arXiv:2305.02984v1 [math.RA] 4 May 2023

关联环：自同构与导子

Piotr Krylov[1], Askar Tuganbaev[2]

摘要。 我们研究关联代数 $I(X, R)$ 的自同构、同构和导子，其中 X 是预序集， R 是某个交换环 T 上的代数。

关键词： 关联代数、自同构、同构、导子。

MSC2020 数据库 16W20, 16S50

本研究得到俄罗斯科学基金会（=RSF）资助，项目编号为 23-21-00375, https://rscf.ru/en/project/23-21-00375/（P.A. Krylov）和 22-11-00052, https://rscf.ru/en/project/22-11-00052（A.A. Tuganbaev）。

目录

1 引言 2 第1章 预备知识 2 关于预序集 4 3 关联代数中的一些理想和子双模 6 4 可逆元素 10 第2章 关联代数的自同构群 5 关于代数 K 12的两个条件 6 群 Aut K 21的主要同构与分解 7 关于群 Aut X 26

[1]托木斯克国立大学，电子邮箱：krylov@math.tsu.ru。[2]莫斯科动力学院国立研究型大学；莫斯科国立罗蒙诺索夫大学；电子邮箱：tuganbaev@gmail.com。

8 群 Ω和 Ω_1 299 群 Aut K 和 Out K 38的结构 10子群 Ψ 和 Ψ_0 42

11 约化关联代数 49 第3章. 关联代数的同构

12一些定义和辅助结果 54

13 问题 (a)–(c) 57 第4章. 关联代数的导子

14导子的矩阵表示 60 15导子的若干性质 63 16模 Der K 67的主要分解与同构17模 Der K 和 Out K 70的结构18加法导子 78 19模 Ψ 和 Ψ/Ψ_0 84的计算参考文献 85

1 引言

本文致力于研究任意预序集 X 上、系数环为某个交换环 T 的代数 R 的关联代数 $I(X, R)$ 的自同构、同构和导子。我们采用并发展了一种方法，该方法在描述 [35], [37], [38] 中带零迹理想的形式矩阵环的自同构方面已被证明行之有效。具体而言，关联代数可写成某个理想 M 关于某个子环的分裂扩张

L。换言之， $I(X,R)$ 存在直和分解 $= L \oplus M$。这里， L 是在 R 上的方阵环的直积，而 M 是在 R 上的矩形矩阵群的直积。我们注意到，理想 M 包含于环 $I(X,R)$ 的雅各布森根中；而在形式矩阵环的情形下， M 是一个幂零理想。代数 $I(X,R)$ 的自同构和导子可相对于直和 $L \oplus M$ 表示为某些 2×2 矩阵。这对于研究代数 $I(X,R)$ 的自同构和导子大有助益。

书 [45] 回顾了关于环 $I(X,R)$ 的自同构、同构和导子的研究。此后，许多论文探讨了这些关联环上的映射。在本文第 2–4 节的末尾，简要介绍了其中一些论文的内容。

关联环上的其他线性（及非线性）映射也受到广泛研究。例如，反自同构和对合已有研究，参见 [7], [12], [8], [9], [21], [22], [15]。 [12], 中也概述了关于对合的研究成果。约旦同构和李同构也得到了探讨（参见 [11], [19], [51]）。

关联环的导子受到广泛关注，包括通常的导子、李导子和约旦导子（参见 [20], [27], [28], [33], [50], [52]）。我们特别关注 [52] 中一篇内容丰富的引言，其中回顾了导子研究的历史，并列出了大量参考文献。

对于广义矩阵环，已有关于其交换映射、自中心化映射及其他密切映射的研究，以及一些相关问题（见 [40], [41], [51]）。研究关联环的类似映射可能会很有趣且值得提倡。此外，已知关联环的中心是如何构成的。

关联代数由 Rota 在其著名论文 [42] 中定义，作为解决一些组合学问题的工具，尤其是用于统一研究数论中 M¨obius 反演公式的推广。随着时间的推移，关联代数本身——无论其在组合学及数学其他领域中的应用如何——都成为一种有意义的代数对象。许多著作都专门讨论关联代数，其中包括书籍 [45]。

如果 X 是有限集，那么环 $I(X,R)$ 同构于矩阵环 $M(n,R)$ 的某个子环。具有有限集 X 的环 $I(X,R)$ 通常称为结构矩阵环（例如，参见 [14]）。众所周知[43] ，结构矩阵环可以表示为分块

三角形矩阵。因此，它是形式矩阵环的一种类型。

形式矩阵环（也称为“广义矩阵环”）和关联环密切相关，并且代表着具有特征性的重要代数结构。此外，在研究关联环时，可以利用有关形式矩阵环及其线性映射的丰富积累资料。关于形式矩阵环的各种问题长期以来一直在环与模理论的框架内得到研究。其中一些研究成果已收录于书籍[36]中。

本文仅考虑具有非零单位元的结合环。

若 S 是一个环（或代数），则 $U(S)$ 是其可逆元群，$C(S)$ 是其中心，而 $J(S)$ 是雅各布森根，$M(n,S)$ 是所有取值于 S 的 $n\times n$ 矩阵所构成的通常环。

接下来，Aut$S$ 表示代数 S 的自同构群，In(Aut S) 表示内自同构子群，Out$S$ 表示代数 S 的外自同构群，即 Out$S$ 是 Aut$S$/ 关于 In(Aut$S$) 的商群。

用 Der$S$ 表示代数（或模）的导子群 S。In(Der$S$)是内导子的子群，Out$S$ 是代数的外导子群 S，即 Out$S$ 是商群 Der$S$/$\mathrm{In}(\mathrm{Der}S)$。**（在本文的不同位置，对群的外自同构和外导子均使用相同的符号 Out$S$，因此不会造成混淆。对于与 Aut S 和 Der S相关的其他一些记号，情况也相同。）**

设 R 是另一个环，A 是一个 R-S-双模，并设 α、γ 分别是环 R 和 S的两个自同构。通过令下式成立，可以在 A上定义新的双模结构:

$$x\circ a=\alpha(x)a,\ a\circ y=a\gamma(y)\ \text{ for all }\ x\in R,\ y\in S,\ a\in A.$$

这个双模通常记作 ${}_{\alpha}A_{\gamma}$。

群 A 和 B 的半直积记作 $A\leftthreetimes B$。

第1章. 预备知识

2 关于预序集

我们简要概述预序集的一些初步信息（有关预序集的更详细介绍，请参见 [45]）。

设 X 为任意集合，$\leq$ 为 X 上的自反传递关系。在这种情况下，系统 $\langle X, \leq \rangle$ 称为预序集，而 $\leq$ 是 X 上的预序。如果关系 $\leq$ 还是反对称的，那么 $\langle X, \leq \rangle$ 就是偏序集。

我们进一步假设 $\langle X, \leq \rangle$ 是一个预序集。对于任意两个元素 $x, y \in X$，我们用 $[x, y]$ 表示 $\{z \in X \mid x \leq z \leq y\}$ 的集合。它称为 X 中的一个区间。形如 $[x, x]$ 的区间记作 $[x]$。区间有以下两个有用性质。

(a) 对于任意 $y, z \in [x]$，有关系 $[y, z] = [x]$。

(b) 如果 $x < y$，那么对于任意元素 $s \in [x]$ 和 $t \in [y]$，都有 $s < t$。

我们通过令 $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$ 和 $y \leq x$，在 X 上定义一个二元关系 $\sim$。显然，$\sim$ 是 X 上的一个等价关系。相应的等价类对所有可能的 $x \in X$ 均具有 $[x]$ 的形式。由 **(*b*)** 可知，预序关系 $\leq$ 与等价关系 $\sim$ 相容。因此，商集 $\overline{X} = X/\sim$ 上存在诱导关系 $\leq$，且 $\langle \overline{X}, \leq \rangle$ 是一个偏序集。

可以将有向图与预序集 X 以及偏序集 $\overline{X}$ 关联起来（此时不考虑由此产生的环）。从集合 $\overline{X}$ 出发更为方便。必要时，我们将 $\overline{X}$ 视为与定向图 $\overline{X}$ 相关联的简单图。同时，我们使用图论中的一些标准概念：连通分支、半路径及其长度、生成树（或生成森林）。

我们约定，X 中的所有区间都是有限的。在这种情况下，X 称为局部有限预序集。

对于局部有限偏序集中的一个区间，该区间的长度是其中链的长度的最大值。

下文中，我们约定用 x 表示偏序集 $\overline{X}$ 的元素，即形如 $[x]$ 的等价类。换言之，为表示类 $[x]$，我们使用它的某个代表元。这不应引起混淆。在具体情形下，我们所讨论的究竟是哪个集合（$\overline{X}$ 还是 X）的元素，总是很清楚的。

3 关联代数中的一些理想和子双模

从本小节开始，符号 R 表示某个交换环 T上的代数。不过，环 T 本身几乎不会用到。

关联代数是一种函数环。设 $\langle X, \leq \rangle$ 是任意一个局部有限预序集。若 $x \not\leq y\}$，则令 $I(X,R) = \{f\colon X \times X \to R \mid f(x,y) = 0$。函数按点相加。函数 $f, g \in I(X,R)$ 的直积由以下关系给出

$$(fg)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z) \cdot g(z,y) \qquad (*)$$

对任意 $x, y \in X$ 均成立。由于 X 是一个局部有限集，因此可以在 $(*)$ 中写作 $z \in X$，而不是 $x \leq z \leq y$。对于任意 $t \in T$ 和 $x, y \in X$，我们还假设 $(tf)(x,y) = tf(x,y)$。由此得到一个 T-代数 $I(X,R)$，称为预序集 X 上以环 R 为基的关联代数或关联环。下文中，特定的代数 $I(X,R)$ 记作符号 K。

我们从 $I(X,R)$ 中引入一些特殊函数。对于给定的 $x \in X$，我们规定，对于所有 $t \in [x]$，$e_{[x]}(t,t) = 1$；而对于其余的有序对 (z,y)，规定 $e_{[x]}(z,y) = 0$。系统 $\{e_{[x]} \mid x \in X\}$ 由 L 中两两正交的中心幂等元组成（环 L 将在下一段中定义）。按照约定，在第2节末尾，我们用 e_x 代替 $e_{[x]}$。

我们在 K 中定义一个子环 L 和一个理想 M。如果 $x \not\sim y\}$，我们规定 $L = \{f \in K \mid f(x,y) = 0$；如果 $x \sim y\}$，则规定 $M = \{f \in K \mid f(x,y) = 0$。我们有一个 T-模直和 $K = L \oplus M$，即环 K 是理想 M 的一个分裂扩张，其中使用了子环 L。理想 M 自然地被视为一个 L-L- 双模。此外， M 是一个无单位元代数。

设有任意区间 $[x]$。我们用 $R_{[x]}$ 表示满足以下条件的函数集合：对于这些函数 $f \in K$，若 $z \not\sim x$ 或 $y \not\sim x$，则 $f(z,y) = 0$。与幂等元 e_x 的情形一样，我们用 R_x 代替 $R_{[x]}$。以下关系

$$R_x = e_x K e_x = e_x L e_x$$

成立。我们得出结论， R_x 是一个含幺环 e_x。如果我们转而考虑从 K到 $[x] \times [x]$ 的函数的限制，那么实际上， R_x是所有函数 $[x] \times [x] \to R$ 构成的代数，其加法按逐点方式定义，乘法则采用式（$*$）中的卷积形式。我们任意选取区间$[x]$ 的一种编号方式： $[x] = \{x_1, \ldots, x_n\}$。此后，如果函数 $f \in R_x$ 与矩阵相对应。

$(f(x_i, x_j))$，接下来我们讨论代数 $R_x \cong M(n, R)$ 的同构。现在我们取两个不同的区间 $[x]$, $[y]$ 并设

$$M_{xy} = \{f \in K \mid f(s,t) = 0, \text{ if } s \not\sim x \text{ or } t \not\sim y\}.$$

那么 $M_{xy} = e_x K e_y$，因此，M_{xy} 是一个 R_x-R_y-双模。关系式 $M_{xy} = e_x M e_y$ 也成立。

我们说明，$M_{xy} = 0$ 当 $x \not\leq y$ 时。对于 $x < y$，存在一个典范同构

$$M_{xy} \cong M(n \times m, R), \quad n = |[x]|, \ m = |[y]|,$$

相对于上述同构 $R_x \cong M(n, R)$ 和 $R_y \cong M(m, R)$。将所有代数 R_x 视为 $M(n, R)$，并将双模 M_{xy} 视为 $M(n \times m, R)$ 后，显然，环 R_x 和 R_y 对 M_{xy} 的作用就是普通的矩阵乘法。显然，M_{xy} 也是一个 L-L-双模。L 对 M_{xy} 的作用可归结为 R_x 的左作用和 R_y 的右作用。

我们再次指出，我们指的是 R_x 和 M_{xy} 下标中的 $[x]$ 和 $[x][y]$，分别对应（见第2节）。

直积 $\prod_{x,y\in X} M_{xy}$ 具有 L-L-双模结构。具体而言，若 $f \in L$ 且 $(g_{xy}) \in \prod_{x,y\in X} M_{xy}$，则

$$f(g_{xy}) = (f_x g_{xy}) \text{ and } (g_{xy})f = (g_{xy} f_y), \tag{1}$$

其中 $f_x = e_x f e_x$ 且 $f_y = e_y f e_y$。

命题 3.1. 存在规范的代数同构 $L \cong \prod_{x\in X} R_x$，以及 L-L-双模同构和代数同构 $M \cong \prod_{x,y\in X} M_{xy}$。

证明。定义映射 $\omega : L \to \prod_{x\in X} R_x$，假设对每个 $f \in L$，$\omega(f) = (f_x)$，其中 $f_x = e_x f e_x$。那么 ω 是一个代数同构。

映射 $\varepsilon : M \to \prod_{x,y\in X} M_{xy}$，$\varepsilon(g) = (g_{xy})$，其中 $g_{xy} = e_x g e_y$，是 L-L-双模和代数的同构。 □

在下文中，对于同构 ω and ε 所对应的对象，我们不作区分。

我们引入包含在 M 中的一些理想和子模，并对此予以关注。根据命题 3.1 和我们的约定，我们可以写出关系 $M = \prod_{x,\ y\in X} M_{xy}$，其中所有双模 M_{xy} 均非零。

令 $V_1 = M$，则对每个 $k \geq 2$，令 $V_k = \prod_{x,y\in X} M_{xy}$，其中 x 和 y 满足偏序集 $\overline{X}$ 的区间 $[[x], [y]]$ 的长度。

不小于 k。此外，对于任意 $k \geq 1$，我们设定 $W_k = \prod_{x,\ y\in X} M_{xy}$，并且在直积中，存在一些 M_{xy}，其区间 $[[x],[y]]$ 的长度等于 k。

我们写出子集 V_k 和 W_k 的基本性质。它们由双模 M 中乘法的定义得出，只要将其表示为 $\prod_{x、\ y\in X} M_{xy}$ 的直积。

1. 所有 V_k 都是 K 中的理想，并且存在一个递减序列

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots \supseteq V_k \ldots \text{ and } \cap_{k\geq 1} V_k = 0.$$

2. 对于每个 $k \geq 1$，$MV_k \subseteq V_{k+1}$ 和 $V_kM \subseteq V_{k+1}$ 的包含关系都成立 .

3. 所有 W_k 都是 M 中的 L-L-子模，并且有关系 $M = \prod_{k\geq 1} W_k$ 和 $V_k = \prod_{i\geq k} W_i$。

4. 对于每个 $k \geq 1$，都有一个直和 L-L-双模分解 $V_k = W_k \oplus V_{k+1}$。

5. 对于任意 k、$\ell \geq 1$，包含关系 $W_k \cdot W_\ell \subseteq W_{k+\ell}$ 都成立。

与块矩阵环类似，我们可以将环 K 视为某种「块」函数环。这里指的是所引入的环 R_x 和双模 M_{xy}的作用。具体而言，任意函数 $f \in K$ 都映射为一族函数$\{e_x f e_y \,|\, x, y \in X\}$。公式 (1) 和 (2) 给出了块形式下函数的乘法规则。

如果我们假设 M_{xx} 是 R_x，那么可以写出关系式 $K = \prod_{x,y\in X} M_{xy}$。由此得到等式 $K = \prod_{x\in X} e_x K = \prod_{y\in X} K e_y$。它们使我们可以谈论来自 K 的「行」函数和「列」函数。两个函数相乘时，「行」与「列」相乘。

众所周知，代数 K 可以嵌入矩阵代数$M(\mathcal{M}, R)$，其中 $\mathcal{M} = |X|$[45, 命题 1.2.4]。等价关系$\sim$ 到 X 会将矩阵划分为若干特定的块。当 K嵌入 $M(\mathcal{M}, R)$时，属于环 R_x 和双模 M_{xy} 的函数会转化为 $M(\mathcal{M}, R)$中的相应矩阵块。

我们简要讨论 X 为有限集的情形。可以假设 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$。设 $\leq$ 是 X 上的一个预序。那么，关联代数 $K = I(X, R)$ 同构于 $M(n, R)$ 中的一个特定子代数。我们将 K 与这个矩阵子代数等同。后者记作 $M(n, \leq, R)$ 或 $M(n, B, R)$，其中 $B = (b_{ij})$ 是与预序 $\leq$ 对应的布尔矩阵。通常，K 称为与预序 $\leq$ 或布尔矩阵 B 相关联的结构矩阵环（见 [14]）。将环 K 嵌入 $M(n, R)$ 时，

容易注意到的是

$$K = \{(a_{ij}) \in M(n,R) \,|\, i \not\leq j \;\Rightarrow a_{ij} = 0\} =$$

$$= \{(a_{ij}) \in M(n,R) \,|\, b_{ij} = 0 \;\Rightarrow a_{ij} = 0\}.$$

研究结构矩阵环时，会立即将其视为 $M(n,R)$ 中的子环。存在一个度为 n 的置换 τ，使得 $\tau(B)$ 是一个上分块三角矩阵。存在一个环同构 $M(n,B,R) \cong M(n,\tau(B)\ R)$ [43]；关于矩阵上的置换作用的信息见 [36, 第 4 节1]。因此，结构矩阵环是形式矩阵环的一种类型。

注 3.2. 代数 K 可以视为函数代数，也可以视为表示为 $L \oplus M$ 的分裂扩张的抽象环。这两种方法分别称为“函数的”和“抽象的”；当然，它们是等价的。我们两种方法都会采用。

R 上的离散拓扑在代数 $I(X,R)$[45,第 1 节.2]上诱导出一种拓扑。我们使用上面定义的理想 V_i 引入另一种拓扑。

命题 3.3. K 是一个完备的拓扑代数，其豪斯多夫拓扑的零的邻域基由理想 V_i、$i \geq 1$ 构成。

证明。设 $(a_i)_{i\geq 1}$ 是 K 中的一个纯柯西序列。记 $a_i = b_i + c_i$，其中 $b_i \in L$、$c_i \in M$ 和 $K = L \oplus M$。显然，对于所有 i 和j，都有 $b_i = b_j$。我们将这个公共元素记为 b。还需确认序列 $(c_i)_{i\geq 1}$ 收敛。考虑关系

$$V = \prod_{i\geq 1} W_i,\ V_i = W_i \oplus V_{i+1},\ i \geq 1,$$

我们得出结论：除 c_1 外，所有 c_i 在 W_1 中的分量都相同，记为d_1。类似地，从 c_3 开始的所有元素 c_i 在 W_2 中的分量d_2 都相同，依此类推。我们构造 M 中的一个元素 $d = (d_i)_{i\geq 1}$。关系 $\lim_{i\to\infty} c_i = d$ 成立。 □

考虑在命题 3.3 所给拓扑下连续的代数 $I(X,R)$ 的线性映射是合理的。我们也可以讨论保持所有子模 W_k 不变的线性映射。性质 5 中的包含关系 $W_k \cdot W_\ell \subseteq W_{k+\ell}$ 使我们能够说，代数 $I(X,R)$ 具有某种类似于分次的结构。

4 可逆元素

这本书 [45] 描述了偏序集 X 和交换环 R的情形下，代数 $I(X,R)$ 的可逆元素和雅各布森根。这一描述推广到任意代数 $I(X,R)$，例如见 [48]。为求完整起见，我们在此以略有不同的形式陈述这些事实。此处不作解释，我们使用第 3 节开头得到的分解 $K = L \oplus M$。

命题 4.1. 对于任意元素 $f \in M$，元素 $1+f$ 可逆。

证明。 我们来证明存在一个元素 $g \in M$，使得

$$(1+f)(1+g) = 1 = (1+g)(1+f).$$

我们将元素 $1+f$ 和 $1+g$ 分别重新定义为 f 和 g。现在，f 是一个函数，使得 $f(x,x) = 1$ 且 $f(x,y) = 0$，若 $x \neq y$ 且 $x \sim y$ 对任意的 $x, y \in X$ 成立。函数 g 具有相同的性质。

函数 g 在形如 $[x] \times [x]$ 的直积上的作用是已知的。你需要指定它对直积 $[x] \times [y]$ 的作用，其中任意 $x, y \in X$ 满足 $x < y$。我们通过对偏序集 $\overline{X}$ 的区间 $[[x],[y]]$ 的长度进行归纳来完成这一点。

设区间 $[[x],[y]]$ 的长度等于 1。对于任意一对 $(s,t) \in [x] \times [y]$，我们写出关系式

$$fg(s,t) = \sum_{s \leq z \leq t} f(s,z) \cdot g(z,t) = \sum_{z \in [x]} f(s,z) \cdot g(z,t) +$$

$$+ \sum_{z \notin [x],\ z \notin [y]} f(s,z) \cdot g(z,t) + \sum_{z \in [y]} f(s,z) \cdot g(z,t) = g(s,t) + c + f(s,t) = 0.$$

因此，我们有

$$g(s,t) = -f(s,t) - c, \qquad (*)$$

且 $c = 0$。因此，$g(s,t) = -f(s,t)$。

假设关系 $(*)$ 对满足 $(s,t) \in [x] \times [y]$ 且区间 $[[x],[y]]$ 的长度大于 $k-1$ 的所有数对 (s,t) 都成立，其中 $k \geq 2$。假定已知来自 $(*)$ 的对应元素 c。

现在设区间 $[[x],[y]]$ 的长度等于 k，且 $(s,t) \in [x] \times [y]$。对于一对 (s,t)，可以写出如上所示的等式，以及关系式 $(*)$。在和式 $\sum_{z \neq [x],\ z \notin [y]} f(s,z) \cdot g(z,t)$ 中，每个区间 $[[z],[t]]$ 的长度都小于 k。因此，函数 g 在数对 (z,t) 上的值已知。因此，$(*)$ 的元素 c 已知。

因此，所需的函数 g 已给出，且其给出的方式使得$fg = 1$。类似地，我们可以找到具有性质 $hf = 1$ 的函数 h 。因此， $g = h = f^{-1}$。 □

利用命题 4.1 以及雅各布森根的熟知性质，可以得到若干结果。

推论 4.2. 对于关联代数 K，下列断言成立。

1. 对于所有满足 $x \sim y\}$ 的 $x, y \in X$，关系 $J(K) = \{f \in K \mid f(x, y)$ $\int(R)$ 成立。

2. 关系 $M \subseteq J(K)$ 和 $J(K) = J(L) \oplus M$ 成立，其中 $K = L \oplus M$。

根据这个推论，现在很容易证明下面的定理。

定理 4.3. 对于函数 $f \in K$，下述断言等价。

1) 函数 f 可逆。

2) 如果 $f = g + h$，其中 $g \in L$ 和 $h \in M$，那么函数 g 在 L中可逆。

3) 函数 f 在 $[x] \times [x]$上的限制等于 $e_x f e_x$，对于所有 $x \in X$ ，它都是环 R_x 中的可逆函数（关于特征 e_x 和 R_x，参见第 3 节）。

我们约定，$\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\ K)$（分别地，$\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)$）表示代数 K 的内自同构子群，该子群由形如 $1 + d$、 $d \in M$ 的可逆元素（分别地，由代数 L 的可逆元素）定义。第一个子群是 $\mathrm{Aut}K$中的正规子群。

命题 4.4. 存在一个半直积分解

$$\mathrm{In}\ (\mathrm{Aut}\ K) = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\ K) \leftthreetimes \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K).$$

该命题的证明见 [37, 小节 4]。

第2章. 关联代数的自同构群

5 代数 K的两个条件

在本书余下部分中，我们沿用第1章中采用的所有记号，并遵循其中关于预序集 X和关联代数 $I(X,R)$的所有约定。我们将 $I(X,R)$记作 K。

我们特别指出，代数 K 是一个分裂扩张。也就是说，$K = L \oplus M$，其中 L 和 M 在第 3 节中定义， L 和 M 分别是子环和理想。

在论文 [37], 中，作者考察了任意代数 A的自同构，该代数是其理想 N 借助某个代数 S形成的分裂扩张，即 $A = S \oplus N$，其中 $\oplus$ 是群直和。

对于代数 A的自同构 φ，我们关联一个矩阵 $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$，其中

$$\alpha\colon S \to S,\ \beta\colon N \to N,\ \gamma\colon N \to S,\ \delta\colon S \to N$$

是 T-模同态，并且

$$\varphi(a+b) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\alpha(a) + \gamma(b)) + (\delta(a) + \beta(b))$$

对所有 $a \in S$ 和 $b \in N$均成立。假设 $\gamma = 0$。无论如何，关于这种「三角形」情形的所有结果都适用于代数 A 的自同构子群，其中矩阵具有 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$的形式。

设 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ 是代数 A的一个自同构。则映射 α、 δ 和 β 满足 [37, 第 3]小节中的等式 (1)。特别地，α 是代数 S 的一个自同构，而 β 是代数 N 的一个自同构（视为非含幺代数）。

反过来，如果 $\alpha\colon S \to S$、 $\beta\colon N \to N$、 $\delta\colon S \to N$是满足 [37, 第 3], 小节中关系 (1) 的映射，那么以下结论成立。

代数 A 的变换由矩阵 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$给出，它是代数 A 的一个自同构。

我们注意到，如果 $N^2 = 0$ （即代数 A 是平凡扩张），那么 δ 是代数 S 的一个导子，其取值于双模 ${}_{\alpha}N_{\alpha}$，而 β 是一个S-S-双模同构 $N \to {}_{\alpha}N_{\alpha\circ}$ 一般而言，在 [37], 中，假设N 是一个幂零理想。

在 [35], [37], [38], 中，上述方法应用于研究带有零迹理想的形式矩阵环的自同构群（这类环包括块三角矩阵环）。若 A 是给定的矩阵环，则存在一个分裂扩张 $A = S \oplus N$，其中 S 是由对角矩阵构成的子环， N 是主对角线上元素全为零的矩阵所构成的理想。尤为重要的是， N 是一个幂零理想。

现在回到关联代数。仍设 K 为关联代数。根据第 3 节，它可以写成分裂扩张 $L \oplus M$。理想 M 不一定是幂零的。不过，经过一些调整，在 [35], [37],[38] 中提出的计算自同构群的方法也适用于关联代数。这在很大程度上得益于理想 M 包含于环 K的雅各布森根这一事实（推论 4.2）。

在下文中，我们不区分自同构及其对应的矩阵。有时，为了简洁起见，如果 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$，我们将其称为“ φ 三角形自同构”；如果，则称为“ φ 对角自同构”。

$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

我们定义一个群同态和若干自同构群。设 $f\colon \mathrm{Aut}\ K \to \mathrm{Aut}L$ 是一个同态，使得对于每个自同构 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$， $f(\varphi) = \alpha$。接下来，设 Λ 为对角自同构子群，并令

$$C = \{\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Lambda \,|\, \alpha R_x = R_x \text{ for each } x \in X\}.$$

我们还用 Ψ 表示 $\mathrm{Aut}K$ 中由形如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 的自同构构成的正规子群，并用 Ψ_0 表示与环 L 的可逆中心元对应的所有内自同构所构成的子群。这里， Ψ_0 是 Ψ 中的一个正规子群。令 Ω 为同态 f 的像，并且

$$\Omega_1 = \{\alpha \in \Omega \,|\, \alpha R_x = R_x \text{ for all } x \in X\}.$$

最后，我们用 Φ 表示该正规子群

$$\{\varphi \in \mathrm{Aut}K \,|\, \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}, \alpha \in \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L)\}$$

群 Aut K 的

关于所定义群的信息对于理解群 Aut$K$ 的结构非常重要。

在描述和计算群 Aut$K$ 的问题中，可以区分以下研究方向。

1. 计算正规子群 Φ。

2. 计算正规子群 Ψ。

3. 计算群 Ω。

我们为代数 K 提出两个条件（另请参见 [37, 小节 8,9]，[38]）。

(I) 对于任意 $\varphi \in \mathrm{Out}K$，关系 $\varphi M = M$ 成立，即每个自同构都是三角形的。

自同构可以“移动”环 R_x 和双模 M_{xy}。我们指出一个能够消除此类现象的条件。

(II) 对于任意 $\varphi \in \mathrm{Out}K$ 和每个 $x \in X$，包含关系 $\varphi(e_x) \in e_y + M$对某个 $y \in X$成立。

条件 **(II)**用于 [37] 和 [38]。

现在我们为任意环 S引入若干条件。

定义 5.1。

1. 若环 S 的唯一非零中心幂等元是 **1**，则称其为不可分解环。

2. **[4], [6].** 若环 S 的幂等元 e 满足 $(1-e)Se = 0$，则称其为半中心幂等元。若环 S 的唯一非零半中心幂等元是 **1**，则称其为强不可分解环。

不可分解环上的矩阵环本身也是不可分解环。强不可分解环不同构于任何形式矩阵环 $\begin{pmatrix} A & N \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

我们汇总了环 S 的若干条件。

(1) S 是一个不可分解环。

(2) S 是一个强不可分解环。**(3)** 商环 $S/J(S)$ 是不可分解的。**(4)** 对于任意幂等元 $e \in S$，关系 $(1-e)Se = 0$ 蕴含关系 $eS(1-e) = 0$。

(5) 对于任意两个正交幂等元 e、$f \in S$，关系 $fSe = 0$蕴含关系 $eSf = 0$。

这些条件之间存在以下关系：

$$(5) \Rightarrow (4), \quad (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$$

（见引理 5.7 和 5.8）。

关于同构（尤其是自同构）对不可分解环的直积的作用的信息非常有用。我们来表述并证明一个一般事实。

引理 5.2. 设给定环的直积 $S = \prod_{j\in J} S_j$ 和 $R = \prod_{i\in I} R_i$，且所有环 S_j 和 R_i 都是不可分解环。若 $\alpha\colon S \to R$ 是任意环同构，则对每个 $j \in J$，都存在一个下标 $i \in I$，使得 $\alpha S_j = R_i$。

证明。 设 f_j 和 e_i 分别是环 S_j 和 R_i 的单位元。取某个下标 $\ell \in J$。那么 $\alpha(f_\ell) = (e_p) \in R$，其中 p 遍历 $P \subseteq I$ 的某个子集（这里考虑到环 R_i 是不可分解环）。因此，α 将 S_ℓ 映射到 $\prod_{p\in P} R_p$ 中。若 α 在 S_ℓ 上的限制不是同构，则存在一个元素 $y \in S$，它在 S_ℓ 中的分量为零，且满足 $\alpha(y) \in \prod_{p\in P} R_p$ 和 $\alpha(y) \neq 0$。然而，关系 $f_\ell y = 0$ 蕴含关系 $\alpha(f_\ell)\alpha(y) = 0$。这是矛盾的，因为 $\alpha(f_\ell)$ 是环 $\prod_{p\in P} R_p$ 的单位元。由此可知，$\alpha|_{S_\ell}$ 是同构。由于环 S_ℓ 是不可分解环，只有当 $|P| = 1$ 时这才可能。□

引理 5.2 的对称类似结论对同构 α^{-1} 成立。因此，存在一个双射 $\tau\colon J \to I$，使得 $\alpha(f_j) = e_{\tau(j)}$ 且 $\alpha(S_j) = R_{\tau(j)}$, $j \in J$。

推论 5.3. 在引理 5.2 的情形下，同构 α 逐坐标作用于直积 $\prod_{j\in J} S_j$。

证明。 我们来说明推论的陈述。设 $\alpha\colon S \to R$ 是一个同构，并设 $\tau\colon J \to I$ 是它诱导的一个双射。取某个元素 $y = (y_j) \in S$，并将其写为 $\alpha(y) = (x_i) \in R$。坐标作用意味着，对于每个 $j \in J$，都有 $\alpha(y_j) = x_{\tau(j)}$。

因此，设 $y=(y_j)\in S$ 和 $\alpha(y)=(x_i)\in R$。取任意下标 $\ell\in J$ $S=S_\ell\oplus\prod_{j\neq\ell}S_j$ $R=R_{\tau(\ell)}\oplus$，并写出分解以及 $()$。$\prod_{i\neq\tau\ell}R_i$ $y=y_\ell+a$ $a\in\prod_{j\neq\ell}S_j$ 接下来，我们写为，其中，并且

$$\alpha(y)=\alpha(y_\ell)+\alpha(a),\ \text{where}\ \alpha(y_\ell)\in R_{\tau(\ell)}.$$

只需确保 $\alpha(a)\in\prod_{i\neq\tau(\ell)}R_i$。否则，我们有关系式 $e_{\tau(\ell)}\alpha(a)\neq 0$。我们从何处得到 $\alpha^{-1}(e_{\tau(\ell)}\alpha(a))=f_\ell a\neq 0$；这就产生了矛盾。 □

现在我们转而研究环 S，它等于 $\prod_{j\in J}S_j$，其中所有环 S_j 都是不可分解的。事实证明，该环的自同构会“重新排列”环 S_j。基于此，我们在群 Aut$S$ 中选取（不过是以非典范的方式）一个子群，该子群同构于集合 J 的某个双射群。为此，我们将环 $S_j(j\in J)$ 的集合按照环同构划分为等价类。我们也自动得到集合 J 的一个划分。

设 P 是 J 中的某个等价类。我们固定 P 中的某个元素，并将其记为整数 1。对于每个 $s\in P$，我们选取某个同构$\varepsilon_{s1}\colon S_1\to S_s$，而 ε_{11} 是环 S_1 的恒等自同构。接下来，我们假设对于所有 p，$q\in P$，都有 $\varepsilon_{1s}=\varepsilon_{s1}^{-1}$ 和 $\varepsilon_{pq}=\varepsilon_{p1}\cdot\varepsilon_{1q}\colon S_q\to S_p$。

设 σ 是集合 P 的一个双射。假设 α_σ 作为同构 $\varepsilon_{\sigma(q)q}$ 作用于 S_q，我们定义代数 $\prod_{q\in P}S_q$ 的自同构 α_σ。之后，显然有 $(\alpha_\sigma)^{-1}=\alpha_{\sigma^{-1}}$。若 τ 是集合 P 的另一个双射，则关系 $\alpha_{\tau\sigma}=\alpha_\tau\alpha_\sigma$ 成立。因此，映射 $\sigma\to\alpha_\sigma$ 是集合 P 的双射群到群 Aut$(\prod_{q\in P}S_q)$ 的同构嵌入。我们将这个嵌入的像记为 Σ_P。现在令 $\sum=\prod_P\Sigma_P$，其中 P 遍历上文引入的集合 J 的所有等价类。环 S 的自同构群 $\sum$ 同构于集合 J 的某个双射群。这些恰好是保持集合 J 的每个等价类 P 不变的双射。我们将 $\sum$ 与这个双射群等同，即假设 $\alpha_\tau=\tau$。

我们再定义群 Aut S的一个子群。令 $\Gamma=\{\mu\in\text{Aut}\ S\mid \mu S_j=S_j$，对每个 $j\in J\}$均成立。这里 Γ 是群 Aut S 的正规子群，并且 $\Gamma\cap\sum=\langle 1\rangle$。任取一个自同构 $\varphi\in$ Aut S。根据引理 5.2，φ 诱导下标集 J上的一个双射 τ。我们有包含关系 $\varphi\alpha_\tau^{-1}\in\Gamma$。记 $\varphi\alpha_\tau^{-1}$为 μ，得到 $\varphi=\mu\alpha_\tau$，其中 $\mu\in\Gamma$，$\alpha_\tau\in\sum$。

我们将最近所说的一切形式化为以下断言。

推论 5.4. 群 Aut S 等于半直积$\Gamma \leftthreetimes \sum$，其中$\Gamma = \prod_{j\in J}$Aut S_j，$\sum$是集合 J 上的某个双射群。此外，存在一个同构 Out $S \cong \prod_{j\in J}$Out $S_j \leftthreetimes \sum$。

我们将反复引用 Azumaya 的一个结果，因此先将其表述如下。

定理 5.5 [5]. 设 S 是某个环，$e_1, \ldots, e_n$ 和 $e_1^*, \ldots, e_n^*$ 是其中两组两两正交幂等元，且对每个 i，都有 $e_i - e_i^* \in J(S)$。则存在环 S 的一个内自同构 μ，使得 $\mu(e_i) = e_i^*, i = 1, \ldots, n$。

再次设 $K = I(X, R)$ 是一个写作分裂扩张 $L \oplus M$ 的关联代数。在本小节余下部分，我们考察代数 K 的条件(**I**) 和(**II**) 。它们彼此密切相关。

引理 5.6. 对于关联代数 K，以下断言成立。

1. 条件(**II**)蕴含条件(**I**)。**2.** 对于不可分解环 R，条件(**I**) 和(**II**)等价。

证明。

1. 相反，我们假设存在代数 K 的自同构 φ，使得 $\varphi M \not\subseteq M$。我们取某个元素 $a \in M$，使得$\varphi(a) = b \notin M$，并选取一个幂等元 e_y，使得 $e_y b e_y \neq 0$。由条件 (**II**) 可知，对于某些 $x \in X$ 和 $d \in M$，有 $\varphi^{-1}(e_y) = e_x + d$。由定理 5.5 可知，存在一个内自同构 μ，使得$\mu(e_x + d) = e_x$。我们有 $\mu\varphi^{-1}(e_y) = e_x$。因此，我们得到不可能的关系

$$0 \neq \mu\varphi^{-1}(e_y b e_y) = e_x \mu(a) e_x = 0.$$

因此，条件 (**I**) 成立。

2. 我们取代数 K 的任意一个自同构 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ 以及某个幂等元 e_x。由引理 5.2 可知，对于某个 y，有 $\alpha(e_x) = e_y$。因此，我们得到

$$\varphi(e_x) = \alpha(e_x) + \delta(e_x) = e_y + \delta(e_x) \in e_y + M. \quad \square$$

我们重点介绍满足条件(**I**) 或(**II**)之一的一些情形。

有一种显然的情形。设 R 是半本原环，即 $J(R) = 0$。那么 $J(L) = 0$，且 $J(K) = M$（见推论 4.2）。显然，K 满足条件 (**I**)。

引理 5.7。 如果所有环 R_x 都满足条件（5），那么代数 K 满足条件 **(I)**。

证明。 反设。设 φ 是代数 K 的一个自同构，使得 $\varphi M \not\subseteq M$。那么 $\varphi(a) = b \notin M$，其中 $a \in M$。存在一个幂等元 e_y，使得 $e_y b e_y \neq 0$。我们写出 $\varphi^{-1}(e_y) = f + m$，其中 $f^2 = f \in L$、 $m \in M$ 和 $f \neq 0$。令内自同构 μ 将 $f + m$ 变换为 f（定理 5.5）。那么 $(\mu\varphi^{-1})(e_y) = f$。按照第 3 节中的约定，我们将 f 表示为 $f = (f_x)$， $f_x \in R_x$。

我们令 $S = fKf$。映射 $\mu\varphi^{-1}$ 到 R_y 的限制是一个环同构。

$$R_y = e_y K e_y \to fKf = S.$$

由于 $e_y b e_y \neq 0$，我们有 $f\mu(a)f \neq 0$。因此，存在某些 x, z，使得 $f_x \mu(a) f_z \neq 0$ $x \not\sim z$。由此可得，

$$f_x K f_z \neq 0, \quad f_x K f_z = f_x f K f f_z = f_x S f_z \neq 0,$$

以及 f_x、 $f_z \in S$。由于 $S \cong R_y$，根据条件（5），可得 $f_z S f_x \neq 0$。因此，$e_z K e_x \neq 0$ 和 $z < x$。因此， $e_x K e_z = 0$ 和 $f_x S f_z = 0$。这与假设矛盾。 □

关于已证明的引理，自然会产生一个问题。对于哪些环 R，矩阵环 $M(n, R)$ 对所有 $n \geq 2$ 都满足条件（5）？ 以下每种情况下答案都是肯定的:

a) R 是局部环；**b)** R 是左（或右）主理想整环；**c)** R 是交换戴德金环。

这些环的共同点是，它们上的有限生成模都是生成元。

引理 5.7 和 5.6 表明，若 R 是所列环之一，则代数 $I(X, R)$ 满足条件 **(I)** 和 **(II)** 。

在转到条件 **（II）** 之前，我们先表述一个简单的结果。

引理 5.8。 设 S 为任意环。若商环 $S/J(S)$ 是不可分解的，则 S 是强不可分解环。特别地， S是不可分解的。

证明。 我们假设存在一个非零幂等元 $e \neq 1$ ，使得 $(1 - e)Se = 0$。环 S 可与形式矩阵环

$\begin{pmatrix} eSe & eS(1-e) \\ 0 & 1-e \end{pmatrix}$。由此得到一个环同构

$$S/J(S) \cong eSe/J(eSe) \oplus (1-e)S(1-e)/J((1-e)S(1-e)).$$

这是矛盾的，因为环 $S/J(S)$ 是不可分解的。 □

引理 5.9. 如果商环 $R/J(R)$ 是不可分解的，那么环 K 满足条件**(II)** 。

证明. 对于每个 $x \in X$，商环 $R_x/J(R_x)$ 都是不可分解的。

考虑到推论 4.2 中的关系 $J(K) = J(L) \oplus M$，我们可以将商环 $K/J(K)$ 与 $L/J(L)$ 等同起来。我们将最后一个环与直积 $\prod_{x\in X} R_x/J(R_x)$ 等同起来。

固定一个自同构 $\varphi \in$Aut K。设 $\overline{\varphi}$ 是由自同构 φ 诱导的代数 $K/J(K)$ 或 $L/J(L)$ 的自同构。由引理 5.2 可知，对于每个幂等元 e_x，存在一个幂等元 e_y，使得$\overline{\varphi}(\overline{e}_x) = \overline{e}_y$，其中 e_x（分别为 e_y）上方的横线表示关于 $J(R_x)$（分别为 $J(R_y)$）的剩余类，或者等价地，表示关于 $J(K)$ 的剩余类。

回到环 K，我们得到关系 $\varphi(e_x) = e_y + a + b$，其中$a \in J(L)$，$b \in M$，且 $e_y + a$是 L中的幂等元。接下来我们写下$a = c + d$, $c \in R_y$, $d \in \prod_{z\not\sim y} R_z$。由于 $d \in J(L)$ 且 d是幂等元，因此有 $d = 0$。由 $c \in J(R_y)$ 可知，$e_y + c$是 R_y中的可逆幂等元。因此，$e_y + c = e_y$ 且 $c = 0$。由此证明了 $\varphi(e_x) = e_y + b$ 且 $b \in M$，这正是所需的。 □

在本小节末尾，我们回答这样一个自然的问题。对于环 R 和 $I(X, R)$，在计算群 Aut$K$ 时，哪些条件是最一般且可接受的，其中 $K = I(X, R)$?

事实上，这样的条件可以称为条件 **(II)**。确实，若该条件成立，那么条件 **(I)**也成立（见引理 5.6）。也就是说，代数 K 的所有自同构都是三角形的。条件 **(II)**可以预测自同构在环 R_x 和双模 M_{xy}上的作用性质。这意味着如下内容。设 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \in$ Aut K。即使环 R_x是可分解的，且引理 5.2 不直接适用于直积$\prod_{x\in X} R_x$，条件 **(II)** 仍保证以下结论：对于任意 $x \in X$，存在一个元素 $y \in X$，使得 $\alpha(e_x) = e_y$ 且 $\alpha R_x = R_y$。这使得可以利用偏序集 $\overline{X}$的自同构。再设 $\delta = 0$，即φ 是一个对角自同构。那么对于每一对 x、y、$x \not\sim y$，我们有$\beta M_{xy} = M_{st}$，其中 $e_s = \alpha(e_x)$ 且 $e_t = \alpha(e_y)$。

事实上，这样的条件可以称为条件（**II**）。确实，如果它成立，

那么条件（**I**）也成立（引理 5.6）。也就是说，代数 K 的所有自同构都是三角形的。此外，条件（**II**）还能预测自同构在环 R_x 和双模M_{xy}上的作用性质。具体如下。设 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}\ K$。即使环 R_x 是可分解的，且引理 5.2 不适用于直积 $\prod_{x\in X} R_x$，条件（**II**）仍能保证以下结论：对于任意 $x \in X$，都存在这样的 $y \in X$，使得 $\alpha(e_x) = e_y$ 且 $\alpha R_x = R_y$。这使得可以利用偏序集 $\overline{X}$的自同构。再设 $\delta = 0$，即 φ是一个对角自同构。那么，对于满足 $x \not\sim y$的每一对 x、y，都有$\beta M_{xy} = M_{st}$，其中 $e_s = \alpha(e_x)$，且 $e_t = \alpha(e_y)$。

我们指出满足条件 (**II**)的两种主要情形。

1. 商环 $R/J(R)$ 是不可分解的（引理 5.9）。

我们回顾一下，根据引理 5.8，环 R 和 R_x 也是不可分解的。

2. 条件 (**I**) 成立，且环 R 是不可分解的（引理 5.6）。

结合引理 5.7、5.9 以及引理 5.7 证明之后的文字，我们列出满足条件 (**II**)的代数 $I(X, R)$ 所对应的环 R：

a) R 是局部环；**b)** R 是左（或右）主理想整环；**c)** R 是交换戴德金环；

d) X 是偏序集，且 R 除 **1** 以外没有非零幂等元；

e) 环 R 满足商环 $R/J(R)$ 是不可分解的（局部环参见**e)**）。

一致性。在第 6、8 和 9 小节中，我们假设代数K，即 $I(X, R)$，满足条件（II）。例如，当 R 是以下所指出的环之一时**a)–e)**，**情况便是如此**。

6 群 Aut K 的主要同构与分解

和之前一样，令 K 表示某个关联代数 $I(X,R)$，其表示形式为 $K = L \oplus M$，如第 3 节开头所述。我们取代数 K 的任意自同构 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$（根据引理 5.6，$K$ 的所有自同构都是三角形的，参见刚刚采用的约定）。这里 $\alpha \in \mathrm{Aut}\ L$。对于每个 $x \in X$，存在 y 使得 $\alpha(e_x) = e_y$（这在上一节末尾证明）。若 $s \neq x$ 且 $\alpha(e_s) = e_t$，则 $e_y e_t = 0$，并且当 $e_x e_s = 0$ 时 $y \neq t$。现在令 $z \in X$。考虑到 $\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$，我们得到 $\alpha(e_z)^{-1} = e_u$，其中某个 $u \in X$。因此，$\alpha(e_u) = e_z$。因此，α 诱导了双射 $\tau\colon \overline{X} \to \overline{X}, x \to y$。事实上，$\tau$ 是偏序集 $\overline{X}$ 的自同构。我们来验证这一性质。

设 x、$y \in X$ 和 $x < y$。则 $M_{xy} = e_x M e_y \neq 0$。我们选择一个内自同构 μ，使得

$$\mu(e_{\tau(x)}) + \delta(e_x)) = e_{\tau(x)}, \quad \mu(e_{\tau(y)}) + \delta(e_y)) = e_{\tau(y)}.$$

（定理 5.5）。我们有如下关系。

$$\mu\varphi(M_{xy}) = \mu\varphi(e_x) M \mu\varphi(e_y) = e_{\tau(x)} M e_{\tau(y)} = M_{\tau(x)\tau(y)} \neq 0.$$

因此，$\tau(x) < \tau(y)$。

反之，若已知 $\tau(x) < \tau(y)$，则同样可以得到 $x < y$。因此，$\tau \in \mathrm{Aut}\overline{X}$。在这种情况下，映射 $\varphi \to \tau$ 是 p的一个群同态：$\mathrm{Aut}K \to \mathrm{Aut}\overline{X}$。为方便起见，使用 τ_α 代替τ。此外，还有一个同态 $r\colon \Omega \to \mathrm{Aut}\overline{X}, \alpha \to \tau_\alpha$（群 Ω 定义于第 5 节开头）。我们注意到，对于任意$x \in X$，$\alpha(e_x) = e_{\tau_\alpha(x)}$。

因此，如果给定自同构 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$，那么自同构 α 会对环 R_x 进行“重排”。此外，如果 φ 是对角自同构，那么我们可以明确指定 β 对双模 M_{xy} 的作用。

命题 6.1. 对于代数 K 的自同构 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$，有如下结论。

1. 代数 L 的自同构 α 根据偏序集 $\overline{X}$ 的某个自同构 τ 对环 R_x 进行置换。

2. 如果 $\delta = 0$，即 φ 是一个对角自同构，那么 L-L-双模 M 的自同构 β 会根据自同构 τ置换双模 M_{xy}。此外，β 在 M_{xy} 上的限制是双模 $M_{xy} \to M_{\tau(x)\tau(y)}$ 的同构（相对于环同构 $\alpha|_{R_x}$: $R_x \to R_{\tau(x)}$、$\alpha|_{R_y}$: $R_y \to R_{\tau(y)}$）。

我们回顾命题 4.4 中的等式:

$$\mathrm{In}\ (\mathrm{Aut}\ K) = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\ K) \leftthreetimes \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K).$$

我们还回顾一下，以下定理中的群已在第 5 节开头出现。在以下定理中，陈述 1) 可以理解为能够对代数K的任意自同构进行对角化。

定理 6.2. 设代数 K 满足等式 **II**。
以下关系成立。

1. Aut $K = \mathrm{In}_1$(Aut K) $\leftthreetimes \Lambda$.**2.** Ker $f = \mathrm{In}_1$(Aut K) $\leftthreetimes \Psi$.**3.** $\Phi = \mathrm{In}$(Aut K) $\cdot \Psi = \mathrm{In}_1$(Aut K) $\leftthreetimes$(In$_0$(Aut K)) $\cdot \Psi$.

证明。
1. 我们取自同构 $\varphi \in$ Aut K，并令 τ 为与 φ 对应的集合 $\overline{X}$ 的自同构（它在命题 6.1 之前已给出）。我们构造 K 中的元素 $v =(v_{st})$，其中

$$v_{st} = \varphi(e_{\tau^{-1}(t)})(s,t) \ \text{ for any } \ s,t \in X.$$

我们注意到，对于每个 $x \in X$，都有 $ve_x = \varphi(e_{\tau^{-1}(x)})e_x$。我们有 $v_{tt} = 1$，因此，元素 v 在 K 中是可逆的（命题 4.1 或定理 4.3）。

因此，对于每个 $z \in X$，都有关系 $ve_{\tau(z)} = \varphi(e_z)e_{\tau(z)}$。此外，关系 $\varphi(e_z)v = \varphi(e_z)e_{\tau(z)}$ 成立。因此，我们有

$$\varphi(e_z)v = ve_{\tau(z)}, \quad v^{-1}\varphi(e_z)v = e_{\tau(z)}.$$

设 μ 是由元素 v 定义的内自同构。那么

$$\mu \in \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\ K), \quad \mu\varphi(e_z) = e_{\tau(z)} \ \text{ for every } \ z \in X.$$

通过设置 $\gamma = \mu\varphi$，我们得到 $\varphi = \mu^{-1}\gamma$，其中 $\mu^{-1} \in$ In$_1$(Aut K), $\gamma \in \Lambda$。

我们验证 In$_1$(Aut K) $\cap\, \Lambda = \langle 1 \rangle$。令 $\nu \in$ In$_1$(Aut K) $\cap\, \Lambda$，且 ν 由元素 $1 + d$ 定义，其中 $d \in M$。那么，对于某个 γ，有 $\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$。

对于任意元素 $a \in L$，我们有

$$\nu(a) = (1+d')a(1+d) = a + d'a + ad + d'ad,$$

其中 $1+d'$ 是 $1+d$ 的逆元。因此，$d'a + ad + d'ad = 0$。特别地，

$$d'e_x + e_x d + d'e_x d = 0,\ e_x d' e_x + e_x d + e_x d' e_x d = e_x d = 0$$

对于每个 $x \in X$。因此，$d = 0$。从而，$\nu = 1$。可以认为，**1** 中的半直积分解确实存在。

2. 2 中的等式由 **1** 以及包含关系 $\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\ K) \subseteq \mathrm{Ker}\ f$ 得出。

3. 由 **1** 中的分解可知，$\Phi = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\ K) \leftthreetimes (\Phi \cap \Lambda)$。还需验证 $\Phi \cap \Lambda = \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K) \cdot \Psi$。只需证明左侧包含于右侧。设 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Phi \cap \Lambda$，其中 $\alpha \in \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L)$。若 α 由元素 $v \in U(L)$ 定义，则令 μ 为由同一元素 v 定义的内自同构。令 $\psi = \mu^{-1}\varphi$，可得 $\mu\psi = \varphi$，其中 $\mu \in \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)$，$\psi \in \Psi$。 □

我们汇集了若干有趣且实用的等式和同构。

命题 6.3. 以下关系和同构成立。

1. $\Psi \cap \mathrm{In}(\text{自同构}\ K) = \Psi \cap \mathrm{In}_0(\text{自同构}\ K) = \Psi_0$.

2. $\Lambda/(\text{在}_0(\mathrm{Aut}\ K)) \cdot \Psi \cong \Omega/\text{在}(\mathrm{Aut}\ L)$,

$$C/\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K) \cdot \Psi \cong \Omega_1/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L).$$

3. $\Phi/\text{核}\ f \cong \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)/\Psi_0$.

4. $\Phi/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ K) \cong \Psi/\Psi_0$.**5.**

$\Lambda/C \cong \Omega/\Omega_1$.

证明。

1. 我们验证不显然的包含关系 $\Psi \cap \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ K) \subseteq \Psi_0$ 成立。取某个自同构 $\mu = \mu_1\mu_0$，其中 $\mu \in \Psi$, $\mu_1 \in \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\ K)$，$\mu_0 \in \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)$。设 μ_1 由元素 $1+d$, $d \in M$定义，且 μ_0 由元素 $v \in U(L)$定义。那么 μ 由元素 $v + vd$定义，且 μ^{-1} 由元素 $v^{-1} + d'$定义，其中 $d' \in M$。

对于任意元素 $a \in L$，我们有

$$\mu(a) = v^{-1}av + (v^{-1}avd + d'av + d'avd).$$

由于 $\mu \in \Psi$，我们有 $v^{-1}av = a$ 和 $av = va$。因此，$v \in C$（L）。括号中的表达式等于零。正如定理 6.2(1) 的证明结尾所示，可以得到 $d = 0$。因此，$\mu_1 = 1$ 和 $\mu = \mu_0$。由于 v 是可逆中心元，我们有 $\mu \in \Psi_0$。

2. 首先，我们指出，包含关系 $\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L) \subseteq \Omega$ 始终成立。记 π 为典范满同态 $\Omega \to \Omega/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L)$。同态 $\pi f|_\Lambda\colon \Lambda \to \Omega/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L)$ 的核等于 $\Phi \cap \Lambda$，因此等于 $\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K) \cdot \Psi$（参见定理 6.2(3) 的证明）。

3,4,5. 通过考虑 **1** 和定理 6.2，我们得到同构

$$\Phi/\mathrm{Ker}\ f \cong (\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K) \cdot \Psi)/\Psi \cong \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)/\Psi_0 \cong \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L).$$

接下来有

$$\Phi/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ K) = (\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ K) \cdot \Psi)/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ K) \cong \Psi/\Psi_0.$$

从**5**证明同构也并不困难。□

我们阐述关于群 $\mathrm{Aut}\ K$ 的结构的主要结果。

定理6.4。设代数 K 满足等式 **II**。

a. 以下同构成立。

1. 自同构 K/核 $f \cong \Omega \cong \Lambda/\Psi$ 和 $C/\Psi \cong$

Ω_1.**2.** 自同构 $K/\Phi \cong \Omega$/内自同构(自同构 L)。

b. Out K 有一个正规子群 H，使得

$$H \cong \Psi/\Psi_0, \quad \mathrm{Out}\ K/H \cong \Omega/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L).$$

c. 若关系 $\Psi = \Psi_0$ 成立，则

$$\Phi = \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ K), \quad \mathrm{Out}\ K \cong \Omega/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L).$$

证明。
a. 1 和**2** 中的同构可直接由定理 6.2 和命题 6.3 得出。

b. 我们将 $\Phi/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ K)$ 视为 H 的一个子群。我们所需的一切均可由命题 6.3 以及来自 **2** 的同构得到。

c. 如果 $\Psi = \Psi_0$，则由定理 6.2 可得 $\Phi = \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ K)$。□

可以得出以下结论：如果能够确定群Ψ 和 Ω 的结构，那么在某种意义上就能确定群 Aut$K$ 和 Out$K$的结构。

在关于形式矩阵代数的论文 [37] 和 [38], 中，得到了有关群 Ψ 和 Ω 的各种信息（形式矩阵环中群 Ψ 和 Ω 的定义与给定论文中的定义类似）。给定论文的第 8 节和第 9 节也专门讨论群 Ω 和 Ψ。

在本小节末尾，我们给出关于自同构在双模 M 上作用的各种信息。

命题 6.5。**1.** 对角自同构在直积 $M = \prod_{x,\ y\in X} M_{xy}$ 上逐坐标作用。同时，对于每个对角自同构 φ 和 $k \geq 1$，关系 $\varphi W_k = W_k$ 均成立。

2. 设 $\varphi \in \mathrm{Aut}\ K$。则对于每个 $k \geq 1$, $\varphi V_k = V_k$ 均成立。

证明。双模 M_{xy}、W_k 以及理想 V_k 定义于第 3 节。

1. 设 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 为一个对角自同构。对于任意 x、$y \in X$、$x < y$，以及每个 $m = (m_{xy}) \in M$，我们有以下关系

$$\varphi(m_{xy}) = \beta(m_{xy}) = \beta(e_x m e_y) = \alpha(e_x)\beta(m)\alpha(e_y) =$$

$$= e_{\tau(x)}\beta(m)e_{\tau(y)} \in M_{\tau(x)\tau(y)},$$

其中，τ 是由 α 诱导的有序集合 $\overline{X}$ 的部分自同构（参见命题 6.1 及其前文）。另一方面，我们写下

$$\varphi(m) = (n_{xy}) \in \prod_{x,y\in X} M_{xy}.$$

我们必须验证，对于任意不等价的 $\varphi(m_{xy}) = \beta(m_{xy}) = n_{\tau(x)\tau(y)}$ x、$y \in X$（参见推论 5.3）。

我们不再写出进一步推理的所有细节。这些推理基于双模 M 对任意两个不等价的 x、$y \in X$ 都存在直分解：

$$M = M_{xy} \oplus N_{xy}, \ \text{where}\ N_{xy} = \prod_{s\not\sim x \ \text{or}\ t\not\sim y} M_{st}$$

以及第二个类似的分解 $M = M_{\tau(x)\tau(y)} \oplus N_{\tau(x)\tau(y)}$。在检验等式 $\varphi W_k = W_k$ 时，我们还应考虑区间 $[[x], [y]]$ 和 $[[\tau(x)], [\tau(y)]]$ 在 $\overline{X}$ 中长度相同的情况。

2. 我们将任意自同构 $\varphi \in \mathrm{Aut}\ K$ 写成 $\varphi = \mu\psi$ 的形式，其中 $\mu \in \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\ K)$，而 ψ 是一个对角自同构（定理

6.2）。令 μ 由元素 $1+d$定义，其中 $d \in M$。于是我们有

$$\mu(m) = (1+d')m(1+d) = m + (d'm + md + d'md)$$

对于每个 $m \in M$，其中 $1+d'$ 是 $1+d$ 的逆元。如果 $m \in V_k \backslash V_{k+1}$，那么 $d'm+md+d'md \in V_{k+1}$（第 3 节中的性质 2）。因此，$\mu(m) \in V_k$。所以，$\mu V_k = V_k$。关系 $\psi V_k = V_k$ 由 1 得出。由于 $\varphi = \mu\psi$，我们还有 $\varphi V_k = V_k$。 □

7 群 Aut X

我们介绍预序集 $\langle X, \leq \rangle$ 的自同构群 Aut$X$ 的若干性质。关于 X 集合的一些符号和术语见第2节。特别地，$\sim$ 是 X 上的一个等价关系，而 $\overline{X}$ 是 $X/\sim$ 的商集，它是一个偏序集。

每个自同构 $\tau \in$ Aut X 都诱导一个自同构 $\overline{\tau} \in$ Aut $\overline{X}$。由此得到群同态 k: Aut $X \to$ Aut $\overline{X}$。如果自同构$\tau \in$ Aut X 将每个形如 $[x]$, $x \in X$ 的区间映入其自身，则称它为内自同构。所有内自同构在群 Aut X中构成 In(Aut X) 的一个正规子群。商群 Aut X/In(Aut X) 称为集合 X 的外自同构群；记作 Out X。

同态 k 的核与 In(Aut X) 重合，而 k 的像包含于子群 G，该子群等于 $\{p \in$ Aut $\overline{X} \,|\, |[x]| = |p([x])|$，对任意 $x \in X\}$ 均成立。我们（非典范地）定义一个同态 j: $G \to$Aut X。为此，我们将所有形如 $[x]$ 的区间划分为基数相同的区间类。设 J 是其中一类。在 J 中，我们固定一个区间 $[z]$。接下来，对于每个区间 $[x] \in J$，我们选取双射 $\varepsilon_{[x],\,[z]}$: $[z] \to [x]$，并且 $\varepsilon_{[z],\,[z]}$ 是恒等映射。接下来我们定义

$$\varepsilon_{[z],[x]} = \varepsilon^{-1}_{[x],[z]}, \quad \varepsilon_{[x],[y]} = \varepsilon_{[x],[z]}\varepsilon_{[z],[y]}.$$

我们对每一类具有相同基数的集合都进行同样的处理。取一个任意的自同构 $q \in G$。令 τ_q 为一个映射 $X \to X$，使得在来自某个类 J 的区间 $[x]$ 上，该映射 τ_q 与 $\varepsilon_{q([x]),[x]}$ 重合。于是 $\tau_q \in$Aut$X$，且映射 $q \to \tau_q$, $q \in G$ 是 j 的同态：$G \to$ Aut$X$。同时，等式 $k_j = 1_G$ 成立。这意味着群 Im k 与 G 重合。因此，我们可以将这些群与 Out X 等同起来。接下来，我们可以将这些群与 Im j 等同起来，它是 Aut X 中一个已定义（但非典范）的子群。因此，以下事实成立。

命题 7.1。 存在一个（非典范的）群的半直积分解 Aut $X = \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ X) \rtimes \mathrm{Out}\ X$。

上述结果及其之前的推理，在思想上与推论 5.3 证明之后的讨论十分接近。

基于预序集 X 的连通分支，可以得到群 Aut$X$ 的另一种分解。令 X_i $(i \in I)$ 为集合 X 的所有两两不同的连通分支。我们根据预序集 X_i 的同构，将所有连通分支划分为等价类。由此也得到集合 I 的相应划分。与推论 5.3 的证明之后环直积 $\prod_{j\in J} S_j$ 的情形基本相同，可以（以非典范的方式）定义集合 X 的某个自同构群 Σ_X。它同构于集合 I 的那些保持每个等价类不变的双射所成的群。现在，对于每个 $i \in I\}$，我们定义另一个正规子群 $\Gamma_X = \{\sigma \in \mathrm{Aut}\ X \,|\, \sigma X_i = X_i$。以下断言成立。

命题 7.2. 存在以下半直积分解：

$$\mathrm{Aut}\ X = \Gamma_X \rtimes \Sigma_X,\ \text{where}\ \Gamma_X = \prod_{i\in I} \mathrm{Aut}\ X_i,\ \mathrm{Out}\ X = \prod_{i\in I} \mathrm{Out}\ X_i \rtimes \Sigma_X.$$

将集合 X 划分为连通分支会如何影响环 $I(X, R)$ 的结构？以下结果将使我们能够将推论 5.3 应用于群 Aut$K$。

命题 7.3. 环 $I(X, R)$ 是不可分解的，当且仅当环 R 是不可分解的，且集合 X 是连通的。

证明。 验证该命题的**必要**条件并不困难。

充分性。 我们假设环 $I(X, R)$ 可分解为非平凡理想直和。令 g, h 为与此分解对应的中心幂等元。根据定理 5.5，我们可以假设 $g, h \in L$（回顾分解 $K = L \oplus M$）。与第 3 节类似（见命题 3.1），我们写下 $g = (g_x)$ 和 $h = (h_x)$，其中 $g_x, h_x \in R_x$。由于环 R 不可分解，对于任意 x，我们有 $g_x = 1$ 或 $g_x = 0$；对于 h_x 也同样成立。令 $Y = \underline{=} \{x \,|\, g_x = 1\}$ 和 $Z = \{x \,|\, h_x = 1\}$。于是 $Y \cap Z = \varnothing$ 且 $Y \cup Z = X$。由 $gMh = 0 = hMg$ 可知，对于任意 $y \in Y, z \in Z$，都有 $e_y M e_z = 0 = e_z \underline{M} e_y$。因此， y 和 z 在 X 中不可比较。但是，这样的子集 Y 和 Z 的存在，与 X 连通这一性质矛盾。 □

将集合 X 划分为连通分支 X_i 会导致相等的-

识别后，$K = I(X, R) = \prod_{i\in I} I(X_i, R)$。由推论 5.4 和命题 7，我们得到以下断言。

命题 7.4. 设 R 是一个不可分解环。那么我们有一个半直积分解

$$\mathrm{Aut}\ K = \Gamma_K \leftthreetimes \Sigma_K,\ \text{where}\ \Gamma_K = \prod_{i\in I} \mathrm{Aut}\ (I(X_i, R)).$$

我们还有一个同构。

$$\mathrm{Out}\ K \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Out}\ K_i \leftthreetimes \Sigma_K,\ \text{where}\ K_i = I(X_i, R).$$

因此，在研究关联环 $I(X, R)$ 时，在某种程度上，我们可以将研究范围限定为连通集 X 的情形。

在上一节的开头，引入了同态 p: Aut$K \to$Aut$\overline{X}$ 和 r: $\Omega \to$ Aut$\overline{X}$。更重要的是，群 Aut$X$ 可以自然地嵌入群 Aut$K$ 中。设 $\tau \in$ Aut X。我们定义映射 ξ_τ: $K \to K$，假设对于任意 $f \in K$ 和 $x, y \in X$，均有 $\xi_\tau(f)(x, y) = f(\tau(x)\ \tau(y))$。那么 ξ_τ 是一个自同构，且映射 $\tau \to \xi_\tau$ 是一个群嵌入 t: Aut$X \to$Aut$K$。我们将 τ 与 ξ_τ 等同。形如 ξ_τ 的自同构称为序自同构。等式 $pt = k$ 也成立。

我们还可以说明自同构 $\tau \in$Aut$X$ 如何作用于 K 中的元素，前提是这些元素按照第 3 节中的方式以向量形式表示。一般而言，我们可以说，自同构 τ 会置换元素的分量。因此，群 Σ_X 可以嵌入群 Σ_K 中，而 Γ_X 可以嵌入 Γ_K 中（参见命题 7.2 和 7.4 ）。

现在我们考虑命题 7.1 中的分解 Aut $X =$ In(Aut X) $\leftthreetimes$ Out X。我们再次说明，我们将自同构 τ 与环 K 的自同构 ξ_τ 等同（它已在上文引入）。任意自同构 $\tau \in$ In(Aut X) 都在 K 上作用为矩阵 P 所给出的共轭，其中 $P = \prod_{x\in X} P_x$，且 P_x 是某个度为 $|[x]|$ 的置换的矩阵。因此，$\tau \in$In$_0$(Aut K)。至于群 Out X，我们有包含关系 Out $X \subseteq \Lambda$，由此得到 Out $X \cap C = \langle 1\rangle$。

同态 f 到 Out X 的限制是一个嵌入 Out $X \to \Omega$ 和 Out $X \cap \Omega_1 = \langle 1\rangle$ （群 Λ、C、Ω 和 Ω_1 出现在第 5 节中）。

不能断言子群 Out$X$ 会成为 Λ 或 Ω 中的半直和项（这种情况非常典型）。障碍在于

可能存在这样的同构环 R_x 和 R_y，使得这些环的矩阵具有不同的阶。在第9节中，我们将回到这一情形，并说明在一个假设下如何消除这一障碍。

8 群 Ω和 Ω_1

在第 5 节末尾，环 K 上的条件 **II** 已被确定，其中$K = I(X, R)$。**我们假设 K 满足这一条件**。

群 Ω 及其正规子群 Ω_1 已在第 5 节中引入。在证明定理6.4 后，强调了计算群 Ω 和Ψ 对于理解群 Aut$K$ 结构的必要性。第10节专门讨论群 Ψ。

群 Ω_1 是同态 r: Ω $\to$ Aut $\overline{X}$ 的核；参见第 6 节开头。因此，商群 Ω/Ω_1 可以嵌入群 Aut $\overline{X}$ 中。在上一节中，我们约定将群 Out X 视为 Aut K 和 Ω 的子群，使得 $\Omega_1 \cap$Out $X = \langle 1 \rangle$。弄清楚何时 Ω $= \Omega_1 \leftthreetimes$ Out X 非常重要。这个问题将在第9节中讨论。如果我们将 L 取作推论 5.4 中的环 S，那么就得到分解 Aut $L = \Gamma \leftthreetimes \Sigma$。显然，$\Omega_1 \subseteq \Gamma$。这里我们关注的是子群 Ω_1。

我们提出关于群 Ω_1结构的以下问题。

1. 哪些 Γ 的自同构属于 Ω_1?

2. 群 Ω_1 和 Ω_1/In(Out$L$) 的结构是什么？关于问题**2**，参考定理6.4很有用。

第一个问题的答案，以及在某些情况下第二个问题的答案，将会给出。

我们证明一个一般性事实。它推广了以下结果（见 [17,第2章，命题5.2]）。

设 H 是某个代数，α 和 γ 是 H 的两个自同构。当且仅当 $\alpha^{-1}\gamma$ 是内自同构时，存在一个 H-H- 双模同构 $H \to {}_\alpha H_\gamma$。双模 ${}_\alpha H_\gamma$ 的定义见第 1 节。

对于正整数 k 和 ℓ，我们定义

$$P = M(k, R),\ Q = M(\ell, R),\ H = M(c, R),\ \text{where } c = \text{LCM } (k, \ell),$$

最后， $V = M(k \times \ell, R)$。设 $\ell' = c/k$, $k' = c/\ell$。

环 H 可以用两种方式表示为块矩阵环：一种是 P 上的 ℓ' 阶块矩阵环，另一种是 Q 上的 k'阶块矩阵环。它还是一个由 V 上的$\ell' \times k'$大小的块矩阵构成的 P-Q 双模。

设 α 和 γ 分别是代数 P 和 Q的自同构。它们分别诱导出 H的自同构 $\overline{\alpha}$ 和 $\overline{\gamma}$。也就是说，对于任意矩阵 $A = (a_{ij}) \in H$, $a_{ij} \in P$，有 $\overline{\alpha}(A) = (\alpha(a_{ij}))$，$\overline{\gamma}$也类似。自同构 $\overline{\alpha}$ 和 $\overline{\gamma}$ 称为环（块）自同构。我们将它们记为 α 和 γ。以下命题中已采用这一约定。

命题 8.1. 若 $\alpha \in \text{Aut } P$ 且 $\gamma \in \text{Aut } Q$，则存在P-Q双模 $V \to {}_{\alpha}V_{\gamma}$ 的同构，当且仅当 $\alpha^{-1}\gamma$ 是代数 H的内自同构。

证明。设我们有一个 P-Q-双模同构 $\beta\colon \underline{V} \to {}_{\alpha}V_{\gamma}$。同构 β 诱导出一个 H-H-双模同构 $\beta\colon H \to {}_{\alpha}H_{\gamma}$,$\overline{\beta}(A) = (\beta(A_{ij}))$，对来自 H 的每个矩阵 $A = (A_{ij})$ 都成立。假设矩阵 A 具有上述块形式的表示，即 A_{ij} 是 $\ell' \times k'$块。因此， $\alpha^{-1}\gamma$ 是代数 H 的一个内自同构。

现在假设 $\alpha^{-1}\gamma$ 是代数 H 的一个内自同构。因此，存在一个 H-H-双模同构 $\beta\colon H \to {}_{\alpha}H_{\gamma}$。

设 $e_1, \ldots, e_{\ell'}$ 和 $f_1, \ldots, f_{k'}$ 是对应于来自 H的矩阵的两个块划分的对角矩阵单位。下列关系

$$\alpha(e_i) = e_i\ (i = 1, \ldots, \ell'),\ \text{and } \gamma(f_j) = f_j\ (j = 1, \ldots, k')$$

成立。因此，我们可以推得 β 诱导出一个 A-B-双模同构 $e_iHf_j \to {}_{A}(e_iHf_j)_{B}$，其中 $A = e_iHe_i$, $B = f_jHf_j$。换言之， β 实际上诱导出一个 P-Q-双模同构 $V \to {}_{\alpha}V_{\gamma}$。
□

我们关注这样一种情况。当且仅当存在代数 M 的一个变换 β，它既是其自同构，又是一个 L-L-双模同构 $M \to_{\alpha} M_{\alpha}$ 时，自同构 α of Γ 才属于 Ω_1。这等价于等式成立

$$\beta(cd) = \beta(c)\beta(d), \tag{1}$$

其中 $c \in M_{xz}$、 $d \in M_{zy}$、 $x < z < y$，以及等式

$$\beta(ac) = \alpha(a)\beta(c),\ \beta(db) = \beta(d)\alpha(b), \tag{2}$$

其中 $a \in R_x$、 c、 $d \in M_{xy}$、 $b \in R_y$ （有必要考虑第 3 节中的公式 (1) 和 (2)，以及命题 6.5(1) 中关于自同构逐坐标作用的内容）。

设 n_x 为环 R_x, $x \in X$中矩阵的阶。对于所有满足 $x < y$ 的 $x, y \in X$，令 c_{xy} =为 n_x, n_y 的最小公倍数。我们将矩阵环 $M(c_{xy}, R)$记为 H_{xy}。该环是环 R_x 和 R_y上的分块矩阵环。它也是环 M_{xy}上的分块矩阵 R_x-R_y 双模。假设环 R_x 和 R_y 的自同构均为环 H_{xy}的环（块）自同构。

定理 8.2. 代数 $L = \prod_{x \in X} R_x$的自同构 $\alpha = (\alpha_x)$ 属于群 Ω_1，当且仅当对于所有满足 $x < y$ 的 $x, y \in X$， $\alpha_x^{-1}\alpha_y$ 都是代数 H_{xy} 的内自同构。

证明。
必要性。 设 $\alpha \in \Omega_1$。因此，存在代数 K的一个自同构 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$，其中 β 是一个 L-L 双模同构 $M \to {}_\alpha M_\alpha$。将 β限制到 M_{xy}，得到一个 R_x-R_y 双模同构 $M_{xy} \to {}_{\alpha_x}(M_{xy})_{\alpha_y}$。根据命题 8.1

$$\alpha_x^{-1}\alpha_y \in \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ H_{xy}).$$

充分性。 根据命题 8.1，我们有一个 R_x-R_y-双模同构 β_{xy}: $M_{xy} \to {}_{\alpha_x}(M_{xy})_{\alpha_y}$，其中 $x < y$。我们定义一个映射

$$\beta = (\beta_{xy})\colon M \to M,\ (d_{xy}) \to (\beta_{xy}(d_{xy})),\ \text{ where } (d_{xy}) \in M = \prod_{x,y \in X} M_{xy}.$$

这里， β 是 L-L-双模同构 $M \to {}_\alpha M_\alpha$ （可利用等式 (2) 验证）。为了使代数 $K = L \oplus M$ 的变换 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 成为其自同构，还需验证 β 是代数 M 的自同构。为此，只需验证关系 (1) 成立。

我们固定三个元素 x、 y、 z，使得 $x < z < y$。我们开始使用另一个矩阵环。我们定义 $H = M(d, R)$，其中 $d =$ 是 n_x、 n_z 和 n_y 的最小公倍数。环 H 是分别以环 H_{xz}、 H_{zy}、 H_{xy}、 R_x、 R_z、R_y 为底环的分块矩阵环。它也可以看作是分别以双模 M_{xz}、 M_{zy}、 M_{xy} 为底的分块矩阵双模。

我们假设，自同构 α_x、 α_z 和 α_y 是代数 H 的环（块）自同构。我们将同构 β_{xz}、 β_{zy} 和 β_{xy} 视为双模（块）同构 $H \to {}_{\alpha_x}H_{\alpha_z}$、 $H \to {}_{\alpha_z}H_{\alpha_y}$ 和 $H \to {}_{\alpha_x}H_{\alpha_y}$。

（即我们也保留之前的记号）。直积 $\alpha_x^{-1}\alpha_z$、 $\alpha_z^{-1}\alpha_y$ 和 $\alpha_x^{-1}\alpha_y$ 是代数 H 的内自同构。它们按照命题 8.1 的意义，诱导出与上述相同的双模同构 β_{xz}、β_{zy} 和 β_{xy}。

这些双模同构的作用如下（参见 [37, 第 2]小节）。存在可逆矩阵 u、v、 $w \in H$，与上述内自同构相对应，它们满足以下关系。

$$\beta_{xz}(a) = \alpha_x(a)\alpha_x(u) = \alpha_x(u)\alpha_z(a),$$

$$\beta_{zy}(b) = \alpha_z(b)\alpha_z(v) = \alpha_z(v)\alpha_y(b),$$

$$\beta_{xy}(c) = \alpha_x(c)\alpha_z(w) = \alpha_x(w)\alpha_y(c)$$

对于所有 a、b、$c \in H$。

我们验证 H 满足该关系。

$$\beta_{xy}(cd) = \beta_{xz}(c)\beta_{zy}(d) \tag{3}$$

对于任意的 c、 $d \in H$。我们关注关系 $w = vu$ （我们仍需记住，元素 u、v、 w 的定义仅在相差可逆中心元的意义下确定）。我们有如下关系。

$$\beta_{xy}(cd) = \alpha_x(cd)\alpha_x(w) = \alpha_x(c)\alpha_x(d)\alpha_x(v)\alpha_x(u).$$

我们还有关系式

$$\beta_{xz}(c)\beta_{zy}(d) = \alpha_x(c)\alpha_x(u)\alpha_z(d)\alpha_z(v) =$$

$$= \alpha_x(c)\alpha_x(d)\alpha_x(u)\alpha_z(v) =$$

$$= \alpha_x(c)\alpha_x(d)\alpha_x(v)\alpha_x(u).$$

等式（3）得证。在（3）中，矩阵的乘法以块形式进行，由此可得等式（1）。
□

本小节余下部分将探讨群 Ω_1 的结构问题（见本小节开头的问题 2）。这个问题似乎相当复杂。与此同时，我们也获得了有关群 C 结构的信息。后者定义于第 5 节。群C 由代数 K 的对角自同构 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 组成，且满足：

对所有 $x \in X$， $\alpha_x R_x = R_x$。

我们回顾一下， n_x 是环 R_x 上的矩阵的阶（符号 n_x在定理 8.2 之前出现过）。设自然数 k 满足每个

n_x 都是 k的倍数。例如， k 可以是所有整数 n_x 的最大公约数，也可以等于 1。我们注意到，在后续的讨论中，可以只考虑 $k = 1$的情形。为此，需要将环 $I(X, R)$表示为某个「块」函数环的形式（参见关于此内容的第 3 节）。

我们用 P表示矩阵环 $M(k, R)$。环 P 的任意自同构 ε 都会给出 R_x 的环（块）自同构 ε_x 。接下来，我们得到 L的一个自同构 $\varepsilon_L = (\varepsilon_x)$。自同构 ε 还会诱导代数 M 的块自同构 ε_M 以及 L-L-双模 M的块自同构。因此，我们得到代数 K的一个自同构 $\overline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_L & 0 \\ 0 & \varepsilon_M \end{pmatrix}$ 。我们将由自同构 ε诱导的自同构 ε_L、 ε_M 和 $\overline{\varepsilon}$ 称为环（块）自同构。

我们用 D 表示代数 L的所有环自同构构成的子群。代数 K 的所有环自同构构成的子群也用同一个字母 D表示。这两个子群都与群 Aut P 典范同构。同时， $D \subseteq \Omega_1$ 属于 Aut L， $D \subseteq C$，而 $D \cap \Psi = \langle 1 \rangle$属于 Aut K。接下来，设 D_0 是 D 的一个子群，且它与 In(Aut P)同构。那么 $D/D_0 \cong$Out P，以下引理成立。

引理 8.3. 存在如下关系。

$$D_0 = D \cap \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L)\ \text{ in }\ \mathrm{Aut}\ L\ \text{ and}$$

$$D_0 = D \cap \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K) \cdot \Psi = D \cap \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)\ \text{ in } \mathrm{Aut}\ K.$$

此外，关系 $\Psi_0 D_0 = \Psi D \cap$In$_0$(Aut K) 成立。

我们为代数 K 写下以下条件（$*$）：

> 对于每个 $\alpha = (\alpha_x) \in \Omega_1,$ ，任意自同构 α_x 都是 Aut R_x 中一个内自同构与一个环（块）自同构的直积。

条件 $(*)$ 成立，当 R 是局部环或左（或右）主理想整环 [38,推论 10.5]。

将商群 $C/$In$_0$(Aut K) 记为 Out$_0 K$ 很方便（这是因为群 Out$K$ 实际上等于 $\Lambda/$In$_0$(Aut K)；另见命题 6.3）。

我们回顾一下，在第2节中，我们约定将预序集 X视为有向图。

定理 8.4。 设 X 是一个连通集，并且代数 K 满足条件 (II)和 $(*)$。存在以下关系和同构。

1.a. $\Omega_1 =$ 在 (Aut L) $\cdot D$ 中；**b.** $\Omega_1/$在 (Aut L) $\cong$ Aut P 中；**c.** $C =$ 在$_0$ (Aut K) $\cdot \Psi \cdot D$ 中。

2. 群 Out$_0K$ 包含一个与 Ψ/Ψ_0同构的 H 正规子群，而商群 Out$_0K/H$ 与 $\Omega_1/$In (Aut L) 同构；也就是说，它与群 Out P同构。

证明。
1. a. 取任意一个自同构 $\alpha = (\alpha_x) \in \Omega_1$。根据假设，对于每个 $x \in X$，都有 $\alpha_x = \mu_x\rho_x$，其中 μ_x 是一个内自同构，而 ρ_x 是矩阵环 R_x 的环（分块）自同构。我们构造环 L 的自同构 $\mu = (\mu_x)$ 和 $\rho = (\rho_x)$，并得到群 Γ 中的关系 $\alpha = \mu\rho$。由于 $\alpha, \mu \in \Omega_1,$，我们有 $\rho \in \Omega_1$。设 ρ_x由一个自同构 $\varepsilon_x \in$ Aut P, $x \in X$ 诱导。现在我们证明，实际上可以使得对所有 $x, y \in X$，都有 $\varepsilon_x = \varepsilon_y$。为此，我们注意到，显然，任何自同构 ρ_x 都可以视为任意环 R_y 的环自同构。也就是说，ε_x 诱导了环 R_y 的某个环自同构。

固定一个元素 $t \in X$。令 $x \in X$。在 X中，我们选取一条从t 到 x的半路径。多次应用定理 2.2，或利用对半路径长度的归纳法，可以确保 $\rho_x = \nu_x\rho_t$，其中 ν_x 是环 R_x的某个内环自同构。

下面给出一些简要说明。通过上述推理方法得到的形如 $\rho_p = \nu_p\rho_q$的等式出现在环 H_{pq} 中（见定理 8.2）。若令 $c =$为n_t、n_{z_1}、.....、n_{z_m}、n_x的最小公倍数，其中 z_1、z_2、.....、z_m 是从 t 到 x所选半路径上的顶点，那么我们可以将所有出现的环自同构都视为代数 $M(c, R)$的自同构。因此，我们可以将它们视为每个环 R_x的自同构。由此可得推论 $\nu_x \in$Aut R_x。

回到证明的开头，我们对每个 $x \in X$ 都得到 $\alpha_x = \mu_x\rho_x = \mu_x\nu_x\rho_t$。我们令 $\gamma = (\mu_x\nu_x)$ 和 $\rho = (\rho_t)$。那么 $\alpha = \gamma\rho$，其中$\gamma \in$In(Aut L), $\rho \in D$。

b. 根据引理 8.3，我们得到以下关系和同构。

$$\Omega_1/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L) = (\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L) \cdot D)/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L) \cong$$

$$\cong D/(D \cap \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L)) = D/D_0 \cong \mathrm{Aut}\ P/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ P) = \mathrm{Out}\ P.$$

c. 设 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in C$，其中 $\alpha \in \Omega_1$。与a类似，我们写下$\alpha = \mu\rho$，其中 μ 是内自同构， ρ 是环 L的环自同构。它们分别诱导出 K的内自同构和环自同构。我们对它们仍采用记号 μ 和 ρ 。现在令 $\psi = (\mu\rho)^{-1}\varphi$ ，得到关系

$$\varphi = \mu\rho\psi = \mu\psi'\rho, \text{ where } \mu \in \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K),\ \psi, \psi' \in \Psi,\ \rho \in D.$$

2. 作为子群 H，我们取商群 $\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)\cdot\Psi/\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)$，根据命题 6.3，它与 Ψ/Ψ_0 同构。此后，我们得到关系式

$$\mathrm{Out}_0 K/H \cong \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)\cdot\Psi\cdot D/\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)\cdot\Psi \cong$$
$$\cong D/(D \cap \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)\cdot\Psi) = D/D_0 \cong \mathrm{Out}\ P$$

（我们还要考虑引理 8.3）。 □

我们归纳定理 8.4 的一些特殊情形。

推论 8.5。

1. 若在定理 8.4 中令 $k = 1$ ，即 $P = R$，则 $D \cong \mathrm{Aut}\ R$。

2. 我们假设代数 K 满足以下条件：存在一个整数 n_s，它整除每个 n_x。那么我们可以取 R_s 作为环 P ，并且条件（$*$）将得到满足。特别地， $D \cong \mathrm{Aut}\ R_s$。

3. 设 X 为一个偏序集。则 **1** 和 **2** 的假设成立。此外，如果环 R 是交换的，并且仅考虑 R-代数 K 的自同构，则 $\Omega_1 = \langle 1\rangle$ 和 $D = \langle 1\rangle$。

证明。 没有必要证明1和3。

2. 我们假设所有的环 R_x 都是定义在环 R_s上的分块矩阵环。设 $\alpha = (\alpha_x) \in \Omega_1$。我们取一个任意的自同构 α_x ，并固定一条从 s 到 x的半路径。类似于定理 8.4(1(a))中等式的验证，我们可以在某个环$M(c, R)$中得到关系 $\alpha_x = \mu_x\alpha_s$ ，其中 μ_x是一个内自同构，而 α_x, α_s是这些环的环（块）自同构。由于 n_s 整除所有的 n_z, $z \in X$，我们有α_s 是 R_x中的环自同构。因此， $\mu_x \in \mathrm{Aut}\ R_x$。于是， $\alpha_x = \mu_x\alpha_s$，其中 μ_x 是一个内自同构，而 α_s 是环 R_x的环自同构。我们已经证明，对于等于R_s的环 P ，条件 $(*)$ 成立。 □

基于命题 7.4，我们将定理 8.4 和推论 8.5 推广到关联代数 $I(X, R)$，其中 X 是任意预序集。

与之前一样，设 $K = I(X, R)$、 X_i $(i \in I)$ 是集合 X 的所有连通分支，并设 $K_i = I(X_i, R)$（代数 K_i 出现在第7节中）。

根据命题 7.4，我们有一个半直分解

$$\mathrm{Aut}\ K = \Gamma_K \leftthreetimes \Sigma_K, \text{ where } \Gamma_K = \prod_{i \in I} \mathrm{Aut} K_i$$

并且 Σ_K 是集合 I上的某个双射群。我们还有一个同构

$$\mathrm{Out}\ K \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Out}\ K_i \leftthreetimes \Sigma_K.$$

这里不写出论证的全部细节，只关注几个要点。首先，我们有等式 $C = \prod_{i \in I} C_i$，其中 C_i是环 K_i 的对角自同构子群，它使相应的环 R_x 保持不变。我们有包含关系 $C \subseteq \Gamma_K$。

任意集合 X 上的群 D 的类似物应定义如下。对每个 $i \in I$，选取整数 k_i，使得每个 n_x 都是 k_i的倍数，其中 $x \in X_i$。接下来令 $P_i = M(k_i, R)$，并令 D为环 K_i的所有环（块）自同构所构成的子群。现在我们定义 $D = \prod_{i \in I} D_i$，其中 $D_i \cong \mathbf{Aut}\ P_i$。此外还有等式 $\Omega_1 = \prod_{i \in I} (\Omega_1)_i$，其中群 $(\Omega_1)_i$ 有明确的含义。

任意集合 X 的群 D 类比应如下定义。对于每个 $i \in I$，取数 k_i，使得每个 n_x 都是 k_i 的倍数，其中 $x \in X_i$。然后令 $P_i = M(k_i, R)$，并令 D 为环 K_i 的所有环（块）自同构所构成的子群。现在我们设 $D = \prod_{i \in I} D_i$，其中 $D_i \cong \mathbf{Aut} P_i$。此外还有等式 $\Omega_1 = \prod_{i \in I} (\Omega_1)_i$，其中群 $(\Omega_1)_i$ 具有明确的含义。

在所考虑的更一般情形下，条件 $(*)$ 表述如下$(**)$:

> 对于每个 $i \in I$ 以及每个 $\alpha = (\alpha_x) \in (\Omega_1)_i$，任意自同构 α_x 都是 $\mathbf{Aut} R_x$ 中一个内自同构与一个环（块）自同构的直积。

定理 8.6. 设代数 $K = I(X, R)$ 满足条件 **(II)** 和 $(**)$。在这种情况下，有以下关系和同构。**1.**

a. $\Omega_1 = \mathrm{In}\ (\mathrm{Aut}\ L) \cdot D$;

b. $\Omega_1 / \mathrm{In}\ (\mathrm{Aut}\ L) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Out}\ P_i$;

c. $C = \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K) \cdot \Psi \cdot D$.

2. 群 $\mathrm{Out}_0 K$ 包含一个正规子群 H，它与 Ψ/Ψ_0 同构；商群 $\mathrm{Out}_0 K/H$ 与 $\Omega_1/\mathrm{In}\,(\mathrm{Aut}\ L)$ 同构，也就是说，它与群 $\prod_{i\in I}\mathrm{Out}\ P_i$ 同构。此外，$\mathrm{Out}\ K/\mathrm{Out}_0 K \cong \Omega/\Omega_1$。

接下来我们只考虑推论 8.5(2)（同时，不采用最一般的形式）。

推论 8.7。设 K 是关联代数 $I(X,R)$，使得存在一个数 n_s 整除每个 n_x。对于每个 $i \in I$，我们可以将 R_s 取为环 P_i；则条件（$**$）得到满足。特别地，我们得到同构 $D \cong \prod_{|I|}\mathrm{Aut}\ R_s$。

有一种简单的构造，可以将任意代数 K 嵌入某个关联代数 K_0，使其满足推论 8.7 中的条件。在这种情况下，群 $\mathrm{Aut}K$ 被嵌入群 $\mathrm{Auth}K_0$ 中。从某种意义上说，这种构造与定理 8.2 的证明后备注中所暗示的构造正好相反。一种情况下，需要先将每个区间 $[x]$ 划分为若干部分；另一种情况下，则恰恰相反，需要扩展每个这样的区间。得到所需的预序集后，在这两种情况下，我们都得到了所需的关联代数 K_0。

有一种简单的构造，可以将任意代数 K 嵌入某个满足推论 8.7 所述条件的关联代数 K_0 中。在这种情况下，群 $\mathrm{Aut}K$ 嵌入群 $\mathrm{Auth}K_0$中。从某种意义上说，这种构造与定理 8.2 证明后备注中所暗示的构造恰好相反。一种情况下，需要先将每个区间 $[x]$ 拆分成若干部分；而另一种情况下则恰恰相反，需要扩展每个这样的区间。得到所需的预序集后，两种情况下我们都能得到所需的关联代数 K_0。

利用这一构造，并假设环 R 是交换的，我们可以得到关于群 $\Omega_1/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}L)$的有趣信息。

我们回顾一下，如果阿贝尔群 B 的元素的阶存在上界，则称该群为有界群。有界群是循环群的直和。

已知，对于交换环 R，R-代数 $M(n,R)$ 的外自同构群是一个有界阿贝尔群，其元素的阶均整除 n [25]。

在剩下的两个推论中，环 R 是交换的，我们考虑代数 R-K（即 $I(X,R)$）的自同构。

推论 8.8. 设 $X_i, i \in I$ 是集合 X 的所有连通分支。

那么，群 $\Omega_1/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L)$ 同构于直积 $\prod_{i\in I} B_i$，其中每个 B_i 都是有界阿贝尔群。

群 B_i 对应代数 $I(X_i, R)$。推论 8.9 给出了关于 $I(X_i, R)$ 的更完整信息。在推论 8.9 中，集合 X 是连通的。

我们用 d 表示所有整数 n_x、$x \in X$ 的最大公约数。根据上述构造，对于每个 $s \in X$，我们都可以找到一个嵌入 $\Omega_1/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L) \to \mathrm{Out}\ R_s$。因此，我们得到以下结果。

推论 8.9. 设 X 是一个连通集。则阿贝尔群 $\Omega_1/\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ L)$ 中元素的阶整除整数 d。

9 群 Aut K 与 Out K 的结构

请回顾一下，我们现行的这项约定是在第 5 节末尾通过的。 .

我们将此前开展的一些研究系统化。在第7节中，定义了预序集 X 的外自同构群 Out$X$ 。在这种情况下，存在一个同构

$$\mathrm{Out}\ X \cong G = \{\sigma \in \mathrm{Aut}\ \overline{X} \mid |[x]| = |[\sigma(x)]| \ \text{ for every } x \in X\}.$$

于是我们将群 Out$X$ 嵌入 Aut，使得等式

$$\mathrm{Aut}\ X = \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\ X) \leftthreetimes \mathrm{Out}\ X$$

成立。在第7节中曾指出，总是存在一个嵌入

$$t\colon \mathrm{Aut}\ X \to \mathrm{Aut}\ K,\ \tau \to \xi_\tau, \ \text{ where } \ \xi_\tau(f)(x,y) = f(\tau(x), \tau(y)),\ f \in K,\ x, y \in X.$$

我们分别将 τ 和 Aut X 与 ξ_τ 及嵌入 t 的像相认同。关系

$$\mathrm{Out}\ X \subseteq \Lambda \ \text{ and } \ \mathrm{Out}\ X \cap C = \langle 1 \rangle$$

成立。映射 ft: Out $X \to \Lambda$ 是一个单态射。再次进行相认同后，我们得到关系

$$\mathrm{Out}\ X \subseteq \Omega \ \text{ and } \ \mathrm{Out}\ X \cap \Omega_1 = \langle 1 \rangle$$

（此处使用的名称已在第 5 节中引入）。

另一方面，以下同态出现在第 6 节中：

$$p\colon \mathrm{Aut}\ K \to \mathrm{Aut}\ \overline{X} \ \text{ and } \ r\colon \Omega \to \mathrm{Aut}\ \overline{X}.$$

然而，这些同态用处不大。情况是这样的。设 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ 是一个自同构，并设 $\alpha(e_x) = e_y$，如第 6 节开头所述。则 $R_x \cong R_y$，但不一定有 $n_x = n_y$（n_x 是环 R_x 中矩阵的阶；符号 n_x 在定理 8.2 之前引入）。因此，子群 $\mathrm{Im}p$ 不总是包含在群 G 中，也就是说，不总是包含在 $\mathrm{Out}X$ 中（我们考虑第7节中采用的等同关系）。

现在我们表述一个条件，在该条件下，$\mathrm{Im}p \subseteq \mathrm{Out}X$ 的包含关系成立。这阐明了群 $\mathrm{Aut}\ K$ 的结构。该条件如下。

$$\text{If } \ R_x \cong R_y, \text{ then } \ n_x = n_y \text{ for any } \ x, y \in X. \tag{1}$$

显然，如果对所有 x、$y \in X$ 都有 $n_x = n_y$，则此条件成立。例如，如果 X 是偏序集，或者满足下面这个更有用的条件，则此条件也成立；该条件称为（n，m）条件。

对任意 $n, m \in \mathbb{N}$，同构 $M(n, R) \cong M(m, R)$ 蕴含 $n = m$. (2)

例如，以下列表中的环 R 满足 (n, m)-条件：

交换环、局部环、主左（或右）理想整环；(n, m)-条件见于 [30] 和 [48]。

满足条件 (1) 和 (2) 之一，可保证同态 $p\colon \mathrm{Aut}K \to \mathrm{Out}K$的存在。复合映射 pt 在 $\mathrm{Out}\ X$上作用恒等。因此， p 分裂，并且我们有半直积 $\mathrm{Aut}\ K = \mathrm{Ker}\ p \leftthreetimes \mathrm{Out}\ X$，其中

$$\mathrm{Ker}\ p = \{\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}\ K \mid \alpha R_x = R_x \ \text{ for all } \ x \in X\}.$$

此外还有同态

$$ft\colon \mathrm{Out}\ X \to \Omega, \ r\colon \Omega \to \mathrm{Out}\ X$$

以及一个半直积分解

$$\Omega = \mathrm{Ker}\ r \leftthreetimes \mathrm{Out}\ X = \Omega_1 \leftthreetimes \mathrm{Out}\ X.$$

事实上，复合映射 $r(ft)$ 在 $\mathrm{Out}\ X$ 上的作用是恒等的。

现在我们可以表述定理 9.1。我们注意到，在定理 8.4 之前，商群 C/In_0 (Author$K$) 记作 $\mathrm{Out}_0 K$。

定理 9.1. 设代数 K 满足条件 (II)，并且满足条件 (1) 和 (2) 中的一个。那么我们可以提出以下断言。

a. 存在半直积分解

$$\Omega = \Omega_1 \leftthreetimes \mathrm{Out}\ X,\ \Lambda = C \leftthreetimes \mathrm{Out}\ X,$$

$$\mathrm{Aut}\ K = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\ K) \leftthreetimes C \leftthreetimes \mathrm{Out}\ X.$$

b. 以下断言成立。

1. 存在一个同构 Out $K \cong$ Out $_0K \leftthreetimes$ Out X，群 Out $_0K$ 包含一个 F 的正规子群，使得 $F \cong \Psi/\Psi_0$ 且 (Out $_0K)/F \cong \Omega_1/$In(Aut L)。

2. 若 $\Psi = \Psi_0$，则 Out $K \cong \Omega_1/$In(Aut L) $\leftthreetimes$ Out X。

3. 如果 $\Omega_1 =$ In(Aut L)，那么 Out $K \cong \Psi/\Psi_0 \leftthreetimes$Out X。

注记。

1. 将定理 9.1 与定理 6.4 和 8.4 进行比较很有用，此外还可与 [30, 定理 3 以及 4]进行比较。

2. 第 10 节包含一些可推出等式 $\Psi = \Psi_0$ 的条件。本节还包含有关商群Ψ/Ψ_0结构的信息。

3. 若对于任意 $x \in X$，代数 R_x 的每个自同构都是内自同构，则等式 $\Omega_1 =$In(Aut L) 成立（这由定理 8.4 推出）。

证明。

a. 最近我们得到了关系 Aut $K =$ Ker $p \leftthreetimes$Out X。根据定理 6.2，我们有关系 Aut $K =$ In$_1$(Aut K) $\leftthreetimes \Lambda$。由包含关系 In$_1$(Aut K) $\subseteq$ Ker p 可知

$$\mathrm{Ker}p = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\ K) \leftthreetimes (\mathrm{Ker}\ p \cap \Lambda) = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\ K) \leftthreetimes C,$$

$$\Omega = \Omega_1 \leftthreetimes \mathrm{Out}\ X,\ \Lambda = C \leftthreetimes \mathrm{Out}\ X,$$

$$\mathrm{Aut}\ K = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\ K) \leftthreetimes C \leftthreetimes \mathrm{Out}\ X.$$

特别地，关系 $\Lambda = C \leftthreetimes$Out X 成立。

b. 1 中的同构由命题 4.4 和**a**可得。其余结论可由定理6.4(b)推出，也可以像定理6.4中那样，直接验证其成立性。为此，取

将 $(\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}K)\cdot\Psi)/\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}K)$ 视为 F 的子群（在这种情况下，必须考虑命题 6.3(1)）。于是可以写出同构

$$\mathrm{Out}_0K/F\cong C/(\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)\cdot\Psi)\cong\Omega_1/\mathrm{In}\ (\mathrm{Aut}\ L)$$

（见命题 6.3(2)）。

2 和 **3**。这些断言由 **1** 得出。 □

我们回到定理 8.4 之前的情形。我们假设所有环R都是以环 P 为底环的分块矩阵环，其中 $P=M(k,R)$，对某个 $k\geq 1$ 成立。

推论 9.2. 我们假设 X 是一个连通集，来自第 8 节的条件（$*$）成立，并且条件（1）、（2）之一成立。则以下关系和同构成立。

1. $$\mathrm{Aut}\ K=\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\ K)\leftthreetimes(\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)\cdot\Psi\cdot D)\leftthreetimes\mathrm{Out}\ X,$$

其中 $D\cong$Aut P，或简而言之，

$$\mathrm{Aut}\ K=(\mathrm{In}\ (\mathrm{Aut}\ K)\leftthreetimes\Psi\cdot D)\leftthreetimes\mathrm{Out}\ X;$$

2. $$\mathrm{Out}\ K\cong\Psi/\Psi_0\leftthreetimes\mathrm{Out}\ P\leftthreetimes\mathrm{Out}\ X.$$

证明。

1. 所需关系由定理 8.4 和 9.1 得出。

2. 由定理 9.1 可知，只需证明同构（有必要注意到 $D/D_0\cong$ Out P; 见引理 8.3 前的段落）。考虑到引理 8.3 和定理 8.4，我们写出若干等式和同构。

$$\mathrm{Out}_0K=C/\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)=(\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)\cdot\Psi\cdot D)/\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)\cong$$
$$\cong\Psi D/(\Psi D\cap\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K))=\Psi D/\Psi_0D_0=$$
$$=(\Psi\leftthreetimes D)/(\Psi_0\leftthreetimes D_0)\cong\Psi/\Psi_0\leftthreetimes D/D_0.\quad\square$$

定理 8.6 将定理 8.4 推广到任意（即不一定连通的）集合 X 的情形。现在我们将对推论 9.2 做同样的处理。在定理 8.6 之前，已经解释了在这种推广中群 D和 D_0 应如何定义，以及群 P_i 指的是什么。

推论 9.3。 设第 8 节中的条件 $(**)$ 以及条件 (1) 和 (2) 中的一个成立。则以下关系和同构成立。

1. $$\mathrm{Aut}\ K=\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\ K)\leftthreetimes(\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K)\cdot\Psi\cdot D)\leftthreetimes\mathrm{Out}\ X,$$

或者简而言之,

$$\text{Aut } K = (\text{In } (\text{Aut } K) \cdot \Psi \cdot D) \leftthreetimes \text{Out } X;$$

2. $$\text{Out } K \cong \Psi/\Psi_0 \leftthreetimes \prod_{i \in I} \text{Out } P_i \leftthreetimes \text{Out } X.$$

证明。

1. 该断言由等式 Aut K = In_1(Aut K) $\leftthreetimes C \leftthreetimes$Out X, $C = \mathsf{In}_0$(Aut K) $\cdot \Psi \cdot D$ 以及定理 9.1、8.6 得出。

2. 推论 9.2(2) 的证明在这种更一般的情形下仍然成立。我们只需考虑到，现在我们有同构$D/D_0 \cong \prod_{i \in I}OutP_i$ （这里 I 是连通分支 X_i 的下标集 X；参见定理 8.6 之前的正文）。 □

我们假设环 R 是交换的。则条件 (1) 和 (2) 成立。自然可以考虑 R-代数 $I(X, R)$ 的自同构。若在第 8 节中对所有 $i \in I$ 设置 $k_i = 1$ （整数 k_i 在定理 8.6 之前定义），则代数 $I(X, R)$ 自动满足条件 $(**)$。对于交换的不可分解环 R，推论 9.3 具有以下形式。

推论 9.4. 设 R 是一个交换的不可分解环。

a. 以下关系成立。

1.
Aut $K = \mathsf{In}_1$(Aut K)$\leftthreetimes$(In_0(Aut K)$\cdot\Psi$)$\leftthreetimes$Out X =(In(Aut K)$\cdot\Psi$)$\leftthreetimes$Out X ,

2. $$\text{Out } K \cong \Psi/\Psi_0 \leftthreetimes \text{Out } X.$$

b. 若 X 是一个偏序集，则有以下关系:

1. [45] $$\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \leftthreetimes \Psi \leftthreetimes \text{Aut } X,$$

2. $$\text{Out } K \cong \Psi/\Psi_0 \leftthreetimes \text{Aut } X.$$

10 子群 Ψ和 Ψ_0

下面，我们考虑第 3 节中定义的环 L 和双模 M, M_{xy}。此外，记住关联代数 $I(X, R)$ 的 $K = I(X, R) = L \oplus M$ 分解也很有用。

在本小节中，我们实际上并未对预序集 X、环 R 和代数 $K = I(X, R)$ 施加任何条件。

正规子群 Ψ 由形如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 的自同构构成。子群 Ψ_0 包含由环 L 的可逆中心元定义的所有内自同构。这些子群已在第 5 节中出现。子群 Ψ 和 Ψ_0 之间的关系可从以下等式中看出。

$$\Psi \cap \mathrm{In}\ (\mathrm{Aut}\ K) = \Psi \cap \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\ K) = \Psi_0$$

（命题 6.3）。来自 Ψ 的自同构称为乘法自同构，来自 Ψ_0 的自同构称为分式自同构（本小节末尾还有更多相关内容）。

本小节介绍了关于群 Ψ 和 Ψ_0 的各种信息。如果 X 是有限连通集，那么子群 Ψ_0 可以精确计算（推论 10.6），并且它是群 Ψ 的直因子（定理 10.5）。

以下事实是标准结果，且基本上已为人所知（另见 [37, 命题 13.2]）。

命题 10.1. 令 $P = M(n, R)$、$Q = M(m, R)$ 和 $V = M(n \times m, R)$。P-Q-双模 V 的自同态（分别为自同构）与环 R 的中心元素（分别为可逆中心元）所诱导的乘法相同。

设 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 是一个乘法自同构。那么 β 是代数 M 的自同构，也是 L-L-双模 M 的自同构。反过来，若映射 $\beta\colon M \to M$ 具有上述性质，则 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 是一个乘法自同构（参见第 5 节开头和命题 6.1）。

我们回顾一下，子双模 M_{xy} 在第 3 节中定义，并在第 8 节中得到大量应用。设有一个乘法自同构 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$。与第 8 节类似，我们将 β 在 M_{xy} 上的限制记为 β_{xy}。由于 β 是代数 M 的自同构，因此对于任意满足 $x < z < y$ 的 x、z、$y \in X$，以及 $a \in M_{xz}$、$b \in M_{zy}$ 中的每一个，都必须满足以下等式：

$$\beta_{xy}(ab) = \beta_{xz}(a)\beta_{zy}(b). \tag{1}$$

由于 β 同时是一个 L-L-双模 M 的自同构，因此对于任意 x, y，β_{xy} 都是 R_x-R_y-双模 M_{xy} 的自同构，这些

这样的 $x < y$（参见命题 6.1）。接下来，由命题 10.1 可知，存在元素 $c_{xy} \in C(U(R))$，使得 $\beta_{xy}(g) = c_{xy}g$, $g \in M_{xy}$。考虑到关系 $M_{xz}M_{zy} = M_{xy}$，我们利用（1）推导出关系

$$c_{xy} = c_{xz}c_{zy}, \tag{2}$$

其中 $x < z < y$。因此，对于自同构 $\psi \in \Psi$，我们可以将环 R 的一组可逆中心元 c_{xy} $(x, y \in X,\ x < y)$ 与之对应。反过来，每一组满足等式 (2) 的元素 $\{c_{xy} \in C(U(R)) \mid x < y\}$，都确定一个乘法自同构 ψ。具体而言，对于元素 $g = (g_{xy}) \in M$，我们令 $\psi(g) = (c_{xy}g_{xy})$。同时，我们必须考虑 M 中元素的乘法规则（参见第 3 节）。

我们将上述所有内容形式化如下。

命题 10.2.
1. 乘法自同构与元素系统 $\{c_{xy} \in C(U(R)) \mid x < y\}$ 之间存在一一对应关系，其中 $c_{xy} = c_{xz}c_{zy}$ 对所有满足 $x < z < y$ 的 x、z、$y \in X$ 均成立。

2. 群 Ψ 可以嵌入由群 $C(U(R))$ 的 $\mathcal{M}$ 个副本构成的直积中，其中 $\mathcal{M} = |\{(x, y) \mid x < y\}|$。

对于所讨论的情形，可以从更形式化的角度表述如下。对于 X 中满足 $x < y$ 的每一对元素 (x, y)，我们取群 $C(U(R))$ 的一个副本 U_{xy}。于是，群 Ψ 同构于直积 $\prod_{x<y} U_{xy}$ 的一个子群，该子群由向量 (u_{xy}) 组成，且其中的元素在 $x < z < y$ 时满足等式 $u_{xy} = u_{xz}u_{zy}$。

关于分式自同构，也就是子群 Ψ_0 中的自同构，可以得出什么结论？设分式自同构 $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 由可逆中心元 $v = (v_x) \in L$ 定义，其中 $v_x \in C(U(R))$。对于任意 x, y $(x < y)$ 以及每个 $g \in M_{xy}$，我们有如下关系

$$\beta(g) = v^{-1}gv = v_x^{-1}v_y g.$$

因此，与自同构 ψ 对应的命题 10.2 中的元素系 $\{c_{xy} \mid x < y\}$，由所有形如 $v_x^{-1}v_y$ 的元素组成，其中 $x < y$。

我们有以下结论。

命题 10.3. 设 ψ 是一个乘法自同构 ψ，且元素系 c_{xy} $(x, y \in X,\ x < y)$ 满足 (2)，并与 ψ 对应。以下断言等价：

1) ψ 是分式自同构；**2)** ψ 是内自同构；**3)** 存在元素 $v = (v_x) \in L$，其中 $v_x \in C(U(R))$，使得关系 $c_{xy} = v_x^{-1} v_y$ 对所有 x, y $(x < y)$ 都成立。

在本小节余下部分中，集合 X 是有限且连通的。为方便技术处理，我们还假设 X 是偏序的。

设 $\{c_{xy} \mid x, y \in X,\ x < y\}$ 是环 R 的任意中心可逆元集合。基于该集合，我们为图 X 的边和半路径赋予权（见 [10]）。若 (x, y) 是一条边，则对于 $x < y$，我们令 $w(x, y) = c_{xy}$；对于 $x > y$，我们令 $w(x, y) = c_{yx}^{-1}$。接下来，对于 X 中的半路径 $P = z_1 z_2 \dots z_{k+1}$，我们令

$$w(P) = \prod_{i=1}^{k} w(z_i, z_{i+1}).$$

若 ψ 是某个乘法自同构，则我们得到图 X 的边和半路径的权。这些权由与自同构 ψ 相对应的系统 $\{c_{xy} \mid x < y\}$ 所诱导，具体含义见命题 10.2。设 ψ 是由可逆元 $v = (v_x)$ 定义的分式自同构（即内乘法自同构；见命题 10.3）。容易验证如下结论：对于任意元素 x、$y \in X$，从 x 到 y 的任意半路径的权都等于 $v_x^{-1} v_y$（因此，它不依赖于具体的半路径）。

我们固定图 X 的一个生成树 T。对于 T 中满足 $x < y$ 的每条边 (x, y)，我们选取一个元素 $c_{xy} \in C(U(R))$。与上文的做法类似，我们用元素 c_{xy} 为 T 中的边和半路径赋予权 w。设 (x, y) 是 X 中一条不属于 T 的边，并令 $x < y$。我们设 $c_{xy} = w(P)$，其中 P 是 T 中从 x 到 y 的（唯一）半路径。由此，我们得到一组元素 $\{c_{xy} \in C(U(R)) \mid x, y \in X, x < y\}$，以及 X 中边和半路径的权。

引理 10.4。 所构造的元素系统 $\{c_{xy} \mid x < y\}$ 满足关系 (2)。因此，它按照命题 10.2 的含义诱导出一个乘法自同构 ψ。

证明。 设 x、z、y 是满足 $x < z < y$ 的元素。我们分别用 P_{xz}、P_{zy} 和 P_{xy} 表示 T 中从 x 到 z、从 z 到 y 以及从 x 到 y 的半路径。由于 T 中的每条半路径都是唯一的，我们得到关系 $P_{xy} = P_{xz} P_{zy}$。因此，$w(P_{xy}) = w(P_{xz}) \cdot w(P_{zy})$，进而得到 $c_{xy} = c_{xz} c_{zy}$。根据命题 10.2，一个明确的自同构 $\psi \in \Psi$ 对应于

系统 $\{c_{xy} \mid x < y\}$。 □

由于 X 是偏序集，在我们的情形下，双模 M_{xy} 是环 R 的副本。我们也可以定义矩阵单位的类似物。设x、 $y \in X$ 满足 $x < y$。我们用 e_{xy} 表示一个函数 $X \times X \to R$，使得当 $s = x$、 $t = y$时，$e_{xy}(s,t) = 1$；对于所有其他的对 (s,t)， $e_{xy}(s,t) = 0$。函数 e_{xy} 满足以下性质：如果 $x < z < y$，那么$e_{xz}e_{zy} = e_{xy}$。

请注意，我们选取了图X的生成树 T。我们用 Ψ_1 表示 Ψ中由满足以下条件的自同构 ψ 组成的子群：对于所有满足 $x < y$的边 $(x,y) \in T$， $\psi(e_{xy}) = e_{xy}$。等价地，对于指定的边 (x,y)，有 $c_{xy} = 1$。这里， $\{c_{xy} \in C(U(R)) \mid x < y\}$ 是命题 10.2 中的系统。此外，由该命题可知，群Ψ 是交换的。

定理 10.5. 存在群的直分解 $\Psi = \Psi_1 \times \Psi_0$。

证明. 令 $\psi \in \Psi$，并令 $\{c_{xy} \in C(U(R)) \mid x < y\}$ 为命题 10.2 中相应元素的系统。对于 X中的每个顶点，我们定义一个中心可逆元。

在树 T 中，我们选取一个根 x_0。接下来，令 y 为 T 中与 x_0 相邻的某个顶点。若 $x_0 < y$，则设 $v_{x_0} = 1$ 和 $v_y = v_{x_0}c_{x_0y}$。若 $x_0 > y$，则设 $v_y = v_{x_0}c_{yx_0}^{-1}$。接着，我们取与 y 相邻的某个顶点 $z \in T$，并进行类似操作。具体而言，对于 $y < z$，令 $v_z = v_y c_{yz}$；对于 $y > z$，令 $v_z = v_y c_{zy}^{-1}$。我们如此操作，直到到达 T 中的某个悬挂顶点。由此，我们得到 T 中一条从 x_0 到该悬挂顶点的半路径。

我们在树 T 中选取一个根 x_0。接下来，令 y 为 T 中与 x_0 相邻的某个顶点。若 $x_0 < y$，则设 $v_{x_0} = 1$ 和 $v_y = v_{x_0}c_{x_0y}$。若 $x_0 > y$，则设 $v_y = v_{x_0}c_{yx_0}^{-1}$。然后，我们取 T 中与 y 相邻的某个顶点 z，并进行相同的操作。具体而言，对于 $y < z$，令 $v_z = v_y c_{yz}$；对于 $y > z$，令 $v_z = v_y c_{zy}^{-1}$。我们如此操作，直到到达 T 中的某个悬挂顶点。由此，我们得到 T 中一条从 x_0 到该悬挂顶点的半路径。若 T 中存在不属于这条半路径的顶点，则令 s 为半路径上度大于二的第一个顶点。

从顶点 s 出发，我们以同样的方式构造另一条半路径，依此类推。因此，T 中的每个顶点 x 都映射到一个元素 $v_x \in C(U(R))$。

取 L 中的一个可逆中心元 $v = (v_x)$。令 ψ_0 为由 v 诱导的内自同构。那么 $\psi_0 \in \Psi_0$，因为 $v \in C(U(L))$。我们设定$\psi_1 = \psi\psi_0^{-1}$。若 $(x,y) \in T$ 且 $x < y$，则根据命题 10.1， $\psi(e_{xy}) = c_{xy}e_{xy}$，并且 $\psi_0(e_{xy}) = v_x^{-1}v_y e_{xy}$。由元素 v_x 的构造，关系

$c_{xy} = v_x^{-1} v_y$ 成立。因此，ψ 和 ψ_0 对满足 $(x, y) \in T$ 的元素 e_{xy} 的作用相同。所以，包含关系 $\psi_1 \in \Psi_1$ 成立。于是，$\psi = \psi_1 \psi_0$，其中 $\psi_1 \in \Psi_1, \psi_0 \in \Psi_0$。

仍需验证 $\Psi_1 \cap \Psi_0 = \langle 1 \rangle$。令 $\xi \in \Psi_1 \cap \Psi_0$。则对于每一条边（$x$，$y$）$\in T$，都有 ξ（e_{xy}）$= e_{xy}$，其中 $x < y$。与此同时，自同构ξ 被定义为环 L的某个中心可逆元$v =$（v_x）所诱导的内自同构。因此，我们还有关系 ξ（e_{xy}）$= v_x^{-1} v_y e_{xy}$。由此可得，$v_x^{-1} v_y = 1$ 且 $v_x = v_y$。现在，设边（x，y）不包含在 T中。在 T 中存在一条从 x 到 y的半路径。利用这条半路径，我们从刚刚证明的结论推出等式 $v_x = v_y$。因此，我们得到关系 $\xi = 1$。于是，$\Psi_1 \cap \Psi_0 = \langle 1 \rangle$，证明得证。□

我们分别用 $m(X)$ 和 $\lambda(X)$ 表示图 X 的边数和 X的圈秩。

推论 10.6. 存在一个群同构

$$\Psi_0 \cong \prod_{m(X)-\lambda(X)} C(U(R)).$$

证明. 我们用 G 表示同构右侧的直积。定义映射 g: $\Psi \to G$ 如下。设 $\psi \in \Psi$，并设 $\{c_{xy} \,|\, x < y\}$ 为与 ψ 对应的命题 10.2 中的元素系。映射 g 将自同构 ψ 映射为向量 (c_{xy})，其中 $(x, y) \in T$,$x < y$。显然，g 是群同态。由引理 10.4 可知，g 是满射。显然，Ker $g = \Psi_1$。我们有一个同构 $\Psi/\Psi_1 \cong G$。另一方面，根据定理 10.5，我们有同构 $\Psi/\Psi_1 \cong \Psi_0$。□

推论 10.7. 等式 $\Psi = \Psi_0$ 成立，当且仅当对于任意满足 $\psi(e_{xy}) = e_{xy}$ 的 $\psi \in \Psi$，对于任意边 $(x, y) \in T$，都有 $\psi = 1$。

推论 10.8 [10]. 乘法自同构 ψ 是内自同构，当且仅当对于任意元素 x、$y \in X$，从 x 到 y 的任意两条半路径的权都相同。

证明。 若乘法内自同构 ψ 由元素 $v = (v_x)$ 定义，则从 x 到 y 的任意半路径的权都等于 $v_x^{-1} v_y$。上文已指出这一点。

我们假设自同构 ψ 的半路径权重满足条件。与定理 10.5 中一样，我们写下 $\psi = \psi_1 \psi_0$。如果 (x, y) 是 T 中的一条边，那么 $\psi(e_{xy}) = \psi_0(e_{xy})$。现在设 (x, y) 是 X 中一条不包含于 T 的边。那么 $\psi(e_{xy}) = c_{xy} e_{xy}$，且 $w(x, y) = c_{xy}$。如果 P 是 T 中从

x 到 y，则 $w(P) = v_x^{-1} v_y$，其中可逆元 $v = (v_x)$定义了内自同构 ψ_0。由假设可得 $c_{xy} = v_x^{-1} v_y$。因此，ψ 在所有元素 e_{xy} 上都作用为 ψ_0，故 $\psi = \psi_0$。 □

设 C 是图 X 的一个简单回路，ψ 是一个乘法自同构。我们将回路 C 相对于 ψ 的权 $w(C)$ 定义为从回路上任意顶点出发并返回该顶点的两条半路径之一的权。选择不同的回路方向时，权将等于 $w(C)^{-1}$。因此，回路 C 的权是由元素 $w(C)$ 和 $w(C)^{-1}$ 构成的这个权。

设 T 是图 X 的一棵生成树，C_1，....., C_k 是与 T 相关联的基本圈系，其中 $k = \lambda(X)$。

推论 10.9. 乘法自同构 ψ 是内自同构，当且仅当 $w(C_1) = \ldots = w(C_k) = 1$。

证明。该假设的必要性可由推论 10.8 证明的第一段得出。

现在假设 $w(C_1) = \ldots = w(C_k) = 1$。我们将乘法自同构 ψ 表示为 $\psi = \psi_1 \psi_0$ 的形式（参见推论 10.8 的证明）。设边 (x, y)，$x < y$，不包含在 T中。则对于某个 i，有 $(x, y) \in C_i$。如果 P 是 C_i 中从 x 到 y的一条半路径，那么有如下关系：

$$1 = w(C_i) = w(P) w(x, y)^{-1}, \quad w(x, y) = w(P).$$

重复推论 10.8 证明中的论证，我们得到$c_{xy} = v_x^{-1} v_y$ 和 $\psi = \psi_0$。 □

在书 [45], 中，乘法自同构和分式自同构是借助 $I(X, R)$中的某些特殊函数来定义的，其中 R 是一个交换环。这些定义可以推广到任意环 R的情形。

如果对于所有满足 $x \leq z \leq y$的元素x、z、$y \in X$，都有以下关系，则称函数 $m \in I(X, R)$是乘法的：

$$m(x, y) \in C(U(R)), \quad m(x, y) = m(x, z) \cdot m(z, y).$$

设 m 是 $I(X, R)$ 中的某个乘法函数。那么映射

$$\psi_m \colon K \to K, \ \psi_m(f) = m * f, \ f \in K,$$

是代数 K 的一个自同构（这里 $*$ 是 Hadamard 函数的直积，即逐点乘积）。显然，$\psi_m \in \Psi$。反过来，从 Ψ 出发的每一个自同构，都可以借助某个乘法函数以这种方式得到。

设 $q\colon X \to C(U(R))$ 是某个映射。那么满足 $m_q(x,y) = q^{-1}(x)\cdot q(y)$（当 $x \le y$ 时）且在其余情况下 $m_q(x,y) = 0$ 的函数 $m_q \in K$ 是乘法的。此外，相应的自同构 ψ_{m_q} 是分式的。所有分式自同构均可通过这种方式得到。

11 约化关联代数

上一节中提出的方法以及得到的结果，可以推广到代数 $I(X,R)$ 的某些子代数。这里讨论的是约化关联代数。书 [45]对它们给予了相当多的关注。

与 [45], 中一样，我们进一步假设 X 是一个偏序集， R 是一个交换环，并将环 $I(X,R)$ 视为一个 R-代数。尽管在本章讨论的更一般情形下也能做很多工作，但我们不接受任何附加条件，例如第 5 节末尾协议中所列的条件。

以下是摘自 [45] 的一些内容。约化关联代数是通过在偏序集 X 的所有区间构成的集合上定义某种等价关系来定义的。任何这样的等价关系都记作 $\sim$ 或用字母 E 表示。

定义 11.1. 设 $\sim$ （或 E）是集合 X 的所有区间上的一个等价关系，并且满足：每当 $[x,y]\sim[s,t]$ 时，都存在一个双射 $\varepsilon\colon [x,y]\to[s,t]$，使得这些关系

$$[[x,z]\sim[s,\varepsilon(z)] \quad\text{and}\quad [z,y]\sim[\varepsilon(z),t]$$

对于每个 $z\in[x,y]$ 都成立。在这种情况下，称 $\sim$ 是一个与序相容的关系。

设 $\sim$ 是一个与序关系相容的关系。我们用 $I(X_E,R)$ 表示 $I(X,R)$ 上所有满足以下条件的函数 f 的集合： $f(x,y) = f(s,t)$ 当且仅当 $[x,y]\sim[s,t]$。换言之，f 在等价类 $\sim$ 上是常数。

命题 11.2. 以下断言成立。

1. $I(X_E,R)$ 是代数 $I(X,R)$ 的一个子代数。

2. 我们有关系

$$U(I(X_E,R)) = I(X_E,R)\cap U(I(X,R)).$$

子代数 $I(X_E,R)$ 称为约化关联代数。设 $\sim$ 是一个等价关系，使得当且仅当区间 $[x,y]$ 时有 $[x,y]\sim[s,t]$

并且 $[s,t]$ 作为偏序集同构。显然，该关系 $\sim$ 与序相容。相应的代数 $I(X_E, R)$ 称为标准约化关联代数。这类代数代表了约化关联代数中最自然的对象。其中有相当多这样的代数。因此，如果取 X 为所有非负整数的集合，并赋予通常的序，那么相应的标准约化关联代数同构于形式幂级数代数（[45, 例 1.3。10]）。

设 $I(X_E, R)$ 是由某个与序相容的等价关系 $\sim$ (或 E) 定义的约化关联代数。我们也用符号 K_E 表示它。代数 K 本身等于 $I(X, R)$，是 $K = L \oplus M$ 的一个分裂扩张（第 3 节）。我们对群 Aut$K$ 的研究正是基于这一事实。代数 K_E 也有类似的扩张：$K_E = L_E \oplus M_E$（详见下文）。此外，子环 L_E 和理想 M_E 也是环 R 的若干副本的直积。为了与扩张 $K = L \oplus M$ 形成更完整的类比，我们必须变换子环 L_E 和理想 M_E。

若 $[x,x] \sim [s,s]\}$，则令 $L_E = \{f \in L \mid f(x,x) = f(s,s)$；若 $[x,y] \sim [s,t]$, 则令 $M_E = \{f \in M \mid f(x,y) = f(s,t)$，其中 $x < y, s < t\}$。我们有关系 $L_E = L \cap K_E$ 和 $M_E = M \cap K_E$。若 $f \in K_E$ 且 $f = g + h$，其中$g \in L$, $h \in M$，则有 $g \in L_E, h \in M_E$。由此可得等式 $K_E = L_E \oplus M_E$ 成立，其中 L_E 是 K_E 的子环， M_E 是 K_E 中的理想。因此，我们将代数 K_E 表示成了一个分裂扩张。

在 [45], 之后，我们将区间集合关于关系 $\sim$ 的等价类称为类型。我们用 T 表示所有此类类型的集合。我们可以写成 $T = T_0 \bigcup T_1$，其中 T_0 是由形如 $[x,x]$ 的区间组成的类型集合，而 T_1 是形如 $[x,y]$ 且满足 $x < y$ 的区间集合的所有类型组成的集合。于是得到关系

$$L_E = \prod_{t \in T_0} R_t, \qquad M_E = \prod_{t \in T_1} M_t, \tag{1}$$

其中所有 R_t 和 M_t 都等于 R。

因此，如果 $t \in T$，那么任意函数 $f \in K_E$ 在 t 的所有区间上都是常数。若确实如此，则可以将 f 视为定义在集合 T 上的函数。为了描述此类函数的复合，或者等价地描述 K_E 中元素的乘法，引入了一个适当的数集。

定义 11.3。设 r、s、t 是三种类型， $[x,y]$ 是类型为 t 的区间。符号 $[{}_r{}^t{}_s]$ 表示（有限）

集合 $\{z \in [x,y] \,|\, [x,z] \in r,\ [z,y] \in s\}$ 的元素数量。这个数称为代数 K_E 的关联系数。

取代数 K_E 中任意两个元素 f、g。利用分解 $K_E = L_E \oplus M_E$ 和关系式 (1)，我们将 f 和 g 表示为 $f = (f_t)$、$g = (g_t)$ 的形式。令 $f \cdot g = h = (h_t)$。则有如下关系（见 [45,命题 3.1。4]）：

$$h_t = \sum_{r,s \in T} [\,_r{}^t{}_s]\, f_r \cdot g_s. \tag{2}$$

基于分裂扩张 $K_E = L_E \oplus M_E$，我们可以研究群 $\mathrm{Aut}K_E$。不过，这与扩张 $K = L \oplus M$ 的情形有一个显著区别。在代数 K 的情形中，幂等元 e_x 是一种有用的技术工具（定义见第 3 节）。重要的是 $e_x M e_x = 0$。

对于每个 $t \in T_0$，我们用 e_t 表示环 R_t 的单位元。可能会出现 $e_t M_E e_t \neq 0$ 的情况。为了解决这一问题，我们转而考虑另一个分裂扩张。

我们引入一种记号。令 p、$q \in T_0$。记

$$p \times q = \{[x,y] \,|\, [x,x] \in p,\, [y,y] \in q,\, x < y\}.$$

对于每个 $p \in T_0$，令 S_p 为环 $e_p K_E e_p$。我们有一个分裂扩张

$$S_p = R_p \oplus N_p, \ \text{where}\ N_p = e_p M_E e_p = \prod_{t \subseteq p \times p} M_t. \tag{3}$$

接下来我们定义

$$P_E = \prod_{p \in T_0} S_p. \tag{4}$$

对于 T_1 中任意类型 t，存在类型 p、$q \in T_0$，满足以下性质：

> 对于任意区间 $[x,y] \in t$，若包含关系 $[x,x] \in p$ 和 $[y,y] \in q$ 成立，则类型 p 和 q 唯一确定，我们记作 $t \subseteq p \times q$。

对于类型 p、$q \in T_0$、$p \neq q$，我们假设

$$N_{pq} = e_p M_E e_q, \quad N_E = \prod_{p,q \in T_0} N_{pq}. \tag{5}$$

这里是 $N_{pq} = \prod_{t \subseteq p \times q} M_t$。除了分解 $K_E = L_E \oplus M_E$ 之外，我们还得到另一种分解：

$$K_E = P_E \oplus N_E. \tag{6}$$

对于这种新的分解，每个 $p \in T_0$ 都有 $e_p N_E e_p = 0$ 。

关于代数 K_E 中的元素，按照 (1) 中指定的直积来表示时，其乘法公式为 (2)。如果按照 (4) 和 (5) 中的直积来表示，这些元素如何相乘？我们将对此进行讨论。在研究代数 K_E 的自同构时，若需对 (6) 进行分解，这一点会很有用。

我们列出以下主要等式：

$$K_E = P_E \oplus N_E, \text{ where } P_E = \prod_{p \in T_0} S_p,\ N_E = \prod_{p,q \in T_0} N_{pq},\ N_{pq} = \prod_{t \subseteq p \times q} M_t.$$

不难弄清楚 P_E 中的元素彼此之间以及与 N_E 中的元素相乘的方式。我们着重讨论 N_E 中的元素彼此相乘的情形。

取 N_E 中任意两个元素 f、g。令 $f \cdot g = h$。我们有

$$f = (f_t)_{t \in T_1} = (f_{pq})_{p,q \in T_0},\ \text{where } f_{pq} = (f_t)_{t \subseteq p \times q},$$

$$g = (g_t)_{t \in T_1} = (g_{pq})_{p,q \in T_0},\ \text{where } g_{pq} = (g_t)_{t \subseteq p \times q}.$$

对于 h，我们也有类似的关系：

$$h = (h_t)_{t \in T_1} = (h_{pq})_{p,q \in T_0},\ \text{where } h_{pq} = (h_t)_{t \subseteq p \times q}.$$

我们断言，对于任意两个互不相同的 p、$q \in T_0$，关系

$$h_{pq} = (f_{pr} \cdot g_{rq})_{r \in T_0} \tag{7}$$

成立。非正式地说，根据关系式 (2) 将向量（f_t）和（g_t）相乘时，向量（f_{pq}）和（g_{pq}）按照关系式 (7) 相乘。

首先，我们注意到，(7) 中的 $f_{pr} \cdot g_{rq}$ 的各种直积没有共同的非零分量 h_t。

然后，根据（2），我们可以写出这些等式

$$h_{pq} = (h_t)_{t \subseteq p \times q} = \left(\sum_{u,v \in T_1} [\,{}_u{}^t{}_v\,]\, f_u \cdot g_v \right)_{t \subseteq p \times q}. \tag{8}$$

显然，h_t 在 $f_{pr} \cdot g_{rq}$ 的直积中的任意分量，也是 h_{pq} 的分量。另一方面，元素 f_u 属于某个

双模 N_{pr}，而 g_v 包含在某个双模 N_{rq}中。因此，反过来说，式（8）右侧括号中的每个分量也都出现在式（7）中 $f_{pr} \cdot g_{rq}$ 的有限个直积之和里。所以，等式（7）确实成立。这是一个用于相乘来自N_E的元素的新公式。如果从 $K_E = P_E \oplus N_E$的分解出发，它在研究群 AutK_E的过程中很有用。同时，我们还需要了解群 AutS_p的结构。在一定程度上，这种结构是可以理解的。

代数 K_E 可能由一个形如S_p的单环构成。所有标准约化代数都属于这类代数。一般而言，代数 K_E 的自同构需要进行单独的系统性研究。

备注。关于研究自同构（以及同构和导子）的论文，有许多相关信息收录于第 1 节中提到的书 [45], 中。

在本书出版后发表的论文中，我们重点介绍以下一篇。论文 [16] 致力于计算有限集 X 的代数 $I(X, R)$ 的外自同构群。同时，论文还提出了一种基于自同构群的上同调解释的方法。

论文 [30]探讨有限关联代数的自同构。这些对象比关联代数（[34],[31]）稍微更为一般。有限关联代数也具有形式为 $K = L \oplus M$ 的分解。显然，可以对它应用本工作中使用的方法和技术。

在 [10] 中，我们研究有限偏序集 X 和域 R上的代数 $I(X, R)$ 的乘法自同构。

对 [12] 的综述主要探讨了关联代数的自同构、反自同构和对合（即阶为 2 的反自同构），其中也包含一些新的研究成果。近年来，关联环和三角矩阵环的对合总体上也得到了广泛研究；例如， [7], [12], [8], [9], [21], [22], [15]。

在早期的文章中， [3], [29], 研究了（三角形及广义）三角矩阵环的自同构。

第3章 关联代数的同构

12 一些定义和辅助结果

第 3 节中关于所有环都是某个交换环 T 上的代数的约定仍然有效。

设 Y 和 X 是任意两个预序集，设 $\overline{Y}$ 和 $\overline{X}$ 是相应的偏序集（见第2节）。 далее，设 R 是一个环， $K' = I(Y, R)$ 和 $K = I(X, R)$ 是两个关联代数。我们提出以下问题。

(a) 代数的同构 $K' \cong K$ 何时能推出偏序集 $\overline{Y} \cong \overline{X}$ 的同构?

(b)代数的同构 $K' \cong K$ 何时能推出预序集 $Y \cong X$ 的同构?

问题 **(a)** 和 **(b)** 是著名的关联环同构问题的若干变体。

第三个问题与描述代数 K' 和 K之间的同构有关。

(c) 在什么条件下，任意同构 $\varphi\colon K' \to K$ 都可以被«对角化»? 这意味着存在代数K 的一个内自同构 ν 和一个对角同构 $\gamma\colon K' \to K$ ，使得 $\varphi = \nu\gamma$。

需要指出的是，本小节中的概念、陈述和证明，在技术层面和思想层面上都与第 5 节中的概念、陈述和证明十分接近。因此，这里的论述将会比较简短，几乎省略所有证明。

与第 3 节类似，我们写出分解 $K = L \oplus M$ 以及代数 K'的一个类似分解： $K' = L_1 \oplus M_1$，其中子环 L_1 和理想 M_1 都有明确的含义。

给定任意代数同态 $\varphi\colon K' \to K$，可以用标准方式构造一个 2×2 矩阵 $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$，其中

$$\alpha\colon L_1 \to L,\ \beta\colon M_1 \to M,\ \gamma\colon M_1 \to L,\ \delta\colon L_1 \to M$$

是一些 T-模同态。

我们只讨论“ $\gamma = 0$”情形，即当 $\gamma = 0$ 时。我们只考虑 φ 的同构。此外，我们不区分同构 φ 与相应的 2×2 矩阵。有时，我们将 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ 的“ φ”记作 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$，将 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 的“对角同构”记作 φ。

如果 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ 是三角代数同构 $K' \to K$，那么 α 和 β分别是代数同构 $L_1 \to L$ 和 $M_1 \to M$（我们假设M_1 和 M 是非幺代数）。

在第 3 节开头，定义了代数 K 的幂等元 e_x。我们用 f_y 表示代数 K' 的类似幂等元。

下文的条件(**I**) 和(**II**) 可视为将第 5 节中的条件(**I**) 和(**II**) 转移到两个代数 K' 和K的情形。

(**I**) $K' \to K$ 的任意同构都是三角形的。

(**II**) 对于任意同构 φ: $K' \to K$ 以及任意 $x \in X$，$\varphi^{-1}(e_x) \in f_y + M_1$ 的包含关系对某个 $y \in Y$成立。

这两个条件的对称形式也都成立。具体而言，如果(**I**) 成立，那么任意同构 $K \to K'$ 也都是三角形的。在讨论(**II**)之前，我们先说明这两个条件之间的关系。

事实上，以下引理的证明重复了引理 5.6 的证明，因此我们略去证明。

引理 12.1. 对于代数 K' 和 K，以下断言成立。

1. 条件 (**II**)蕴含条件 (**I**)。**2.** 对于不可分解环 R，条件 (**II**) 与条件 (**I**) 等价。

引理 12.1。 以下结论对于代数 K' 和 K成立。

1. 由条件 (**II**) 可推出条件 (**I**)。**2.** 对于不可分解环 R，条件 (**II**) 与条件 (**I**) 等价。

我们回顾命题 3.1 中的等式 $L = \prod_{x \in X} R_x$。现在我们回到条件 (**II**) 的对称性问题。我们将对此问题的回答形式化为以下引理。

引理 12.2. 如果满足条件 **(II)**，那么代数 K 和 K' 也满足该条件。

证明。 我们需要验证，对于任意同构 ψ: $K \to K'$ 和任意$y \in Y$，存在某个 $x \in X$，使得 $\psi^{-1}(f_y) \in e_x + M$ 成立。

由于条件 **(II)**成立，由引理 12.1可知， K' 与 K 之间任意方向的所有同构都是三角形的。因此，我们有

$$\psi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \text{ and } \psi^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ \delta' & \beta^{-1} \end{pmatrix}.$$

将条件 **(II)**应用于 ψ^{-1}，可知，对于任意 $x \in X$，存在 $y \in Y$，使得对于某个 $y \in Y$， $\psi(e_x) \in f_y + M_1$ 成立。因此，$\alpha(e_x) = f_y$，且 $\psi^{-1}(f_y) = e_x + d$，其中 $d \in M$。

若 $z \in X$、 $z \neq x$，且 $\alpha(e_z) = f_t$，则等式 $e_x e_z = 0$ 蕴含等式 $f_y f_t = 0$，由此可得 $y \neq t$。我们得出结论，映射 $x \to y$（其中 $\alpha(e_x) = y$）将集合 X 双射到 Y的某个子集 Y'。

只需验证 $Y' = Y$。否则，设 $y \in Y$和 $y \notin Y'$。接着，令 $\alpha(a) = f_y$, 其中 $a \in L$。记

$$a = (a_x) = a_s + c, \text{ where } a_s \neq 0, \ c \in \prod_{t \neq s} R_t.$$

我们得到关系 $\psi(e_s) \in f_k + M_1$ 和 $\alpha(e_s) = f_k$，其中某个 $k \in Y'$。于是有 $\alpha(e_s a) = f_k f_y = 0$。因此 $e_s a = a_s = 0$，这与所选 a_s 元素矛盾。由此得出 $Y' = Y$。 □

下文中，我们使用定义 5.1 后给出的条件 (1)–(5)。

下面的陈述是引理 5.7 的某种类似结果。其证明也仿照了该引理的证明。

引理 12.3。 如果所有环 R_x 都具有第 5 节中的性质（5），那么代数 K' 和 K满足条件 **（I）**。

证明引理 5.7 后，注意到环 $M(n, R)$ 满足条件 (5)，前提是环 R 属于以下环类之一:

a)局部环;

b) 主左（或右）理想的面积;

c)交换戴德金整环。

考虑到引理 12.1 和 12.3，我们得到如下结论。若环 R 属于环的**a)–c)**类之一，则代数 K' 和K 满足条件**(I)**和**(II)**。

下面的陈述将引理 5.9 推广到两个代数K'和 K的情形。同时，对引理 5.9 的证明稍作修正后，也适用于这一更一般的情形。

引理 12.4. 如果商环 $R/J(R)$ 不可分解，则代数 K' and K 满足条件 **(II)** 。

现在我们可以重现第 5 节末尾的文本。我们会非常简要地进行。

回答问题 **(a)–(c)** 最常见且方便的条件可以表述为条件 **(II)**。如果环 R 属于以下某一类环，则代数 K' 和 K 满足条件 **(II)**：

a)局部环;

b) 主左（或右）理想整环;

c)交换戴德金整环;

d) Y和 X 是偏序集，并且 R 除了 1 以外没有非零幂等元;

e) 商环 $R/J(R)$是不可分解的。

下一节中，我们假设代数 K' 和 K 满足条件**(II)**。特别地，如果 R 是**a)–e)**列表中的某个环，则这一条件成立。

13 个问题(a)–(c)

符号 Y、 X、 $\overline{Y}$、 $\overline{X}$、 K'和 K 的含义仍与上一节中所述相同。此外，我们也约定了代数 K' 和 K的含义。(n, m)-条件（2）和定理 9.1 之前提出的条件（1）起着重要作用。

本小节两项主要结果中第一项的证明思路，与第 6 节开头的论证类似。不过，为了完整起见并使论述独立完整，我们仍给出详细证明。

定理 13.1。 对于满足条件 **（II）** 的代数 K' 和 K ，以下断言成立。

1. 任何代数同构 $K' \to K$ 都会诱导出.....的同构

偏序集 $\overline{Y} \to \overline{X}$

2. 如果环 R 满足定理 9.1 之前的条件（1）或条件（2），那么每个同构 $K' \to K$ 都会诱导预序集$Y \to X$的同构。

证明。

1. 我们固定一个同构 $\varphi\colon K' \to K$。它是三角形的，因为由引理 12.1 可知，条件 **(II)** 成立。若 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$，则 α 是代数 $L_1 \to L$的同构。对于每个 $y \in Y$，都存在 $x \in X$，使得 $\alpha(f_y) = e_x$（参见第 5 节末尾、命题 6.1 及其前面的文字）。若 $t \in Y, t \neq y$，且 $\alpha(f_t) = e_s$，则由 $f_y f_t = 0$ 可得 $e_x e_s = 0$；因此，$x \neq s$。

现在设 $z \in X$。由于逆同构 φ^{-1} 具有$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$的形式，我们有 $\alpha^{-1}(e_z) = f_y$，其中某个 $y \in Y$ 满足条件，且 $\alpha(f_y) = e_z$。因此，α 诱导偏序集之间的双射 $\overline{\tau}\colon \overline{Y} \to \overline{X}$。也就是说，若 $\alpha(f_y) = e_x$，则 $\overline{\tau}(y) = x$，从而 $\alpha(f_y) = e_{\overline{\tau}(y)}$。（再次请注意第 3 节中关于下标$x, y, \ldots$ 在符号 $e_x, f_y, \ldots$ 中的约定。）

我们证明 $\overline{\tau}$ 是偏序集的自同构。设 y、$z \in \overline{Y}$ 和 $y < z$。则 $(M_1)_{yz} = f_y M_1 f_z \neq 0$。我们有 $\varphi(f_y) = \alpha(f_y) + \delta(f_y) = e_{\overline{\tau}(y)} + \delta(f_y)$；类似地，我们有 $\varphi(f_z) = e_{\overline{\tau}(z)} + \delta(f_z)$。存在代数 K 的一个内自同构 μ，使得

$$\mu(e_{\overline{\tau}(y)} + \delta(f_y)) = e_{\overline{\tau}(y)}, \quad \mu(e_{\overline{\tau}(z)} + \delta(f_z)) = e_{\overline{\tau}(z)}$$

根据定理 5.5。现在我们有关系式

$$\mu\varphi(M_1)_{yz} = \mu\varphi(f_y M_1 f_z) = e_{\overline{\tau}(y)} M e_{\overline{\tau}(z)} = M_{\overline{\tau}(y)\overline{\tau}(z)} \neq 0.$$

因此，$\overline{\tau}(y) < \overline{\tau}(z)$。

反过来，如果已知 $\overline{\tau}(y) < \overline{\tau}(z)$，那么用类似的方法，借助同构 φ^{-1}，我们可以得到不等式 $y < z$。以上这些都引出了这样的想法：$\overline{\tau}$ 是偏序集 $\overline{Y} \to \overline{X}$ 的同构。

2. 我们再次假设 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}\colon K' \to K$ 是一个同构。由**1** 的证明可知，φ 诱导出一个同构 $\alpha\colon L_1 \to L$。后者又进一步为每个 $y \in Y$ 诱导出 R'_y 与 $R_{\overline{\tau}(y)}$ 之间的一个同构（假设我们有等式 $L_1 = \prod_{y \in Y} R'_y$，该等式类似于命题 3.1 中的等式 $L = \prod_{x \in X} R_x$）。如果 $R'_y \cong M(n, R)$ 且 $R_{\overline{\tau}(y)} \cong M(m, R)$，那么根据 (n, m)-条件（2）或条件（1），可得

$n = m$。这意味着区间 $[y]$ 在 Y 中与 $[\overline{\tau}(y)]$ 在 X 中等价。因此，同构 $\overline{\tau}\colon \overline{Y} \to \overline{X}$ 可以提升为预序集同构 $\tau\colon Y \to X$。 □

第二个定理对我们的环 K' 和 K中的问题 (c)给出了肯定的回答。该定理的证明与定理 6.2(1)的证明在本质上并无不同。基于定理 13.1 之前所述的理由，我们也证明这个定理。

定理 13.2. 设代数 K' 和 K 满足条件 (II)。那么， K' 与 K 之间的每个同构都等于一个从 K' 到 K 的对角同构与代数K的一个内自同构的复合。

证明。 取任意一个同构 $\varphi\colon K' \to K$。设 $\overline{\tau}\colon \overline{Y} \to \overline{X}$是定理 13.1(1) 证明中的同构。我们构造 K的一个元素$v = (v_{st})$，其中 $v_{st} = \varphi(f_{\overline{\tau}^{-1}(t)})(s,t)$ 对任意 $s,t \in X$ 成立。注意，对每个 $x \in X$，都有 $ve_x = \varphi(f_{\overline{\tau}^{-1}(x)})e_x$ 。我们有 $v_{tt} = 1$，因此，元素 v 在 K 中可逆（命题 4.1）。

因此，对于每个 $z \in Y$，我们都有关系 $ve_{\overline{\tau}(z)} = \varphi(f_z)e_{\overline{\tau}(z)}$。此外，关系 $\varphi(f_z)v = \varphi(f_z)e_{\overline{\tau}(z)}$ 也成立。因此，我们得到以下关系

$$\varphi(f_z)v = ve_{\overline{\tau}(z)}, \qquad v^{-1}\varphi(f_z)v = e_{\overline{\tau}(z)}$$

对于每个 $z \in Y$。设 μ 是代数 K 上由元素 v 定义的内自同构。于是有关系 $\mu\varphi(f_z) = e_{\overline{\tau}(z)}$, $z \in Y$。令 $\gamma = \mu\varphi$，得到 $\varphi = \mu^{-1}\gamma$，其中 γ 是对角同构$K' \to K$，而 μ^{-1} 是代数 K 的内自同构。 □

推论 13.3。 设代数 $I(Y,R)$ 和 $I(X,R)$ 满足条件(II) ，且 Y, X 是偏序集。那么，由同构 $I(Y,R) \cong I(X,R)$ 可得 $Y \cong X$。

满足条件(II)的某些环 R，使得代数 $I(Y,R)$ 和 $I(X,R)$，列于第 12 节末尾。

备注。 如果 X 是一个有限预序集，那么关联环 $I(X,R)$ 通常称为结构矩阵环（见第 3 节末）。 [14] 的引言中对这类环有很好的论述。本文证明了以下定理。设 R 是一个半素诺特环，并设 B_1, B_2 是两个 n 阶的布尔矩阵，使得 $M(n,B_1,R) \cong M(n,B_2,R)$。那么存在一个置换 τ，使得 $B_2 = \tau B_1$。

有限集 X 上的代数 $I(X,R)$ 的同构在 [1], [2],[4]中进行了研究。论文 [48] 包含一个与定理 13.1类似的定理，针对

商环 $R/J(R)$ 不可分解的情形（参见第 12 节末尾的条目 e ）。在 [23], 中，研究了交换不可分解环直和的同构问题。论文 [39] 致力于研究关联代数 M¨obius 范畴中某些类似的同构问题。

预印本 [49] 的作者定义了代数 $I^n(X, R)$，并将其称为“第 n 类偏旗关联代数”；这些代数推广了针对 $n = 2$ 的关联代数。在 [33], 中，对于有限偏序集 Y、 X 以及交换的不可分解环 R，证明了 $Y \cong X$ ，条件是 $I^3(Y, R) \cong I^3(X, R)$。

关联环还有其他推广形式。例如， [46] 和[47]中讨论了「形式矩阵关联环」的同构。 [18], 中给出了「斜关联环」的若干性质，并解决了这些环的同构问题。

第4章 关联代数的导子

14 导子的矩阵表示

我们使用第 1、2 和 3 章中的全部内容。特别是，关联代数 $I(X, R)$ 通常用字母 K 表示。对于局部有限预序集 X、环 R（它是一个 T-代数）以及代数 K 本身，我们均不施加任何先决条件。

给出了代数 K 的导子群描述（第 17–19 节）。请注意，在第 14–16 节中，我们考虑的 K 要么是关联代数，要么是具有零迹理想的形式矩阵代数。证明是针对关联代数进行的，但经过适当修正后，也可将其推广到形式矩阵代数。 [37], [38]充分体现了处理具有零迹理想的形式矩阵代数的技巧。

有趣的是，比较第2章和第4章中的结果与证明，不难发现它们有某种相似性和对应关系。只要将所有“乘法的”内容转换为“加法的”，就能得到第4章中的许多结论。这或许说明，关联环中存在一类特定的线性映射，其中既包括

自同构，也包括导子。

设 A 是某个交换环 T 上的代数。映射 $d\colon A \to A$ 称为代数 A 的导子，若 d 是线性映射，即 T-模 A 的自同态，并且对所有 a、$b \in A$，均有 $d(ab) = d(a)b + ad(b)$。代数 A 的所有导子构成一个 T-模，记作 Der A。

对元素 $c \in A$，我们定义映射 d_c，从 A 到 A，并令 $d_c(a) = ac - ca$，$a \in A$。于是 d_c 是一个称为内导子的导子。我们称 d_c 由元素 c 定义。代数 A 的内导子构成 T-模 Der A 的一个子模，记作 In (Der A)。为表示商模 Der A/In (Der A)，我们使用符号 Out A。Out A 的元素称为代数 A 的外导子，而 Out A 是代数 A 的外导子模。

导子的概念可以推广到更一般的形式。设 M 是一个A-A双模。取值于双模 M的代数 A 的导子，是满足等式$d(ab) = d(a)b + ad(b)$的 T-模同态 $d\colon A \to M$，其中 a、$b \in A$任意。若存在元素 $c \in M$ 使得 $d(a) = ac - ca$, $a \in A$，则称该导子 d 为内导子。

已知 T-模 Der A 具有李代数结构。在这个代数中，乘法 $\circ$ 由关系 $d_1 \circ d_2 = d_1d_2 - d_2d_1$定义。这里我们关注这个代数的加法结构。

我们假设代数 A 是其理想 M 与某个代数 L的分裂扩张，即 $A = L \oplus M$，其中 $\oplus$ 表示群直和。理想 M 是一个自然的 L-L双模。此外，M是一个非含幺代数。

我们知道，每个关联代数都是这样的扩张。具有零迹理想的形式矩阵代数也可以表示为所示的分裂扩张形式（参见 [37]和 [38]）。

我们取代数 $A = L \oplus M$的任意导子 d。作为加法自同态，d 可以相对于直和分解 $A = L \oplus M$ 表示为矩阵 $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$（相关内容见第 5 节和第 12 节）。这里

$$\alpha\colon L \to L,\ \beta\colon M \to M,\ \gamma\colon M \to L,\ \delta\colon L \to M$$

是一个 T-模同态，并且

$$d(a+b) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(a) + \gamma(b) \\ \delta(a) + \beta(b) \end{pmatrix}$$

对所有 $a \in L$ 和 $b \in M$。

我们不区分导子 d 及与之对应的矩阵。有时，如果 $\gamma = 0$，我们称之为“对角导子 d”；如果 $\gamma = 0 = \delta$，则称之为“对角导子 d”。

在三角导子的情况下，可以获得关于群 $\mathbf{Der}A$ 的非常有意义的信息。我们很快将看到，对于具有零迹理想的关联代数和形式矩阵代数，情况总是如此。

因此，设 $x + y$、 $s + t \in A = L \oplus M$。我们写下关系。

$$d((x + y)(s + t)) = d(x + y) \cdot (s + t) + (x + y) \cdot d(s + t). \qquad (*)$$

按顺序为参数赋值

$$y = 0 = t,\ x = 0 = s,\ x = 0 = t,\ s = 0 = y$$

并计算 $(*)$ 中的左右两部分，我们得到以下等式。

$$\alpha(xs) = \alpha(x)s + x\alpha(s), \quad \delta(xs) = \delta(x)s + x\delta(s),$$

$$\gamma(ys) = \gamma(y)s, \quad \gamma(xt) = x\gamma(t),$$
$$\beta(yt) = \beta(y)t + y\beta(t) + \gamma(y)t + y\gamma(t),$$
$$\beta(xt) = \alpha(x)t + x\beta(t) + \delta(x)t,$$
$$\beta(ys) = \beta(y)s + y\alpha(s) + y\delta(s).$$

前两个关系意味着， α 是代数 L 的导子，而 δ 是取值于双模 M的代数 L 的导子。由第三个关系可知， γ 是一个 L-L双模同态。

反之亦然。设

$$\alpha\colon L \to L,\ \beta\colon M \to M,\ \gamma\colon M \to L,\ \delta\colon L \to M$$

是 T-模同态，并满足上述关系。那么，由矩阵 $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ 所定义的代数 A 的变换，即

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x) + \gamma(y) \\ \delta(x) + \beta(y) \end{pmatrix},\ x \in L,\ y \in M,$$

是其导子。

现在我们将看到，任何具有零迹理想的关联代数或形式矩阵代数的导子都是三角形的。正如第 3 节所述，关联代数是 $L \oplus M$ 的分裂扩张。具有零迹理想的形式矩阵代数也有类似性质，参见 [37], [38]。接下来，字母 K 表示这两种代数之一。设 $d = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ 是代数 K 的某个导子。

引理14.1。 关系 $\gamma = 0$ 成立。

证明。 我们假设 K 是一个关联代数。我们假设 that$\gamma \neq 0$，其中，正如我们所知， γ 是一个 L-L-双模同态 $M \to L$。存在一个幂等元 e_x，使得 $e_x(\gamma M) = \gamma(e_x M) \neq 0$。接下来我们有

$$\gamma(e_x M) = e_x \gamma(e_x M) \subseteq e_x L = R_x \text{ and } \gamma(e_x M) \subseteq e_x L = R_x.$$

最后一个包含关系导致矛盾的关系

$$0 = \gamma(e_x M e_x) = \gamma(e_x M) e_x \neq 0.$$

因此，that $\gamma = 0$。 □

注14.2。 在上述证明中，我们隐含地使用了代数K 至少有两个不同的幂等元 e_x （它们出现在第 3 节中）。否则，情况会退化，即 K 只是某个矩阵环$M(n, R)$。

我们总结本小节。

推论 14.3. 每个具有零迹理想的关联代数或形式矩阵代数的导子 d 都是三角形的， $d = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$。这里， α 是代数 L 的一个导子， β 是代数 M 的一个导子，而 δ 是代数 L 上取值于双模 M 的一个导子。

15 导子的一些性质

如上一节所约定，字母 K 表示具有零迹理想的关联代数或形式矩阵代数。不过，此处使用的记号指的是关联代数。根据推论 14.3，这两种代数的每个导子都是三角形的。我们通常指的是等式 $K = L \oplus M$。

我们聚焦于代数 K 的内导子。我们将由 L （分别为 M）中的元素所定义的内导子子模记为 $\mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ A)$（分别为 $\mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\ A)$）。

引理 15.1. 存在一个直和

$$\mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ A) = \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ A) \oplus \mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\ A).$$

证明。 所定义的子模具有零交集这一点并非显而易见。设 $b \in L$、$c \in M$ 和 $d_b = d_c$ （这些符号在第14节中定义）。对于任意 $x \in X$，关系

$$d_b(e_x) = e_x b - b e_x = d_c(e_x) = e_x c - c e_x$$

成立。因此，

$$e_x c - c e_x = 0, \quad e_x c = c e_x = e_x c e_x = 0.$$

因此， $c = 0$ 和 $d_b = d_c = 0$。 □

现在我们定义一个同态和若干导子模。具体而言，我们用 f 表示模同态 $\mathrm{Der}\ K \to \mathrm{Der}\ L$，它满足对于每个导子 $d = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$，都有 $f(d) = \alpha$。该同态的核 $\mathrm{Ker}\ f$ 由形如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ 的导子组成。此同态的像记为 Ω。接下来，令 Λ 为对角导子的子模，即由形如 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 的导子组成。能够表示为矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 的导子称为加法导子。字母 Ψ 表示所有加法导子构成的子模，而 Ψ_0 是由环 L 的中心元素定义的内导子子模（这两个子模将在第 18 节和第 19 节中讨论）。最后一个子模是子模 Φ，它等于 $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ L) \right\}$。

以下包含关系成立：

$$\mathrm{Ker}\ f \subseteq \Phi, \quad \Psi \subseteq \Phi, \quad \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K) \subseteq \Lambda,$$

$$\mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\ K) \subseteq \mathrm{Ker}\ f, \quad \mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ K) \subseteq \Phi.$$

从下文可以看出，关于所引入的子模的信息对于理解整个模 $\mathrm{Der} K$ 的结构极为重要。

我们重点介绍以下关于确定导子模 $\mathrm{Der} K$ 结构问题的研究方向。

1. 模 Ω 的计算。

2. 子模 Ψ和 Ψ_0的计算。

3. 子模 Φ的计算。

若 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ 是代数 K的一个导子，则 α 是代数 L的一个导子。由于 L 是代数 R_x、 $x \in X$ 的直积（命题 3.1），我们需要了解环的直积的导子。它们的形式相当简单。

命题 15.2。 设 S_i、 $i \in I$是两个代数，$S = \prod_{i\in I} S_i$，且 d 是代数 S的一个导子。那么，对任意 $i \in I$， $d(S_i) \subseteq S_i$ 。此外， d逐坐标作用于直积 $\prod_{i\in I} S_i$ ，并且存在一个模同构 $\mathrm{Der}\, S = \prod_{i\in I}\mathrm{Der}\ S_i$。

证明。 我们用 e_i 表示环 S_i的单位元。于是

$$d(e_i) = d(e_i)e_i + e_i d(e_i) \in S_i.$$

对于任意元素 $a \in S_i$，我们有

$$d(a) = d(e_i a) = d(e_i)a + e_i d(a) \in S_i.$$

因此， $d(S_i) \subseteq S_i$，我们可以令 $d_i = d|_{S_i}$，其中 $d_i \in \mathrm{Der}\ S_i$。

导子 d 的逐坐标作用意味着，对于任意元素 $a = (a_i) \in S$， $d(a) = (d_i(a_i))$。

取任意元素 $a =(a_i) \in S$。固定一个下标 $k \in I$ ，并写下 $a = a_k + b$，其中 $b \in (1 - e_k)S$。利用幂等元 $1 - e_k$，很容易得到导子 d 保持环 $\prod_{i\neq k} S_i$ 不变。我们写下

$$d(a) = d(a_k) + d(b),\ d(a) = (c_i) = c_k + g.\ \text{where } g \in (1 - e_k)S.$$

那么 $d(a_k) = c_k$，这证实了 d 具有逐坐标作用。

现在假设对每个 i，都有一个代数 S_i 的导子 d_i 。假设对于元素 $a = (a_i) \in S$，有 $d(a) = (d_i(a_i))$，则得到代数 S 的一个导子 d 。

综上所述，我们得到典范同构 $\mathrm{Der}S \cong \prod_{i\in I}\mathrm{Der}S_i$。 □

对于等于 $\prod_{x\in X} R_x$ 的代数 L ，我们可以写出以下有用的事实。

推论 15.3. 如果 $d = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ 是代数 K 的导子，那么对于代数 L 的导子 α，命题 15.2 的所有断言都成立。因此，对于每个 $x \in X$，关系 $\alpha(e_x) = 0$ 和 $d(e_x) = \delta(e_x)$ 都成立。

在本小节余下部分，我们关注对角导子。对于它们，推论 14.3 允许进行放大。

推论 15.4。设 $d = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 是一个导子。那么，α 是代数 L 的一个导子，β 是代数 M 的一个导子，并且关系式

$$\beta(xt) = \alpha(x)t + x\beta(t), \quad \beta(ys) = \beta(y)s + y\alpha(s)$$

对所有 x、$s \in L$ 以及 y、$t \in M$ 都成立。反过来，结论也成立。若某些自同态 α 和 β 分别作用于 T-模 L 和 M，且满足上述性质，则 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 是代数 K 的一个导子。

命题 15.5。</style}导子 $d = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ 是对角导子，当且仅当对每个 $x \in X$，$d(e_x) = 0$。

证明。导子 d 当且仅当 $e_x d(a) e_y = 0$ 对所有 $a \in L$ 以及所有不等价的 x、$y \in X$ 都成立时，是对角的。

我们假设对每个 $x \in X$，$d(e_x) = 0$。那么对于任意 a、$b \in L$，我们有

$$d(e_x a) = d(e_x)a + e_x d(a) = e_x d(a) \text{ and similarly } d(be_y) = d(b)e_y.$$

我们得到

$$e_x d(a) e_y = d(e_x a)e_y = d(e_x a e_y) = d(0) = 0.$$

现在令 d 为对角导子。于是

$$d(e_x) = \alpha(e_x) + \delta(e_x) = \alpha(e_x) = 0. \quad \square$$

推论 15.6. 如果 $d = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$，那么关系

$$\beta(e_x c e_y) = e_x \beta(c) e_y, \quad \text{where } c \in M$$

成立。

证明。 考虑到推论 15.4 和命题 15.5，我们写出关系式

$$\beta(e_x c e_y) = \alpha(e_x)ce_y + e_x\beta(c)e_y + e_x c\alpha(e_y) = e_x\beta(c)e_y. \square$$

双模 M_{xy}、 W_k 的定义以及理想 V_k 的定义见第 3 节。

命题 15.7。 我们取代数 K 的任意对角导子 $d = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$。对于代数 M 的导子 β，对所有 x、 $y \in X$，包含关系 $\beta M_{xy} \subseteq M_{xy}$ 均成立。此外， β 在直积 $\prod_{x,\ y\in X} M_{xy}$ 上逐坐标作用。对于 $k \geq 1$，包含关系 $dV_k \subseteq V_k$ 和 $dW_k \subseteq W_k$ 也成立。

证明。 根据关系 $M_{xy} = e_x M e_y$ 和推论 15.6，可得包含关系 $\beta M_{xy} \subseteq M_{xy}$。我们可以将向量 (β_{xy}) 映射到导子 β，其中 $\beta_{xy} = \beta|_{M_{xy}}$。我们证明，对于 $b = (b_{xy}) \in M = \prod_{x,\ y\in X} M_{xy}$，有 $\beta(b) = (\beta_{xy}(b_{xy}))$，这意味着 β 是逐坐标作用的。令 $\beta(b) = (c_{xy})$ 对所有 x, y 成立。我们验证，对于所有 x, y，$\beta_{xy}(b_{xy}) = c_{xy}$ 成立。固定元素 x, y，并写出 $M = M_{xy} \oplus N$，其中 N 是除 M_{xy} 之外所有双模的直积。令 $b = b_{xy} + f$，其中 $f \in N$。那么

$$\beta(b) = \beta(b_{xy}) + \beta(f),\ \text{where } \beta(b_{xy}) \in M_{xy}.$$

此外，我们写下

$$\beta(b) = c_{xy} + g,\ \text{where } c_{xy} \in M_{xy},\ g \in N.$$

根据推论 15.6，我们有 $e_x\beta(f)e_y = \beta(e_x f e_y) = 0$。因此， $\beta(f)$ 在 M_{xy} 中具有零投影。我们得到 $\beta_{xy}(b_{xy}) = c_{xy}$，这正是所需的。

其余的包含关系可由前面已经陈述的内容推出。 $\square$

16 模 Der K 的主分解与同构

与之前一样， K 表示关联代数 $I(X, R)$，或零迹理想以 $K = L \oplus M$ 形式表示的形式矩阵代数，如第 3 节所述。我们保留此前采用的记号。需要注意的是，代数 K 的导子是三角形的（推论 14.3）。

我们再回顾引理 15.1 中一个非常有用的等式:

$$\mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ A) = \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ A) \oplus \mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\ A).$$

我们还记得，下面列出的模在第 5 节开头出现过。

值得注意的是，代数 K 的导子在某种意义下可以被对角化（参见定理 6.2）。

定理 16.1。存在以下模关系。

1. $\mathrm{Der}\ K = \mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\ K) \oplus \Lambda$. **2.** $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\ K) \oplus \Psi$.

3. $\Phi = \mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ K) + \Psi = \mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\ K) \oplus (\mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K) + \Psi)$.

证明. 1. 对于代数 K 的一个导子 $d = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$，我们通过设定来定义一个函数$g \in I(X, R)$。

$$g(x,y) = \begin{cases} d(e_y)(x,y), & \text{if } x \le y, \\ 0, & \text{if } x \not\le y. \end{cases}$$

我们还可以写成 $g = (g_{xy}) = (d(e_y)_{xy})$。此外，$g \in M$，因为 $d(e_y) \in M$(推论 15.3)。因此，$g_{xy} = d(e_y)_{xy}$。

对于每个 $x \in X$，关系 $ge_x = d(e_x)e_x$ 都成立。我们将元素 g 写成 $(d(e_y)e_y)_{y \in X}$ 的形式。其他元素也采用类似的形式。若 $x \neq y$，则

$$e_x e_y = 0,\ 0 = d(e_x e_y) = d(e_x)e_y + e_x d(e_y),\ e_x d(e_y) = -d(e_x)e_y.$$

我们令 $d' = d + d_g$，其中 d_g 是由元素 g 定义的代数 K 的内导子（记号 d_g 在第 4 节开头给出）。为验证 d' 是一个对角导子，我们进行如下变换:

$$e_x g = e_x (d(e_y)e_y)_{y \neq x} = (e_x d(e_y)e_y)_{y \neq x} =$$

$$= -((d(e_x)e_y)e_y)_{y \neq x} = -(d(e_x)e_y)_{y \neq x}.$$

接下来我们有如下关系

$$d_g(e_x) = e_x g - g e_x = -(d(e_x)e_y)_{y \neq x} - d(e_x)e_x =$$

$$= -(d(e_x)e_y)_{y \in X} = -d(e_x).$$

我们得到 $d'(e_x) = 0$，并且根据命题 15.5， d' 是一个对角导子。因此，$d = -d_g + d'$，其中 $d_g \in$ 在$_1$(Der K)中， $d' \in \Lambda$。我们取交集 In_1(Der K) $\cap \Lambda$中的任意导子 d。令 $d = d_g$，其中 $g \in M$。由命题 15.5可知，对于所有 x， $d(e_x) = 0$。因此，我们得到

$$e_x g - g e_x = 0 \text{ and } e_x g = e_x g e_x = 0 \text{ for any } x.$$

因此， $g = 0, d = 0$，我们已经证明了**1**。

2. 由**1**及关系可得结论

$$\mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\ K) \subseteq \mathrm{Ker}\ f \text{ and } \mathrm{Ker}\ f \cap \Lambda = \Psi.$$

3. 取任意一个从 Φ到 Φ的导子 $d = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$。设代数 L 的内导子 α 由元素 $c \in L$定义。那么我们有$d - d_c \in$ Ker f，其中 d_c 是由元素 c定义的代数 K 的内导子。因此，

$$d \in \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K) + \mathrm{Ker}\ f, \quad \Phi = \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K) + \mathrm{Ker}\ f =$$

$$= \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K) + (\mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\ K) \oplus \Psi) = \mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ K) + \Psi.$$

还需验证 In_1(Der K) $\cap$ (In_0(Der K) $+ \Psi$) $= 0$。设 $d_b = d_a + \gamma$，其中

$$d_b \in \mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\ K),\ d_a \in \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K),\ \gamma \in \Psi.$$

由于 $d_a, \gamma \in \Lambda$，我们有 $d_b \in \Lambda$。因此，若 $d_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$，则 $\delta = 0$。

于是，对所有元素 $f \in L$，都有 $fb - bf = 0$。特别地， $e_x b - b e_x = 0$。因此，对于任意 x，都有 $e_x b = e_x b e_x = 0$。由此， $b = 0$ 且 $d_b = 0$。等式 $\Phi = \mathrm{In}_1$(Der K) $\oplus$ (In_0(Der K) $+ \Psi$)得证。 □

我们汇总几个有用的等式和同构。

命题 16.2。 以下关系和同构成立。

1. $\Psi \cap \mathrm{In}$（Der K） $= \Psi \cap \mathrm{In}_0$（Der K） $= \Psi_0$.
2. $\Lambda/$（In_0（Der K） $+ \Psi$） $\cong \Omega/\mathrm{In}$（Der L）。
3. $\Phi/$Ker $f \cong \mathrm{In}_0$（Der K）$/\Psi_0 \cong$ In（Der L）。
4. Φ/In（Der K） $\cong \Psi/\Psi_0$.

证明。

1. 我们只验证包含关系 $\Psi \cap \mathrm{In}(\mathrm{Der}\ K) \subseteq \Psi_0$。我们取任意一个导子 d，等于 $d_1 + d_0$，其中 $d \in \Psi$，$d_1 \in \mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\ K)$，$d_0 \in \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K)$。令 d_1 由元素 $c \in M$ 定义，并令 d_0 由元素 $a \in L$定义。则 d 由元素 $a + c$定义。

对于任意元素 $b \in L$，我们有 $d(b) = (bc - cb) + (ba - ab)$。由于 $d \in \Psi$，我们有 $ba - ab = 0$。因此，$a \in C(L)$，即 a 是L的中心元。我们还有 $bc - cb = 0$。特别地，对于所有 x，$e_x c - c e_x = 0$。与定理 16.1(3)的证明结尾类似，我们得到 $c = 0$。所以，$d_1 = 0$ 和 $d = d_0$。由于 $a \in C(L)$，我们有 $d \in \Psi_0$。

2. 首先，我们指出子模 $\mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\ L)$ 包含于 Ω 中。我们将典范满同态 $\Omega \to \Omega/\mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\ L)$ 记为 π。同态 $\pi f|_\Lambda \colon \Lambda \to \Omega/\mathrm{In}\,(\mathrm{Der}\ L)$ 的核等于 $\Phi \cap \Lambda = \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K) + \Psi$（参见定理 16.1(3) 的证明）。

3. 通过考察定理 16.1 和1，我们写出以下关系

$$\Psi/\mathrm{Ker}\ f \cong (\mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K) + \Psi)/\Psi \cong \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K)/(\mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K) \cap \Psi) =$$

$$= \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K/\Psi_0 \cong \mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ L).$$

4. 同样，考虑定理 16.1 和1，可得以下关系

$\Phi/\text{在}\,(\mathrm{Der}\ K) = (\text{在}\,(\mathrm{Der}\ K) + \Psi)/\text{在}\,(\mathrm{Der}\ K) \cong \Psi/(\text{在}\,(\mathrm{Der}\ K) \cap \Psi) \cong \Psi/\Psi_0$. □

关于命题 16.2(4)，我们指出，在第 18 节和第 19 节中给出了一些判据，用于判断 Ψ 与 Ψ_0 是否相同。

以下结论可直接由定理 16.1 和命题 16.2 得出。

推论 16.3. 以下同构成立。

1. $\mathrm{Der}\ K/\mathrm{Ker}\ f \cong \Omega \cong \Lambda/\Psi$.

2. $\mathrm{Der}\ K/\mathrm{Ker}\ \Phi \cong \Omega/\mathrm{Der}\ L$.

本小节结尾时，我们指出，模 Ω 和 Ψ 将在剩下的三个小节中进行研究。

17 模 Der K 和 Out K 的结构

在其余第17–19节中，字母 K 仅表示某个关联代数（而非关联代数或形式矩阵。

代数，如第 14–16 小节所述）。
这里本质上利用了所有 R_x 都是普通矩阵环，而所有 M_{xy} 都是普通矩阵群这一事实。因此，不可能将第 17–19 小节的结果直接推广到形式矩阵代数。

我们提出若干关于模 Ω、Der$K$ 和 Out$K$ 的结构问题。

1. Der$L$ 中哪些导子属于 Ω? **2.** 模 Ω 和 Ω/In(Der$L$) 的结构如何? **3.** 模 Der$K$ 和 Out$K$ 的结构如何?

这三个问题都将得到令人满意的解答。

命题 17.1。 设 H 是某个 T-代数，且 α 和 γ 是 H 的导子。存在一个 T-模 H 的自同态 β，使得

$$\beta(ab) = \alpha(a)b + a\beta(b) = \beta(a)b + a\gamma(b) \text{ for all } a, b \in H$$

当且仅当 $\gamma - \alpha$ 是内导子时，才存在。

证明。 我们假设所指的自同态 β 存在。依次令元素 a 和 b 取值 1，得到关系

$$\beta(c) = \beta(1)c + \gamma(c) = \alpha(c) + c\beta(1)$$

对每个 $c \in H$ 都成立。因此，$(\gamma - \alpha)(c) = c\beta(1) - \beta(1)c$。换言之，$\gamma - \alpha$是由元素 $\beta(1)$ 定义的内导子。

现在令 $\gamma - \alpha$ 为由元素 $d \in H$ 定义的内导子。那么

$$(\gamma - \alpha)(c) = cd - dc \text{ and } dc + \gamma(c) = \alpha(c) + cd$$

对任意 $c \in H$ 都成立。我们通过如下定义，得到 T-模 H 的一个自同态 β：

$$\beta(c) = \alpha(c) + cd = dc + \gamma(c),\ c \in H.$$

对于任意元素 a、$b \in H$，有

$$\beta(ab) = \alpha(ab) + abd = dab + \gamma(ab) =$$

$$= \alpha(a)b + a\alpha(b) + abd = dab + \gamma(a)b + a\gamma(b).$$

我们还有

$$\alpha(a)b + a\beta(b) = \alpha(a)b + a\alpha(b) + abd,$$
$$\beta(a)b + a\gamma(b) = dab + \gamma(a)b + a\gamma(b).$$

这些等式蕴含所需的结论。 □

此时，我们可以重述第 8 节开头的两个段落。在那里，对于正整数 k、ℓ 和 c，其中 $c =$ 是 k 和 ℓ 的最小公倍数，我们引入了矩阵代数 P、Q、H 以及由矩阵构成的 P-Q-双模 V。此外，数 $\ell' = c/k$ 和 $k' = c/\ell$ 也已确定。

设 α 和 γ 分别是代数 P 和 Q的导子。它们分别诱导出代数 H的导子 $\overline{\alpha}$ 和 $\overline{\gamma}$。也就是说，对于任意矩阵 $A =(a_{ij}) \in H$、$a_{ij} \in P$，有 $\overline{\alpha}(A) =(\alpha(a_{ij}))$，对于 $\overline{\gamma}$同理。导子 $\overline{\alpha}$ 和 $\overline{\gamma}$ 称为环块导子（也称为诱导导子）。我们保留其记号 α 和 γ。以下命题中已采用这一约定，该命题将关于矩阵环的命题 17.1 加以推广。

命题 17.2。 如果 $\alpha \in$ Der P 且 $\gamma \in$Der Q，那么存在代数 T-模 V 的自同态 β，使得关系

$$\beta(pa) = \alpha(p)a + p\beta(a) \text{ and } \beta(aq) = \beta(a)q + a\gamma(q)$$

对于所有 $p \in P$、$q \in Q$ 和 $a \in V$成立，当且仅当 $\gamma - \alpha$是代数 H的内导子。

证明。 设 β 是模上的一个 T-自同态，并满足命题中写出的等式。显然，β 诱导出 T-模 H的一个（块）自同态 $\overline{\beta}$，其中对于来自 H的每个矩阵$A = (A_{ij})$，都有 $\overline{\beta}(A) = (\beta(A_{ij}))$。假设矩阵 A 以块形式表示，即 A_{ij} 是 $\ell' \times k'$ 个块。对于 $\overline{\beta}$，命题 17.1 中的等式成立。因此，$\gamma - \alpha$ 是代数 H的内导子。

现在假设 $\gamma - \alpha$ 是代数 H的内导子。根据命题 17.1，存在模 H 的自同态 β。

设 $e_1, \ldots, e_{\ell'}$ 和 $f_1, \ldots, e_{k'}$ 是对应于 H中矩阵的两个块划分的对角矩阵单位。对于 $i = 1, \ldots, \ell'$，有 $\alpha(e_i) = 0$；对于 $j = 1, \ldots, k'$，有 $\gamma(f_j) = 0$；并且 β满足命题 17.1 中的等式。因此，对于任意不相等的 i 和 j，自同态 β 在 T-模 e_iHf_j 上诱导出一个自同态。乘法在 H 中以块形式进行（这适用于所有三个块分解）。因此，β 在 e_iHf_j上的限制，也就是说，实际上在 V上的限制，满足命题中的等式。 □

代数 L 的导子 α 包含于 Ω 中，当且仅当存在代数 M 的一个导子 β，满足推论中的等式。

15.4. 在命题 3.1 之前，给出了M 中的双模乘法公式以及 M 中的乘法公式。根据这些公式以及 β 的坐标作用这一事实（命题 15.7），不难确认 β 满足等式

$$\beta(cd) = \beta(c)d + c\beta(d), \tag{1}$$

其中 $c \in M_{xz}$、 $d \in M_{zy}$ 和 $x < z < y$，以及关系式

$$\beta(ac) = \alpha(a)c + a\beta(c), \quad \beta(db) = \beta(d)b + d\alpha(b), \tag{2}$$

其中 $a \in R_x$、 c、 $d \in M_{xy}$、 $b \in R_y$。

设 n_x 为环 R_x 中矩阵的阶。对于所有满足 $x < y$ 的 x、 $y \in X$，我们令 c_{xy} =为 n_x 和 n_y 的最小公倍数。我们用 H_{xy} 表示矩阵环 $M(c_{xy}, R)$。它可表示为环 R_x、 R_y 上的分块矩阵环，也可表示为 M_{xy} 上分块矩阵的 R_x-R_y-双模。对于导子环 R_x 和 R_y，我们假设环 H_{xy} 的（分块）导子。

命题 17.3。代数 $L = \prod_{x\in X} R_x$ 的导子 $\alpha = (\alpha_x)$ 属于模 Ω，当且仅当对于所有满足 $x < y$ 的 x、 $y \in X$， $\alpha_y - \alpha_x$ 都是代数 H_{xy} 的内导子。

必要性。如果 $\alpha \in$Ω，则存在导子 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$，使得 β 满足推论 15.4 中的关系式 (2)。根据命题 17.2， $\alpha_y - \alpha_x \in$在（Der H_{xy}）中。

充分性。根据命题 17.2，对于满足关系式 (2) 的任意 x 和 y，存在 T-模 M_{xy} 的一个自同态 β_{xy}。

设 β 是 T-模 M 的一个自同态，它将元素 (d_{xy}) 映射为 $(\beta_{xy}(d_{xy}))$，对每个 $(d_{xy}) \in M = \prod_{x,\ y\in X} M_{xy}$ 均如此。根据推论 15.4，这个 β 满足两个关系。为了使代数 $K = L \oplus M$ 的变换 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 成为其导子，还需验证 β 是代数 M 的一个导子。因此，问题归结为验证等式 (1)。

我们固定三个元素 x、 z、 y，使得 $x < z < y$。我们再引入一个矩阵环。设 $H = M(d, R)$，其中 $d =$ 是 n_x、 n_z、 n_y 的最小公倍数。环 H 是建立在环 H_{xz}、 H_{zy}、 H_{xy}、 R_x、 R_z、 R_y 各自之上的分块矩阵环。它也可以被视为建立在双模 M_{xz}、 M_{zy}、 M_{xy} 各自之上的分块矩阵双模。导子 α_x、 α_z、 α_y 被视为代数 H 的环（分块）导子。 T-自同态 β_{xz}、 β_{zy}、 β_{xy} 被视为（分块）

双模 H 的自同态。最后这些自同态满足与导子 α_x 和 α_z、 α_z 和 α_y、 α_x 和 α_y 相关的关系（属于命题 17.1 中所记录的类型）。

差值 $\alpha_z - \alpha_x$、 $\alpha_y - \alpha_z$ 和 $\alpha_y - \alpha_x$ 是代数 H 的内导子。自然地，它们诱导出（其含义见命题 17.1 的证明）与上文相同的映射 β_{xz}、 β_{zy}、 β_{xy}。

设内导子 $\alpha_z - \alpha_x$、 $\alpha_y - \alpha_z$ 和 $\alpha_y - \alpha_x$ 分别由代数 H 中的元素 d_{xz}、 d_{zy} 和 d_{xy} 定义。那么 $d_{xy} = d_{xz} + d_{zy}$。我们从命题 17.1 的证明中写出自同态 β_{xz}、 β_{zy} 和 β_{xy} 的作用方式：

$$\beta_{xz}(a) = \alpha_x(a) + ad_{xz} = d_{xz}a + \alpha_z(a),$$

$$\beta_{zy}(b) = \alpha_z(b) + bd_{zy} = d_{zy}b + \alpha_y(b),$$

$$\beta_{xy}(c) = \alpha_x(c) + cd_{xy} = d_{xy}c + \alpha_y(c),$$

其中 a、 b、 $c \in H$。

我们验证以下关系：

$$\beta_{xy}(b) = \beta_{xz}(a)b + a\beta_{zy}(b) \qquad (*)$$

对于任意的 a、 $b \in H$，在 H 中。为此，我们将等式 $(*)$ 的右边变形为左边：

$$\beta_{xz}(a)b + a\beta_{zy}(b) = \alpha_x(a)b + ad_{xz}b + a\alpha_z(b) + abd_{zy} =$$

$$= \alpha_x(a)b + a(d_{xz}b + \alpha_z(b)) + abd_{zy} =$$

$$= \alpha_x(a)b + a(\alpha_x(b) + bd_{xz}) + abd_{zy} =$$

$$= \alpha_x(a)b + a\alpha_x(b) + abd_{xz} + abd_{zy} =$$

$$= \alpha_x(a)b + a\alpha_x(b) + abd_{xy} =$$

$$= \alpha_x(ab) + abd_{xy} = \beta_{xy}(ab).$$

等式 $(*)$ 已得到证明。其中出现的乘法均在块上进行。这意味着关系式 (1) 成立。 □

我们转而讨论模 Ω 和 Der$K$ 的结构问题。实际上，代数 $M(n, R)$ 的环导子概念已在上文给出。我们说明，如果 $\alpha \in$Der$R$，那么将矩阵 (a_{ij}) 映射到矩阵 $(\alpha(a_{ij}))$ 的代数$M(n, R)$ 的导子称为环导子（或诱导导子）。以下结果是已知的。

定理 17。4 [27]. 矩阵代数 $M(n, R)$ 的每个导子都是一个环导子与一个内导子的和。

设 ε 为代数 R 的某个导子。则对于每个 $x \in X$， ε 都给出了代数 R_x 的一个环导子 ε_x。我们将代数 L 的导子 (ε_x) 记为 ε_L。对于任意满足 $x < y$ 的 x、$y \in X$，导子 ε 类似地在双模 M_{xy} 上诱导出一个映射 ε_{xy}。设 $\varepsilon_M = (\varepsilon_{xy})$ 为 T-模 M 的一个自同态，该自同态逐坐标作用。令 $\overline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_L & 0 \\ 0 & \varepsilon_M \end{pmatrix}$。由推论 15.4 或命题 17.3 可知， $\overline{\varepsilon}$ 是代数 K 的一个导子。

这些导子 ε_L、 ε_M 和 $\overline{\varepsilon}$也称为环导子。我们用 D 表示代数 L的所有环导子构成的子模。代数 K 的所有环导子构成的子模也用同一个字母 D表示。显然， $D \subseteq \Lambda$ 和 $D \cap \Psi = 0$ 属于 Der K，且模 D 与 Der R规范同构。接下来，设 D_0 为 Der L 中的子模，它由代数 L 的环导子 ε_L 组成，并满足 $\varepsilon \in$ In (Der R)。设 D_0表示 Der K中的一个类似子模。这些子模与 In (Der R) 同构。

有一个简单的结果对我们很有用。

引理 17.5. 若 d 是一个环导子，同时也是代数 $M(n, R)$的内导子，那么它由一个标量矩阵定义。换言之， d是由代数 R的一个内导子定义的环导子。

我们可以利用引理 17.5 直接验证下面的引理。

引理 17.6.

1. 存在一个同构 $D/D_0 \cong$Out R in Der L.**2.** $D_0 = D \cap$In (Der L) 在 Der L 中成立。**3.** 在 Der K 中，我们有 $D_0 = D \cap \mathrm{In}_0$(Der K) $= D \cap$(In$_0$(Der K) $+ \Psi$),

$$(\Psi \oplus D) \cap \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K) = \Psi_0 \oplus D_0.$$

我们回顾一下，在第2节中我们约定将预序集 X 视为有向图。

我们陈述本章的主要结果。将其与定理 9.1 进行比较会很有帮助。

定理 17.7。 设 X 是一个连通集。对于代数 K，其中$K = I(X, R)$，我们有以下关系和同构。

1(a). $\Omega = D + \mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ L)$, $\Omega/\mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ L) \cong \mathrm{Out}\ R$.

1(b). $\Lambda = \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K) + (\Psi \oplus D)$, $\mathrm{Der}\ K = \mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ K) + (\Psi \oplus D) =$

$$= \mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\ K) \oplus (\mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K) + (\Psi \oplus D)).$$

2. 输出 $K \cong \Psi/\Psi_0 \oplus$输出 R。

证明。

1(a). 我们在 Ω 中取任意导子 $\alpha = (\alpha_x)$。由定理 17.4 可知，对于每个 $x \in X$，都有 $\alpha_x = \rho_x + \mu_x$，其中 ρ_x 是环导子，μ_x 是代数 R_x 的内导子。我们构造环 L 的导子 $\rho = (\rho_x)$ 和 $\mu = (\mu_x)$，并在 Der L 中得到关系 $\alpha = \rho + \mu$。由于 α、$\mu \in \Omega$，我们有 $\rho \in \Omega$。

我们将证明以下性质：经过一个内导子的调整，可以使得对于所有 x、$y \in X$，都有 $\rho_x = \rho_y$。

我们固定某个元素 $t \in X$。取任意元素 $x \in X$，并在 X 中选取一条从 t 到 x 的半路径。通过多次应用命题 17.3，或按照所选半路径的长度进行归纳法，我们可以得到，对于某个内环导子 ν_x，有 $\rho_x = \rho_t + \nu_x$。我们仅作简要说明。形式为 $\rho_s = \rho_z + \nu_s$ 的等式出现在环 H_{sz} 中（见命题 17.3）。令 $c =$ 为 LCM(n_t、n_{z_1}、. . .、n_{z_m}、n_x)，其中 z_1、. . .、z_m 是所选半路径的顶点，该半路径从 t 到 x。于是，所有出现的环导子都可以视为任意环 R_x 的导子。

现在我们对每个 $x \in X$ 都得到 $\alpha_x = \rho_x + \mu_x = \rho_t +(\nu_x + \mu_x)$。令 $\gamma = (\nu_x + \mu_x)$ 和 $\rho = (\rho_x)$，即可得到 $\alpha = \rho + \gamma$，其中 $\rho \in D$,$\gamma \in$ In (Der L)。因此，关系 Ω $= D +$In (Der L) 得证。利用引理 17.6，我们得到 Ω/In (Der L) $\cong D/D_0 \cong$ Out R。

1(b). 令 $d = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Lambda$。则 $\alpha \in \Omega$，并且有 $\alpha = \rho + \gamma$，其中 $\rho \in D$ 以及 $\gamma \in$ 在 In (Der L （见 **1(a)**）中。导子 ρ 和 γ 分别诱导出一个环导子和一个内导子（它包含于 In_0(Der K) 中）。我们保留对它们的记号 ρ 和 γ。我们用 ψ表示差 $d - \rho - \gamma$。于是 $d = \gamma + \psi + \rho$，其中 $\gamma \in \mathrm{In}_0$(Der K)，$\psi \in \Psi$，$\rho \in D$。这给出了第一个等式；若考虑定理 16.1，也可得到第二个等式。

2. 借助定理 16,1、引理 15.1 和引理 17.6，我们得到以下关系

$$\mathrm{Out}\ K = \frac{\mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\ K) \oplus \Lambda}{\mathrm{In}_1(\mathrm{Der}\ K) \oplus \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K)} \cong$$

$$\frac{\mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K)+(\Psi\oplus D)}{\mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K)}\cong\frac{\Psi\oplus D}{(\Psi\oplus D)\cap\mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K)}=$$

$$=\frac{\Psi\oplus D}{\Psi_0\oplus D_0}\cong\Psi/\Psi_0\oplus D/D_0\cong\Psi/\Psi_0\oplus\mathrm{Out}\ R.\quad\square$$

我们已将求解模 Der$K$ 和 Out$K$ 的结构这一问题，化归为求解模 Ψ 和 Ψ/Ψ_0 的类似问题。最后几个小节将专门讨论这些模。

我们将定理 17.7 推广到关联代数 $I(X,R)$，其中 X 是任意预序集。与之前一样，令 $K=I(X,R)$、X_i、$i\in I$为集合 X的所有连通分支。我们有 $K=\prod_{i\in I}K_i$。接下来，通过考察命题 15.2，我们得到以下关系

$$\mathrm{Der}\ K=\prod_{i\in I}\mathrm{Der}\ K_i,\quad \mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ K)=\prod_{i\in I}\mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ K_i),$$

$$\mathrm{Out}\ K=\prod_{i\in I}\mathrm{Out}\ K_i$$

以及 In_0(Der K) 和 In_1(Der K) 的类似关系。

符号 L_i、M_i、Λ_i、Ω_i、Ψ_i 和 D_i 相对于代数 K_i都有明确的含义。同样，等式 $L=\prod_{i\in I}L_i$、$M=\prod_{i\in I}M_i$ 及类似等式对于其余的模 Λ、Ω、Ψ 和 D也成立。

利用上述关系，不难证明以下定理。

定理 17.8。对于任意关联代数 K，以下关系成立。

1(a). $\Omega=D+\mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ L)$, $\Omega/\mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ L)\cong\prod_{|I|}\mathrm{Out}\ R$.

1(b). $\Lambda=$在$_0$(Der K) $+(\Psi\oplus D)$,
Der $K=\mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ K)+(\Psi\oplus D)=\mathrm{In}_1$(Der K) $\oplus$ (In_0(Der K) $+(\Psi\oplus D)$).
2. 输出 $K\cong\Psi/\Psi_0\oplus\prod_{|I|}$输出 R。

推论 17。9 [45]。设 X 是一个偏序集，R 是一个交换环。我们只考虑 K 上的 R-代数导子。那么我们有以下关系和同构

$\Omega=0$, $D=0$, $\Psi_0=\mathrm{In}_0$(Der K), Der $K=\mathrm{In}_1$(Der K)$\oplus\Psi$, Out $K\cong\Psi/\Psi_0$.

18 加法导子

本小节是对第14节开头关于第2章和第4章之间某种相似性的观察的阐释。可以说，本小节是第10节的某种加法版本。这里讨论的是第15节中定义的子模 Ψ andΨ_0。它们之间满足以下等式

$$\Psi \cap \mathrm{In}\ (\mathrm{Der}\ K) = \Psi \cap \mathrm{In}_0(\mathrm{Der}\ K) = \Psi_0$$

（命题 16.2）。来自 Ψ 的导子称为加法导子，来自 Ψ_0 的导子称为势导子。

我们将介绍关于模 Ψ 和 Ψ_0的一些一般信息。对于有限连通集 X，模 Ψ_0 是Ψ 中的一个直和项，并且可以对其进行计算。此外，我们还提出了使Ψ 与 Ψ_0 相匹配的条件。

取任意一个加法导子 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$。这里， β 是代数 M 的导子，并且关系

$$\beta(xt) = x\beta(t), \quad \beta(ys) = \beta(y)s \ \text{ for all } \ x, s \in L,\ y, t \in M$$

由推论 15.4 得到。因此， β 是 L-L-双模 M的自同态。反过来，如果映射 $\beta\colon M \to M$满足所述性质，那么 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 就是加法导子。

我们再次回顾，双模 M_{xy} 定义于第 3 节。它们也出现在第17节。设我们有一个加法导子 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$。与第17节一样，符号 β_{xy} 表示 β 在 M_{xy} 上的限制。由于 β 是代数 M的导子，我们有关系式

$$\beta_{xy}(ab) = \beta_{xz}(a)b + a\beta_{zy}(b) \tag{1}$$

对任意满足 $x < z < y$ 的 $x, z, y \in X$ ，以及任意 $a \in M_{xy}$, $b \in M_{zy}$ （参见命题 17.2 的证明之后的正文）。由于 β 也是 L-L-双模 M的自同态，因此对任意满足 $x < y$的 $x, y \in X$ ， β_{xy} 是 R_x-R_y-双模 M_{xy} 的自同态。

接下来，由命题 10.1 可知，对于任意这样的 x 和 y，存在一个元素 $c_{xy} \in C(R)$，使得 $\beta_{xy}(a) = c_{xy}a$, $a \in M_{xy}$。考虑关系 $M_{xz} \cdot M_{zy} = M_{xy}$，利用 (1) 可得关系

$$c_{xy} = c_{xz} + c_{zy}, \tag{2}$$

其中 $x < z < y$。我们得到，给定的导子 $\psi \in \Psi$ 与环 R中一组中心元素 c_{xy} $(x, y \in X,\ x < y)$ 之间存在对应关系。

反之，任何满足关系式（2）的元素系统 $\{c_{xy} \in C(R) \mid x < y\}$，都会导出一个加法导子。具体而言，若 $b = (b_{xy}) \in M$，则我们令 $\psi(b) = (c_{xy} b_{xy})$，并且对 $a \in L$，令 $\pi(a) = 0$。

基于以上内容，我们写下如下断言。

命题 18.1.

1. 加法导子与满足以下条件的元素 $\{c_{xy} \in C(R) \mid x < y\}$ 系统一一对应：对于所有x、 z、 $y \in X$， $c_{xy} = c_{xz} + c_{zy}$，其中 $x < z < y$。

2. Ψ 模可以嵌入由若干个T-模 $C(R)$组成的直和 $\mathcal{M}$ 中，其中 $\mathcal{M} = |\{(x, y) \mid x < y\}|$。

一般来说，要确定命题 18.1 中嵌入的像似乎很困难（见第 19 节）。

对于势导子，也就是子模 Ψ_0 中的元素，命题 18.1(1) 允许进行放大。我们取势导子 $\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$；令其由元素 $v = (v_x) \in L$ 定义，其中 $v_x \in C(R)$（我们将 R_x 中的标量矩阵与 R 中相应的元素视为相同）。对于任意 x、 y $(x < y)$ 以及每个 $a \in M_{xy}$，我们有以下关系

$$\beta(a) = av - va = av_y - v_x a = (v_y - v_x)a.$$

由此可知，对于导子 ψ，命题 18.1 中的元素系 $\{c_{xy} \mid x < y\}$ 由元素 $v_y - v_x$ 构成。

命题 18.2。 令 ψ 为加法导子。根据命题 18.1， ψ 对应于满足等式 (2) 的中心元素系 c_{xy}。以下断言等价：

1) ψ 是势导子；

2) ψ 是内导子；

3) 存在一个元素 $v = (v_x)$ 属于 L，使得 $v_x \in C(R)$ 且对所有 x， y ($x < y$)。

证明。 由定义和命题 16.2 可得蕴含关系 **2)** $\Rightarrow$ **1)**。

若有 **3)**，则 ψ 与由.....定义的内导子一致

元素 v。 □

与命题 10.2 之后一样，我们进一步假设 X 是有限连通偏序集。

基于环 R 的中心元素的任意集合 $\{c_{xy} \mid x, y \in X,\, x < y\}$，我们为图 X 的边和半路径赋予权。如果 (x, y) 是一条边，则我们设

$$w(x,y) = c_{xy} \text{ for } x < y \text{ and } w(x,y) = -c_{yx}, \text{ for } x > y.$$

接下来，对于 X 中的半路径 $P = z_1 z_2 \ldots z_{k+1}$，我们设

$$w(P) = w(z_1, z_2) + \ldots + w(z_k, z_{k+1}).$$

设我们有代数 K 的某个加法导子 ψ，并设 $\{c_{xy} \mid x <y\}$ 是环 R 的一组中心元素，根据命题 18.1，它们对应于 ψ。利用这组元素，我们得到图 X 的边和半路径的权，具体如上一段所示。现在我们假设 ψ 是一个势导子，即 ψ 是一个内加法导子（命题 18.2），而 ψ 由环 L 中的中心元素 $v = (v_x)$ 定义。在这种情况下，对于任意两个元素 x、$y \in X$，从 x 到 y 的任意半路径的权都等于 $v_y - v_x$。因此，该权不依赖于具体的半路径。

我们选取图 X 的一棵生成树 T。对于 T 中的每条边 (x, y)，其中 $x < y$，我们赋予一个元素 $c_{xy} \in C(R)$。利用这些元素，我们以类似于上文的方法，为 T 中这些边和半路径定义权 w。如果边 (x, y) 不属于 T，且 $x < y$，那么我们假设 $c_{xy} = w(P)$，其中 P 是 T 中从 x 到 y 的唯一半路径。因此，我们得到一组元素 $\{c_{xy} \in (R) \mid x、\ y \in X、\ x < y\}$，以及 X 中半路径的权。

引理 18.3。上述定义的元素系统 $\{c_{xy} \mid x < y\}$ 满足等式 (2)。因此，根据命题 18.1(1)，它给出一个加法导子。

证明。取任意元素 x、z、$y \in X$，其中 $x < z < y$。令 P_{xz}、P_{zy} 和 P_{xy} 分别为 T 中从 x 到 z、从 z 到 y 以及从 x 到 y 的半路径。根据 T 中半路径的唯一性，我们可以写作 $P_{xy} = P_{xz}\, P_{zy}$。于是得到

$$w(P_{xy}) = w(P_{xz}) + w(P_{zy}), \quad c_{xy} = c_{xz} + c_{zy}.$$

还需提及命题 18.1。 □

在本小节中，双模 M_{xy} 不过就是环 R。利用这一点，我们定义矩阵单位的类似物。设 $x, y \in X$ 和 $x < y$。我们将满足以下条件的函数 e_{xy} 记为 $X \times X \to R$：对于 $s = x, t = y$，有 $e_{xy}(s,t) = 1$；对于其余所有配对 (s,t)，有 $e_{xy}(s,t) = 0$。函数 e_{xy} 具有如下性质：对于 $x < z < y$，有 $e_{xz}e_{zy} = e_{xy}$。

回想一下，我们已经固定了图 X 的某棵生成树 T。令 Ψ_1 为满足以下条件的加法导子所构成的子模：对于 T 的所有满足 $x < y$ 的边 (x,y)，这些导子都会消去元素 e_{xy}。或者，等价地，对于指定的边 (x,y)，$c_{xy} = 0$。这意味着 $\{c_{xy} \in C(R) \mid x < y\}$ 是命题 18.1 中的一组元素，对应于来自 Ψ_1 的某个导子。

定理 18.4. 子模 Ψ_0 是 Ψ 的一个直和项。也就是说，存在一个模直和分解 $\Psi = \Psi_1 \oplus \Psi_0$。

证明. 取任意导子 $\psi \in \Psi$。令 $\{c_{xy} \in C(R) \mid x < y\}$ 为对应于 ψ 的元素组（见命题 18.1）。对于 X 中的每个顶点，我们定义 R 的某个中心元。

在树 T 中，我们固定一个根 x_0。设 y 是 T 中与顶点 x_0 相邻的某个顶点。若 $x_0 < y$，则令 $v_{x_0} = 0$ 和 $v_y = v_{x_0} + c_{x_0y}$。对于 $x_0 > y$，令 $v_y = v_{x_0} - c_{yx_0}$。接下来，我们选择一个与 y 相邻的顶点 $z \in T$。令

$$v_z = v_y + c_{yz} \text{ for } y < z \text{ and } v_z = v_y - c_{zy} \text{ for } y > z.$$

我们以这种方式继续，直到在 T 中到达某个悬挂顶点并停止。特别地，我们得到 T 中一条从 x_0 到该悬挂顶点的半路径。假设 T 中还有一些顶点未包含在这条半路径中。设 s 是半路径中度大于二的第一个顶点。在这种情况下，从 s 的顶部开始，以类似的方式构造另一条半路径。我们继续这一过程，直到每个 T 中的顶点 x（因此也包括 X 中的顶点）都被映射到一个元素 $v_x \in C(R)$。

我们构造 L 的中心元 $v = (v_x)$。令 ψ_0 为由元素 v 在代数 K 中诱导的内导子。那么 $\psi_0 \in \Psi_0$。我们令 $\psi_1 = \psi - \psi_0$。若 $(x,y) \in T$ 且 $x < y$，则 $\psi(e_{xy}) = c_{xy}e_{xy}$ 且 $\psi_0(e_{xy}) = (v_y - v_x)e_{xy}$。由元素 v_x 的构造过程可知 $c_{xy} = v_y - v_x$。我们得到，导子 ψ 和 ψ_0 在元素 e_{xy} 上的取值相同，其中 $(x,y) \in T$。因此，我们得到 $\psi_1 \in \Psi_1$。我们得到

$$\psi = \psi_1 + \psi_0, \quad \psi_1 \in \Psi_1, \quad \psi_0 \in \Psi_0.$$

仍需验证 $\Psi_1 \cap \Psi_0 = 0$。设 $\xi \in \Psi_1 \cap \Psi_0$。那么，对于每条边 $(x,y) \in T$，都有 $\xi(e_{xy}) = 0$，其中 $x < y$。由于 ξ 是一个内导子，ξ 是

由环 L 的某个中心元 v =(v_x) 定义的。我们有关系式$0 = \xi(e_{xy}) = (v_y - v_x)e_{xy}$。因此，$v_x = v_y$。若边 (x, y) 不包含在 T 中，则利用 T 中从 x 到 y 的半路径，可得$v_x = v_y$。因此，$\xi = 0$。□

记号 $m(X)$ 和 $\lambda(X)$ 已在推论 10.6 之前给出。

推论 18.5。势导子 Ψ_0 的模同构于 $m(X) - \lambda(X)$ 个模 $C(R)$ 的直和。

证明。令 $G = \bigoplus C(R)$。取任意导子$_{m(X)-\lambda(X)}$

$\psi \in \Psi$。根据命题 18.1，设 $\{c_{xy} \mid x < y\}$ 为与导子 ψ对应的元素系。定义群同态g: $\Psi \to G$，令

$$g(\psi) = (c_{xy}), \quad \text{where } (x, y) \in T,\ x < y.$$

引理 18.3 保证同态 g 是满射。此外，我们有 Ker $g = \Psi_1$。因此，$\Psi/\Psi_1 \cong G$，而定理 18.4 蕴含同构 $\Psi/\Psi_1 \cong \Psi_0$。于是，$\Psi_0 \cong G$。□

推论 18.6. 模 Ψ 和 Ψ_0 相同，当且仅当对于任意满足 $\psi(e_{xy}) = 0$ 的 $\psi \in \Psi$，对每条边 $(x, y) \in T$，都有 $\psi = 0$。

推论 18.7 [20]. 加法导子 ψ 是内导子，当且仅当对于任意元素 $x, y \in X$，从 x 到 y 的任意两条半路径的权相等。

证明。设加法内导子 ψ 由元素$v = (v_x)$定义。那么，从 x 到 y 的每条半路径的权都等于 $v_y - v_x$（参见引理 18.3 之前的正文）。

现在我们假设导子 ψ满足半路径权的条件。根据定理 18.4，我们写下 $\psi = \psi_1 + \psi_0$，其中 $\psi_1 \in \Psi_1, \psi_0 \in \Psi_0$。对于 T中的每条边 (x, y)，都有 $\psi(e_{xy}) = \psi_0(e_{xy})$。如果 (x, y) 是一条不包含在 T 中的边，那么 $\psi(e_{xy}) = c_{xy}e_{xy}$ 且 $w(x, y) = c_{xy}$。另一方面，$w(P) = v_y - v_x$，其中 P是 T中从 x 到y的一条半路径，而元素 v =(v_x) 定义了一个内导子 ψ_0。因此，$c_{xy} = v_y - v_x$。于是，ψ 和 ψ_0 在所有元素 e_{xy}上的取值相同。因此，$\psi = \psi_0$。□

固定一个加法导子 ψ。设 C 是图 X 的一个简单回路。我们可以将其权 $w(C)$（相对于 ψ）定义为从该圈上任意顶点到它的半路径的权。改变圈的遍历方向时，权的符号也会改变。也就是说，整个圈在相差一个乘数 ± 1 的意义下确定。

设 $C_1, \ldots, C_k$ 是与图 X 的给定生成树 T 相关联的基本圈系（已知 $k = \lambda(X)$）。以下结果阐明了 [20, 推论 3.10]。

推论 18.8。 加法导子 ψ 是内导子，当且仅当 $w(C_1) = \ldots = w(C_k) = 0$。

证明。 该条件的必要性可由推论 18.7 的证明的第一段得出。

我们假设 $w(C_1) = \ldots = w(C_k) = 0$。令 $\psi \in \Psi$。与推论 18.7 的证明相同，令 $\psi = \psi_1 + \psi_0$。我们任取一条边 (x, y)，$x < y$，它不包含在 T 中。它属于某个圈 C_i（且只属于 C_i）。令 P 为圈 C_i 中从 x 到 y 的一条半路径。我们有关系式

$$0 = w(C_i) = w(P) - w(x, y), \quad w(x, y) = w(P).$$

类似于推论 18.7 的证明，我们得到 $c_{xy} = v_y - v_x$ 和 $\psi = \psi_0$。 □

在本小节末尾，我们将简要讨论加法导子或势导子。在 [45] 中，它们作为关联环的一种函数方法的一部分被引入。如果对于所有满足 $x < z < y$ 的 x、z、y，以及对于所有 x、y，其中 $x < y$，函数 $\sigma\colon X \times X \to R$ 满足 $\sigma(x, y) = \sigma(x, z) + \sigma(z, y)$，且 $\sigma(x, y) \in C(R)$，则称该函数为加法函数。

若 σ 是某个加法函数，则映射

$$d_\sigma\colon K \to K, \quad d_\sigma(f) = \sigma * f,\ f \in K,$$

是代数 K 的一个加法导子（$*$ 是 Hadamard 乘积，K 是 $I(X, R)$，与前文相同）。反过来，每个加法导子都可以根据某个加法函数 σ 得到。

现在设 $q\colon X \to C(R)$ 是一个任意映射。我们定义一个函数 τ_q，它属于 $I(X, R)$，定义如下：

$$\tau_q(x, y) = \begin{cases} q(y) - q(x) \ \text{ for } \ x \le y, \\ 0 \ \text{ for } \ x \not\le y. \end{cases}$$

函数 τ_q 具有加性；称为“势函数”。此外，加法导子 d_{τ_q} 是势导子。任何势导子都可以通过这种方式获得。

19 模 Ψ和 Ψ/Ψ_0的计算

我们继续研究代数 $I(X,R)$ 的加法导子，这项研究始于上一节。我们假设 X 是一个有限连通偏序集。

推论 18.5 断言，模 Ψ_0 （即加法内导子）存在同构 $\Psi_0 \cong \bigoplus C(R)_{m(X)-\lambda(X)}$。本节中，当中心$C(R)$是一个域时，我们得到求出所有加法导子空间 Ψ 以及加法外导子空间 Ψ/Ψ_0 维数的简明公式。回顾一下， $m(X)$（或简称 m）是图 X的边数，而$\lambda(X)$是其圈秩。

设 X 的边为 $e_1,\ldots,e_m$，所有长度为 3 的圈（即三角形）为 $\Delta_1,\ldots,\Delta_s$。因此，我们对边和三角形作某种编号。

现在我们构造一个 $s\times m$ 圈矩阵 $P=(p_{ij})$。它的构造与众所周知的圈矩阵相似，不同之处在于我们以某种方式考虑边的定向。矩阵 P的列对应于边 $e_1,\ldots,e_m$，行对应于三角形 $\Delta_1,\ldots,\Delta_s$。

取一个三角形 Δ_t。于是，必然可以将其顶点记为 x、z、y，使得 $x<z<y$。令 $(x,y)=e_i$、$(x,z)=e_j$ 和 $(z,y)=e_k$。我们假设 $p_{ti}=1$，$p_{tj}=p_{tk}=-1$。在整数 t 所对应行的其余位置填入 0。我们将所得矩阵 $P=(p_{ij})$称为集合（或图） X的三角形圈矩阵。

由命题 18.1 可知，要得到 ψ 的一个特定加法导子，必须有一组元素 $\{c_{xy}\in C(R)\mid x<y\}$，使得$c_{xy}=c_{xz}+c_{zy}$ 只要 $x<z<y$。因此，这些元素 c_{xy} 是关于 $C(R)$ 的一组 s 线性齐次方程的解，其矩阵为 P。反过来，该方程组的任意一个解都给出元素 c_{xy} 及相应的加法导子。令 y_1、.....、y_m 为一些变量，并令$Y=(y_1,\ldots,y_m)^t$。我们将上述方程组写成矩阵方程 $PY=0.$ (1)

推论 19.1. 加法导子构成的模 Ψ 同构于 $\oplus_m C(R)$ 中由矩阵方程 $PY=0$的所有解构成的子模。

接下来，我们假设 $C(R)$ 的中心是一个域（例如，

如果 R 是一个域）。我们用 F 表示这个域。设 $r(P)$ 为矩阵 P 的秩。它可以称为图 X 的三角秩。它不依赖于边和三角形的编号选择，也就是说，它是图 X 的一个不变量。

我们写出本小节的主要结果。

定理 19.2. 设 X 是一个有限连通偏序集，且 $C(R)$ 是一个域。对于代数 $I(X, R)$，以下断言成立。

1. 以下空间维数关系成立。

$\dim {}_F\Psi = m(X) - r(P)$，$\dim {}_F\Psi_0 = m(X) - \lambda(X)$（推论 18.5），以及 $\dim {}_F\Psi/\Psi_0 = \lambda(X) - r(P)$。

2. 每个加法导子都是内导子，当且仅当 $r(P) = \lambda(X)$。

本小节中的简要讨论可以通过引入某个向量空间加以阐明和补充。我们仅作一点评述。

设 F 是一个域，设 V 是一个以边 e_1、...、e_m 为基的向量空间。通常取 $\mathbb{Z}_2$ 为 F。在这种情况下，X 中的所有欧拉子图在 V 中构成一个维数为 $\lambda(X)$ 的子空间。$C(X)$ 的这个子空间称为圈空间。每个基本圈系都是空间 $C(X)$ 的基。然而，在我们的情形下，域 $\mathbb{Z}_2$ 显然并不合适。例如，可以取域 $\mathbb{Z}_3$。或者，如果 $C(R)$ 是一个特征不等于 2 的域，则可以令 $F = C(R)$。

注记。 在 [32], 中，有限关联代数的外导子李代数通过某个上同调群得到了描述。论文 [28] 的内容基本上从其标题即可明了。对于 [24] 也可以这样说。

参考文献

[1] Abrams, G.; Haefner, J.; del R'io, A. 关联环的同构问题 // 《太平洋数学杂志》– 1999年。– 第187卷，第2期。– 第201–214页。[2] Abrams, G.; Haefner, J.; del R'io, A. «关联环的同构问题»的更正与补遗 // 《太平洋数学杂志》– 2002 年。– 第 207 卷，第 2 期。– 第 497–506 页。[3] ´Anh, P. N.; van Wyk, L. 广义三角矩阵环的自同构群 // 《线性代数及其应用》– 2011年。– 第434卷。– 第1018–1026页。

[4] ´Anh, P. N.; van Wyk, L. 强三角矩阵环之间的同构 // 《线性代数及其应用》– 2013年。– 第438卷。– 第4374–4381页。[5] Azumaya, G. 关于极大中心代数 // Nagoya Math. J. – 1951年。– 第2卷。– 第119–150页。[6] Birkenmeier, G. F.; Heatherly, H. E.; Kim, J. Y.; Park, J. K. 三角矩阵表示 // 《代数杂志》– 2000年。– 第230卷。– 第558–595页。[7] Brusamarello, R.; Fornaroli, *É*. Z.; Santulo, E. A. jun. 关联代数上的对合分类 // Comm. Algebra. – 2011年。– 第39卷，第6期。– 第1941–1955页。[8]Brusamarello, R.; Fornaroli, *É*. Z.; Santulo, E. A. jun. （有限）关联代数上的反自同构与对合 // Linear and Multilinear Algebra. – 2012年。– 第60卷，第2期。– 第181–188页。[9] Brusamarello, R.; Fornaroli, *É*. Z.; Santulo, E. A. jun. 有限关联代数上的对合分类 // Int. J. Algebra Comput. – 2014年。– 第24卷，第8期。第1085–1098页。[10] Brusamarello, R.; Fornaroli, *É*. Z.; Santulo, E. A. jun. 关联代数的乘法自同构 // Comm. Algebra. – 2015年。– 第43卷，第2期。– 第726–736页。[11] Brusamarello, R.; Fornaroli, *É*. Z.; Khrypchenko, M. 有限关联代数的 Jordan 同构 // Linear Multilinear Algebra. – 2018年。– 第6卷，第3期。– 第565–579页。[12] Brusamarello, R.; Lewis, D. W. 关联代数上的自同构与对合 // Linear and Multilinear Algebra. – 2011年。– 第59卷，第11期。– 第1247–1267页。[13] Coelho, S. P. 某些结构矩阵环的自同构群 // Comm. Algebra. – 1994年。– 第22卷。– 第5567–5586页。[14] D*ă*sc*ă*lescu, S.; van Wyk, L. 同构的结构矩阵环是否具有同构的图？ // Proc. Amer. Math. Soc. – 1996 年。– 第 124 卷，第 5 期。– 第 1385–1391页。[15] Di Vincenzo, O. M.; Koshlukov, P.; La Scala, R. 上三角矩阵代数的对合 // Adv. Appl. Math. – 2006年。– 第37卷，第4期。第541–568页。

[16] Drozd, Y.; Kolesnik, P. 关联代数的自同构// 《交换代数》. – 2007. – 第35卷，第12期. – 第3851–3854页.[17]Faith, C. 代数：环、模与范畴，Springer-Verlag，柏林，1973年.[18] Fornaroli，$\acute{E}$. Z. 斜关联环与同构问题 // 《代数论文集》. – 2022. – 第29卷，第3期. – 第419–426页.[19] Fornaroli，$\acute{E}$. Z.; Khrypchenko, M.; Santulo, E. A. 小. 关联代数的真李自同构 // 《格拉斯哥数学杂志》. – 2022. – 第64卷，第3期. – 第702–715页.[20] Fornaroli，$\acute{E}$. Z.; Pezzott, R. E. M. 关联代数的加法导子 // 《交换代数》. – 2021年. – 第49卷，第4期. – 第1816–1828页.[21] Fornaroli，$\acute{E}$. Z.; Pezzott, R. E. M. 有限关联代数上关联空间理想化的反同构与对合 // 《线性代数及其应用》. – 2022. – 第637卷. – 第82–109页.[22] For naroli，$\acute{E}$. Z.; Pezzott, R. E. M. 非连通偏序集的有- 限关联代数上的对合分类 // arXiv:2209.09690.[23] Froelich, J. 关联环的同构问题 // 《伊利诺伊数学杂志》. – 1985. – 第29卷，第1期. – 第142–152页.[24] Ghahramani, H.; Ghosseiri, M. N.; Rezali, T. 三角形矩阵上的反- 导子 // 《线性代数及其应用》 // 《Khayyam数学杂志》. – 2023. – 第9卷，第3期. 第30–37页.[25] Isaacs, I. M. 交换环上的矩阵代数自同构 // 《线性代数及其应用》. – 1980年. – 第31卷. – 第215–231页.[26] J¨ondrup, S. 某些矩阵代数子代数的自同构群 // 《代数杂志》. – 1991. – 第141卷，第1期. – 第106–114页.[27] J¨ondrup, S. 上三角矩阵环的自同构与导子 // 《线性代数及其应用》. – 1995. – 第221卷. – 第205–218页.[28] Kaygorodov, I.; Khrypchenko, M.; Wei, F. 有限- 关联代数的高阶导子 // 《代数表示论》. – 2019. – 第 22 卷 . – 第 1331–1341 页 .[29] T. P. Kezlan. 交换环上三角形矩阵的代数自同构注记 // 《线性代数及其应用》. – 1990. – 第135卷. – 第181– 184页。

[30] Khrypchenko, M. 有限关联环的自同构 // 《代数与离散数学》. – 2010年. – 第9卷, 第2期. – 第78–97页.[31] Khrypchenko, M. 拟序集的有限关联代数 // 《数学研究》. – 2010年. – 第34卷, 第1期. – 第30–37页.[32] Khrypchenko, M. 有限关联环的导子 // 《通讯代数》. – 2012年. – 第40卷, 第 7 期 . – 第 2503–2522 页 .[33] Khrypchenko, M. 偏旗关联代数的同构与导子 // 《国际代数与计算杂志》. – 2022年. – 第32卷, 第1期. – 第193–209页.[34] Khrypchenko, M.; Novikov B. V. 有限关联代数 // 《通讯代数》. – 2009 年 . – 第 37 卷 , 第 5 期 . – 第 1670–1676 页 .[35] Krylov, P. A.; Norbosambuev, T. D.. 形式矩阵代数的自同构 // 《西伯利亚数学杂志》. – 2018 年 . – 第 59 卷 , 第 5 期 . – 第 1116–1127 页 .[36]Krylov, Piotr; Tuganbaev, Askar. 形式矩阵, Springer-Verlag, 柏林, 2017年.[37] Krylov, P. A.; Tuganbaev, A. A. 形式矩阵环的自同构群 // 《数学科学杂志》(Springer) – 2021年. – 第258卷, 第2期. – 第222–249页.[38]Krylov, Piotr; Tuganbaev, Askar. 形式矩阵环的自同构 // arXiv:2204.13332v4, 2022年.[39] Leroux, P. M¨obius范畴的关联代数的同构问题 // 《伊利诺伊数学杂志》. – 1982年. – 第26卷, 第1期. – 第52–61页.[40] Li, Y.-B.; Wei, F. 广义矩阵代数的半中心化映射 // 《线性代数及其应用》. – 2012年. – 第436卷. – 第1122–1153页.[41] Li, Y.-B.; Wei, F.; Fosner, A. 广义矩阵代数的 k-交换映射 // 《匈牙利数学期刊》. – 2019年. – 第79卷. – 第50–77页.[42] Rota, G.-C. 组合理论基础论 I. M¨obius函数理论 // 《概率论及相关领域杂志》. – 1964年. – 第2卷. – 第340–368页.[43] Smith, K. C.; van Wyk, L. 结构矩阵环的内在刻画 // 《通讯代数》. – 1994年. – 第22卷, 第14期. – 第5999–5622页.

[44] Spiegel, E. 关联代数的自同构 // 《代数杂志》。– 2001年。– 第239卷。– 第 615–623 页。[45] Spiegel, E.; O'Donnell C. J. 关联代数。– 纽约。– Marcel Dekker。– 1997年。[46] Tapkin, D. T. 形式矩阵关联环的同构 // 《俄罗斯数学》。– 2017年。– 第61卷。– 第73–79页。[47] Tapkin, D. T. 形式矩阵环与零迹理想的同构 // 《西伯利亚数学杂志》。– 2018年。– 第59卷，第3期。– 第523–535页。[48] Voss, E. R. 关联环的同构问题 // 《伊利诺伊数学杂志》。– 1980年。– 第24卷，第4期。– 第624–638页。[49] Wakefield, M. 偏旗关联代数 // arXiv:1605.01685，2016年。[50] Xiao, Z. 关联代数的约当导子 // 《落基山数学杂志》。– 2015年。– 第45卷，第4期。– 第1357–1368页。[51] Xiao, Z.; Wei, F. 广义矩阵代数上的交换迹与李同构 // 《算子与矩阵》。– 2014年。– 第8卷，第3期。– 第821–847页。[52] Yang, Y.; Wei, F. 有限关联代数的非线性李型导子及相关主题 // arXiv:2105.10685，2021年。