arXiv:2305.02992v1 [math.NT] 4 May 2023

关于$(1+x)(1+y)+z$的马勒测度

弗朗索瓦·布吕诺

Abstract. 我们证明了 Boyd 和 Rodriguez Villegas 的一个猜想，该猜想将多项式 $(1+x)(1+y)+z$ 的马勒测度与导子为 15 的椭圆曲线的 L-函数在 $s=3$ 处的取值联系起来。证明用到了 Zudilin 和作者对模曲线上某些 K_4 类的调节子的计算。

1. 引言

复 Laurent 多项式 $P(x_1,\dots,x_n)$ 的（对数）马勒测度定义为 $\log|P|$ 在环面 $T^n:|x_1|=\dots=|x_n|=1$ 上的平均值，

$$m(P)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\log|P|\,\frac{dx_1}{x_1}\cdots\frac{dx_n}{x_n}.$$

对于一元多项式 $P(x)=c\prod_{i=1}^{d}(x-\alpha_i)$，Jensen 公式给出

$$m(P)=\log|c|+\sum_{\substack{i=1\\|\alpha_i|\geq 1}}^{d}\log|\alpha_i|.$$

最初，马勒测度是作为多变量多项式的一种高度函数引入的，与超越数论相关。后来人们发现，马勒测度会自然地出现在其他背景中。例如，Smyth 于 1981 年发现了以下公式。

$$m(1+x+y)=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}L(\chi_{-3},2),\qquad m(1+x+y+z)=\frac{7}{2\pi^2}\zeta(3),\tag{1}$$

其中 $\chi_{-3}(n)=\left(\frac{-3}{n}\right)$ 是模 3 的狄利克雷特征。整数多项式的马勒测度与 L-函数的特殊值之间存在深刻的联系。这里我们提及这种联系的若干方面，更全面的综述请参阅 [6, 3, 1, 10] 。

实验与理论见解相结合，促使 Boyd 和 Deninger 猜想这一恒等式。

$$m\Big(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+1\Big)=L'(E,0),\tag{2}$$

其中，$E:x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+1=0$ 是一条导子为 15 的椭圆曲线。这一结果由 Rogers 和 Zudilin 于约 15 年后证明 [24]。

恒等式（2）可以用贝林森的调节子理论从概念上加以解释，而 Deninger 在 [13] 中提出了一个将马勒测度与上同调联系起来的一般框架。更确切地说，设 $P(x_1,\dots,x_n)$ 为一个复 Laurent 多项式，我们假设它关于x_n是首一的。对 x_n应用 Jensen 公式，可将 $m(P)$ 写成一个积分

$$\int_{\Gamma}\eta(x_1,\dots,x_n),\tag{3}$$

日期：2023年5月5日。2020年数学主题分类。主要分类19F27；次要分类11F67、11G16、11R06、19E15。关键词和短语。马勒测度；动机上同调；模曲线；调节子； L-函数。作者获得法国国家研究署（ANR）资助的研究项目“动机同伦、二次不变量与对角类”（ANR-21-CE40-0015）的支持。

其中 η 是零点集 V_P 上的一个微分 $(n-1)$ 形式，V_P 由 P 在 $(\mathbf{C}^\times)^n$ 中定义，而 Γ 是 $(n-1)$ 维 *Deninger* 链，

$$\Gamma = \big\{(x_1,\dots,x_n) \in V_P : |x_1| = \cdots = |x_{n-1}| = 1, |x_n| \geq 1\big\},$$

赋予其来自 T^{n-1} 的定向。我们在此作出所有必要的假设，以确保该积分有意义 [13, 假设 3。2], 特别是 Γ 必须避开 V_P 的奇点。

现在假设 Γ 是闭合的。那么 (3) 可得到一个上同调解释，因为 η 在德拉姆上同调中的类，是杯积 $\{x_1,\dots,x_n\}$ 在动机上同调群 $H^n_{\mathcal{M}}(V_P, \mathbf{有理数域}(n))$ 在 Beilinson 调节子映射下的像。在某些条件下，这种情形较为理想，Beilinson 猜想预言了 $m(P)$ 与某个和 L 相关的 - 值之间的联系 V_P。恒等式 (2) 就是这一现象的一个例子（事实上，在此情形下，路径 Γ 并非闭合，但可以利用对称性来“闭合这条路径”）。

更为神秘的情形是形式 η 是精确的，此时我们称 P 是 精确 的。Stokes 公式将马勒测度 $m(P)$ 化为边界 $\partial\Gamma$ 上的一个 $(n-2)$ 维积分，但 Deninger 理论并未为这一积分提供内在的上同调解释。Maillot 于 2003 年提出，在精确情形下，$m(P)$ 应与该簇的上同调相关联。

$$W_P : P(x_1,\dots,x_n) = \overline{P}\Big(\frac{1}{x_1},\dots,\frac{1}{x_n}\Big) = 0.$$

令人觉得这一点合理的是 $\partial\Gamma$ 包含于 W_P，因为 $V_P \cap T^n = W_P \cap T^n$。现在相关的动机上同调群是 $H^{n-1}_{\mathcal{M}}(W_P, \mathbf{有理数域}(n))$，这更难处理，因为我们无法使用杯积。恒等式 (1) 属于这一类型。例如，多项式 $1+x+y$ 导出代数 K-群 $K_3(\mathbf{有理数域}(\sqrt{-3}))$，根据 Borel 定理，其秩已知为秩1。一般而言，动机上同调 $H^i_{\mathcal{M}}(\cdot, \mathbf{有理数域}(n))$ 在 $i \neq n$ 的情形下，使马勒测度更难处理。

受 Maillot 的启发，Boyd 和 Rodriguez Villegas 于 2003 年发现了若干涉及三变量恰当多项式的恒等式 [6, 3, 4]。例如：

猜想 1 (Boyd 和 Rodriguez Villegas [3])。我们有如下等式

$$m((1+x)(1+y)+z) \stackrel{?}{=} -2L'(E,-1), \tag{4}$$

其中 $E : (1+x)(1+y)(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) = 1$ 是导子为15的椭圆曲线。

这里 E 是 $P = (1+x)(1+y) + z$ 的 Maillot 簇。关于猜想 1 的首个进展由 Lal´ın [21], 取得，他将 P 的马勒测度与 Goncharov 复形中的一个余循环的调节子联系起来 $\Gamma(E,3)$ (关于该复形的定义，见第 3 节)。记 $\gamma_E = \partial\Gamma$ 为 Deninger 链的边界 Γ；它是 E 中的一条闭合路径。

定理 2 (Lal´ın)。有 $m(P) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_E} r_3(2)(\xi_E)$，其中 ξ_E 是余循环 $\{-x\}_2 \otimes y - \{-y\}_2 \otimes x$ 在 $\Gamma(E,3)$ 中的类，而 $r_3(2)$ 是 *Goncharov* 调节映射。

本质上，Lal´ın 定理将猜想1 归结为关于 $L'(E, -1)$ 的 Beilinson 猜想。本文计算了上述 Goncharov 调节子，从而得到以下定理。

定理 3。*Boyd* 和 *Rodriguez Villegas* 猜想 (4) 成立。

Rodriguez Villegas 提出的另一个引人入胜的猜想涉及多项式的马勒测度 $1 + x_1 + \ldots + x_n$ 当 $n = 4$ 且 $n = 5$ 时。这些多项式也是精确的，其马勒测度预计分别涉及权为 3 和 4 的尖点形式的 L 值 [10, 第 6 节。2]Shinder 和 Vlasenko 已取得部分结果 [26]。以下是我们最近发现的一个类似恒等式：

$$m((1+x)(1+y)(1+z)+t) \stackrel{?}{=} -6L'(f_7,-1) - \frac{48}{7}\zeta'(-2),$$

其中 $f_7(\tau) = \eta(\tau)^3\eta(7\tau)^3$ 是权 3、层 7 的唯一 CM 新形式。

定理 3 证明中的主要内容，是 Zudilin 与作者[11] 对模曲线 $Y_1(N)$的动机上同调中显式类 $\xi_1(a,b)$ 的 Goncharov 调节子所进行的计算；这些类是在 [8] 中引入的。这里的一个关键事实是， E 与模曲线 $X_1(15)$同构，我们将在第 2 节中对此作出精确说明。在第 3 节中，我们回顾 Goncharov 关于权 2 和权 3 多对数复形的理论，并且对于模曲线，定义由模单位构成的子复形。这些复形便于计算，我们已在 PARI/GP [23]中部分实现了权3复形；脚本可在[9]获取。在第 4 节和第 5 节中，我们将 Lal´ın 的类 ξ_E 和路径 γ_E 用纯粹的模形式表示。最终计算在第 6 节中利用 [11]的结果完成。在附录中，我们给出了若干椭圆曲线 E 在有理数域 Q 上的 3 变量马勒测度与 $L(E,3)$ 之间（猜想的）恒等式表。

致谢。 我感谢 Matilde Lal´ın、Riccardo Pengo、Wadim Zudilin 以及位于巴黎的国际微分方程工作组，感谢他们的交流，这些交流对本文的多个部分都很有帮助。我还要感谢 Berend Ringeling 对附录中的若干马勒测度恒等式进行了数值检验。

2. The modular parametrisation

考虑多项式 $P(x,y,z)=(1+x)(1+y)+z$。我们沿用引言中的相同记号，因此 Maillot 簇 W_P in $(\mathbf{C}^\times)^3$ 定义为

$$W_P:\begin{cases}(1+x)(1+y)+z=0,\\ (1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})+\frac{1}{z}=0.\end{cases}$$

消去 z 后，我们看到 W_P is 同构于 $(\mathbf{C}^\times)^2$ 中由下式给出的光滑曲线。

$$C:(1+x)^2(1+y)^2=xy. \tag{5}$$

令 E 表示 C 在 $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\times\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ 中的闭包。我们将 E 视为定义在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的光滑射影曲线。事实证明， E 与一条导子为 15 [21, (4.2)] 的椭圆曲线同构。PARI/GP 命令

```
E = ellfromeqn((1+x)^2*(1+y)^2-x*y)
ellidentify(ellinit(E))
```

确认 E 与克雷莫纳标记为 $15a8$ 的椭圆曲线同构。另一方面，我们知道模曲线 $X_1(15)$ 与 $15a8$ 同构，因为它们都是导子为 15 的椭圆曲线；并且可以利用模符号计算 $X_1(15)$ 的周期格，其结果与 $15a8$ 的周期格一致。请注意，Stevens 猜想 [28, 猜想 II] 在此情形下已由 [28, 第 7]节证明。

在下文的命题 4 中，我们给出 $X_1(15)\cong E$ 的一个显式同构（请注意，该证明不依赖浮点计算）。这种参数化的一个重要特点是，函数 $-x$ 和 $-y$ 对应于 $X_1(15)$上的模单位。这一点对于第 4 节中联系 Lal´ın 的类 ξ_E 与来自 [8, 第 6]节的模类 $\xi_1(a,b)$ 至关重要。此外，我们还需要函数 $-x$和 $-y$具有 $u_1(a,b,c,d)$ 的形式；这是一类在 [8] 中引入的模单位，下面我们回顾其定义。

设 $N\geq 1$ 为一个整数。对于任意 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)\in(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2/\pm 1$, $\boldsymbol{a}\neq(0,0)$，我们定义

$$\wp_{\boldsymbol{a}}(\tau)=\wp\Big(\tau;\frac{a_1\tau+a_2}{N}\Big)\qquad(\tau\in\mathbf{C},\ \mathrm{Im}(\tau)>0),$$

其中 $\wp(\tau;z)$ 是魏尔斯特拉斯函数。函数 $\wp_{\boldsymbol{a}}$ 是主合同子群 $\Gamma(N)$ 上的权 2 模形式。对于 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2/\pm 1$ 中任意互不相同的元素 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$，我们定义 $u(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$ 为交比 $[\wp_{\boldsymbol{a}},\wp_{\boldsymbol{b}},\wp_{\boldsymbol{c}},\wp_{\boldsymbol{d}}]$。这是 $\Gamma(N)$ 上的一个模单位。对于 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\pm 1$ 中互不相同的元素 a、b、c、d，我们简记 $u_1(a,b,c,d)=u((0,a),(0,b),(0,c),(0,d))$；它是 $\Gamma_1(N)$ 上的一个模单位。这些单位均定义在有理数域上。本文所需的 $u(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$ 的性质可见 [8, 第 3] 节。

在下面的命题中，我们取 $N=15$。

命题 第 4 节。 曲线 E 由以下定义在 $\Gamma_1(15$ 上的模单位参数化。):

$$x(\tau)=-u_1(1,2,3,7)(\tau),\qquad y(\tau)=-u_1(2,4,6,1)(\tau). \tag{6}$$

此外，映射 $\tau\mapsto(x(\tau)\ y(\tau))$ 诱导出一个同构 $\varphi: X_1(15)\xrightarrow{\cong} E$，它定义在 **有理数域** 上。

证明。我们来证明 $u=-u_1$(1, 2, 3, 7) 和 $v=-u_1$(2, 4, 6, 1) 满足 $(1+u)^2(1+v)^2=uv$。为此，我们可以将 u 和 v 替换为它们在 Atkin-Lehner 对合 $W_{15}:\tau\mapsto -1/15\tau$ 下的变换，因为这不会影响该方程。利用 [8, 式 (6)]，单位 $\tilde{u}=u\circ W_{15}$ 和 $\tilde{v}=v\circ W_{15}$ 可以表示为 15 级 Siegel 单位的形式：

$$\begin{aligned}\tilde{u}&=-\frac{\tilde{g}_2\tilde{g}_4}{\tilde{g}_1\tilde{g}_7}=-1-q+q^4+q^5-q^7+O(q^8),\\ \tilde{v}&=-\frac{\tilde{g}_4\tilde{g}_7}{\tilde{g}_1\tilde{g}_2}=-q^{-2}-q^{-1}-2-2q-2q^2-2q^3-2q^4+O(q^5)\end{aligned} \tag{7}$$

其中，对于 $a\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$，$a\neq 0$，

$$\tilde{g}_a(\tau)=q^{NB_2(\hat{a}/N)/2}\prod_{\substack{n\geq 1\\ n\equiv a \bmod N}}(1-q^n)\prod_{\substack{n\geq 1\\ n\equiv -a \bmod N}}(1-q^n)\qquad (q=e^{2\pi i\tau}).$$

这里，$B_2(t)=t^2-t+\frac{1}{6}$ 是伯努利多项式，而 $\hat{a}$ 是 $\{1,\ldots,N-1\}$ 中 a 的提升。

现在我们将计算 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 的除子。为此，我们回顾模曲线 $X_1(N)$ 上尖点的描述。存在一个双射 [14, 例 9.1.3]

$$\{\text{cusps of } X_1(N)(\mathbf{C})\}\xrightarrow{\cong}\{(c,d): c\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z},\ d\in(\mathbf{Z}/(c,N)\mathbf{Z})^\times\}/\pm 1$$

它将满足 $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ 的尖点 $\gamma\infty$ 对应到 γ 的底行 (c,d) 的等价类。此外，根据 [14, 第 9.3 节，第 79], 页，尖点上的伽罗瓦作用描述如下：对于 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$，有 $\sigma\cdot(c,d)=(c,\chi(\sigma)d)$，其中 $\chi(\sigma)\in(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ 由 $\sigma(e^{2\pi i/N})=e^{2\pi i\chi(\sigma)/N}$ 刻画。因此，伽罗瓦轨道的一组完备代表元由尖点 $\frac{1}{k}=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\k&1\end{smallmatrix}\right)\infty$（其中 $0\leq k\leq\lfloor\frac{N}{2}\rfloor$）给出。

现在我们可以计算当互不相同的 $a,b,c,d\in$ 取值时，$u_1(a,b,c,d)$ 在 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\pm 1$ 上的除子。由于此单位定义在 **有理数域** 上，只需确定其在上述尖点 $1/k$ 处的消失阶。根据 [8, 命题 3.6], ，我们有

$$u_1(a,b,c,d)\left|\begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix}\right.=u((ka,a),(kb,b),(kc,c),(kd,d)).$$

该单位在 ∞ 处的消失阶可由 $u(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$ 关于 Siegel 单位 [8, 命题 3.7], 的表达式推导得出，同时需注意，应相对于一致化参数 $q^{(k,N)/N}$ 计算。在我们的情形中应用这一结果，可得

$$\mathrm{div}(u)=-2[1/2]+2[1/7],\qquad \mathrm{div}(v)=-2[0]+2[1/4].$$

这些尖点都是有理数，我们可以看到 $F=(1+u)^2(1+v)^2-uv$ 在 0 和 1/2 处的极点阶至多为 4，在其他地方则是正则的。此外，由（7）我们计算得出 $F(-1/15\tau)=O(q^5)$ 当 $\mathrm{Im}(\tau)\to+\infty$。因此 F 在 0 处以阶 ≥ 5 消失，从而 $F=0$。

还需证明 $\varphi: X_1(15)\to E$ 是一个同构。由于 $X_1(15)$ 和 E 都是光滑的，只需验证 φ 是一个双有理映射。我们知道，u 作为$X_1(15)$上的函数次数为 2，而 x 作为 E上的函数次数为 2。因此，φ 是双有理的。□

3. The weight 3 complex of the modular curve $Y_1(N)$

Goncharov 在 [16] 中定义了多对数复形，这些复形预期能够计算任意域的动机上同调。本节中，我们定义一个模复形 $\mathcal{C}_N(3)$，它是附属于模曲线的权3多对数复形的一个子复形$Y_1(N)$。它由第 2 节中的 Siegel 单位和模单位 $u_1(a,\ b,\ c,\ d)$（在适当意义下）生成。我们的构造可视为权2欧拉

复形 $\mathbb{E}^\bullet_N$ 由 Goncharov 在 [18]中引入。我们还将说明如何使用 PARI/GP 操作 $\mathcal{C}_N(3)$ 。以下构造同样适用于具有完整 level $Y(N)$ 结构的模曲线 N，此时使用 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$ 中的参数，而非 $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$。不过我们尚未实现这一点，因为 $Y_1(N)$ 已足以满足我们的应用需求。

我们简要回顾 Goncharov 的权 2 和权 3 多对数复形。设 F 为任意域。定义 $B_2(F)$为 $\mathbf{Q}[F^\times/\{1\}]$ 除以由五项关系 [16, 第 1 节8]生成的子空间所得的商。群 $B_3(F)$ 类似地定义为 $\mathbf{Q}[F^\times/\{1\}]$ 除以显式关系 [16, 第 1 节8], 所得的商，其定义在此无需用到。对于 $x\in F^\times/\{1\}$ 以及 $n\in\{2,3\}$，我们用 $\{x\}_n$ 表示生成元 $[x]$ 在 $B_n(F)$ 中的像。于是，复形$\Gamma(F,2)$ 在次数 1 和 2 上定义为

$$\Gamma(F,2):\quad \begin{aligned} B_2(F) &\longrightarrow \Lambda^2F^\times\otimes\mathbf{Q}\\ \{x\}_2 &\longmapsto (1-x)\wedge x,\end{aligned}$$

而复形 $\Gamma(F,3)$，在次数 1 至 3 上定义为

$$\Gamma(F,3):\quad \begin{aligned} B_3(F) &\longrightarrow B_2(F)\otimes F^\times\otimes\mathbf{Q} \longrightarrow \Lambda^3F^\times\otimes\mathbf{Q}\\ \{x\}_3 &\longmapsto \{x\}_2\otimes x\\ \{x\}_2\otimes y &\longmapsto (1-x)\wedge x\wedge y.\end{aligned}$$

Goncharov 猜想，$H^i(\Gamma(F,n))$ 与 $H^i_{\mathcal{M}}(F,\mathbf{Q}(n))$ 同构。若 F 是域 k 上光滑曲线 Y 的函数域，则这些复形配有留数映射 $\Gamma(F,n)\to\Gamma(k(x)\ n-1)[-1]$，对每个闭点 $x\in Y$ 均成立。随后，Goncharov 将复形 $\Gamma(Y,n)$ 定义为复形态射 $\Gamma(F,n)\to\oplus_{x\in Y}\Gamma(k(x)\ n-1)[-1]$ 的简单复形，并猜想 $H^i(\Gamma(Y,n))$ 与 $H^i_{\mathcal{M}}(Y,\mathbf{Q}(n))$ 同构 [16, 第 1.15(b) 节]。

我们将考虑 Y 是模曲线 $Y_1(N)$ 且 F 是其函数域的情形。特别地，我们将看到，这些复形包含由模单位构成的自然子复形。

定义 5。固定一个整数 $N\geq 1$。我们在 $Y_1(N)$ 上引入以下模单位集合：

- U_1 由 Siegel 单位 $g_{0,\ a}$, $a\in(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\{0\}$ 构成，它们属于 $\mathcal{O}(Y_1(N))^\times\otimes$**有理数域**;
- U_2 由模单位 $u_1(a,\ b,\ c,\ d)$ 构成，它们属于 $\mathcal{O}(Y_1(N))^\times$，其中 $a,\ b,\ c,\ d$ 是 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\pm1$ 中互不相同的元素。

此外，我们还为它们关联以下空间：

- U_1 是 $F^\times\otimes$**有理数域** 中 U_1 的 **有理数域**-线性张成;
- U_2 是 $B_2(F)$ 中 $\{u\}_2$, $u\in U_2$ 的**有理数域**-线性张成;
- U_{2^3} 是 $B_3(F)$ 中 $\{u\}_3$, $u\in U_2$ 的**有理数域**-线性张成。

根据这些定义，可以将权重2模复形定义为

$$\mathcal{C}_N(2):\ \langle U_2\rangle\longrightarrow\Lambda^2\langle U_1\rangle,\qquad \{u\}_2\mapsto(1-u)\wedge u.$$

这个复形是良定义的，因为根据 [8, 命题 3.8], , U_2 包含于 U_1 中，并且根据将 $u_1(a,b,c,d)$ 定义为交比的方式， U_2 在 $u\mapsto 1-u$ 下稳定。将 $\mathsf{C}_N(2)$ 与 Goncharov 在 [18, 第 2.5] 节中定义的欧拉复形 $\mathbb{E}^\bullet_N$ 进行比较，将会很有趣。

现在我们可以介绍权重3模复形的一个版本。

定义 6. 复形 $\mathsf{C}_N(3)$ 是 $\Gamma(F,3)$ 在次数 1 至 3 上的以下子复形：

$$\mathcal{C}_N(3):\ \langle U_2\rangle_3\longrightarrow\langle U_2\rangle\otimes\langle U_1\rangle\longrightarrow\Lambda^3\langle U_1\rangle.$$

我们提醒读者，次数为 1 的群 U_{23} 可能并不是正确的选择。事实上，单位 $u_1(a,\ b,\ c,\ d)$ 按定义是一个交比，因此它是二对数的一个自然自变量，但<escape>先验而言 </escape>并不适用于三对数。然而，复形 $\mathsf{C}_N(3)$ 已足以满足我们的需求。

由于构造 $\mathsf{C}_N(3)$ 只涉及模单位，$U_{23}, U_2 \otimes U_1$ 和 $\Lambda^3 U_1$ 的元素在 $Y_1(N)$ 的每一点处留数均为零。特别地，$\mathsf{C}_N(3)$ 嵌入为 $\Gamma(Y_1(N),\ 3)$ 的子复形，并且我们有上同调中的自然映射 $H^i(\mathsf{C}_N(3)) \to H^i(\Gamma(Y_1(N),\ 3))$，次数为 $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$。我们关注的情形是 $i = 2$。

我们已在 PARI/GP 中实现了复形 $\mathsf{C}_N(3)$ 的一部分，具体目的是比较 2 次数的上循环。首先，下面的引理给出了表示 U_1 中模单位的一种自然方式。

引理 7. $\langle U_1 \rangle$ 的一组基由 *Siegel* 单位 $g_{0,\ a}$ 给出，其中 $1 \le a \le \lfloor N/2 \rfloor$.

证明。 我们有 $g_{0,\ -a} = g_{0,\ a}$ 在 $F^\times \otimes$ **有理数域** 中，并且根据 [29], 这些单位 $g_{0,\ a}$ 与 $1 \le a \le \lfloor N/2 \rfloor$ 构成 $(\mathsf{O}(Y_1(N))^\times/$**有理数域**$^\times) \otimes$ **有理数域** 的基。□

U_2 中的每个单位都可以根据 [8, 命题 3.8]写成引理 7 中基的线性组合。注意，由于采用了这种基，这里无需计算除子。实际上，我们需要确定 U_2 作为一个集合，因此要检验两个给定的单位 $u_1(a,b,c,d)$和 $u_1(a',b',c',d')$是否相等。我们指出，根据 [8, 命题 3.8]之后的讨论， $u_1(a,b,c,d)$在尖点 0 处的首项系数等于 1。结合引理 7，我们看到，两个单位相等当且仅当它们在U_1的基下的坐标相等。

现在考虑自由向量空间 有理数域$[U_2]$，并将其对以下子空间取商，这些子空间编码了符号 $\{u_1(a,b,c,d)\}_2$之间的关系。根据 $u_1(a,b,c,d)$作为交比的定义，对称群 S_4 通过置换指标作用于 U_2 ，且该作用经由 S_3分解。此外，由于 $\{1/u\}_2 = \{1-u\}_2 = -\{u\}_2$ 在 $B_2(F)$ [30,VI，引理 5.4], 中的关系，我们有反对称性：

$$\{u_1(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)})\}_2 = \varepsilon(\sigma)\{u(a_1,a_2,a_3,a_4)\}_2 \qquad (\sigma \in \mathcal{S}_4), \tag{8}$$

对所有互不相同的参数 a_i，其中 a_i 属于 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\pm 1$，而 $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ 表示符号。因此，只需考虑满足 $0 < a < b < c < d \le \lfloor N/2 \rfloor$的那些参数。元素 $\{u_1(a,b,c,d)\}_2$还满足五项关系 [8,引理 4.7]:

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}} \{u_1(a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, a_{j+3})\}_2 = 0 \qquad \text{in } B_2(F), \tag{9}$$

对于任意由不同元素组成的族 $(a_j)_{j \in \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}}$，其中元素取自 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})/\pm 1$。我们将由反对称关系 (8) 和五项关系 (9) 生成的 $\mathbf{Q}[U_2]$ 子空间记为 R_2。最后，将复形 $\mathsf{C}_N(3)$ 中的二次余边界空间记为 Q，即由满足 $u \in U_2$ 的符号 $[u] \otimes u$ 生成的 $\mathbf{Q}[U_2] \otimes U_1$ 子空间。

在实际操作中，为了缩小对象的规模，我们只计算：

- 商空间 U_2/S_3 的一组代表元 $U_{\prime 2}$；
- 由五项关系生成的 $\mathbf{Q}[U_{\prime 2}]$ 子空间 $R_{\prime 2}$；
- 二次余边界的 $\mathbf{Q}[U_{\prime 2}] \otimes U_1$ 子空间 $Q_\prime$。

相应的脚本包含在文件 `K4-modular-complex.gp`中，文件来自 [9]。可以按如下方式使用。假设我们有两个 2 次上循环 ξ和 ξ'，它们属于 $\Gamma(Y_1(N),\ 3)$。假设它们都是符号 $\{u_1(a,\ b,\ c,\ d)\}_2 \otimes g_{0,\ x}$的线性组合。于是，我们可以用 **有理数域**$[U_2] \otimes U_1$中的一个元素表示 $\xi - \xi'$，并检查该元素是否属于子空间 $R_2 \otimes U_1 + Q$。如果属于，那么我们可以推知 ξ和 ξ'上同调等价，因此在 De Jeu 映射 [8, 下，它们在 $K_4^{(3)}(Y_1(N))$ 中的像相同。定理 5.3 和 5.4]。如果 $\xi - \xi'$不属于该子空间，我们便无法得出任何结论，因为 R_2 和 Q 可能未包含相应群中的所有关系。

上述计算中涉及的线性方程组规模为 $O(N^5) \times O(N^6)$。通过实验，我们发现当 $N = p$ 为素数时， U_2 的基数为 $(p^2-1)(p^2-25)/192$，约为我们预期值 $6\binom{(p+1)/2}{4}$ 的三分之一。此外，它

似乎 **有理数域**$[U_2]/R_2$ 的维数等于 $(p-1)(p-5)/12$，这也是满足以下条件的三元组 (a,b,c) 的数量：满足 $0<a<b<c<p$ 且 $a+b+c\equiv 0$ 模 p，其中 $2b<p$；参见 [22, 序列A242090]。如果属实，应该可以绕过对 R_2 取商的步骤。这样一来，用于比较余循环的线性方程组会小得多。

4. The Lalín class

回顾一下，Lal´ın 定理（定理 2）将 $(1+x)(1+y)+z$ 的马勒测度表示为下列余循环在 E 的权3 Goncharov 复形中的调节子积分：

$$\xi_E = \{-x\}_2 \otimes y - \{-y\}_2 \otimes x.$$

本节旨在将 ξ_E 与 $\xi_1(a,b)$ 在 $X_1(15)$ 上的类联系起来。这些类在 [8, 第 6] 节中引入。这是一项纯代数计算，利用了我们对 $X_1(15)$ 的权3复形的实现，相关说明见第 3 节。

首先，我们利用模参数化 ξ_E 将其拉回到模曲线 $X_1(15)$ 上。根据命题 φ，利用命题 4 及其证明，在 $\Gamma(Y_1(15),3)$ 的二次上同调中有

$$\varphi^*\xi_E = \{u_1(1,2,3,7)\}_2 \otimes \left(\frac{g_4g_7}{g_1g_2}\right) - \{u_1(2,4,6,1)\}_2 \otimes \left(\frac{g_2g_4}{g_1g_7}\right), \tag{10}$$

˜采用简写 $g_k = g_{0,\,k}$ 其中 $k \in \mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$。将 ξ_{15} 记作右侧的余循环˜（10）。Lal´ın 已证明余循环 ξ_E 的留数为零 [21, 第 4.1 节，第 213]，˜因此 ξ_{15} 在尖点处的留数为零。

˜ ˜接下来的任务是用以下余循环表示 ξ_{15} $\xi_1(a,b)$ 其中 $a,b \in \mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$。我们使用第 $\mathcal{C}_{15}(3)$ 节中的模复形 3 来完成这一任务。利用函数 `find_xi1ab`（来自）˜ `K4-modular-complex.gp` [9]，我们得到 ξ_{15} 的如下简单表达式。

˜ ˜**命题 8.** 我们有余循环 $\xi_{15} = -20\xi_1(1,4) + \Xi$的等式，其中 Ξ 是余边界的 **有理数域**-线性组合 $\{u\}_2 \otimes u$，且 $u \in U_2$。特别地，我们有 $\varphi^*(\xi_E) = -20\xi_1(1,4)$。

5. The integration path

在定理 2中，积分路径 $\gamma_E = \partial\Gamma$ 是 E中的一条闭合路径，我们希望通过第 $X_1(15)$节中的模参数化，将其表示为 2上的模符号。这是计算 E上调节子积分的关键要素。我们将仔细完成这一过程，以验证该关系（命题 9）。

Lal´ın [21, 第 4 节1] 已表明，γ_E 是 $H_1(E,\mathbf{Z})^+$的生成元，其中 $(\cdot)^+$ 表示复共轭下不变元素构成的子群。因此，我们首先寻找 γ_{15}，即 $H_1(X_1(15),\mathbf{Z})^+$的一个生成元。我们借助 Sage Math [25]完成此事；参见 [9]中的笔记本`ModularSymbolGamma15.ipynb`。对于任意 $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$，用 $[g] = \{g0, g\infty\}$表示其对应的 Manin 模符号，并将其视为相对同调群 $H_1(X_1(15), \text{尖点}, \mathbf{Z})$中的元素。我们得到

$$\gamma_{15} = 2\left[\begin{pmatrix}1 & 9\\ 2 & 19\end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 11\end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\right] + 2\left[\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right]. \tag{11}$$

因此，我们有 $\gamma_E = \pm\varphi_*(\gamma_{15})$。后续论证并不严格需要确切的符号，因为马勒测度是正实数，最终恒等式会确定符号。不过，我们想概述一种严格确定符号的方法，因为在更一般的情形下它可能会有用：此时积分路径 γ 未必是同调群的生成元。在这种情况下，我们希望确定形如 $\gamma = c\cdot\varphi_*(\gamma_0)$的恒等式，其中$\varphi$ 是模参数化，γ_0 是模符号，而 $c \in \mathbf{Z}$ 则有待确定。

其思路是在待比较的循环上对不变微分形式进行积分。根据[21,第 4 节1]，，E 上的不变微分形式为

$$\omega_E := \frac{-dx}{2(x+1)^2(y+1) - x}.$$

利用（7），我们可以计算 ω_E 在 $X_1(15)$ 上的拉回的傅里叶展开：

$$W_{15}^*(\varphi^*\omega_E) = -(q - q^2 - q^3 + O(q^4))\frac{dq}{q}.$$

$\Omega^1(X_1(15))$ 的一组基为 $\omega_{15} := 2\pi i f_{15}(\tau)d\tau$，其中 $f_{15} = q - q^2 - q^3 + O(q^4)$ 是 $\Gamma_1(15)$ 上的权 2 新形式。因此 $W_{15}^*(\varphi^*\omega_E) = -\omega_{15}$。此外，对合 W_{15}在上半平面中有一个不动点 $\tau = i/\sqrt{15}$，所以它在 $X_1(15)$ 所对应的复环面上必定作用为某个 z_0 的 $z \mapsto z_0 - z$（不可能是平移）。由此可知，W_{15}在 $\Omega^1(X_1(15))$ 上的作用为 -1，从而得出 $\varphi^*\omega_E = \omega_{15}$。

现在来对形式 ω_E 和 ω_{15}积分，并比较积分的符号。按照[21, 第 4 节，1], 路径 γ_E 用极坐标 $x = e^{i\theta}$、$y = e^{i\psi}$ 描述，其中 θ、$\psi \in [-\pi, \pi]$，其方程为 $\cos(\theta/2)\cos(\psi/2) = 1/4$。由于 Deninger 链 Γ 的定向由 $[-\pi, \pi]^2$的乘积定向诱导，其边界 γ_E 在这个正方形中按逆时针方向定向（见图 1）。我们可以利用 γ_E 的对称性来简化积分路径。对于任何在 R 上定义的 E 的自同构 σ，有 $\sigma^*\omega_E = \varepsilon(\sigma)\omega_E$，其中若 σ 保持 $E(\mathbf{R})$ 的定向，则 $\varepsilon(\sigma) = 1$；否则，$\varepsilon(\sigma) = -1$。等价地，当且仅当 $\sigma =$ 为 id 或 σ 没有不动点时，$\varepsilon(\sigma) = 1$。将此结论应用于对称变换 $(x, y) \mapsto (1/x, y)$ 和 $(x, y) \mapsto (x, 1/y)$，它们既反转 $E(\mathbf{R})$ 的定向，也反转 γ_E的定向，由此得到 $\int_{\gamma_E}\omega_E$ 等于图 1 所示路径 γ 上的积分的 4 倍。

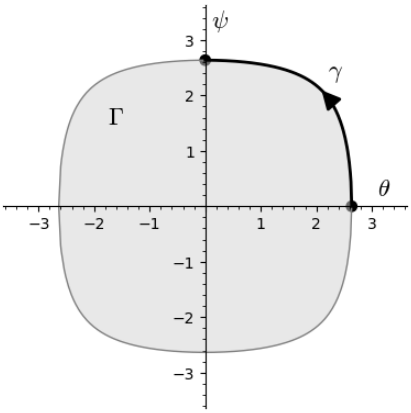

FIGURE 1. Deninger 链 Γ，其边界 γ_E 以及路径 γ。

经过一些计算，我们得到以下结果。

$$\int_{\gamma_E}\omega_E = 4\int_{\gamma}\omega_E = 4\int_0^{2\arccos(1/4)}\frac{d\theta}{\sqrt{16\cos^2(\theta/2) - 1}} > 0. \tag{12}$$

现在，针对模曲线 $X_1(15)$，我们希望确定 $\int_{\gamma_{15}}\omega_{15}$ 的符号。为此，考察 Manin-Drinfeld 定理 [15] 所给出的线性映射 $H_1(X_1(15), \{\text{尖点}\}, \mathbf{Z}) \to H_1(X_1(15), \text{有理数域})$。再次借助 SageMath，我们计算得到 $\{0, \infty\}$ 的像等于 $-\frac{1}{16}\gamma_{15}$(见 `ModularSymbolGamma15.ipynb` [9])。由此可知

$$\int_{\gamma_{15}}\omega_{15} = -16\int_0^{\infty}\omega_{15} = 16L(f_{15}, 1) > 0. \tag{13}$$

该 $L(f_{15}, 1)$ 为正这一点，可以利用快速收敛级数 $L(f_{15}, 1) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi n/\sqrt{15}}/n$ [12, 命题 7.58]. 具体而言，可以使用以下界 $|a_n| \leq n$ 对于 $n \geq 1$，该界可由关于 E 的哈斯界以及对 a_n 较小取值时系数的考察 n得到。结合（12）和

$$\int_{\varphi_*(\gamma_{15})}\omega_E = \int_{\gamma_{15}}\varphi^*\omega_E = \int_{\gamma_{15}}\omega_{15} > 0,$$

我们得出如下结论。

命题 9. 我们有 $\gamma_E = \varphi_*(\gamma_{15})$.

为确保完全准确（并能处理更一般的情形），要确定这一等式，需要对积分（12）和（13）进行数值计算。由于已知这两个积分之比是整数，只需在严格的误差界内计算它们即可。积分（12）是一个完全椭圆积分，可以借助 Arb库 处理[19, 20]。另一方面，（13）涉及对模形式沿模符号积分。在当前情形下，我们可以利用快速收敛级数完成计算。一般而言，尽管 PARI/GP [23] 和 Magma [2] 能够高效计算此类积分，但据我们所知，目前还没有能为这些计算给出误差界证明的实现。

6. Final computation

我们将 $r_3(2)$ 记为曲线的权3复形上的2次 Goncharov调节映射（见 [17]）。它将一个2次上循环映射为该曲线上的一个显式闭1形式。根据命题9，有

$$\int_{\gamma_E} r_3(2)(\xi_E) = \int_{\varphi_*(\gamma_{15})} r_3(2)(\xi_E) = \int_{\gamma_{15}} r_3(2)(\varphi^*\xi_E) = \int_{\gamma_{15}} r_3(2)(\tilde{\xi}_{15}). \tag{14}$$

注意，微分形式 $r_3(2)(\xi_{15})$ 仅定义在开模曲线 $Y_1(15)$上。然而，它在尖点处的留数为零，因为 ξ_{15}也具有这一性质，参见第 4节。因此，我们可以选取 γ_{15} 由（11）给出的代表元来计算积分。注意，该积分涉及尖点，但根据 [8, 推论 73]，它绝对收敛。关于这一过程的技术细节将在 [8, 第 8]节末尾说明。

引理 10. 设 u 是 $X_1(N)$ 上的模单位，且 $1-u$ 也是模单位。对于 $P^1(Q)$ 中任意两个尖点 $\alpha \neq \beta$，我们有 $\int_\alpha^\beta r_3(2)(\{u\}_2 \otimes u) = \hat{L}_3(u(\beta)) - \hat{L}_3(u(\alpha))$，其中 $\hat{L}_3 : P^1(C) \to R$ 是第 2.1] 节中定义的单值三对数。

证明。 根据 [17, 定理 2.2],我们有

$$r_3(2)(\{u\}_2 \otimes u) = r_3(2)(\delta(\{u\}_3)) = dr_3(1)(\{u\}_3) = d\hat{\mathcal{L}}_3(u). \qquad \square$$

由于路径 γ_{15} 是闭合的，引理 10 推出 $\int_{\gamma_{15}} r_3(2)(\{u\}_2 \otimes u) = 0$ 对任意 $u \in U_2$均成立。利用命题 8，计算式（14）继续如下：

$$\int_{\gamma_E} r_3(2)(\xi_E) = -20 \int_{\gamma_{15}} r_3(2)(\tilde{\xi}_1(1,4)). \tag{15}$$

现在我们可以应用 [11], 的主要结果，该结果计算出

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \int_0^\infty r_3(2)(\tilde{\xi}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})) \qquad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2),$$

在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标均非零的假设下。我们也可以沿着 Manin符号 $[g] = \{g0, g\infty\}$ 进行积分，并注意到

$$\int_{g0}^{g\infty} r_3(2)(\tilde{\xi}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})) = \int_0^\infty r_3(2)(\tilde{\xi}(\boldsymbol{a}g,\boldsymbol{b}g)) = \mathcal{G}(\boldsymbol{a}g,\boldsymbol{b}g) \qquad (g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})).$$

还要回忆 $\xi_1(a,b) = \xi((0,a),(0,b))$。展开式（15），得到

$$\int_{\gamma_E} r_3(2)(\xi_E) = -20\big(2\mathcal{G}((2,4),(8,1)) - \mathcal{G}((1,11),(4,14)) - \mathcal{G}((1,4),(4,1)) + 2\mathcal{G}((1,2),(4,8))\big).$$

参数的坐标满足该假设，且 [11, 定理 1] 给出

$$\int_{\gamma_E} r_3(2)(\xi_E) = \pi^2 L'(F,-1) \tag{16}$$

with

$$\begin{aligned} F = {} & -8(G_{2,1}G_{8,-4} + G_{2,-1}G_{8,4}) + 4(G_{1,14}G_{4,-11} + G_{1,-14}G_{4,11}) \\ & + 4(G_{1,1}G_{4,-4} + G_{1,-1}G_{4,4}) - 8(G_{1,8}G_{4,-2} + G_{1,-8}G_{4,2}). \end{aligned} \tag{17}$$

这里$G_{a,\,b}$是艾森斯坦级数 $G^{(1);15}_{a\,b}$，其定义见 [11, 引言]，适用于任意级别 N，由

$$G^{(1);N}_{a,b}(\tau) = a_0(G^{(1);N}_{a,b}) + \sum_{\substack{m,n\geq 1\\ (m,n)\equiv(a,b) \bmod N}} q^{mn/N} - \sum_{\substack{m,n\geq 1\\ (m,n)\equiv -(a,b) \bmod N}} q^{mn/N} \qquad (a,b\in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}).$$

在我们的情形中，指标 a、b 模 15 均非零，因此常数项 $a_0(G_{a,\,b})$均为零。函数 $G_{a,\,b}$ 是 $\Gamma(15)$ 上权为 1 的 Eisenstein 级数。注意，出现在 (17) 中的乘积实际上是 q 的幂级数，因为对于每一个这样的乘积，$x_1x_2+y_1y_2$ 都能被 15 整除。因此，F 属于 $M_2(\Gamma_1(15))$。

我们编写了一个脚本 `K4-reg-Lvalue.gp` [9]，用于自动执行 [11, 定理1] 的应用，并以任意精度计算所得模形式的 q-展开。我们发现，$F=-8f_{15}+O(q^{21})$，其中 f_{15} 是与 E相关联的新形式。此外，空间 $M_2(\Gamma_1(15))$ 的 Sturm 界等于 16（将 [27, Sturm 定理 9.4.1.2] 应用于群$\Gamma=\pm\Gamma_1(15)$；该群在 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ 中的指数为 96）。这意味着，如果该空间中的两个模形式 F_1 和 F_2满足 $F_1=F_2+O(q^{17})$，那么 $F_1=F_2$。在我们的情形中，这使我们能够验证 $F=-8f_{15}$。利用定理 2 和公式 (16)，马勒测度最终等于

$$m(P)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_E} r_3(2)(\xi_E)=\frac{1}{4\pi^2}\cdot\pi^2L'(-8f_{15},-1)=-2L'(E,-1).$$

定理的证明到此结束 3。

Appendix. Tables of 3-variable Mahler measures

我们在此列出一系列涉及 $L(E,3)$ 以及若干椭圆曲线 E（定义在 **有理数域** 上）的三变量马勒测度猜想恒等式。这些恒等式中的至少一部分或许可以通过我们的方法加以证明。这种方法能否成功，很大程度上取决于椭圆曲线的模参数化方式；在我们的研究中，命题 4 起到了关键作用。这与二变量马勒测度的情形类似：在使用 Rogers–Zudilin 方法进行证明时，要求相应的曲线能够通过模单位 [10,第 8.4 节和第 9]章进行参数化。

Boyd 和 Rodriguez Villegas [3] 通过考察形如 $P=A(x)+B(x)y+C(x)z$的多项式，发现了若干形式为 $m(P(x,y,z))=r\cdot L'(E,-1)$、且取值于 $r\in$ 有理数域$^\times$ 的恒等式，其中A、B、C 是分圆多项式的乘积。Boyd 在 [4, 5]中发现了更多例子。我们将 Boyd 的搜索扩展到次数最高为 5 的 A、B、C，并发现了其他一些例子，见下文表1（我们并不声称已找出这一范围内 A、B、C的所有恒等式）。表2展示了两个马勒测度，它们涉及 $L(E,3)$ 和 $\zeta(3)$ 与同类多项式 P 的组合。注意，$\zeta(3)$ 项也出现在 [11, 定理 1]中。

在下表中，曲线 E 以其 Cremona 标签表示，整数 g 是 Maillot 簇 W_P（或其某个分支）的亏格，其雅可比簇以 E 为等ogen因子。

我们还考察了多项式 $P(x,\ y,\ z)$，它们在每个变量上的次数均为 1，且 $x,\ y,\ z$的所有系数均为 ±1（或为零）。看来这类多项式都是精确的。所得恒等式汇集于表3中。该表的第一项并非这种形式，但为完整起见，我们仍将其列入；它已见于 [10]。Ringeling 对下文的马勒测度进行了数值计算，这些恒等式似乎至少在 100 位数字的精度下成立。

表 3 的一个显著特点是出现了椭圆曲线 $36a1$，它具有复乘。椭圆曲线 $450c1$ 也是首个包含秩为 1 的曲线的例子。

References

[1] M. J. Bertin 和 M. Lalín，多变量多项式的马勒测度。《数论女性2：数论研究方向》，《当代数学》**606**，数学研究中心会议论文集（美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2013），125–147。[2] W. Bosma、J. Cannon 和 C. Playoust，Magma 代数系统 I：用户语言。《计算代数与数论》（伦敦，1993），《符号计算杂志》**24**（1997），第3–4期，235–265。

P	E	r	g	来源
$(x-1)^3+(x+1)(y+z)$	$14a4$	-6	2	[4,第 21], [7] 页
$(1+x)^2+(1-x)(y+z)$	$20a1$	-2	1	[5], [10, 第 81]页
$x+1+(x-1)y+(x^2-1)z$	$20a1$	$-3/2$	3	[7]
$(1+x)^2(1+y)+z$	$21a4$	$-3/2$	1	[5], [10, 页 81]
$1+x+y-xy+z$	$21a1$	$-5/4$	1	[5], [10, 第 6 节。3]
$(1+x)^2+y+z$	$24a4$	-1	1	[6,第 8], [5] 节
$(x+1)^2+(x^2-1)y+(x-1)^2z$	$48a1$	$-2/5$	3	[7]
$(x+1)^2+(x-1)^2y+z$	$225c2$	$-1/48$	1	[5, 7]

TABLE 1. 猜想恒等式 $m(P) \stackrel{?}{=} r\cdot L'(E,-1)$

P	E	r	s	g	来源
$x^2-x+1+(x+1)(y+z)$	$30a1$	$-2/9$	$-476/27$ 1		[7]
$(x-1)^3+(x+1)^3(y+z)$	$108a1$	$-2/15$	112/15	2	[4,第 21], [7] 页

TABLE 2. 猜想恒等式 $m(P) \stackrel{?}{=} r\cdot L'(E,-1)+s\cdot\zeta'(-2)$

P	E	r	g	来源
$(1+x)(1+y)(x+y)+z$	$14a4$	-3	1	[10,第 81] 页
$1+x+y+z+xy+xz+yz$	$14a4$	$-5/2$	1	[7]
$1+x+y+z+xy+xz+yz-xyz$	$36a1$	$-1/2$	1	[7]
$1+xy+(1+x+y)z$	$90b1$	$-1/20$	1	[7]
$(1+x)(1+y)+(1-x-y)z$	$450c1$	1/288	1	[7]

TABLE 3. 猜想恒等式 $m(P) \stackrel{?}{=} r\cdot L'(E,-1)$

[3] D. W. Boyd, 马勒测度的显式公式, 《CRM 公报》11（2005），第 1 期，14–15；https://www.crm.umontreal.ca/rapports/bulletin/bulletin11-1.pdf[4] D. W. Boyd，椭圆曲线在 $s=3$ 处取值的马勒测度与 L-函数，SFU/UBC 数论研讨班讲座幻灯片（2006 年 12 月 7 日），https://www.math.ubc.ca/~boyd/sfu06. ed.pdf[5] D. W. Boyd，若干三变量多项式的马勒测度的猜想显式公式，未发表笔记，2006 年。[6] D. Boyd、D. Lind、F. Rodriguez Villegas 和 C. Deninger，马勒测度的诸多方面，班夫研讨会 03w5035 最终报告（2003 年 4 月 26 日至 5 月 1 日），https://www.birs.ca/workshops/2003/03w5035/report03w5035.pdf[7] F. Brunault，未发表的三变量马勒测度猜想恒等式列表，2020 年。[8] F. Brunault，关于模曲线的 K_4 群，预印本（2020），arXiv:2009.07614v2 [math.NT]。[9] F. Brunault、K_4，模曲线的 K_4，GitHub 仓库，https://github.com/francoisbrunault/K4-of-modular-curves（版本：2023-05-04）。[10] F. Brunault和 W. Zudilin，《马勒测度的多种变化：一曲悠长交响乐》，《澳大利亚数学会讲座丛书》28（剑桥大学出版社，剑桥，2020）；doi:10.1017/9781108885553

[11] F. Brunault 与 W. Zudilin，《模形式调节子与多重艾森斯坦值》，预印本（2023），arXiv:2303.15554 [math.NT].[12] H. Cohen，《计算代数数论教程》，《数学研究生教材》138（Springer-Verlag，柏林，1993）。[13] C. Deninger，《混合动机的 Deligne 周期、 K理论与某些 $\mathbb{Z}^n$作用的熵》，《美国数学会杂志》10（1997），259–281。[14] F. Diamond 与 J. Im，《模形式与模曲线》，载于：《费马大定理研讨会》（多伦多，安大略省，1993–1994），CMS 会议论文集 17（美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1995），39–133。[15] V. G. Drinfeld，《关于模曲线的两个定理》，Funkcional. Anal. i Prilo˘zen. 7（1973），第 2 期，83–84。[16] A. B. Goncharov，《构型的几何、多对数与动机上同调》，Adv. Math. 114（1995），第 2 期，197–318。[17] A. B. Goncharov，《多对数动机复形上的显式调节子映射》，载于：《动机、多对数与霍奇理论》，第一部分（加利福尼亚州欧文，1998），Int. Press Lect. Ser. 3，I（Int. Press，马萨诸塞州萨默维尔，2002），245–276。[18] A. B. Goncharov，《欧拉复形与模簇的几何》，Geom. Funct. Anal. 17（2008），第 6 期，第 1872–1914 页。doi:10.1007/s00039-007-0643-6。[19] F. Johansson，《Arb：高效的任意精度中点-半径区间算术》，IEEE《计算机汇刊》66（2017），第 8 期，1281–1292。doi:10.1109/TC.2017.2690633[20] F. Johansson，《任意精度球算术中的数值积分》，预印本 arXiv:1802.07942[cs.MS].[21] M. N. Lalín，《马勒测度与椭圆曲线在 $s = 3$处的 L函数》，J. Reine Angew. Math. 709（2015），201–218。[22] 《在线整数数列百科全书》，电子版发布于 https://oeis.org，2010，数列 A242090。[23] PARI 集团，PARI/GP 2.15.3 版，波尔多大学，2023，https://pari.math.u-bordeaux.fr[24] M. Rogers 与 W. Zudilin，《关于 $1 + X + 1/X + Y + 1/Y$的马勒测度》，《国际数学研究通知》2014（2014），第 9 期，2305–2326。[25]SageMath，Sage 数学软件系统（9.4 版），Sage 开发团队，2023，https://www.sagemath.org。[26] E. Shinder 与 M. Vlasenko，《模形式的线性马勒测度与双重 L 值》，《数论杂志》142（2014），149–182。[27] W. Stein，《模形式：计算方法》，附 Paul E. Gunnells 撰写的附录。《数学研究生研究》79（美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2007）。可访问：https: //wstein.org/books/modform/modform[28] G. Stevens，《Stickelberger 元与椭圆曲线的模参数化》，Invent. Math. 98（1989），第 1 期，75–106。[29] M. Streng，《有理数域上 $\Gamma^1(N)$的模单位群生成元》，预印本（2015），arXiv:1503.08127v3 [math.NT].[30] C. A. Weibel，《 K手册：代数 K理论导论》，《数学研究生研究》145（美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2013）。

ÉNS Lyon, Unité de mathématiques pures et appliquées, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France
电子邮件地址: francois.brunault@ens-lyon.fr网址: https://perso.ens-lyon.fr/francois.brunault