_{n,\ k}$ 是 $\mathcal{TL}_n$中的一组完备的两两正交幂等元，其中$p_{n,\ n} = p_n$。 □

推论 6.4。 *The* $p_{n,k}$ 是中心的，其含义是 $p_{n,k}f = fp_{m,k}$ 对所有 $f \in \mathcal{TL}_{n,m}$ 均成立（若 $n < k$ 或 $m < k$，则将其解释为零）。

证明。 如果 f 可通过某个 k 分解，则$f = p_{n,\ k}f = fp_{m,\ k}$。 任意$f \in \mathcal{TL}_{n,\ m}$ 都是若干项的和，而每一项都可通过某个 p_k分解，由此完成证明。□

推论 6.5。 我们有 $(p_{n-1,k} \sqcup \mathrm{id}_1)p_{n,l} = 0$ 除非 $l = k+1$ 或 $l = k-1$。

证明。 我们已经看到 $p_{n-1,\ k} \sqcup \mathrm{id}_1$ 是经由 p_{k+1} 或 p_{k-l} 分解的若干项之和；推论由此得出。□

我们注意到，$p_{n,\ k}$ 并非本原幂等元。为了在 $\mathcal{TL}_n$ 中构造一组完备的本原幂等元，我们采用如下方法。

定义 6.6。 如果对于所有$1 \le i \le n$都有 $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i \ge 0$，则称序列 $\varepsilon \in \{1, -1\}^n$ 为可容许的 。对于每个可容许的 $\varepsilon \in \{1, -1\}$，通过以下公式定义元素 $p_\varepsilon \in \mathcal{TL}_n$

$$p_\varepsilon = \prod_{i=1}^{n} (p_{i,\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_i} \sqcup \mathrm{id}_{n-i})$$

命题 6.7. 集合 $\{p_\varepsilon \mid \varepsilon \in \{1, -1\}^n$ 是可容许的$\}$，是 $\mathcal{TL}_n$ 中一组完备的正交幂等元。此外，像 p_ε ≅像$p_{|\varepsilon|}$ 属于 $\mathrm{Kar}(\mathcal{TL})$；特别地，幂等元 p_ε 是本原的。

证明。 我们将 id_n 的幂等元分解相乘：

$$\mathrm{id}_n = \prod_{m=1}^{n} \left(\sum_k p_{m,k} \sqcup \mathrm{id}_{n-m} \right) = \sum_{k_1,\ldots,k_n} p'_{1,k_1} p'_{2,k_2} \cdots p'_{n,k_n},$$

其中，我们简写为 $p'_{m,k} := p_{m,k} \sqcup \mathbb{1}_{n-m}$，右侧的求和指标遍历满足 $0 \le k_m \le m$ 和 $k_m \equiv m$（模 2）的序列（$k_1, \ldots, k_n$）。注意到所有因子 $p'_{m,k}$ 彼此可交换，因此 $p'_{1,k_1}p'_{2,k_2} \cdots p'_{n,k_n}$ 是正交幂等元。推论 6.5 表明，除非对所有$2 \le m \le n$均有 $k_m = k_{m-1} \pm 1$，否则 $p'_{1,k_1}p'_{2,k_2} \cdots p'_{n,k_n}$ 为零。我们得到一个幂等元分解

$$\mathrm{id}_n = \sum_\varepsilon p_\varepsilon$$

该分解以可容许序列 $\varepsilon \in \{1, -1\}^n$ 为指标，正如所述。

为了证明 $\mathrm{im}\, p_\varepsilon \cong \mathrm{im}^{p_{|\varepsilon|}}$ 属于 $\mathrm{Kar}(\mathcal{TL})$，我们对 n 使用归纳法。对于 $n = 0$ 或 $n = 1$，该结论显然成立，因为在这些情况下 $p_\varepsilon = p_n = \mathrm{id}_n$。假设归纳地有 $\mathrm{im}\, p_\varepsilon \cong \mathrm{im}\, p_k$，其中 $k = |\varepsilon|$。分解 $p_\varepsilon \sqcup \mathrm{id}_1 = p_{(\varepsilon,1)} + p_{(\varepsilon,-1)}$ 给出一个同构

$$\mathrm{im}(p_\varepsilon) \otimes \mathrm{im}(\mathrm{id}_1) \cong \mathrm{im}(p_{(\varepsilon,1)}) \oplus \mathrm{im}(p_{(\varepsilon,-1)}).$$

另一方面，

$$\mathrm{im}(p_\varepsilon) \otimes \mathrm{im}(\mathrm{id}_1) \cong \mathrm{im}(p_k) \otimes \mathrm{im}(\mathrm{id}_1) \cong \mathrm{im}(p_{k+1}) \oplus \mathrm{im}(p_{k-1})$$

由于 $p_{(\varepsilon,\pm 1)}$ 可经由 $p_{k\pm 1}$分解，唯一的可能性是 $\mathrm{im}(p_{(\varepsilon,\pm 1)}) \cong \mathrm{im}(p_{k\pm 1})$。证明至此完成。□

6.2. **范畴化中心幂等元**。本节将介绍 §6.1中幂等元分解的范畴化类比。如 §4.3所述，Cooper–Krushkal 投影子 $P_n \in$ 链复形范畴$^-(\mathbf{BN}_n)$ 是 Jones–Wenzl 幂等元的范畴论类比 $p_n \in \mathcal{TL}_n$。

定义 6.8。给定满足 $k \equiv n \pmod 2$ 的整数 $0 \le k \le n$，我们令 $\mathcal{X}_{n,k}$ 表示由复形组成的集合，这些复形是 q 平移的复形的直和，且这些复形具有如下形式：$T \star P_k \star T'$，其中 T, T'分别是$\mathbf{BN}_{n,k}$和$\mathbf{BN}_{k,n}$ 的对象。我们称 $X \in \mathrm{Ch}^-(\mathbf{BN}_n)$ 经由 P_k分解，如果 $X \simeq X'$ 且满足 $X' \in \langle \mathcal{X}_{n,k} \rangle$。

注意，我们不允许在定义中使用上同调移位，因此 $\mathcal{X}_{n,\ k}$每个复形都支撑于上同调次数 ≤ 0。

引理 6.9。如果 $X \in$ 链复形范畴$^-(\mathbf{BN}_n)$ 可经由 P_k 分解，那么 $X \sqcup \mathbb{1}_1 \in$ 链复形范畴$^-(\mathbf{BN}_{n+1})$ 与一个经由 P_{k+1} 和 P_{k-1} 分解的复形同伦等价。

证明。Cooper-Krushkal 投影子所满足的递归关系保证，若 $X = T \star P_k \star T'$则 $X \sqcup \mathbb{1}_1 = (T \sqcup \mathbb{1}_1) \star (P_k \sqcup \mathbb{1}_1) \star (T' \sqcup \mathbb{1}_1)$ 与$\langle \mathcal{X}_{n+1,k+1} \cup \mathcal{X}_{n+1,k-1} \rangle$中的一个复形同伦等价。于是，引理 3.12 完成了证明。□

引理 6.10。假设我们有$X \in \mathcal{X}_{n,k}$ 和 $Y \in \mathcal{X}_{n,l}$。我们有：

1) 如果 $k < l$，则每个链对象 X^m 都满足 $\mathrm{Hom}(X^m, Y) \simeq 0$。

2) 如果 $k = l$ 且 $m < 0$，则 $\mathrm{Hom}(X^m, Y) \simeq 0$。

证明。我们使用对偶同构 $\mathrm{Hom}(X^m, Y) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{1}_n, (X^m)^\vee \star Y)$，以及 X^m 的穿越次数为 $\le k$ 这一事实，且当且仅当 $m = 0$ 时取等号。由于 Y 经由 P_l 分解，若 X^m 的穿越次数严格小于 l，则 $X^m \star Y$ 可缩；当 $k < l$ 或 $k = l$ 且 $m < 0$ 时便会如此。□

定理 6.11。存在唯一的复形族$P_{n,\ k} \in$ 链复形范畴$^-(\mathbf{BN}_n)$，使得

1) $\mathbb{1}_n \simeq \big(P_{n,n} \to P_{n,n-2} \to \cdots \to P_{n,0 \text{ 或 } 1}\big)$。

2) $P_{n,k}$ 通过.....进行分解 P_k。

证明。固定 n，并令 $\Omega = \{k \mid 0 \le k \le n, k \equiv n \text{ (模 2)}\}$，其序为 $k \trianglelefteq l$，若 $k > l$（注意序的反转）。迭代应用引理 6.9，可知 $\mathbb{1}_n$ 同伦等价于一个复形$E \in \langle \mathcal{X}_{n,k} \mid k \in \Omega \rangle$。构造的其余部分通过梳理毛发完成。

确切地说，注意到复形集合 $\mathcal{X}_{n,k}$（由 $k \in \Omega$ 索引）满足引理 3.15 的假设，这是由引理 6.10得到的。梳理毛发会得到一个复形 $E' \simeq \mathbb{1}_n$，它可以写成 $E = \mathrm{tw}_{\delta'}(\bigoplus_{i \in I'} \mathbb{t}^{a(i)} X_i)$，其中 I 是一个偏序集，$X_i \in \mathcal{X}_{\omega(i)}$，使得 $i \le j$ 蕴含 $\omega(i) \trianglelefteq \omega(j)$ 或 $\omega(i) = \omega(j)$，并且 $a(i) < a(j)$。我们可以按照穿越次数 k 和上同调移位 a 对各项进行归类，从而得到

$$\mathbb{1}_n \simeq \mathrm{tw}_{\delta+\varepsilon}\left(\bigoplus_{k \in \Omega} \bigoplus_{a \le 0} E'_{k,a}\right)$$

其中，扭曲 δ 仅当 $k \triangleleft l$ 时将 $E'_{k,a}$ 映射到 $E'_{l,b}$；扭曲 ε 仅当 $k = l$且 $a \le b$时将 $E'_{k,a}$ 映射到 $E'_{l,b}$。那么，复形 $P_{n,k} = \mathrm{tw}_{\varepsilon}(\bigoplus_{a \le 0} E'_{k,a})$ 如陈述所述。□

命题 6.12. 给定 $X \in$ 链复形范畴$^-(\mathbf{BN}_{n,m})$ 我们有 $P_{n,k} \star X \simeq X \star P_{m,k}$，其关于 X 是自然的，且在同伦意义下成立。

证明。 定义复形

$$P_{n,\leq k} = (P_{n,k} \to P_{n,k-2} \to \cdots \to P_{n,0 \text{ or } 1}),$$
$$P_{n,\geq k} = (P_{n,n} \to P_{n,n-2} \to \cdots \to P_{n,k}).$$

那么 $P_{n,\ k} \simeq P_{n,\ \geq k} \star P_{n,\ \leq k}$。因此，只需证明 $P_{n,\ \geq k}$ 和 $P_{n,\ \leq k}$ 都是中心的，如陈述所示。这些复形的中心性可由 [Hog17，定理 424] 得出。 □

以下内容显而易见。

引理 6.13。 假设 $X \in$ 链复形范畴$^-(\mathbf{BN}_n)$ 通过 P_k 因子化。那么 $P_{n,l} \star X \simeq 0$ 若 $l \neq k$，且$P_{n,k} \star X \simeq X$。若 $l \neq k$，则 $P_{n,k} \star X \simeq 0$。

证明。 设 $X, Y \in$ 链复形范畴$^-(\mathbf{BN}_n)$ 是复形，且 X 可通过 P_k 分解， Y可通过 P_l 分解。于是 $X \star Y \simeq 0$。特别地，$P_{n,l} \star X \simeq 0$。利用 $\mathbb{1}_n$ 按中心幂等元进行的幂等元分解，我们得到：

$$X \simeq \mathrm{tw}_\delta \left(\bigoplus_k P_{n,k} \right) \star X \cong \mathrm{tw}_\delta \left(\bigoplus_k P_{n,k} \star X \right) \simeq P_{n,k} \star X,$$

其中，在最后一步中，我们利用同调扰动将可缩复形 $P_{n,l} \star X$ $(l \neq k)$ 收缩。□

6.3. **本原范畴化幂等元**。 以下定义了幂等元的范畴类比 $p_\varepsilon \in \mathcal{TL}_n$， 见定义 6.6。

定义 **关于 6.14**。对于每个可容许的 $\varepsilon \in \{1, -1\}$，通过公式定义 $P_\varepsilon \in$ 链复形范畴$^-(\mathbf{BN}_n)$。 a

$$P_\varepsilon = \star_{i=1}^n (P_{i,\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i} \sqcup \mathbb{1}_{n-i}).$$

命题 6.15. 若 $\varepsilon \neq \nu$，则有 $P_\varepsilon \star P_\nu \simeq 0$，且 $\mathbb{1}_n \simeq$ 扭曲$_\delta(\bigoplus_\varepsilon P_\varepsilon)$ 其中该扭曲 δ严格降低偏序 $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)T \geq (\nu_1, \ldots, \nu_n)$，若对所有 $i = 1, \ldots, n$ 均有 $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i \geq \nu_1 + \cdots + \nu_i$。

证明。 这与命题 6.7类似，许多细节留给读者。我们将 $\mathbb{1}_n = \mathbb{1}_m \sqcup \mathbb{1}_{n-m}$ 关于 $1 \leq m \leq n$的幂等元分解张量在一起：

$$\mathrm{id}_n \simeq \star_{m=1}^n \left(\sum_k P_{m,k} \sqcup \mathrm{id}_{n-m} \right) = \bigoplus_{k_1, \ldots, k_n} P'_{1,k_1} P'_{2,k_2} \cdots P'_{n,k_n},$$

其中包含一个使一个或多个指标 k_i减小的扭曲。这里我们用$P'_{m,k} := P_{m,k} \sqcup \mathbb{1}_{n-m}$来简写，右侧的和以满足 $0 \leq k_m \leq m$ 且 $k_m \equiv m$ (模 2)的序列 $(k_1, \ldots, k_n)$ 为指标。注意，所有因子$P'_{m,k}$在同伦意义下彼此可交换，因此$P'_{1,k_1} P'_{2,k_2} \cdots P'_{n,k_n}$在同伦意义下是正交幂等元。引理 6.13 和引理 6.9 告诉我们，除非对所有 $2 \leq m \leq n$都有 $k_m = k_{m-1} \pm 1$，否则$P'_{1,k_1} P'_{2,k_2} \cdots P'_{n,k_n}$是可缩的。同调扰动给出一个幂等元分解

$$\mathbb{1}_n \simeq \mathrm{tw}_\delta \left(\bigoplus_\varepsilon P_\varepsilon \right)$$

其中，扭曲会使一个或多个指标 k_i降低。 □

6.4. **范畴化幂等元的量子环带迹。**

定理 C。 对于每个可容许的 $\varepsilon \in \{1,-1\}^n$，我们在 链复形范畴$^-(\mathrm{Kar}(\mathcal{BN}_q(\mathbb{A})))$中有 $[P_\varepsilon] \simeq V_{|\varepsilon|}$。

证明。 对 n 使用归纳法。在基例中，$n=0$ 无需证明。假设根据归纳法，$[P_\varepsilon] \simeq V_k$，其中 $k=|\varepsilon|$。于是 $[P_\varepsilon \sqcup \mathbb{1}_1] \simeq V_{k+1} \oplus V_{k-1}$。但根据构造，$[P_\varepsilon \sqcup \mathbb{1}_1] \simeq ([P_{(\varepsilon,1)}] \to [P_{(\varepsilon,-1)}])$。迹中的计算表明，$P_{(\varepsilon,\pm 1)}$ 与一个由 $[P_{k\pm 1}] \simeq V_{k\pm 1}$ 的多个副本构成的复形同伦等价。唯一可能的情况是$[P_{(\varepsilon,\pm 1)}] \simeq V_{k\pm 1}$。 □

推论 6.16。 我们有 $[P_{n,k}] \simeq V^{\oplus C_{n,\,k}}{}_{k} \cong \mathrm{im}(p_{n,\,k})$，其中 $C_{n,\,k}$ 是满足 $|\varepsilon|=k$的可容许序列的数量。具体地，$C_{n,\,k} = \frac{k+1}{m+1}\binom{n}{m}$ 其中 $m=(n+k)/2$。

证明。 由命题 6.15 可知$P_{n,\,k}$与一个由幂等元构成的单侧扭曲复形同伦等价 P_ε，其中 $|\varepsilon| = k$。由于定理 C，这意味着$[P_{n,k}]$ 是一个由 V_k的若干副本构成的单侧扭曲复形；又由于所有这些副本都处于上同调次数零，因此它们之间不可能存在微分。

利用钩长公式，通过将可容许序列 $\varepsilon \in \{1,-1\}^n$ 与形状为$\lambda=(m,\ n-m)$的标准杨表对应起来，可以得到 $C_{n,\,k}$ 的显式公式。具体而言，一个可容许序列 $\varepsilon \in \{1,-1\}^n$ 对应于一个两行标准杨表，其第一行包含满足 $\varepsilon_i = 1$的指标 i，第二行包含满足 $\varepsilon_i = -1$的指标 i。□

7. H^n 的量子 Hochschild 同调

作为上一节结果的一个应用，我们现在将计算 Khovanov 弧环的完整量子 Hochschild 同调 H^n [Kho02]。我们首先回顾 H^n的定义。

令 B^n 表示所有不含闭合分支、具有 $2n$ 个上端点且没有下端点的平坦缠结同痕类的集合。给定 $a,\ b \in B^n$，令 $a^\vee$ 表示 a 关于一条水平线的反射，并令 $a^\vee b := a^\vee \star b$ 表示 $a^\vee$ 与 b 的垂直复合。注意，$a^\vee b$ 是平面$\mathbb{R}^2$ 中一组互不相交的闭合分支。

通过应用 [Kho00，第 2 小节中的 Khovanov函子3] (对于 $c=0$)，我们可以为每一对元素 $a,\ b \in B^n$ 赋予一个分次 $\Bbbk$-模

$$ {}_aH^n_b := \mathfrak{q}^n \mathcal{F}(a^\vee b). $$

由于 $\mathcal{F}$ 自然同构于$\mathrm{Hom}_{\mathbf{BN}_{0,\,0}}(\emptyset,\ -)$ [BN05，第 9 节1], 这个 $\Bbbk$-模也可以视为态射集

$$ \mathfrak{q}^n \mathrm{Hom}_{\mathbf{BN}_{0,0}}(\emptyset, a^\vee b) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{BN}_{2n,2n}}(a,b). $$

作为分次 $\Bbbk$-模，Khovanov弧代数 H^n 现在可定义为直和

$$ H^n := \bigoplus_{a,b} {}_aH^n_b $$

对于 $a,\ b \in B^n$。代数乘法由余边界映射诱导

$$ {}_aH^n_b \otimes_\Bbbk {}_bH^n_c \longrightarrow {}_aH^n_c, $$

或者等价地，通过$\mathbf{BN}_{2n}$中的复合，$_{2n}$。

代数 H^n 配备了一组特殊的正交幂等元 $(a)\ \in H^n$，每个 $a \in B^n$ 对应一个；这些幂等元通过用 Khovanov 的 Frobenius 代数 $\Bbbk[x]/(x^2)$ 的生成元 1 标记 $a^\vee \star a$ 中的每个圆得到。相应地，存在射影左模

$$H^n_a := H^n(a) = \bigoplus_b {}_bH^n_a$$

和射影右模

$${}_aH^n := (a)H^n = \bigoplus_b {}_aH^n_b.$$

Khovanov 构造进一步导出了一个函子

$$\mathcal{F}_n \colon \mathbf{BN}_{2n,2n} \longrightarrow H^n\text{–}\mathbf{Bimod}$$

它将一个平坦的 $(2n, 2n)$ 切结 T映射为一个甜分次 H^n-双模 $\mathcal{F}_n(T)$，其意义见 [Kho02，定义 1]。作为一个 $\Bbbk$-模，该双模分解为

$$\mathcal{F}_n(T) := \bigoplus_{a,b} {}_a\mathcal{F}(T)_b$$

对于 $a,\ b \in B^n$，其中

$${}_a\mathcal{F}(T)_b := \mathfrak{q}^n \mathcal{F}(a^\vee \star T \star b).$$

此外，Khovanov 证明这些函子 $\mathcal{F}_n$ 可扩展为一个双函子

$$\mathbf{F} \colon \mathbf{BN}_{even} \longrightarrow \mathbf{Bimod},$$

其中 $\mathbf{Bimod}$ 表示甜分次双模的双范畴，而$\mathbf{BN}_{even} \subset \mathbf{BN}$ 表示这样一个双范畴：其对象由偶整数 $2n \geq 0$ 给出，且其 1-态射范畴与$\mathbf{BN}$中的相同。

继续之前，我们还要回顾一下，分次代数 $A = \bigoplus_d A_d$ 上的分次双模 M 的 0阶量子 *Hochschild* 同调由余不变元量子空间给出。

$$\mathrm{coInv}_q(M) := M/[A, M]_q,$$

其中

$$[A, M]_q := \mathrm{Span}_\Bbbk\{am - q^d ma \mid a \in A_d, m \in M\}.$$

更一般地，M的完整量子 *Hochschild* 同调可以计算为复形 $\mathrm{coInv}_q(\mathcal{P})$ 的同调，其中 $\mathcal{P} \to M$ 是分次双模M的一个射影分解。

在 [BPW19] 中观察到，赋值 $M\ \mathrm{coInv}_q(M)$ 扩展为双范畴上的量子影子 $\mathbf{Bimod}$。由于这个双范畴具有左对偶和右对偶，定理 3.5（见 [BPW19] ）蕴含这个量子影子可分解为一个函子

$$\overline{\mathrm{coInv}_q} \colon \mathrm{hTr}_q(\mathbf{Bimod}) \longrightarrow \Bbbk\text{–mod}.$$

现在我们可以证明以下定理，其成立的前提是，对于所有整数 d，$1 - q^d$ 均可逆，其中 d 属于 $(0,\ 4n]$。

定理 7.1。 H^n 的高阶量子霍赫希尔德同调为零，而 H^n 的0阶量子 *Hochschild* 同调同构于 $\Bbbk^{\oplus C_{2n,\ 0}}$ 其中 $C_{2n,\ 0} = |B^n|$ 是 n阶卡塔兰数。

证明。 根据命题 6.15，我们有一个同伦等价

$$\mathbb{1}_{2n} \simeq \left(P_{2n,2n} \longrightarrow P_{2n,2n-2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_{2n,0}\right)$$

并应用 $\mathcal{F}_n$ 得到

$$H^n \simeq \left(\mathcal{P}_{2n,2n} \longrightarrow \mathcal{P}_{2n,2n-2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{P}_{2n,0}\right) \tag{7.1}$$

其中$\mathcal{P}_{2n,\,k} := \mathcal{F}_n(P_{2n,\,k})$。

现在注意，作为 $\Bbbk$-模的复形，$\mathcal{P}_{2n,\,k}$ 由以下形式的复形构成

$${}_a\mathcal{F}_n(T \star P_k \star T')_b = \mathcal{F}(a^\vee \star T \star P_k \star T' \star b)$$

对于 $a,\ b \in B^n$。特别地，$\mathcal{P}_{2n,\,k}$ 对于 $k > 0$ 是无环的，因为 P_k 湮灭回转。

另一方面，$P_{2n,\,0}$ 由贯穿次数为0的平坦缠结构成；移除闭合分支后，每个这样的缠结都可写成 $a \star (b^\vee)$，其中 $a,\ b \in B^n$。由于平坦缠结 T 中的闭合分支不会影响 $\mathcal{F}_n(T)$上的双模乘法，这表明$\mathcal{P}_{2n,\,0}$ 由形如 $\mathcal{F}_n(a \star (b^\vee)) = H^n_a \otimes_\Bbbk {}_bH^n$ 的投射双模构成，其中$a,\ b \in B^n$。

总之，我们看到，子复形 $\mathcal{P}_{2n,0}$ 到 (7.1) 右侧的包含映射定义了一个准同构 $\mathcal{P}_{2n,0} \to H^n$，因此 $\mathcal{P}_{2n,0}$ 是H^n的一个射影分解。根据本证明之前的注释，我们因此可以从该复形计算 H^n 的量子 Hochschild 同调。

$$\mathrm{coInv}_q(\mathcal{P}_{2n,0}) = \overline{\mathrm{coInv}_q}([\mathcal{P}_{2n,0}]) = \overline{\mathrm{coInv}_q \circ \mathbf{F}}([P_{2n,0}])$$

定理现在由推论 6.16 得出 $k = 0$。 □

注 7.2。 关于 Chen–Khovanov 代数的类似结果 A^n 已在 [BPW19，命题 6 中证明。6]。与定理 7.1不同，后一个结果成立时不需要对 q施加任何限制。

注记 7.3. 具体而言， H^n 的零阶量子 Hochschild 同调由幂等元（a）张成，其中 $a \in B^n$。事实上，这些幂等元在 $\mathrm{coInv}_q(H^n)$ 中仍然线性无关，因为它们两两正交，并且张成了正分次代数 H^n 的 0 次部分。

参考文献

[APS04] M. M. Asaeda、J. H. Przytycki 和 A. S. Sikora。《曲面上 I-丛的 Kauffman 括号 Skein 模的范畴化》。载于：Algebr. Geom. Topol. 4 (2004)，第 1177–1210 页。[BD14] M. Boyarchenko 和 V. Drinfeld。《正特征下幺幂群上的特征层：基础》。载于：Selecta Math. (N.S.) 20.1 (2014)，第 125–235 页。[Bel+17] A. Beliakova、K. Habiro、A. Lauda 和 M. ˇZivkovi´c。《量子 $\mathfrak{sl}_2$的范畴化之迹去范畴化》。载于：Math. Ann. 367 (2017)，第 397–440 页。[Bel+19] A. Beliakova、M. Hogancamp、K. Putyra 和 S. Wehrli。《sl(2) 缠结同调的函子性》。2019。arXiv: 1903.12194。[BN05] D. Bar-Natan。《缠结与余边界的 Khovanov 同调》。载于：Geom. Topol. 9 (2005)，第 1443–1499 页。[BPW19] A. Beliakova、K. Putyra 和 S. Wehrli。《通过迹函子的量子链环同调 I》。载于：Inventiones mathematicae 215 (2019)，第 383–492 页。[CH15] B. Cooper 和 M. Hogancamp。《Khovanov 同调的一个例外集》。载于：Algebr. Geom. Topol. 15.5 (2015)，第 2657–2705 页。

[CK12] B. Cooper 和 V. Krushkal. “Jones-Wenzl 投影子的范畴化”。载于：Quan- tum Topol. 3.2 (2012)，第 139–180 页。[GHW22] E. Gorsky、M. Hogancamp 和 P. Wedrich. “Soergel 范畴的导出迹”。载于：Int. Math. Res. Not. 2022.15 (2022)，第 11304–11400 页。[Hog12] M. Hogancamp. 范畴化自旋网络之间的态射。2012. arXiv: 1209.2732.[Hog14] M. Hogancamp. 带色 sl(2) 链环同调上的多项式作用。2014. arXiv: 1405. 2574.[Hog17] M. Hogancamp. 三角单体范畴中的幂等元。2017. arXiv: 1703.01001.[Hog18] M. Hogancamp. “范畴化 Young 对称化子与环面链环的稳定同调”。载于：Geom. Topol. 22.5 (2018)，第 2943–3002 页。[Kho00] M. Khovanov. “Jones 多项式的一种范畴化”。载于：Duke Math. J. 101.3 (2000)，第 359–426 页。[Kho02] M. Khovanov. “缠结的函子值不变量”。载于：Algebr. Geom. Topol. 2 (2002)，第 665–741 页。[Kho05] M. Khovanov. “带色 Jones 多项式的范畴化”。载于：J. Knot Theory Ramifications 14.1 (2005)，第 111–130 页。[KM11] P. B. Kronheimer 和 T. S. Mrowka. “Khovanov 同调是平凡结探测器”。载于：Publications math´ematiques de l’IH´ES 113 (2011)，第 97–208 页。[Mar01] M. Markl. “理想扰动引理”。载于：Comm. Algebra 29.11 (2001)，第 5209–5232 页。电子版：https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1081/AGB-100106814。

苏黎世大学，瑞士苏黎世电子邮箱：
anna@math.uzh.ch

美国马萨诸塞州波士顿东北大学电子邮箱：
m.hogancamp@northeastern.edu

苏黎世大学，瑞士苏黎世电子邮箱：
krzysztof.putyra@math.uzh.ch

雪城大学 ，雪城 ，NY
电子邮件地址：smwehrli@syr.edu