arXiv:2305.02989v1 [math.NT] 4 May 2023

狄利克雷贝塔函数值的强 q-类比

ANKUSH GOSWAMI、TIMOTHY HUBER

摘要。本文构造了一类无穷多个模形式之间的关系，将狄利克雷贝塔函数在奇正整数处的取值推广开来。本研究受到《拉马努金笔记》中出现的一个基例，以及针对黎曼 ζ 函数的一种平行构造的启发。通过将这些恒等式化归为经典贝塔函数取值（ $q \to 1^-$ ）以及 $|q| < 1$ 在复乘点处的显式取值，证明它们是强 q-类比。Deligne 不等式给出了相关模形式的傅里叶系数的渐近公式。

1. 引言

对于 $|q| < 1$，定义 $(a;\ q)_\infty = \hat{\mathrm{I}}_{n=0}^{\infty}(1 - aq^n)$。两个恒等式 [23]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k(1+q^{2k+1})}{(1-q^{2k+1})^2} = \frac{(q^2;q^2)_\infty^4}{(q;q^2)_\infty^4}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k(1+q^{2k+1})}{(1-q^{2k+1})^2} = \frac{(q^2;q^2)_\infty^4}{(q;q^2)_\infty^4}. \tag{1.1}$$

推广欧拉在 $k = 1,2$ 情形下对

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}B_{2k}2^{2k}}{2(2k)!}\pi^{2k}, \qquad \frac{z}{e^z-1} := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n z^n}{n!}, \tag{1.2}$$

其中 $\zeta(s) = \acute{\mathrm{I}}_{n\geq 1} 1/n^s$，$\mathrm{Re}(s) > 1$ 是黎曼 ζ 函数。分别将恒等式 (1.1) 乘以一个有限因子后，当 $q \to 1$ 时，它们趋于对 $\zeta(2)$ 和 $\zeta(4)$ 的求值。第一作者 [12] 运用模形式理论，确定了推广 (1.2) 每种情形的显式 q-展开。Ono 和 Dawsey [7] 运用复乘理论（CM）获得了 Goswami和Sun 的级数关于 $|q| < 1$的进一步特化。他们在单位圆其他点处的求值，则用复乘点处 Γ-值的代数倍表示。

黎曼 ζ 函数与狄利克雷贝塔函数密切相关，后者定义为

$$\beta(s) = \sum_{n\geq 1}\frac{\chi_{-4}(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0, \quad \chi_{-4} = \left(\frac{-4}{\cdot}\right). \tag{1.3}$$

$\zeta(s)$ 和 $\beta(s)$ 分别都可以亚纯延拓和解析延拓至复数域，并且它们的欧拉乘积意味着，对其中任一个函数而言，黎曼猜想彼此等价。在[18, 26], 中， q-模拟的 $\zeta(s)$ 值的算术和丢番图性质得到了研究。本文建立了模形式之间的恒等式，从而推广了 $\beta(s)$ 的奇数阶求值

$$\beta(2k+1) = \frac{(-1)^k E_{2k}}{4^{k+1}(2k)!}\pi^{2k+1}, \qquad \frac{2}{e^z+e^{-z}} := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n z^n}{n!}. \tag{1.4}$$

我们证明，所得的这类无穷恒等式也可以在复乘点处求值，从而获得涉及 Γ-值的更多计算信息。(1.4) 的前三个推广

are

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{q^n}{1-q^{2n+1}}=\frac{(q^4;q^4)_\infty^2}{(q^2;q^4)_\infty^2},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{2n}(1+q^{2n+1})}{(1-q^{2n+1})^3}=\frac{(q^2;q^4)_\infty^2(q^4;q^4)_\infty^6}{(q;q^2)_\infty^4}, \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{-4}(n)q^{2n}\left(1+57q^{2n}+302q^{4n}+302q^{6n}+57q^{8n}+q^{10n}\right)}{\left(1-q^{2n}\right)^7}+\frac{17q^4\left(q^8;q^8\right)_\infty^4\left(q^4;q^4\right)_\infty^{22}}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{12}}\\ &=61\cdot\frac{q^4\left(q^4;q^4\right)_\infty^{22}\left(q^8;q^8\right)_\infty^4}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{12}}+\frac{q^2\left(q^4;q^4\right)_\infty^{46}}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{20}\left(q^8;q^8\right)_\infty^{12}}+16\cdot\frac{q^6\left(q^8;q^8\right)_\infty^{20}}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^4\left(q^4;q^4\right)_\infty^2}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

恒等式 (1.5) 分别归功于拉马努金 [2, 例 (iv)，第 139] 页，以及 Hou-Sun [14], ，并可化为 $\beta(1)=\pi/4$ 和 $\beta(3)=\pi^3/32$。在 [15] 中得到了另一个推广 $\beta(1)=\pi/4$ 的恒等式。公式 (1.6) 对应于 $\beta(5)=5\pi^5/1536$，是本文所推导的这类恒等式的代表。

这里所考虑的广义恒等式的无限类比 (1.4) 具有远超 L 函数特化的意义，因为它们在更大的定义域内均成立。由于这些广义形式涉及单位圆盘内的参数 q，因此，通过将级数限制在适当的取值上，可以得到以各种 Γ 值表示的级数求值结果。Ono 和 Dawsey 将这类恒等式称为贝塔函数求值的强 q 类比，因为它们不仅能够得到对应于 $|q|<1$ 的复乘点的求值结果，还能得到当 $q\to1^-$ 时的极限值。这类 q 类比在数学物理中尤为突出，它们通过参数 q 推广经典公式，并在 $q\to1^-$ [24] 的极限下恢复原始公式。

这里推导的 q-展开是通过将相关的 Lambert 级数表示为艾森斯坦级数，以及戴德金 η 函数 $\eta(\tau)=q^{1/24}(q;q)_\infty$,$q=e^{2\pi i\tau}$ 的尖点商构造而成。我们假设读者熟悉 [9, 16, 21] 中涉及的模函数与模形式理论的基本知识。为陈述主要结果，定义

$$\Gamma_0(N):=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}):c\equiv0\pmod N\right\}.$$

分别以 $M_k(N,\chi)$ 和 $S_k(N,\chi)$ 表示权为 k、定义在 $\Gamma_0(N)$ 上的模形式与尖点形式的 $\mathbb{C}$-维向量空间，并以 $E_k(N,\chi)$ 表示艾森斯坦级数空间。η 商理论 [21] （参见定理 2.1）可用于证明

$$f_k(\tau):=\frac{\eta(4\tau)^{8k-2}\eta(8\tau)^4}{\eta(2\tau)^{4k}}\in M_{2k+1}(8,\chi_{-4}),\quad k\in\mathbb{Z}_{\geq0}, \tag{1.7}$$

其中 χ_{-4} 的定义同（1.3）。我们将由模分别为 L 和 R 的狄利克雷特征 χ 和 ψ 定义的艾森斯坦级数记为

$$M_{k,\chi,\psi}(\tau):=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\chi(m)\psi(n)}{(m\tau+n)^k},\quad \tau\in\mathbb{H},$$

其中，Σ' 表示对除 (0,0) 之外的所有整数对求和。令 ψ^0 为与 ψ 相关联的本原特征，并令 $W(\psi^0)$ 表示特征 ψ^0 的高斯和，其定义为

$$W(\psi^0)=\sum_{a=0}^{r_\psi-1}\psi^0(a)e^{2\pi ia/M}\quad\text{and}\quad\mathcal{A}_k=\frac{2(-2\pi i)^kW(\psi^0)}{R^k(k-1)!}, \tag{1.8}$$

其中，r_ψ 是 ψ 的导子。我们将使用 $M_{k,\chi,\psi}(\tau)$ [20]，在 $\chi(-1)\psi(-1) = (-1)^k$ 的情形下的傅里叶级数展开式，该展开式为

$$M_{k,\chi,\psi}(\tau) = c_k + \mathcal{A}_k \sum_{n\geq 1} a(n) q^{n/R}, \quad \text{where} \quad c_k = \begin{cases} 2L(k,\psi), & \chi: \text{ principal}, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{1.9}$$

and

$$a(n) = \sum_{d|n} \chi(n/d) d^{k-1} \sum_{c|(\ell,d)} c\mu(\ell/c)\psi^0(\ell/c)\overline{\psi^0}(d/c),$$

其中 $l = R/r_\psi$，而 μ 表示 Möbius 函数。我们将采用傅里叶展开的一个规范化版本

$$\mathscr{E}_{k,\chi,\psi}(\tau) = \frac{c_k}{\mathcal{A}_k} + \sum_{n\geq 1} a(n) q^{n/R}. \tag{1.10}$$

使用上述记号，我们的主要结果可表述为以下定理 .

定理 1.1. 由 (1.4) 定义 E_k。对于 $k \geq 1$，有

$$f_k(\tau) - H_k(\tau) \in S_{2k+1}(8, \chi_{-4}),$$

其中

$$H_k(\tau) := \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2k}E_{2k}} \cdot \left(2^{2k} \cdot \mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},1}(2\tau) - \mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},\chi_2}(2\tau)\right), & k \equiv 0 \pmod 2, \\ -\dfrac{1}{E_{2k}} \cdot \mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},1}(2\tau), & k \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

定理 1.2. 设 f_k 如定理 1.1 中所定义。将欧拉多项式 A_k 记为

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \frac{z^n}{n!} := \frac{x-1}{x - e^{(x-1)z}}.$$

那么，对于 $k \geq 1$,

$$f_k(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2k} \cdot E_{2k}} \displaystyle\sum_{n\geq 1} \chi_{-4}(n) \frac{q^n P_k(q^n)}{(1-q^{2n})^{2k+1}}, & k \equiv 0 \pmod 2, \\ -\dfrac{1}{E_{2k}} \displaystyle\sum_{n\geq 1} \chi_{-4}(n) \frac{q^{2n} A_{2k}(q^{2n})}{(1-q^{2n})^{2k+1}}, & k \equiv 1 \pmod 2, \end{cases} + T_{2k+1}(\tau) \tag{1.11}$$

其中 $T_{2k+1}(\tau) \in S_{2k+1}(8, \chi_{-4})$ 以及 $P_k(t) \in \mathbb{Z}[t]$ 的次数为 $4k$，定义为

$$P_k(t) := (1+t)^{2k+1} \cdot A_{2k}(t) - 2^{2k} \cdot t \cdot A_{2k}(t^2).$$

若将(1.11) 两边分别乘以$(1-q)^{2k+1}$ 和 $q \to 1^-$，则(1.11) 特化为(1.4)。

定理 1.1 为 η 商 f_k 给出了一个标准分解，将其分解为艾森斯坦级数和作为尖点形式的 η 商。定理 1.2 将定理 1.1 的展开式改写为 q类比，即奇正整数处贝塔函数取值的类比。定理 1.2 中的尖点部分$T_k(\tau)$ 可以根据生成一个基的 η 商显式计算

$$F(\tau) := \frac{\eta(4\tau)^8}{\eta(2\tau)^4}, \quad \theta(\tau) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \frac{\eta(2\tau)^5}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2}, \quad F_2(\tau) = F(2\tau), \quad \theta_2(\tau) = \theta(2\tau).$$

定理 1.3. 该集合

$$\left\{F^\ell\theta_2^{4(k-\ell)+2} : 0 \le \ell \le k-1\right\} \bigcup \left\{F^{2k-\ell}F_2^{\ell-k}\theta_2^2 : k \le \ell \le 2k\right\} \bigcup \left\{\frac{FF_2^k}{\theta_2^2}\right\}$$

构成 $M_{2k+1}(8,\chi_{-4})$ 的一组基。也就是说，每个 $g \in M_{2k+1}(8,\chi_{-4})$ 都可以唯一地写成

$$g(\tau) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \alpha_k(\ell)\cdot F(\tau)^\ell\theta(2\tau)^{4(k-\ell)+2} + \sum_{\ell=k}^{2k}\beta_k(\ell)\cdot F(\tau)^{2k-\ell}F(2\tau)^{\ell-k}\theta(2\tau)^2 + \gamma_k\cdot\frac{F(\tau)F(2\tau)^k}{\theta(2\tau)^2},$$

其中 $\alpha_k(r)$、$\beta_k(s) \in \mathbb{C}$满足 $0 \le r \le k-1$、$k \le s \le 2k$。此外，如果 $g(\tau)$ 是一个尖点形式，那么上述线性组合中的系数满足

$$(1)\quad \alpha_k(0) = 0 = \gamma_k, \qquad (2)\quad \sum_{\ell=0}^{k-1}\frac{\alpha_k(\ell)}{4^\ell} + \sum_{\ell=k}^{2k}\frac{\beta_k(\ell)}{4^\ell} + \frac{\gamma_k}{2^{4k+3}} = 0,$$

$$(3)\quad \sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^\ell\frac{\alpha_k(\ell)}{4^\ell} + \sum_{\ell=k}^{2k}(-1)^\ell\frac{\beta_k(\ell)}{4^\ell} - \frac{\gamma_k}{2^{4k+2}} = 0.$$

这些结果给出了左侧 (1.11) 中的 Lambert 级数在复乘点处的取值。

定理 1.4。令 H_k 如定理 1.1 中所定义。对于 $r \in \mathbb{N}$，考虑复乘点 $\tau_r := 2^r i$。则有

$$H_k(\tau_r) = \frac{a^{4k+2}}{2^{(2k+1)(r+3)}}\cdot\left(\frac{e^{-2^{r+1}(k+1)\pi}}{4^{k+1}} + \sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{\alpha_k(\ell)}{4^\ell}\cdot e^{M(\ell,r)} + \sum_{\ell=k}^{2k}\frac{\beta_k(\ell)}{4^\ell}\cdot e^{M(\ell,r)}\right)\cdot e^{J(k,r)},$$

其中

$$J(k,r) := \frac{\pi(2k+1)}{3} - \frac{2k+1}{\pi}\sum_{m=1}^{r+1}2^m L_m - \frac{2^{r+2}(4k+1)}{\pi}L_{r+2} - \frac{2^{r+4}}{\pi}L_{r+3},$$

$$M(\ell,r) := -\frac{\ell\cdot 2^{r+1}}{\pi}\sum_{m=1}^{r+1}2^m L_m - \frac{2^{r+3}(k-\ell+1)}{\pi}L_{r+2} + \frac{2^{r+5}(k-\ell+1)}{\pi}L_{r+3},$$

并且 L_ℓ 由收敛双重级数定义

$$L_\ell := \sum_{m,n\ge 1}\frac{(-1)^m}{n^2+2^\ell m^2}.$$

特别是，

$$(1.12)\quad \sum_{m,n\ge1}\frac{(-1)^m}{n^2+2^\ell m^2} = \begin{cases} -\dfrac{\pi^2}{24} - \dfrac{\pi\cdot\log 2}{8}, & \ell = 1,\\ -\dfrac{7\pi^2}{96} - \dfrac{\pi\cdot\log 2}{32} - \dfrac{\pi\cdot\log(\sqrt{2}-1)}{8}, & \ell = 2,\\ -\dfrac{31\pi^2}{384} - \dfrac{5\pi\log 2}{128} + \dfrac{\pi\cdot\log(\sqrt{2}-1)}{32} - \dfrac{\pi\cdot\log(1-2^{-1/4})}{8}, & \ell = 3. \end{cases}$$

在第 2 节中，通过求取相关模形式在尖点处的值，给出了定理 1.1 的证明。第 3 节致力于证明定理 1.2，并推导出作为 $q \to 1^-$ 的极限值。在第 4 节中，我们构造了所讨论模形式的一个基。这唯一确定了强 q 类比式 (1.4) 中出现的 η 商。第 5 节

讨论复乘求值，并给出了定理 1.4 的证明。第 6 节最后给出了推论 6.1 中系数的渐近公式。

2. 定理 1.1 的证明

我们首先介绍一项基本结果，用于判定本文所研究的某些戴德金 η 函数商的模性 [11, 21]。

定理 2.1（Gordon、Hughes 和 Newman）。设 $f(\tau) = \prod_{\delta|N} \eta(\delta\tau)^{r_\delta}$ 为一个 η 商，其中 $r_\delta \in \mathbb{Z}$ 且 $k = \frac{1}{2}\sum_{\delta|N} r_\delta$。设 $\alpha = r/s$ 为任意一个尖点代表元，满足 r、$s \in \mathbb{N}$ 和 $s \mid N$。若 $f(\tau)$ 满足以下性质：

$$(1)\quad \sum_{\delta|N} \delta r_\delta \equiv 0 \pmod{24}, \qquad (2)\quad \sum_{\delta|N} \frac{N}{\delta} r_\delta \equiv 0 \pmod{24},$$

$$(3)\quad \frac{N}{24} \sum_{\delta|N} \frac{(s,\delta)^2 r_\delta}{(s, N/s)s\delta} \geq 0.$$

那么 $f(\tau)$ 是定义在 $\Gamma_0(N)$ 上的全纯模形式，其 *Nebentypus* 特征为 $\chi = \left(\frac{(-1)^k \prod_{\delta|N} \delta^{r_\delta}}{\cdot}\right)$，并满足

$$(f|_k\gamma)(\tau) = \chi(d) f(\gamma\tau), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N).$$

若 *(3)* 中的不等式为严格不等式，则 $f(\tau)$ 是一个尖点形式。

因此，$f_k(\tau)$ 是定义在 $\Gamma_0(8)$ 上、权为 $2k+1$ 的全纯模形式，其 Nebentypus 特征为 χ_{-4}。由于 $\dim(M_{2k+1}(8, \chi_{-4})) = 2k+2$，且 $\dim(S_{2k+1}(8, \chi_{-4})) = 2k-2$，相应的 Eisenstein 空间维数为 2。令 $H_k(\tau)$ 如定理 1.1 中所示，我们证明

$$f_k(\tau) - H_k(\tau) \in S_{2k+1}(8, \chi_{-4}) \tag{2.1}$$

通过证明 H_k 表示每个展开式中出现的两个艾森斯坦级数的线性组合。通过在由 $\Gamma_0(8)$ 确定的互不等价尖点 $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, i\infty\}$ 处计算 f_k 和 H_k 的值，求得线性组合中的系数。首先，我们计算各尖点处 $f_k(\tau)$ 的值。回顾 $\eta(\tau)$ 的以下变换：

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau), \quad \text{and} \quad \eta\left(\tau + \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{2\pi i}{48}} \frac{\eta(2\tau)^3}{\eta(\tau)\eta(4\tau)}. \tag{2.2}$$

显然，$f_k(i\infty) = 0$。为了计算 f_k 在尖点 0，1/2 和 1/4 处的值，我们考虑矩阵。

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

由（2.2）中的变换可得

$$(f_k|_{2k+1}S)(\tau) = \frac{(-i)^{2k+1}}{2^{6k+4}} \cdot \frac{(q_4;q_4)_\infty^{8k-2}(q_8;q_8)_\infty^4}{(q_2;q_2)_\infty^{4k}}, \tag{2.4}$$

$$(f_k|_{2k+1}\gamma_2)(\tau) = \frac{i}{2^{4k+3}} \cdot \frac{(q^2;q^2)_\infty^{20k-6}(\xi_4 q_2;q_2)_\infty^4}{(q^4;q^4)_\infty^{8k-2}(q;q)_\infty^{8k-2}}, \tag{2.5}$$

$$(f_k|_{2k+1}\gamma_4)(\tau) = -\frac{e^{-\frac{\pi i k}{3}}}{2^{10}} \cdot q^k \frac{(q^4;q^4)_\infty^{8k+10}}{(q^2;q^2)_\infty^{4k+4}(q^8;q^8)_\infty^4}. \tag{2.6}$$

因此，$(f|_{2k+1}S)(i\infty) = (-i^{2k+1})/2^{6k+4}$，$(f|_{2k+1}\gamma_2)(i\infty) = \frac{i}{2^{4k+3}}$，且 $(f|_{2k+1}\gamma_4)(i\infty) = 0$。

接下来，我们计算艾森斯坦级数 $\mathrm{E}_{2k+1,\chi_{-4},1}(2\tau)$ 和 $\mathrm{E}_{2k+1,\chi_{-4},\chi_2}(2\tau)$ 在各个尖点处的取值。这将涉及 Koblitz [16], 中引入的层数为 N 的艾森斯坦级数记号。

$$G_\ell^{(\underline{a},N)}(\tau) := \sum_{\substack{m_1,m_2\in\mathbb{Z}\\ m_1\equiv a_1 \pmod N\\ m_2\equiv a_2 \pmod N}}{}' \frac{1}{(m_1\tau+m_2)^\ell} \tag{2.7}$$

对于 l，$N\in\mathbb{N}$ 和 $\underline{a} = (a_1, a_2)$，其中该元组模 N 取约化代表。对于 $\gamma\in SL_2(\mathbb{Z})$，我们有 $G^{(\underline{a},N)}l(\tau)$ 的以下关键性质，该性质允许对艾森斯坦级数重新居中，并计算其在一个尖点处的值：

$$(G_\ell^{(\underline{a},N)}|_\ell\gamma)(\tau) = G_\ell^{(\underline{a}\gamma,N)}(\tau). \tag{2.8}$$

我们将需要以下关联 [20]，即形式为 (1.9) 的艾森斯坦级数与由 (2.7) 定义的级别为 N 的 Koblitz 艾森斯坦级数之间的关联。

引理 2.2. 假设采用上述记号，设 $L\mid N$ 和 $R\mid N$。此外，设 $u,v\in\mathbb{N}$ 满足 $uL\mid N$，且 $vR\mid N$，则

$$M_{k,\chi,\psi}\left(\frac{u}{v}\tau\right) = v^k \sum_{\substack{0\le a_1,a_2<N\\ u\mid a_1, v\mid a_2}} \chi(a_1/u)\psi(a_2/v)G_k^{(\underline{a},N)}(\tau).$$

等价地，鉴于(1.10)，我们有

$$\mathcal{E}_{k,\chi,\psi}\left(\frac{u}{v}\tau\right) = \frac{v^k}{\mathcal{A}_k} \sum_{\substack{0\le a_1,a_2<N\\ u\mid a_1, v\mid a_2}} \chi(a_1/u)\psi(a_2/v)G_k^{(\underline{a},N)}(\tau).$$

由 (1.10) 可知，艾森斯坦级数 $\mathrm{E}_{2k+1,\chi_{-4},}1(2\tau)$ 和 $\mathrm{E}_{2k+1,\chi_{-4},\chi_2}(2\tau)$ 在 $\tau = i\infty$ 处均为零。由 (2.8) 和引理 2.2 可知，对于 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbb{Z})$,

$$(\mathcal{E}_{k,\chi,\psi}|_{2k+1}\gamma)\left(\frac{u}{v}\tau\right) = \frac{v^{2k+1}}{\mathcal{A}_{2k+1}} \sum_{\substack{0\le a_1,a_2<N\\ u\mid a_1, v\mid a_2}} \chi(a_1/u)\psi(a_2/v)G_{2k+1}^{(\underline{a}\gamma,N)}(\tau). \tag{2.9}$$

然后，利用 (2.9)，我们可以计算 (2.3) 中每个矩阵对应的值：

$$(\mathcal{E}_{k,\chi,\psi}|_{2k+1}S)\left(\frac{u}{v}\tau\right) = \frac{v^{2k+1}}{\mathcal{A}_{2k+1}} \sum_{\substack{0\le a_1,a_2<8\\ u\mid a_1, v\mid a_2}} \chi(a_1/u)\psi(a_2/v)G_{2k+1}^{((a_2,8-a_1),8)}(\tau),$$

$$(\mathcal{E}_{k,\chi,\psi}|_{2k+1}\gamma_2)\left(\frac{u}{v}\tau\right) = \frac{v^{2k+1}}{\mathcal{A}_{2k+1}} \sum_{\substack{0\le a_1,a_2<8\\ u\mid a_1, v\mid a_2}} \chi(a_1/u)\psi(a_2/v)G_{2k+1}^{((a_1+2a_2 \pmod 8),a_2),8)}(\tau),$$

$$(\mathscr{E}_{k,\chi,\psi}|_{2k+1}\gamma_4)\left(\frac{u}{v}\tau\right)=\frac{v^{2k+1}}{\mathscr{A}_{2k+1}}\sum_{\substack{0\le a_1,a_2<8\\ u|a_1,v|a_2}}\chi(a_1/u)\psi(a_2/v)G_{2k+1}^{((a_1+4a_2(\mathrm{mod}\ 8),a_2),8)}(\tau). \tag{2.10}$$

利用 (2.10)，我们可以得到上面两个艾森斯坦级数在下表所示尖点 $\tau=0$，1/2、1/4 处的取值。

艾森斯坦级数 \ 尖点	0	1/2	1/4
$\mathrm{E}_{2k+1,\chi_{-4},1}(2\tau)$	$\frac{(-i)^{2k+1}(-1)^k E_{2k}}{2^{6k+4}}$	$\frac{(-i)^{2k+1}(-1)^k E_{2k}}{2^{4k+3}}$	0
$\mathrm{E}_{2k+1,\chi_{-4},\chi_2}(2\tau)$	0	$\frac{(-i)^{2k+1}(-1)^k E_{2k}}{2^{2k+2}}$	0

综合 (2.4)-(2.6) 中给出的尖点值以及上表中对 Eisenstein 级数的求值结果，可得 (2.1)。

3. 定理 1.2 的证明

注意，1 是一个模和导子均为 1 的本原狄利克雷特征，而 χ_2 是一个模为 2、导子为 1 的狄利克雷特征。因此，由 (1.9) 可得傅里叶展开

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},1}(2\tau)&=\sum_{n\ge1}\left(\sum_{d|n}\chi_{-4}(n/d)d^{2k}\right)q^{2n}=\sum_{n\ge1}\sum_{m\ge1}\chi_{-4}(n)m^{2k}q^{2mn}\\&=\sum_{n\ge1}\chi_{-4}(n)\sum_{m\ge1}m^{2k}(q^{2n})^m,\end{aligned} \tag{3.1}$$

and

$$\mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},\chi_2}(2\tau)=2^{2k+1}\mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},1}(2\tau)-\mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},1}(\tau). \tag{3.2}$$

由 (3.2),

$$\begin{aligned}2^{2k}\mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},1}(2\tau)-\mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},\chi_2}(2\tau)&=\mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},1}(\tau)-2^{2k}\mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},1}(2\tau)\\&=\sum_{n\ge1}\chi_{-4}(n)\sum_{m\ge1}m^{2k}(q^n)^m-2^{2k}\cdot\sum_{n\ge1}\chi_{-4}(n)\sum_{m\ge1}m^{2k}(q^{2n})^m.\end{aligned} \tag{3.3}$$

接下来，应用欧拉多项式的生成函数（见 [10, 13]）

$$\sum_{\ell\ge1}\ell^r t^\ell=\frac{tA_r(t)}{(1-t)^{r+1}} \tag{3.4}$$

应用于 (3.1) 和 (3.3) 中的内层求和，得到

$$\mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},1}(2\tau)=\sum_{n\ge1}\chi_{-4}(n)\frac{q^{2n}A_{2k}(q^{2n})}{(1-q^{2n})^{2k+1}}, \tag{3.5}$$

and

$$2^{2k}\mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},1}(2\tau)-\mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},\chi_2}(2\tau)=\sum_{n\ge1}\chi_{-4}(n)\frac{q^nA_{2k}(q^n)}{(1-q^n)^{2k+1}}-2^{2k}\cdot\sum_{n\ge1}\chi_{-4}(n)\frac{q^{2n}A_{2k}(q^{2n})}{(1-q^{2n})^{2k+1}}$$

$$= \sum_{n\geq 1} \chi_{-4}(n) \frac{q^n P_k(q^n)}{(1-q^{2n})^{2k+1}}, \tag{3.6}$$

其中 $P_k(t) \in \mathbb{Z}[t]$ 的次数为 $4k$，定义为

$$P_k(t) := (1+t)^{2k+1} \cdot A_{2k}(t) - 2^{2k} \cdot t \cdot A_{2k}(t^2).$$

定理 1.1 以及恒等式 (3.5) 和 (3.6) 推出 (1.11)。接下来我们证明恒等式 (1.11) 是 (1.4) 的q-类比。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，由洛必达法则，

$$\frac{4n^2}{4n^2-1} = \lim_{q\to 1^-} \frac{(1-q^{2n})^2}{(1-q^{2n+1})(1-q^{2n-1})} = \lim_{q\to 1^-} (1-q)\frac{(1-q^{2n})^2}{(1-q^{2n-1})^2} = \lim_{q\to 1^-} (1-q)\frac{(1-q^{2n})^4}{(1-q^n)^2},$$

从而得到沃利斯公式的以下等价形式：

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{q\to 1^-} (1-q) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n})^4}{(1-q^n)^2} = \lim_{q\to 1^-} (1-q)\frac{(q^2;q^2)_\infty^4}{(q;q)_\infty^2}. \tag{3.7}$$

利用 (3.7)，我们得到

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to 1^-} (1-q)^{2k+1} f_k(\tau) &= \lim_{q\to 1^-} (1-q)^{2k+1} q^{k+1} \frac{(q^4;q^4)_\infty^{8k-2}(q^8;q^8)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^{4k}} \\
&= \left(\lim_{q\to 1^-} (1-q)\frac{(q^4;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^2}\right)^{2k} \cdot \lim_{q\to 1^-} (1-q)\frac{(q^8;q^8)_\infty^4}{(q^4;q^4)_\infty^2} \\
&= \left(\lim_{q^2\to 1^-} \frac{(1-q^2)}{(1+q)}\frac{(q^4;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^2}\right)^{2k} \cdot \lim_{q^4\to 1^-} \frac{(1-q^4)}{(1+q+q^2+q^3)}\frac{(q^8;q^8)_\infty^4}{(q^4;q^4)_\infty^2} \\
&= \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\pi^{2k}}{2^{2k}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^{2k+1}}{2^{4k+3}}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

这就确定了 (1.11) 左侧 η 商的极限。为计算右侧 Lambert 级数的极限，考虑 k 为偶数和奇数两种情况。

情况 *1*：k 是 偶数。注意 $P_k(1) = 2^{2k}A_{2k}(1) = 2^{2k}(2k)!$。由 (1.11) 和洛必达法则，

$$\begin{aligned}
&\lim_{q\to 1^-} \frac{(1-q)^{2k+1}}{2^{2k}E_{2k}} \sum_{n\geq 1} \chi_{-4}(n) \frac{q^n P_k(q^n)}{(1-q^{2n})^{2k+1}} \\
&= \frac{1}{2^{2k}E_{2k}} \sum_{n\geq 1} \frac{\chi_{-4}(n)P_k(1)}{(2n)^{2k+1}} = \frac{(2k)!\beta(2k+1)}{2^{2k+1}E_{2k}}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

*Ca*第 *2* 节：k 为奇数。注意，$A_{2k}(1) = (2k)!$ 因此，由 (1.11) 式及洛必达法则，

$$\begin{aligned}
&-\lim_{q\to 1^-} \frac{(1-q)^{2k+1}}{E_{2k}} \sum_{n\geq 1} \chi_{-4}(n) \frac{q^{2n} A_{2k}(q^{2n})}{(1-q^{2n})^{2k+1}} \\
&= -\frac{1}{E_{2k}} \sum_{n\geq 1} \frac{\chi_{-4}(n)A_{2k}(1)}{(2n)^{2k+1}} = -\frac{(2k)!\beta(2k+1)}{2^{2k+1}E_{2k}}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

根据尖点形式的定义，$T_{2k+1}(\tau) \to 0$ 如 $q \to 1^-$。因此，(3.8)、(3.9) 和 (3.10) 推出 (1.4)。由此，(1.11) 给出的恒等式是 (1.4) 的 q-类比。

4. 定理 1.3 的证明

由定理 2.1 可知，定理 1.3 中各集合里的每个 η商都属于$M_{2k+1}(8,\ \chi_{-4})$。此外，对每个 $0 \le l \le 2k+1$，集合中都存在唯一一个形式，使得该形式的q展开以 $q^{\ell}+O(q^{\ell+1})$ 开始。由此可知，所有这些形式线性无关。由于 $\dim(M_{2k+1}(8,\ \chi_{-4})) = 2k+2$，这些形式构成了 $M_{2k+1}(8,\ \chi_{-4})$ 的一组基。因此，每个$g \in M_{2k+1}(8,\ \chi_{-4})$ 都可以唯一地写成

(4.1)

$$g(\tau)=\sum_{\ell=0}^{k-1}\alpha_k(\ell)\cdot F(\tau)^{\ell}\theta(2\tau)^{4(k-\ell)+2}+\sum_{\ell=k}^{2k}\beta_k(\ell)\cdot F(\tau)^{2k-\ell}F(2\tau)^{\ell-k}\theta(2\tau)^2+\gamma_k\cdot\frac{F(\tau)F(2\tau)^k}{\theta(2\tau)^2},$$

其中 $\alpha_k(r),\ \beta_k(s)\in\mathbb{C}$和 $0\le r\le k-1,\ \ k\le s\le 2k$。若 g是尖点形式，则 g在 $\{0,\ 1/2,\ 1/4,\ i\infty\}$ 中的每个尖点处都消失。此外，我们有

$$F(i\infty)=F_2(i\infty)=0,\qquad \theta(i\infty)=\theta_2(i\infty)=1,$$

$$(F\mid_2 S)(i\infty)=-\frac{1}{2^6},\ \ (F_2\mid_2 S)(i\infty)=-\frac{1}{2^8},\ \ (\theta\mid_{1/2} S)(i\infty)=\frac{e^{-\pi i/4}}{\sqrt{2}},\ \ (\theta_2\mid_{1/2} S)(i\infty)=\frac{e^{-\pi i/4}}{2},$$

$$(F\mid_2 \gamma_2)(i\infty)=\frac{1}{2^4},\ \ (F_2\mid_2 \gamma_2)(i\infty)=-\frac{1}{2^6},\ \ (\theta\mid_{1/2} \gamma_2)(i\infty)=0,\ \ (\theta_2\mid_{1/2} \gamma_2)(i\infty)=\frac{e^{-\pi i/4}}{\sqrt{2}},$$

$$(F\mid_{\gamma_4})(i\infty)=0,\ \ (F_2\mid_{\gamma_4})(i\infty)=\frac{1}{2^4},\ \ (\theta\mid_{\gamma_4})(i\infty)=1,\ \ (\theta_2\mid_{\gamma_4})(i\infty)=0,$$

其中 $S,\ \gamma_2$和 γ_4是 (2.3) 中的矩阵。 $F(\tau)$ 的消失阶 [21]，以及 $\theta(2\tau)^2$ 在 $\tau=1/4$ 处的消失阶为

$$\mathrm{ord}_{1/4}(F)=\mathrm{ord}_{1/4}(\theta_2^2)=1.$$

结合上面 $F(\tau),\ F(2\tau),\ \theta(\tau)$ 和 $\theta(2\tau)$ 在尖点 $\{0,\ 1/2,\ 1/4,\ i\infty\}$ 处的取值可知，若 g 是尖点形式，则 (4.1) 中的系数 $\alpha_k(r),\ \beta_k(s)$ 和 γ_k 满足定理 1.3 中的条件 (1)–(3)。

5. η 商的复乘求值及定理 1.4 的证明

对于具有基本判别式的虚二次域的复乘值，求其相关 η 商的标准方法是乔拉–塞尔伯格公式。设 $\mathbb{Q}$ 为有理数域的代数闭包，并设 $D<0$ 为$\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 的基本判别式。令 $h(D)$ 表示 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 的类数，并定义 $h'(D):=1/3$（当$D=-3$ 时）或 $1/2$（当 -4 时），以及 $h'(D):=h(D)$，其中 $D<4$。于是我们令

$$\Omega_D:=\frac{1}{\sqrt{2\pi|D|}}\left(\prod_{j=1}^{|D|-1}\Gamma\left(\frac{j}{|D|}\right)^{\chi_D(j)}\right)^{\frac{1}{h'(D)}},$$

其中 $\chi_D:=\left(\frac{D}{\cdot}\right)$。于是，乔拉–塞尔伯格公式 [4, 5, 19, 22]（参见 [25, 定理 9.3]）给出

定理 5.1。在上述记号下，对于所有 $\tau\in\mathbb{H}\cup\mathbb{Q}(\sqrt{D})$、所有 $k\in\mathbb{Z}$，以及所有具有代数傅里叶系数的权为 k 的模形式 f，均有 $f(\tau)\in\mathbb{Q}\cdot\Omega_D^k$。

将定理 5.1 专门用于求 η 商在复乘点处的值，需要大量补充数据。定理 1.4 源于我们采用的一种更初等的方法来求戴德金 η 函数在复乘点处的值。我们使用解析方法，显式求出一类特殊二次无理数 τ 处的 $\eta(\tau)$。这将导出定理 1.2 中恒等式的复乘求值。

引理 5.2. 对于 $k \in \mathbb{N}$，有

$$\eta(2^k i) = \frac{\pi^{1/4}}{\Gamma(3/4) \cdot 2^{\frac{k+1}{2}}} \cdot e^{-\frac{\pi(2^k-1)^2}{12\cdot 2^k} - \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell=1}^{k} 2^\ell L_\ell},$$

其中 L_l 的定义与定理 1.4 中的相同，并满足 (1.12) 中的求值公式 .

证明。 注意到

$$\eta(2^k i) = e^{-2^{k+1}\pi/24}\prod_{\ell=1}^{\infty}(1-e^{-2^{k+1}\pi\ell}) = e^{-2^{k+1}\pi/24}\prod_{\ell=1}^{\infty}(1-e^{-2^k\pi\ell})\prod_{\ell=1}^{\infty}(1+e^{-2^k\pi\ell})$$

$$=: e^{-2^k\pi/24}\cdot g_k \cdot \eta(2^{k-1}i), \tag{5.1}$$

其中

$$g_k := \prod_{\ell=1}^{\infty}(1+e^{-2^k\pi\ell}).$$

接下来我们求出 g_k。对 g_k 取对数，然后使用 Stieltjes 积分和分部积分，得到

$$\begin{aligned}
\log g_k &= \sum_{\ell=1}^{\infty}\log(1+e^{-2^k\pi\ell}) = \int_{1^-}^{\infty}\log(1+e^{-2^k\pi t})d[t] \\
&= [t]\log(1+e^{-2^k\pi t})\Big|_{1^-}^{\infty} + 2^k\pi\int_1^{\infty}\frac{[t]\cdot e^{-2^k\pi t}}{1+e^{-2^k\pi t}}dt \\
&= 2^k\pi\int_0^{\infty}\frac{[t]}{1+e^{2^k\pi t}}dt \qquad (\text{since } [t]=0 \text{ for } 0\le t\le 1) \\
&= 2^k\pi\left(\int_0^{\infty}\frac{t}{1+e^{2^k\pi t}}dt - \int_0^{\infty}\frac{\{t\}}{1+e^{2^k\pi t}}dt\right). \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

我们分别用 $I_1(k)$ 和 $I_2(k)$ 表示上文括号内的第一个和第二个积分。由留数定理可得

$$I_1(k) = \frac{1}{48\cdot 4^{k-1}}. \tag{5.3}$$

为计算 $I_2(k)$，我们回顾 $\{t\}$ 的傅里叶级数如下：

$$\{t\} = \frac{1}{2} - \sum_{n\ge 1}\frac{\sin(2\pi nt)}{\pi n},$$

由此得到

$$I_2(k) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+e^{2^k\pi t}} - \frac{1}{\pi}\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2\pi nt)}{1+e^{2^k\pi t}}dt$$

$$= -\frac{1}{2^{k+1}\pi}\int_0^\infty d(\log(1+e^{-2^k\pi t})) - \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{n}\int_0^\infty \sin(2\pi nt)e^{-2^k\pi(m+1)t}dt$$

$$= \frac{\log 2}{2^{k+1}\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{n}\int_0^\infty \sin(2\pi nt)e^{-2^k\pi(m+1)t}dt. \tag{5.4}$$

接下来，我们计算（5.4）右边的积分。我们有

$$\int_0^\infty e^{2\pi int}e^{-2^k\pi(m+1)t}dt = \int_0^\infty e^{2\left(\pi in - 2^{k-1}\pi(m+1)\right)t}dt = -\frac{1}{2\pi(in-2^{k-1}(m+1))}$$

$$\int_0^\infty e^{-2\pi int}e^{-2^k\pi(m+1)t}dt = \int_0^\infty e^{-2\left(\pi in + 2^{k-1}\pi(m+1)\right)t}dt = \frac{1}{2\pi(in+2^{k-1}(m+1))} \tag{5.5}$$

利用 (5.5)，现在可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin(2\pi nt)e^{-2^k\pi(m+1)t}dt &= \frac{1}{2i}\left(\int_0^\infty e^{2\pi int}e^{-2^k\pi(m+1)t}dt - \int_0^\infty e^{-2\pi int}e^{-2^k\pi(m+1)t}dt\right)\\ &= -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{2\pi(in-2^{k-1}(m+1))} + \frac{1}{2\pi(in+2^{k-1}(m+1))}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{n}{n^2+2^k(m+1)^2}\right). \qquad (5.6)\end{aligned}$$

结合 (5.4) 和 (5.6)，我们得到

$$I_2(k) = \frac{\log 2}{2^{k+1}\pi} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{m,n\geq 1}\frac{(-1)^m}{2^k m^2+n^2}. \tag{5.7}$$

最后，由 (5.2)、(5.3) 和 (5.7)，我们得到

$$\log g_k = -\frac{\log 2}{2} + \frac{\pi}{3\cdot 2^{k+2}} - \frac{2^{k-1}}{\pi}\sum_{m,n\geq 1}\frac{(-1)^m}{2^k m^2+n^2}. \tag{5.8}$$

我们将 (5.8) 式右边的级数记为 L_k。对 (5.8) 式两边取指数，得到

$$g_k = 2^{-1/2}\cdot e^{\frac{\pi}{3\cdot 2^{k+2}} - \frac{2^{k-1}}{\pi}\cdot L_k}. \tag{5.9}$$

结合（5.1）、（5.9），并注意到根据 [3, Entry 2 (p. 256) (ii)，第 326] 页，$\frac{\eta(i)}{\pi^{1/4}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\cdot 2^{1/2}$。迭代得到如下结果：

$$\begin{aligned}\eta(2^k i) = e^{-\pi(2^k+2^{k-1}+\cdots+2)/24}\eta(i)\prod_{\ell=1}^k g_\ell &= \frac{\pi^{1/4}}{\Gamma(3/4)\cdot 2^{1/2}}\cdot e^{-\frac{\pi(2^k-1)}{12}}\cdot 2^{-k/2}\cdot e^{\frac{\pi}{12}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)-\frac{1}{2\pi}\sum_{\ell=1}^k 2^\ell L_\ell}\\ &= \frac{\pi^{1/4}}{\Gamma(3/4)\cdot 2^{\frac{k+1}{2}}}\cdot e^{-\frac{\pi(2^k-1)^2}{12\cdot 2^k}-\frac{1}{2\pi}\sum_{\ell=1}^k 2^\ell L_\ell}. \qquad (5.10)\end{aligned}$$

由雅可比三重乘积恒等式 [1, 定理 1.3。3]，

$$\Psi(\tau) := \sum_{n\geq 0} q^{n(n+1)/2} = e^{-\frac{2\pi i\tau}{8}}\cdot\frac{\eta(2\tau)^2}{\eta(\tau)} \quad \text{and} \quad \tilde{\theta}(\tau) := \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} = \frac{\eta(\tau)^2}{\eta(2\tau)}.$$

由 [3, p. 326], 可得

$$\eta(2i) = \frac{\pi^{1/4}}{\Gamma(3/4)\cdot 2^{7/8}}, \quad \eta(4i) = \frac{\pi^{1/4}\cdot(\sqrt{2}-1)^{1/4}}{\Gamma(3/4)\cdot 2^{21/16}}, \tag{5.11}$$

and

$$\Psi(2i) = \frac{\pi^{1/4}(2-2^{1/2})^{1/2}\cdot e^{\pi/2}}{\Gamma(3/4)\cdot 2^2}, \quad \Psi(4i) = \frac{\pi^{1/4}(1-2^{-1/4})\cdot e^{\pi}}{\Gamma(3/4)\cdot 2^2}. \tag{5.12}$$

接下来，根据 [2, 第 115 页，条目 8 (xi)-(xii)], ，我们得到

$$\eta(\tau)\cdot\eta(2\tau) = q^{1/8}\cdot\tilde{\theta}(\tau)\cdot\Psi(\tau), \qquad \frac{\eta(4\tau)}{\eta(\tau)} = e^{\frac{2\pi i\tau}{8}}\cdot\frac{\Psi(\tau)}{\tilde{\theta}(2\tau)}.$$

应用此结果可得

$$\eta(4\tau)^2 = e^{3\pi i\tau/4}\cdot\frac{\eta(\tau)\cdot\Psi(\tau)\cdot\Psi(2\tau)}{\eta(2\tau)}. \tag{5.13}$$

将 $\tau = 2i$ 代入 (5.13)，并利用 (5.11) 和 (5.12)，我们得到

$$\eta(8i) = \frac{\pi^{1/4}\cdot(\sqrt{2}-1)^{1/8}\cdot(1-2^{-1/4})^{1/2}}{\Gamma(3/4)\cdot 2^{53/32}}. \tag{5.14}$$

将 (5.11) 中的 $\eta(2i), \eta(4i)$ 和 (5.14) 中的 $\eta(8i)$ 的值与由 (5.10) 得到的值进行比较，即可得出所需结果。

□

5.1. **定理 1.4 的证明**。 对于 $r \in \mathbb{N}$，考虑 CM 点 $\tau_r := 2^r i$。利用定理 1.1 以及定理 1.3 中的条件 (1) 和 (2)，我们得到

$$H_k(\tau) = f_k(\tau) + \sum_{\ell=1}^{k-1}\alpha_k(\ell)\cdot F(\tau)^\ell\theta(2\tau)^{4(k-\ell)+2} + \sum_{\ell=k}^{2k}\beta_k(\ell)\cdot F(\tau)^{2k-\ell}F(2\tau)^{\ell-k}\theta(2\tau)^2 \tag{5.15}$$

其系数 $\alpha_k(r), \beta_k(s) \in \mathbb{C}$ 由 $1 \le r \le k-1$ 和 $k \le s \le 2k$ 唯一确定，并满足定理 1.3 中的条件 (2) 和 (3)。令 $a = \frac{\pi^{1/4}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$。然后注意到

$$F(\tau) = \frac{\eta(4\tau)^8}{\eta(2\tau)^4}, \quad F(2\tau) = \frac{\eta(8\tau)^8}{\eta(4\tau)^4}, \quad \theta(2\tau) = \frac{\eta(4\tau)^5}{\eta(2\tau)^2\eta(8\tau)^2},$$

并利用引理（5.2），我们得到

$$F(\tau_r) = \frac{\eta(2^{r+2}i)^8}{\eta(2^{r+1}i)^4} = \frac{a^4}{2^{2r+8}}\cdot e^{-\frac{2\pi(2^{r+1}+2^r-1)}{3}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{r+1}2^m L_m-\frac{2^{r+4}}{\pi}L_{r+2}},$$

$$F(2\tau_r) = \frac{\eta(2^{r+3}i)^8}{\eta(2^{r+2}i)^4} = \frac{a^4}{2^{2r+10}}\cdot e^{-\frac{2\pi(2^{r+2}+2^{r+1}-1)}{3}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{r+2}2^m L_m-\frac{2^{r+5}}{\pi}L_{r+3}},$$

$$\theta(2\tau_r) = \frac{\eta(2^{r+2}i)^5}{\eta(2^{r+1}i)^2\eta(2^{r+3}i)^2} = \frac{a}{2^{\frac{r+3}{2}}}\cdot e^{\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{r+1}2^m L_m-\frac{3\cdot 2^{r+1}}{\pi}L_{r+2}+\frac{2^{r+3}}{\pi}L_{r+3}}. \tag{5.16}$$

我们还有

$$f_k(\tau_r) = \frac{\eta(2^{r+2}i)^{8k-2}\eta(2^{r+3}i)^4}{\eta(2^{r+1}i)^{4k}} = \frac{a^{4k+2}}{2^{2k(r+4)+r+5}}\cdot e^{\frac{\pi(2k+1)}{3}-2^{r+1}(k+1)\pi-\frac{2k+1}{\pi}\sum_{m=1}^{r+1}2^m L_m-\frac{2^{r+2}(4k+1)}{\pi}L_{r+2}-\frac{2^{r+4}}{\pi}L_{r+3}}. \tag{5.17}$$

由（5.15）、（5.16）和（5.17）可得

$$H_k(\tau_r)=\frac{a^{4k+2}}{2^{(2k+1)(r+3)}}\cdot e^{J(k,r)}\left(\frac{e^{-2^{r+1}(k+1)\pi}}{4^{k+1}}+\sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{\alpha_k(\ell)}{4^\ell}\cdot e^{-\frac{\ell\cdot 2^{r+1}}{\pi}\sum_{m=1}^{r+1}2^mL_m-\frac{2^{r+3}(k-\ell+1)}{\pi}L_{r+2}+\frac{2^{r+5}(k-\ell+1)}{\pi}L_{r+3}}\right.$$
$$\left.+\sum_{\ell=k}^{2k}\frac{\beta_k(\ell)}{4^\ell}\cdot e^{-\frac{\ell\cdot 2^{r+1}}{\pi}\sum_{m=1}^{r+1}2^mL_m-\frac{2^{r+3}(k-\ell+1)}{\pi}L_{r+2}+\frac{2^{r+5}(k-\ell+1)}{\pi}L_{r+3}}\right)$$

其中

$$J(k,r):=\frac{\pi(2k+1)}{3}-\frac{2k+1}{\pi}\sum_{m=1}^{r+1}2^mL_m-\frac{2^{r+2}(4k+1)}{\pi}L_{r+2}-\frac{2^{r+4}}{\pi}L_{r+3}.$$

定理 1.4 的证明至此完成。

6. 具有渐近性的组合解释

本文最后给出 eta 函数$f_k(\tau)$系数的一种组合解释，以及由定理 1.1 推出的渐近公式。令 $\Psi(q)$ 表示三角数的生成函数，定义为

$$\Psi(\tau)=\Psi(q):=\sum_{n\geq 0}q^{\frac{n(n+1)}{2}}=\sum_{n\geq 0}q^{T_n}. \tag{6.1}$$

对于固定的元组 $(a_1,\ a_2、\cdots、\ a_k)\in\mathbb{N}^k$，令

$$t_{k,a_1,a_2,\cdots,a_k}(n):=|\{(n_1,n_2,\cdots,n_k)\in\mathbb{N}^k:n=a_1\cdot T_{n_1}+a_2\cdot T_{n_2}+\cdots+T_{n_k})\}|$$

表示将 n 表示为 k 个三角数的线性组合、且系数为 $a_1,\ a_2、\cdots、\ a_k$ 的表示数。记

$$t_k(n):=|\{(n_1,n_2,\cdots,n_{4k},a,b)\in\mathbb{N}^{4k+2}:n=T_{n_1}+T_{n_2}+\cdots+T_{n_{4k}}+2(T_a+T_b)\}|.$$

那么，$t_k(n)=t_{4k+2,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ 2,\ 2}(n)$（带有 $4k$ 1 个）统计了将 n 表示为若干个 $4k$ 三角数之和，再加上两个三角数之和的两倍的表示个数。在 [17], 中，研究了函数$t_{4k,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1}(n)$（带有 $4k$ 1 个），该函数统计了将 n 表示为若干个$4k$ 三角数之和的表示个数。根据 eta 商表示

$$\Psi(\tau)=e^{-\frac{2\pi i\tau}{8}}\cdot\frac{\eta(2\tau)^2}{\eta(\tau)},$$

我们可以得到 f_k 的如下组合解释：

$$f_k(\tau):=q^{k+1}\Psi(q^4)^2\cdot\Psi(q^2)^{4k}=:\sum_{n\geq 0}t_k(n)q^{2n+k+1}, \tag{6.2}$$

其系数满足推论 6.1 给出的渐近公式。

推论 6.1. 对于 $k\geq 1$，我们有

$$t_k(n)\sim\begin{cases}\dfrac{1}{2^{2k}E_{2k}}\cdot\sigma_{\chi_{-4};2k}(2n+k+1), & k\equiv 0\pmod 2,\\ -\dfrac{1}{E_{2k}}\cdot\sigma_{\chi_{-4};2k}(2n+k+1), & k\equiv 1\pmod 2,\end{cases}$$

其中

$$\sigma_{\chi_{-4};2k}(n) := \sum_{d|n} \chi_{-4}(n/d) d^{2k}.$$

证明。由 (6.2) 和定理 1.1 可得

$$t_k(n) = [q^{2n+k+1}]H_k(\tau) + [q^{2n+k+1}]T_k(\tau), \tag{6.3}$$

其中，$[q^\ell]f(\tau)$ 表示 $f(\tau)$ 在 $q=0$ 处的幂级数展开中的第l个系数。令$a_k(l)$ 表示 $T_{2k+1}(\tau)$ 的第l个傅里叶系数。我们分两种情况讨论。

情况 *1*： k 为偶数。在这种情况下，由 (3.2) 和 (3.3) 可得

$$\begin{aligned} H_k(\tau) &= \frac{1}{2^{2k}E_{2k}}\left(\mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},1}(\tau) - 2^{2k}\mathscr{E}_{2k+1,\chi_{-4},1}(2\tau)\right) + T_{2k+1}(\tau) \\ &= \frac{1}{2^{2k}E_{2k}}\left(\sum_{n\geq 1}\sigma_{2k,\chi_{-4}}(n)q^n - 2^{2k}\sum_{n\geq 1}\sigma_{2k,\chi_{-4}}(n)q^{2n}\right) + \sum_{n\geq 1}a_k(n)q^n. \end{aligned} \tag{6.4}$$

由于 $2n+k+1 \equiv 1 \pmod 2$，(6.3) 和 (6.4) 推得

$$t_k(n) = \frac{1}{2^{2k}E_{2k}} \cdot \sigma_{\chi_{-4};2k}(2n+k+1) + a_k(2n+k+1). \tag{6.5}$$

情况 *2*： k 为奇数。由于 $2n+k+1 \equiv 0 \pmod 2$，由 (6.3) 和定理 1.1 可得

$$t_k(n) = -\frac{1}{E_{2k}} \cdot \sigma_{\chi_{-4};2k}(2n+k+1) + a_k(2n+k+1). \tag{6.6}$$

根据 Deligne 的工作 [8](参见 [6])，我们知道 $|a_k(n)| \leq d(n)n^k$，且由于 $\sigma_{\chi_{-4};\,2k}(n)$ 的下界为 n^{2k-1}，(6.5) 和 (6.6) 即可得出所述结果。□

参考文献

[1] B. C. Berndt。《拉马努金精神中的数论》。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2006。[2] B. C. Berndt。《拉马努金笔记》第三部分。施普林格，纽约，1991。[3] B. C. Berndt。《拉马努金笔记》第五部分。施普林格出版社，纽约，1998。[4] S. Chowla、A. Selberg。《关于 Epstein ζ 函数》。《纯粹与应用数学杂志》227（1967），第 8 页。[5] S. Chowla 和 A. Selberg。关于 Epstein ζ 函数。I。《美国国家科学院院刊》35：371–374，1949。[6] B. Conrad。《模形式与拉马努金猜想》。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，2008。[7] M. L. Dawsey、K. Ono。《Goswami-Sun 级数的复乘求值》。载于：《量子场论中的椭圆积分、椭圆函数与模形式》。施普林格；2019。第 183–193 页。[8] P. Deligne。《韦伊猜想》I。《高等科学研究所数学出版物》，（43）：273–307，1974。[9] F. Diamond、J. Shurman。《模形式入门》。第一版，施普林格。[10] D. Foata。《欧拉多项式：从欧拉时代至今》。佛罗里达大学第十届年度乌拉姆学术研讨会特邀报告，2008 年 2 月 18 日。[11] B. Gordon 和 D. Sinor。η-乘积的乘法性质。载于 Krishnaswami Alladi（编），《数论，马德拉斯 1987》，第 173–200 页，柏林、海德堡，1989。施普林格柏林海德堡。[12] A. Goswami。《欧拉对黎曼 ζ 函数求值的 q 类比 q，《数论研究》5（2019），文章编号：3。[13] F. Hirzebruch。《欧拉多项式》，《明斯特数学杂志》1（2008），9–14。[14] Q -H. Hou，Z -W. Sun。q的某些级数的 q 类比 π，预印本，arXiv:1808.04717。[15] Q.-H. Hou、C. Krattenthaler 和 Z.-W. Sun。《关于某些级数的 q 类比》 π 和 π^2，《美国数学会会刊》147（2019），1953–1961。

[16] N. Koblitz。《椭圆曲线与模形式导论》。第二版，施普林格。[17] K. Ono、S. Robins 和 Patrick T. Wahl。《关于将整数表示为三角数之和》。《数学方程》，50，73-94，1995。[18] C. Krattenthaler、T. Rivoal、Wadim Zudilin。《基本超几何级数，》 q函数 ζ 值与 *Eisenstein* 级数的 q 类比。《朱赛数学研究所期刊》，2006 年 1 月，第 5 卷，第 1 期。[19] M. Lerch。《关于类数的若干公式》。Gauthier-Villars，1897。[20] T. Miyake。《模形式》，由 *Maeda Yoshitaka* 从日文翻译，施普林格出版社，柏林，1989。[21] K. Ono。《模性之网：模形式系数与 q 级数的算术》。美国数学会与 CBMS，罗德岛州普罗维登斯（2004）。[22] A. Selberg 和 S. Chowla。关于 Epstein ζ 函数。《纯粹与应用数学杂志》227：86–110，1967。[23] Z -W. Sun。《两个》 q欧拉公式的 q 类比 $\zeta(2) = \pi^2/6$，《数学 colloquium》158（2019），第 2 期，313–320。[24] C. Sun 和 N. A. Sinitsyn。Tavis-Cummings 模型的 Landau-Zener 扩展：解的结构。《物理评论 A》94：033808，2016 年 9 月。[25] A. van der Poorten、K. Williams。《二次无理数处戴德金 η 函数的值》。《加拿大数学杂志》第 51 卷（1），1999 年，第 17 页。[26] W. Zudilin。《关于》 qζ 值的丢番图问题。《数学札记》，2002 年 11 月，第 72 卷，第 5-6 期。德克萨斯大学里奥格兰德河谷分校数学与统计科学学院，1201 W. University Dr., Edinburg, TX, 78539电子邮箱：ankush.goswami@utrgv.edu, ankushgoswami3@gmail.com电子邮箱：timothy.huber@utrgv.edu