arXiv:2305.03003v1 [math.CO] 4 May 2023

A所有克罗内克系数都是约化克罗内克系数

Christian Ikenmeyer* 和 Greta Panova†

2023年5月5日

摘要

我们通过显式构造证明，对称群的每个克罗内克系数都等于某个约化克罗内克系数，从而确定了约化克罗内克系数在小伍德–理查德森系数与克罗内克系数之间的谱系中究竟处于何处。这意味着，Stanley 于2000年提出的一个问题与 Kirillov 于2004年提出的一个关于这两类系数组合解释的问题是等价的。此外，作为推论，我们证明了判定约化克罗内克系数的正性是 NP-困难的，而在保数多对一归约下计算这些系数是 #P-困难的。

1 引言

对称群 S_n 的克罗内克系数 $\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu)$ 是代数组合学和表示论中最经典、却在很大程度上仍充满谜团的一类量。克罗内克系数是一个不可约 S_n 表示 $\mathbb{S}_\nu$ 在另外两个不可约 S_n 表示的张量积 $\mathbb{S}_\lambda \otimes \mathbb{S}_\mu$ 中的重数。Murnaghan 于 1938年 将其定义为一般线性群 GL_N 的 Littlewood-Richardson 系数 $c^\lambda_{\mu\nu}$ 的一种类比，后者表示不可约韦伊模 V_λ 在张量积 $V_\mu \otimes V_\nu$ 中的重数。然而，这种类比并未在它们的性质上得到充分体现。Littlewood-Richardson 系数具有优美的正组合解释，其正性也很容易判定；严格来说，它属于 P类。然而，迄今为止，我们仍未能找到克罗内克系数的正组合公式，参见第 1.2 节，而且其正性的判定也十分困难。

约化克罗内克系数 $\mathtt{k}(\alpha,\beta,\gamma)$ 定义为普通克罗内克系数的稳定极限

$$\overline{\mathtt{k}}(\alpha,\beta,\gamma) := \lim_{n\to\infty} \mathtt{k}\big((n-|\alpha|,\alpha),\ (n-|\beta|,\beta),\ (n-|\gamma|,\gamma)\big).$$

这些系数在 [Kir04], 中被称为扩展刘维尔-理查森数，因为在特殊情形 $|\alpha| = |\beta|+|\gamma|$ 下，我们有 $\mathtt{k}(\alpha,\beta,\gamma) = c^\alpha_{\beta,\gamma}$，即刘维尔-理查森系数。 [Kir04] 中的问题 2.32 要求给出 $\mathtt{k}(\alpha,\beta,\gamma)$ 的组合解释。因此，它们被视为刘维尔-理查森系数与克罗内克系数之间的中间对象，或插值。它们本身也受到独立关注，参见 [Mur38, Mur56, Bri93, Val99, Kir04, BOR11, BDVO15, CR15, Man15, SS16, IP17, PP20b, OZ21], ；人们认为它们的性质优于普通克罗内克系数。

然而，事实并非如此。正如我们所证明的，每个克罗内克系数都等于某个显式的约化克罗内克系数，而后者所涉及的分拆并没有大多少。特别地，我们证明了以下定理。

定理 1. 对于所有大小相等的分拆 λ、 μ、 ν，我们有

$$\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) \ = \ \overline{\mathtt{k}}\big(\nu_1^{\ell(\lambda)}+\lambda,\ \nu_1^{\ell(\mu)}+\mu,\ (\nu_1^{\ell(\lambda)+\ell(\mu)},\nu)\big).$$

*Unive 华威大学，christian.ikenmeyer@warwick.ac.uk，获英国工程与自然科学研究委员会拨款 EP/W014882/ 支持
†大学 南加州大学，gpanova@usc.edu，部分经费由美国国家科学基金会 CCF:AF 项目 20076 资助

Here $a^b := (\underbrace{a, \ldots, a}_{b \text{ many}})$ and $(\nu_1^b, \nu) := (\underbrace{\nu_1, \ldots, \nu_1}_{b \text{ many}}, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots)$.

定理 1 表明，从非常强的意义上说，在刘维尔-理查森系数与克罗内克系数之间的谱系中，约化克罗内克系数与普通克罗内克系数处于同一位置。特别是，定理 1 表明，[Kir04] 中的问题 2.32 与 [Sta00] 中的问题 10 等价：为克罗内克系数或约化克罗内克系数寻找一种组合解释，是同一个问题。形式上，[Pak22] 中的猜想 9.1 和 9.4 是相同的。

我们的结果可以从正面或负面来解读。一方面，约化克罗内克系数不可能比普通克罗内克系数更容易理解。另一方面，理解约化克罗内克系数就足以理解所有普通克罗内克系数。由此可得推论，我们解决了 [PP20b, §4.4] 中关于判定 $\mathsf{k}(\alpha, \beta, \gamma)$ 的正性的困难性猜想。

推论 1（解决 [PP20b, §4.4] 中的猜想）。给定一元表示的 α, β, γ，判定 $\mathsf{k}(\alpha, \beta, \gamma) > 0$ 是 NP-困难的。

证明。由定理 1 以及判定 $\mathsf{k}(\lambda, \mu, \nu) > 0$ 是 NP-困难的这一事实 [IMW17]，可直接得出结论。□

此外，通过同样直接的论证，现在显然可知，在保数多对一归约下，计算约化克罗内克系数是强 #P- 困难的（而 [PP20b] 中的论证只能得出在图灵归约下的 #P- 困难性）。

1.1 背景与定义

关于代数组合学和表示论的基本定义与性质，请参阅 [JK84、Sta99、Sag13]；为求完整起见，我们在此列出主要定义。

我们记作 $[a, b] := \{a, a+1, \ldots, b\}$，以及 $[n] := [1, n]$。n 的一个组合是指一列非负整数，其和为 n。n的一个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$，记作 $\lambda \vdash n$，是一个弱递减的组合。其大小为 $|\lambda| := \sum_i \lambda_i$。用 $\ell(\lambda) = \max\{i \mid \lambda_i > 0\}$ 表示 λ的长度。我们通过补充零，将λ 解释为任意长度为 $\geq \ell(\lambda)$ 的向量。我们用 (n) 表示长度为 1 的 n 的分拆。对于每个分拆，我们都关联一个杨图，它由一系列左对齐的方格行组成，第 i行包含 λ_i 个方格。我们用 λ' 表示转置分拆，即通过沿主对角线反射杨图得到的分拆。形式上，$\lambda'_j := \max\{i \mid \lambda_i \geq j\}$。我们按行相加分拆：$(\lambda + \mu)_i = \lambda_i + \mu_i$。我们定义 $\lambda \diamond \mu := (\lambda' + \mu')'$。注意，$\diamond$具有交换性和结合性，并且如果 $\lambda_{\ell(\lambda)} \geq \mu_1$，那么 $\lambda \diamond \mu = (\lambda_1, \ldots, \mu_1, \ldots)$ 就只是各行的拼接。对于 $\lambda \vdash n$，Specht 模 $\mathbb{S}_\lambda$ 是对称群 S_n的不可约表示，参见 [JK84、Sta99、Sag 13]。

克罗内克系数 $\mathsf{k}(\lambda, \mu, \nu)$ 是由下式定义的结构常数[1]

$$\chi^\mu \cdot \chi^\nu = \sum_\lambda \mathsf{k}(\lambda, \mu, \nu) \chi^\lambda,$$

或者等价地，通过 Specht 模可表示为

$$\mathbb{S}_\nu \otimes \mathbb{S}_\mu = \sum_\lambda \mathbb{S}_\lambda^{\oplus \mathsf{k}(\lambda, \mu, \nu)}.$$

由此可立即看出，$\mathsf{k}(\lambda, \mu, \nu)$ 是一个非负整数。寻找 $\mathsf{k}(\lambda, \mu, \nu)$ 的组合解释仍是一个悬而未决的问题 [Sta00, IP22, Pan23]。

克罗内克系数由 Murnaghan [Mur38] 于1938年定义，是 Littlewood-Richardson 系数 $c_{\mu\nu}^\lambda$ 的类比。这些系数是不可约表示环中的结构常数

[1]我们指出，在组合学文献中，这些系数通常记作 g，例如 $g(\lambda, \mu, \nu)$；但这里我们使用 k，以避免与表示论中用于表示 GL_N 的记号重复。

GL_N 表示、韦伊模 V_λ中的结构常数，并形式化表示为

$$V_\mu \otimes V_\nu = \bigoplus_\lambda V_\lambda^{\oplus c_{\mu\nu}^\lambda}.$$

一些简单的性质，参见 [JK84、Sag13]，包括转置不变性 $\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) = \mathtt{k}(\lambda',\mu',\nu)$，因为 $\mathbb{S}_{1^n} \otimes \mathbb{S}_\lambda = \mathbb{S}_{\lambda'}$ [JK84]。根据它们的定义，以及 $\chi^\lambda(\pi) \in \mathbb{Z}$ 这一事实，参见 [JK84、Sag13], ，我们有

$$\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) = \tfrac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n} \chi^\lambda(\pi)\chi^\mu(\pi)\chi^\nu(\pi),$$

因此，我们有 S_3 不变性 $\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) = \mathtt{k}(\lambda,\nu,\mu) = \mathtt{k}(\mu,\nu,\lambda) = \cdots$。注意，克罗内克系数在对奇数个分拆进行转置时并不保持不变，我们定义了

$$\mathtt{k}'(\lambda,\mu,\nu) := \mathtt{k}(\lambda',\mu',\nu') = \mathtt{k}(\lambda',\mu,\nu) = \mathtt{k}(\lambda,\mu',\nu) = \mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu').$$

已知，当 $= 0 \text{if } \ell(\lambda) > \ell(\mu)\cdot\ell(\nu)$ [Dvi93], 时，$\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu)$；这也可由结合 $\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) = \mathtt{k}(\lambda,\mu',\nu')$ 与引理 3 得出。我们将稳定范围定义为满足以下条件的三元组 (λ,μ,ν):

$$\forall i \geq 0: \ \mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) \ = \ \mathtt{k}\big(\lambda+(i),\ \mu+(i),\ \nu+(i)\big).$$

已有几种证明表明，对于任意的（α、β、γ）且满足 $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$，当 i 足够大时，三元组（$\alpha+(i)$ $\beta+(i)$ $\gamma+(i)$）处于稳定范围内（因而从某个 i 起对所有 i 都成立）；关于所需 i 的上界也已有研究，参见例如 [Bri93], [Val99], [BOR11], [Ike12，第 7.4], [PP14] 节。约化克罗内克系数定义为该极限值:

$$\overline{\mathtt{k}}(\alpha,\beta,\gamma) := \lim_{n\to\infty} \mathtt{k}(\,(n-|\alpha|,\alpha),\ (n-|\beta|,\beta),\ (n-|\gamma|,\gamma)\,)$$

对于任意分拆 α、β、γ（特别地，我们不要求 $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$）。

1.2 相关工作

Littlewood-Richardson 系数可以通过 Littlewood-Richardson 规则计算。该规则于 1934 年提出，并在约 40 年后得到形式化证明。它表明，$c_{\mu\nu}^\lambda$ 等于形状为 λ/μ 且内容为 ν 的 LR 杨表数量，参见第 4.1 节以及 [Sta99、Sag13]。定义上的明显类比促使学界寻求克罗内克系数的类似组合解释。至少从 Murnaghan [Mur38] 起，人们就开始关注高效计算 $\mathtt{k}(\lambda、\mu、\nu)$ 和 $\mathtt{k}(\alpha、\beta\gamma)$ 的方法。在 [Las79、GR85], 中可以找到对 $\mathtt{k}(\lambda、\mu、\nu)$ 的非负组合解释的具体关注；Stanley 又在其《代数组合学中的开放问题》清单中将其明确表述为问题 10 [Sta00]:

“找到克罗内克积系数 $\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu)$ 的组合解释，从而以组合方式重新证明它们是非负的。”

另请参阅 [Pan23]，以了解有关这一主题的详细讨论。

尽管这个问题本质上自然且基础，相关研究也多种多样，但进展相对甚微。1989年，Remmel 为 $\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu)$ 找到了一个组合规则，适用于其中两个分拆为钩形分拆 [Rem89] 的情形。1994年，Remmel 和 Whitehead [RW94] 求出了 $\ell(\lambda)\ \ell(\mu) \leq 2$ 时的 $\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu)$，随后 [BMS15] 也对其进行了研究。2006年，Ballantine 和 Orellana [BO06] 为 $\mu = (n-k,k)$ 且 $\lambda_1 \geq 2k-1$ 时的 $\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu)$ 建立了一条规则。对于$\nu = (n-k,1^k)$ 为钩形分拆、另外两个分拆任意的情形，最一般的规则由 Blasiak 在 2012 [Bla17], 中建立，随后又在 [Liu17, BL18] 中得到简化。其他特殊情形包括：Bessenrodt-Bowman 关于无重数克罗内克积的研究 [BB17], ；Ikenmeyer-Mulmuley-Walter 关于作为金字塔边缘分布的分拆三元组的研究 [IMW17], ；Pak-Panova 将 $\mathtt{k}(m^k,m^k,(mk-n,n))$ 表示为标号树计数的研究 [Pan15；Tewari 关于近矩形分拆的 slide 9], 研究 [Tew15], , 等等。正如 [IMW17], 所示，计算克罗内克系数是 #P-困难的，而判定其正性是 NP-困难的。

Murnaghan [Mur56] 证明，约化克罗内克系数将 Littlewood-Richardson 系数推广为

$$\overline{\mathtt{k}}(\alpha,\beta,\gamma) \;=\; c^{\alpha}_{\beta\gamma} \quad \text{for} \quad |\alpha| = |\beta| + |\gamma|,$$

这促使 Kirillov 将 k 命名为“扩展 Littlewood-Richardson 系数”。这种关系及其他性质促使人们独立研究约化克罗内克系数，将其视为 Littlewood-Richardson 系数与普通克罗内克系数之间的中间对象。普通克罗内克系数已有的组合解释可以推导出一些特殊情形下的组合解释。在 [CR15] 中，当 μ、ν 为矩形且 λ 为单行时，给出了一种组合解释。在 [BO05, BO06]中，获得了 $\mathtt{k}(\alpha,\beta,\gamma)$ 在子情形 $\ell(\alpha) = 1$ 下的一种组合解释。计算这些系数的方法已在 [Mur38, Mur56] 中得到讨论，并在一系列论文中得到发展，参见 [BOR11, BDVO15, OZ20, OZ21]。正如 [BDVO15]中所指出的，约化克罗内克系数也是所谓特征多项式环的结构常数 [Mac98]。约化克罗内克系数是更一般的稳定性现象的一个特例：如果对于所有 k，均有 $\mathtt{k}(k\alpha, k\beta, k\gamma) = 1$，那么当 $N \to \infty$时，$\mathtt{k}(\lambda + N\alpha, \mu + N\beta, \nu + N\gamma)$ 将趋于稳定，参见 [Ste, SS16, Val20]。

克罗内克系数可以表示为约化克罗内克系数的一个小型交错和，而约化克罗内克系数则是较小分拆对应的普通克罗内克系数的某些和，参见 [BOR11]。这些关系表明，计算约化克罗内克系数同样是#P-困难的，参见 [PP20b]。然而，这些关系并未推出判定约化克罗内克系数的正性是NP-困难的。

需要注意的是，判定 $c^{\lambda}_{\mu\nu} > 0$ 属于P类，因为它们计算的是多面体中的整点，而该多面体只要非空就具有一个整顶点。这一点由Knutson和Tao在 [KT99] 中证明，作为其关于 Littlewood-Richardson 系数的饱和定理之证明的一部分，即 $c^{N\lambda}_{N\mu}$、$_{N\nu} > 0 \iff c^{\lambda}_{\mu\nu} > 0$。已知克罗内克系数（因而约化克罗内克系数也）满足所谓的半群性质 [Chr06, Thm 2.7]，这意味着，如果 $\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) > 0$，那么 $\forall N > 0$：$\mathtt{k}(N\lambda, N\mu, N\nu) > 0$；并且如果 $\mathtt{k}(\alpha,\beta,\gamma) > 0$，那么$\forall N > 0$：$\mathtt{k}(N\alpha, N\beta, N\gamma) > 0$。克罗内克系数不满足饱和性质，因为 $\mathtt{k}(2^2, 2^2, 2^2) = 1$，但 $\mathtt{k}(1^2, 1^2, 1^2) = 0$。直到最近，人们一直认为约化克罗内克系数具有饱和性质： [Kir04, Kly04] 中提出猜想，若对于某个 $N > 0$ 有 $\mathtt{k}(N\alpha, N\beta, N\gamma) > 0$，那么 $\mathtt{k}(\alpha,\beta,\gamma) > 0$.。这一猜想在2020年的 [PP20b] 中被推翻，并使约化克罗内克系数在这一谱系上偏离了Littlewood-Richardson 系数。

2 定理 1 证明的准备

我们通过一般线性群对 $\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu)$ 的自然解释（见 §3），以及它与三维二元列联数组的关系，发现了定理 1。本节为证明做准备，将问题归结为更一般的定理2；借助 GL_N，该定理可在 §3 中得到简短证明。我们还在 §4 中运用基本的对称函数技巧，给出两个简短且自成一体的证明。已知定理 1 的陈述后，也可以直接从 Briand、Orellana 和 Rosas 于 2011 年给出的公式推出该定理 [BOR11], ，相关讨论见第4.2节末尾。

我们证明一个略强于定理 1 的命题：对于 $l \geq \ell(\lambda)$、$m \geq \ell(\mu)$，$c \geq \nu_1$ 有

$$\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) = \overline{\mathtt{k}}\big(\, c^l + \lambda,\; c^m + \mu,\; c^{l+m} \diamond \nu \,\big).$$

我们从一个经典恒等式出发，该恒等式有多种证明方法，参见例如 [Dvi93，定理 2.4’]，[BOR09，引理 2 的证明。1], [Val09，定理 3。1], [Ike12，推论 4.4。14]。

引理1。设 λ、μ、ν 为分拆，且 $\ell(\lambda) \leq l$、$\ell(\mu) \leq m$。那么

$$\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) \;=\; \mathtt{k}(\, m^l + \lambda,\; l^m + \mu,\; 1^{lm} + \nu \,).$$

这一情形如图1所示。注意，如果 $\ell(\nu) > lm$，那么 $\ell(\nu) > lm \geq \ell(\lambda) \cdot \ell(\mu)$，因此 $\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) = 0$。此外，$\ell(1^{lm} + \nu) = \ell(\nu) > lm \geq \ell(\lambda) \cdot \ell(\mu) = \ell(m^l + \lambda) \cdot \ell(l^m + \mu)$，因此

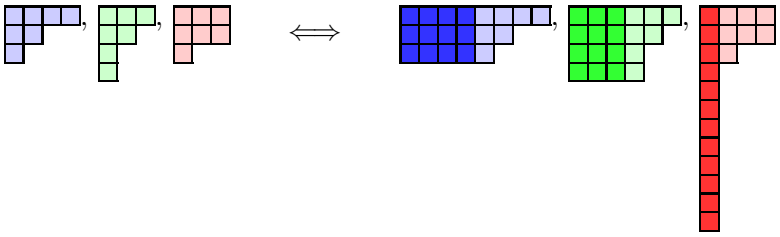


图1：引理1中情形的一个示例，其中 $\lambda = (4,2,1)$、 $\mu = (3,2,1,1)$、 $\nu = (3,3,1)$、 $l = 3$ 和 $m = 4$。

$\mathtt{k}(m^l + \lambda,\ l^m + \mu,\ 1^{lm} + \nu) = 0$。因此，我们可以假设 $\ell(\nu) \le lm$。在这种情形下，我们给出两种证明，一种见第3节，另一种见第4节。

下面的引理2通过沿不同方向两次应用引理1得以证明。图2展示了这一情形。

引理2. 设 λ、 μ、 ν 是大小相同的分拆，并设 $l \ge \ell(\lambda)$、 $m \ge \ell(\mu)$和 $c \ge \nu_1$。设$d = (m+1)c$、 $e = (l+1)c$。那么

$$\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) \;=\; \mathtt{k}\big((d)\diamond(c^l+\lambda),\ (e)\diamond(c^m+\mu),\ c^{l+m+1}\diamond\nu\big).$$

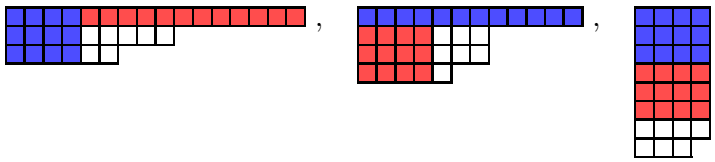


图2：使用 $\lambda = (5,2)$、 $\mu = (3,3,1)$ 和 $\nu = (4,3)$，以及 $l = 2$、 $m = 3$ 和 $c = 4$ 的引理2证明示例。红色方框表示第一次应用引理1时的加法，蓝色方框表示第二次应用。

证明。我们如下两次应用引理1。

$$\begin{aligned}
\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) &= \mathtt{k}(\lambda',\ \mu,\ \nu') \\
&\overset{\text{Lem. 1}}{=} \mathtt{k}(1^{mc}+\lambda',\ c^m+\mu,\ m^c+\nu') \\
&= \mathtt{k}((mc)\diamond\lambda,\ m^c\diamond\mu',\ m^c+\nu') \\
&\overset{\text{Lem. 1}}{=} \mathtt{k}(c^{l+1}+((mc)\diamond\lambda),\ 1^e+(m^c\diamond\mu'),\ (l+m+1)^c+\nu') \\
&= \mathtt{k}((d)\diamond(c^l+\lambda),\ (e)\diamond(c^m+\mu),\ c^{l+m+1}\diamond\nu).
\end{aligned}$$

□

定理2。设 λ、 μ、 ν 是大小相同的分拆，满足 $\lambda_1 \ge \ell(\mu)\cdot\nu_1$ 且 $\mu_1 \ge \ell(\lambda)\cdot\nu_1$。那么，对每个 $h \ge 0$，我们都有

$$\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) = \mathtt{k}(\lambda+h,\ \mu+h,\ \nu+h).$$

我们给出这一事实的三种证明，其中一种见第3节，另外两种见第4节。这些章节可以彼此独立地阅读。证明用到了关于元素为0或1的三维列联数组的一项观察（引理4），但用法各不相同。

我们将子集 $Q \subseteq \mathbb{N}^3$ 与其示性函数 $Q:\ \mathbb{N}^3 \to \{0,1\}$对应起来，并将 Q称为二进制或 $\{0,1\}$-列联数组。这意味着，我们将 Q 解释为一个到 $\{0,1\}$的函数，同时也将其解释为其支撑集的点集。具体采用哪种解释将始终由上下文决定。 Q 的二维边际定义为 $Q_{i**} := \sum_{j,k} Q_{i,j,k} = |Q \cap (\{i\}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N})|$, $Q_{*i*} := \sum_{j,k} Q_{j,i,k} = |Q \cap (\mathbb{N}\times\{i\}\times\mathbb{N})|$, $Q_{**i} := \sum_{j,k} Q_{j,k,i} = |Q \cap (\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\{i\})|$。对于 $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\gamma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| < \infty$，我们记为

$$\mathcal{C}(\alpha,\beta,\gamma) := \{Q \subseteq \mathbb{N}^3 \mid Q_{i**} = \alpha_i,\ Q_{*i*} = \beta_i,\ Q_{**i} = \gamma_i \text{ for every } i\}.$$

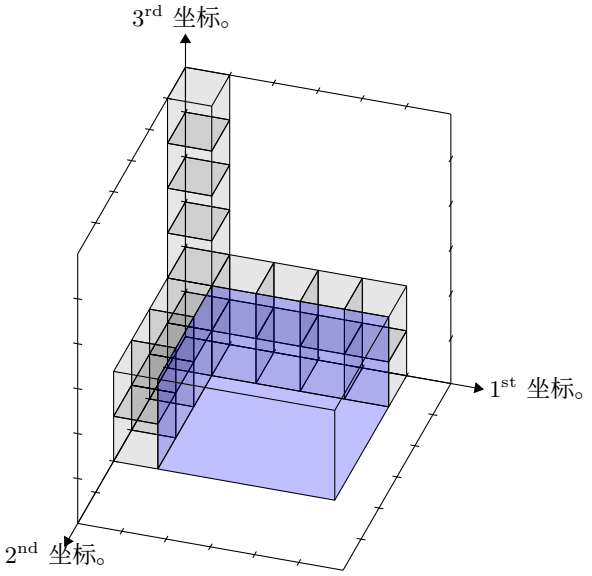


图3： $a = 5$、 $b = 4$、 $c = 2$、 $h = 4$的引理4。灰色立方体表示列联数组中一个被强制为1的元素。未着色部分表示列联数组中被强制为0的元素。蓝色方框标示了0和1都有可能的区域。

引理 3。对于大小相等的分拆 α, β, γ，有 $\mathsf{k}'(\alpha,\beta,\gamma) \le |\mathcal{C}(\alpha,\beta,\gamma)|$。

证明。这个事实有多种证明，例如 [IMW17，引理2。6] 以及 [PP20a，定理5。3],另见§3.1和§4.1。 □

下面的引理说明，对边缘分布的限制如何导致对集合 Q的强限制； [这一技巧也曾应用于17]IMW17]。

引理4。设 α、β、γ 是组合，且满足 $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$。设 $a \ge \ell(\alpha)$、 $b \ge \ell(\beta)$，并设整数 c、h 满足 $c + h \ge \ell(\gamma)$ 和 $\sum_{i>c} \gamma_i \le h$。此外，设 $\alpha_1 \ge bc + h$、 $\beta_1 \ge ac + h$。那么，对于每个 $Q \in \mathcal{C}(\alpha,\beta,\gamma)$，我们有

$$\{1\} \times [b] \times [c] \subseteq Q, \quad [a] \times \{1\} \times [c] \subseteq Q, \quad \{1\} \times \{1\} \times [c+h] \subseteq Q, \text{ and}$$
$$Q \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times [c+1, c+h]) = \{1\} \times \{1\} \times [c+1, c+h].$$

特别地，若 $\mathcal{C}(\alpha,\beta,\gamma)$ 非空，则对所有 $c+1 \le i \le c+h$， $a = \ell(\alpha)$、 $b = \ell(\beta)$、 $\gamma_i = 1$，并且 $\alpha_1 = bc + h$、 $\beta_1 = ac + h$、 $\alpha_2 \le bc$ 和 $\beta_2 \le ac$。

证明。情形如图3所示。假设存在一个二元列联数组$Q \in \mathcal{C}(\alpha,\beta,\gamma)$。设 $B_\cup$:
$= \{1\} \times [b] \times [c+h] \cup [a] \times \{1\} \times [c+h]$ 是平面 $x = 1$ 和 $y = 1$ 上的点集，并设 $B_\cap$:
$= \{1\} \times \{1\} \times [c+h]$ 是直线 $x = y = 1$ 上的点集。设 $H_i := Q \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{i\}) \cap B_\cup$ 是 Q 在 $B_\cup$ 中与平面 $z = i$ 相交处的元素。特别地，

$$\sum_{i=1}^{c+h} |H_i| = |Q \cap B_\cup|.$$

对于所有的 $0 < i \le c$ 和 $|Q \cap B_\cap| \le c + h$，我们有 $\sum_{i=c+1}^{c+h} |H_i| \le \sum_{i=c+1}^{c+h} \gamma_i \le h$，$|H_i| \le a + b - 1$。所有这些不等式都必须取等号，因为

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \beta_1 &= |Q \cap B_\cap| + |Q \cap B_\cup| \\
&= |Q \cap B_\cap| + \textstyle\sum_{i=1}^{c+h} |H_i| \\
&= |Q \cap B_\cap| + \textstyle\sum_{i=1}^{c} |H_i| + \sum_{i=c+1}^{c+h} |H_i| \\
&\le (c+h) + (a+b-1)c + h \\
&= (a+b)c + 2h \\
&\le \alpha_1 + \beta_1.
\end{aligned}$$

因此，我们得到以下等式： $|Q\cap B_\cap| = c+h = |B_\cap|$，并且由 $\forall i\in[c]$ 可得 $|H_i| = a+b-1 = |(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\{i\})\cap B_\cup|$。因此，我们有 $B_\cap\subseteq Q$、$\{1\}\times[b]\times[c]\subseteq Q$、$[a]\times\{1\}\times[c]\subseteq Q$，以及$Q\cap(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times[c+1,c+h]) = \{1\}\times\{1\}\times[c+1,c+h]$。这就得到了所需的边缘分布，结论随之得证。 □

*P*定理 1 的证明。设 $\ell(\lambda) = l, \ell(\mu) = m$ 和 $\nu_1 = c$，并令 $d = mc+c, e = lc+c$.

首先假设 $\lambda_1\le mc$ 和 $\mu_1\le lc$。应用引理2，得到

$$\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) = \mathtt{k}\big(\underbrace{(d)\diamond(c^l+\lambda)}_{=:\hat\lambda},\ \underbrace{(e)\diamond(c^m+\mu)}_{=:\hat\mu},\ \underbrace{c^{l+m+1}\diamond\nu}_{=:\hat\nu}\big).$$

最上面一行 λ、μ、ν的ˆs分别为 d, e, c，因此定理2给出，对所有 $h\in\mathbb{N}$，我们有 ve

$$\begin{aligned}\mathtt{k}(\hat\lambda,\hat\mu,\hat\nu) &= \mathtt{k}(\hat\lambda+h,\hat\mu+h,\hat\nu+h)\\ &= \mathtt{k}(\,(d+h)\diamond(c^l+\lambda),\,(e+h)\diamond(c^m+\mu),\,(c+h)\diamond c^{l+m}\diamond\nu\,)\\ &= \overline{\mathtt{k}}(c^l+\lambda,\,c^m+\mu,\,c^{l+m}\diamond\nu),\end{aligned}$$

wher最后一个等式是令 $h\to\infty$ 得到的。这就证明了定理 1 的第一种情况 e.

现在假设 $\lambda_1 > mc$，情形 $\mu_1 > lc$ 完全类似。令 $b := m+1$。于是我们有 $\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) = \mathtt{k}(\lambda',\mu,\nu') = 0$，因为 $\ell(\lambda') = \lambda_1 > mc = \ell(\mu)\ell(\nu')$。另一方面，约化克罗内克系数可通过分别添加很长的首行 $cm+c+h$, $cl+c+h, c+h$ 得到，因此

$$\begin{aligned}\overline{\mathtt{k}}(c^l+\lambda,\,c^m+\mu,\,c^{l+m}\diamond\nu) &= \mathtt{k}\big((cm+c+h)\diamond(c^l+\lambda),\,(lc+c+h)\diamond(c^m+\mu),\,(c+h)\diamond c^{l+m}\diamond\nu)\big)\\ &= \mathtt{k}'\big(\underbrace{(cm+c+h)\diamond(c^l+\lambda)}_{=:\alpha},\ \underbrace{(lc+c+h)\diamond(c^m+\mu)}_{=:\beta},\ \underbrace{((l+b)^c+\nu')\diamond(1^h)}_{=:\gamma}\big)\end{aligned}$$

当 h 足够大时。令 $\hat\gamma = (l+b)^c+\nu'$ 为去掉末尾多个 1 后的 γ。我们注意到$\alpha_2 = \lambda_1+c$, $\ell(\beta) = b$，且 $\ell(\hat\gamma) = c$。由 $\lambda_1 > mc$ 可得 $\alpha_2 > bc$。引理4表明$\mathcal{C}(\alpha,\beta,\gamma) = \emptyset$。因此，根据引理 3，$\mathtt{k}'(\alpha,\beta,\gamma) = 0$。 □

3 通过一般线性群给出证明

3.1 从一般线性群的视角看工具

关于一般线性群的不可约表示的基本性质，请参阅 [Ful97, §8] 。一般线性群 GL_b 的不可约表示 $V_{a^b}(\mathbb{C}^b)$ 是一维的：对于 $g\in\mathrm{GL}_b$, $v\in V_{a^b}(\mathbb{C}^b)$，我们有 $gv := \det(g)^a v$。因此，若我们通过群同态 $\mathrm{GL}_a\times\mathrm{GL}_b\to\mathrm{GL}_{ab}, (g_1,g_2)\mapsto g_1\otimes g_2$，将 $V_{1^{ab}}(\mathbb{C}^{ab})$ 分解为 $\mathrm{GL}_a\times\mathrm{GL}_b$ 表示，则得到 $V_{1^{ab}}(\mathbb{C}^{ab}) \simeq V_{b^a}(\mathbb{C}^b)\otimes V_{a^b}(\mathbb{C}^b)$。与这样的一维表示作张量积会保持不可约性： $V_\lambda(\mathbb{C}^a)\otimes V_{b^a}(\mathbb{C}^a)\simeq V_{b^a+\lambda}(\mathbb{C}^a)$。

克罗内克系数可以解释为将不可约 GL_{ab} 表示分解为 $\mathrm{GL}_a\times\mathrm{GL}_b$ 表示时出现的结构系数：

$$V_\nu(\mathbb{C}^{ab}) \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda\vdash_a|\nu|\\ \mu\vdash_b|\nu|}} \Big(V_\lambda(\mathbb{C}^a)\otimes V_\mu(\mathbb{C}^b)\Big)^{\oplus\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu)}.$$

这一点可以 直接从 Schur-Weyl 对偶性看出，参见例如 [Chr06, (2.2)] 或 [Ike12, 命题 4.4.11]。

另一种表述是考察不可约 $G := \mathrm{GL}_a\times\mathrm{GL}_b\times\mathrm{GL}_c$表示$V_\alpha(\mathbb{C}^a)\otimes V_\beta(\mathbb{C}^b)\otimes V_\gamma(\mathbb{C}^c)$ 在 $\mathbb{C}^a\otimes\mathbb{C}^b\otimes\mathbb{C}^c$ 的 D 次外幂中的重数，参见 [IMW17]。形式上，对于分拆α、β、$\gamma\vdash D$，我们有

$$\mathtt{k}'(\alpha,\beta,\gamma) \;=\; \mathrm{mult}_{\alpha,\beta,\gamma}\left(\bigwedge^D(\mathbb{C}^a\otimes\mathbb{C}^b\otimes\mathbb{C}^c)\right).$$

满足 $\big(\mathrm{diag}(r_1,\dots,r_a),\mathrm{diag}(s_1,\dots,s_b),\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_c)\big)v \;=\; r_1^{\lambda_1}\cdots r_a^{\lambda_a}\cdot s_1^{\mu_1}\cdots s_b^{\mu_b}\cdot t_1^{\nu_1}\cdots t_c^{\nu_c}v$ 的向量 v 称为权向量，其权为 (λ,μ,ν)。

对于 $(A,B,C) \in \mathbb{C}^{a\times a}\times\mathbb{C}^{b\times b}\times\mathbb{C}^{c\times c}$，李代数在 $\bigwedge^D(\mathbb{C}^a\otimes\mathbb{C}^b\otimes\mathbb{C}^c)$ 上的作用定义为 $(A,B,C).v := \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}((\varepsilon(A,B,C)+(\mathrm{id}_a,\mathrm{id}_b,\mathrm{id}_c))v - v)$。升算子是 $(E_{i-1,i},0,0)$ 的李代数作用，其中 $E_{i,j}$ 是在位置 (i,j) 处为 1、其他位置均为 0 的矩阵。其他升算子为 $(0,E_{i-1,i},0)$ 和 $(0,0,E_{i-1,i})$。设 $e_i := (0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T$，并设 $e_{i,j,k} := e_i\otimes e_j\otimes e_k$。那么，例如，$(E_{i,j},0,0)e_{r,1,1} = e_{i,1,1}$ 当且仅当 $r=j$，否则为 0。权为 (α,β,γ) 的最高权向量（HWV）是一个非零权向量，其权为 (α,β,γ)，且所有升算子作用于它时都将其映为零。不可约 $\mathrm{GL}_a\times\mathrm{GL}_b\times\mathrm{GL}_c$ 表示 $V_\alpha\otimes V_\beta\otimes V_\gamma$ 恰好包含一个最高权向量（相差一个比例因子），其权为 (α,β,γ)。因此 ([IMW17, 引理2.1])，

$$\mathtt{k}'(\alpha,\beta,\gamma) = \dim\left(\mathrm{HWV}_{\alpha,\beta,\gamma}\bigwedge^D(\mathbb{C}^a\otimes\mathbb{C}^b\otimes\mathbb{C}^c)\right),$$

其中，$\mathrm{HWV}_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}$ 表示权为（α，β，γ）的最高权向量空间。注意，$\bigwedge^D(\mathbb{C}^a\otimes\mathbb{C}^b\otimes\mathbb{C}^c)$中的每个标准基向量都是一个权向量，因此，对于权为 w 的每个权向量空间，其一组基由权为 w的标准基向量构成。令 $e_{i,\ j,\ k} := e_i\otimes e_j\otimes e_k$，对于点列表 $Q\in(\mathbb{N}^3)^D$，定义 $\psi_Q := e_{Q_1}\wedge e_{Q_2}\wedge\cdots\wedge e_{Q_D}$。如果 Q 的边缘分布为（α，β，γ），那么 ψ_Q 的权为（α，β，γ）。这立即推出引理 3 的结论。

我们通过一些例子来说明这个概念。$\bigwedge^2(\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^1)$中的最高权向量为 $e_{1,\ 1,\ 1}\wedge e_{2,\ 1,\ 1}$ 以及 $e_{1,\ 1,\ 1}\wedge e_{1,\ 2,\ 1}$。一个非平凡的例子是最高权向量

$$t := e_{1,1,1}\wedge e_{2,1,1}\wedge e_{1,2,2} + e_{1,1,1}\wedge e_{1,2,1}\wedge e_{2,1,2} + e_{1,1,1}\wedge e_{1,1,2}\wedge e_{2,2,1}$$

在 $\bigwedge^3(\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2)$ 中权为 $((2,1),(2,1),(2,1))$，这一点可如下看出：

$$\begin{aligned}
(E_{1,2},0,0)t &= e_{1,1,1}\wedge e_{1,2,1}\wedge e_{1,1,2} + e_{1,1,1}\wedge e_{1,1,2}\wedge e_{1,2,1} = 0,\\
(0,E_{1,2},0)t &= e_{1,1,1}\wedge e_{2,1,1}\wedge e_{1,1,2} + e_{1,1,1}\wedge e_{1,1,2}\wedge e_{2,1,1} = 0,\\
(0,0,E_{1,2})t &= e_{1,1,1}\wedge e_{2,1,1}\wedge e_{1,2,1} + e_{1,1,1}\wedge e_{1,2,1}\wedge e_{2,1,1} = 0.
\end{aligned}$$

3.2 从一般线性群的角度给出的证明

为求完整起见，我们给出 [BOR09, Pf of Lem 2.1] 和 [Ike12, Cor.4.4.14] 中引理1的简短证明。

通过一般线性群证明引理1。我们有 $V_{m^l+\lambda}(\mathbb{C}^l)\otimes V_{l^m+\mu}(\mathbb{C}^m)$ 以重数 $\mathtt{k}(m^l+\lambda,\ l^m+\mu,\ 1^{lm}+\nu)$ 出现在 $V_{1^{lm}+\nu}(\mathbb{C}^{lm})$ 中。但我们还有

$$\begin{aligned}
V_{1^{lm}+\nu}(\mathbb{C}^{lm}) &\simeq V_{1^{lm}}(\mathbb{C}^{lm})\otimes V_\nu(\mathbb{C}^{lm})\\
&\simeq (V_{m^l}(\mathbb{C}^l)\otimes V_{l^m}(\mathbb{C}^m))\otimes\bigoplus_{\substack{\lambda\vdash_l|\nu|\\ \mu\vdash_m|\nu|}}\left(V_\lambda(\mathbb{C}^l)\otimes V_\mu(\mathbb{C}^m)\right)^{\oplus\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu)}\\
&\simeq \bigoplus_{\substack{\lambda\vdash_a|\nu|\\ \mu\vdash_b|\nu|}}\left(V_{m^l+\lambda}(\mathbb{C}^l)\otimes V_{l^m+\mu}(\mathbb{C}^m)\right)^{\oplus\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu)}.
\end{aligned}$$

□

通过列联数组和最高权向量证明定理2。令 $a := \ell(\lambda)$，$b := \ell(\mu)$，$c := \nu_1$。令 $\gamma := \nu'$，则 $\ell(\gamma) = c$。我们有 $\lambda_1\geq bc$ 和 $\mu_1\geq ac$。注意，$\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu) = \mathtt{k}'(\lambda,\mu,\gamma)$。令 $\widetilde{\lambda} = \lambda+(h)$，$\widetilde{\mu} = \mu+(h)$，$\widetilde{\gamma} = \gamma\diamond(1^h)$。我们定义一个单射线性映射 φ 如下。

$$\begin{aligned}
\varphi:\ \bigwedge^D(\mathbb{C}^a\otimes\mathbb{C}^b\otimes\mathbb{C}^c) &\to \bigwedge^{D+h}(\mathbb{C}^a\otimes\mathbb{C}^b\otimes\mathbb{C}^{c+h})\\
v &\mapsto v\wedge e_{1,1,c+1}\wedge e_{1,1,c+2}\wedge\cdots\wedge e_{1,1,c+h}
\end{aligned}$$

注意，φ 将权重为（λ，μ，γ）的向量映射为权重为（λ，$\widetilde{\mu}$，$\widetilde{\gamma}$）的向量。还需证明 φ 将最高权向量映射为最高权向量，并且权重为（λ，$\widetilde{\mu}$，$\widetilde{\gamma}$）的每个最高权向量在 φ 下都有原像。

我们首先证明，φ 将最高权向量映射为最高权向量。根据 φ 的构造，我们观察到，对于 $1\leq i<i'\leq a$，有

$$(E_{i,i'},0,0)\varphi(u) = \varphi((E_{i,i'},0,0)u) = \varphi(0) = 0.$$

类似地，$(0,E_{j,\ j'},0)\varphi(u)\ =0$ 对于 $1\le j<j'\le b$ 成立，而 $(0,0,E_{k,\ k'})\varphi(u)\ =0$ 对于 $1\le k<k'\le c$ 成立。根据 φ 的构造，其余升算子也都消失，因为

$$(0,0,E_{k,k'})(v\wedge e_{1,1,c+1}\wedge\cdots\wedge e_{1,1,c+h})=v\wedge e_{1,1,c+1}\wedge\cdots\wedge\widehat{e_{1,1,c+k}}\wedge e_{1,1,c+k'}\wedge e_{1,1,c+k'}\wedge\cdots\wedge e_{1,1,c+h}=0$$

由于因子 $e_{1,\ 1,\ c+k'}$ 重复出现。这里，$\widehat{e_{1\,1\quad},,c+k}$ 表示省略该因子。

现在我们证明每个权重为 φ 下都有一个原像，由此即可完成证明。只需对基向量证明这一点。设 $u=\psi_P$ 是一个权重为（$\widetilde{\lambda},\widetilde{\mu},\widetilde{\gamma}$）的基权向量，即 $Q\subseteq\mathbb{N}^3$，其边缘分布为（$\widetilde{\lambda},\widetilde{\mu},\widetilde{\gamma}$）。应用引理4可得 $\{1\}\times\{1\}\times[c+1,c+h]\subset Q$，且对所有 $c+1\le i\le c+h$，$Q\cap(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\{i\})\ =\{(1,1,i)\}$。因此，$\psi_Q$ 在 φ 下有一个原像，即 ψ_P；其中 P 是由 Q 删除所有第三个坐标为 $>c$ 的点得到的。□

4 通过对称函数的证明

4.1 对称函数工具

这里回顾对称函数理论中的基本定义和事实，参见 [Sta99、Sag13、Mac98]。

形状为 $\lambda\vdash n$ 的标准杨表（SYT）是将 1、2、...、n 填入 λ 的杨图，使数字沿行向右递减、沿列向下递减，且每个数字恰好出现一次。斜形 λ/μ 的半标准杨表（SSYT）是将整数 1、2、...、N 填入斜杨图 λ/μ 的方格中，使数值沿行弱递增、沿列向下严格递增。如果每个 i 都恰有 α_i 个等于 i 的条目，我们就说 SSYT T 具有型 $type(T)=\alpha$。

例如，1 1 32 3 3 是一个形状为 (5,4,4)/(2,1)、型为 (3,1,4,2) 的 SSYT。1 3 4 4



对称函数环 Λ 有几个基本基。这里我们将使用由 $m_\lambda=x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots+\cdots$ 给出的单项式基 $\{m_\lambda\}$，即对指数为 λ_1、λ_2、.....的所有不同单项式求和。我们还将使用由以下形式给出的齐次对称函数 $\{h_\lambda\}$。

$$h_m:=\sum_{i_1\le i_2\le\cdots\le i_m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\text{ for }m>0;\quad h_0=1;\quad h_m=0\text{ for }m<0;\text{ and }\quad h_\lambda:=h_{\lambda_1}h_{\lambda_2}\cdots.$$

舒尔函数 s_λ 是对称函数环 Λ 的基本基之一。此外，$s_\lambda(x_1,\ldots,x_N)$ 是特征 V_λ 在特征值为 $x_1,\ldots,x_N$ 的矩阵上的取值。我们有以下关于它们的公式，其中 $\ell=\ell(\lambda)$,

$$\text{Jacobi-Trudi identity:}\quad s_\lambda=\det[h_{\lambda_i-i+j}]_{i,j=1}^{\ell}\tag{1}$$

$$\text{Weyl determinantal formula:}\quad s_\lambda(x_1,\ldots,x_N)=\frac{\det[x_i^{\lambda_j+N-j}]_{i,j=1}^{N}}{\det[x_i^{N-j}]}\tag{2}$$

$$\text{via SSYTs:}\quad s_\lambda=\sum_{T\in SSYT(\lambda)}x^{type(T)}\tag{3}$$

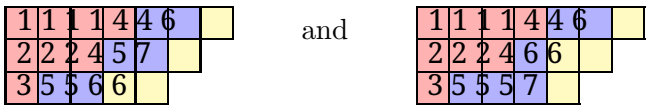
Littlewood-Richardson 系数是对称函数环中的结构常数。

$$s_\mu(x)s_\nu(x)=\sum_\lambda c_{\mu,\nu}^\lambda s_\lambda(x).$$

它们可以通过 Littlewood-Richardson 规则组合地计算：$c_{\mu\nu}^\lambda$ 等于形状为 λ/μ、型为 ν，且读词为投票序列的半标准杨表 T 的数量。读字的获得方式是沿行从右向左、从上到下读取杨表；若对每个 i，在每个前缀中 i 的数量都不少于 $i+1$ 的数量，则该词是投票序列。多重 Littlewood-Richardson 系数 $c_{\alpha^1\cdots\alpha^k}^\lambda$ 定义为

$$c_{\alpha^1\cdots\alpha^k}^\lambda:=\langle s_\lambda,s_{\alpha_1}s_{\alpha^2}\cdots s_{\alpha^k}\rangle=\sum_{\beta^1,\beta^2,\ldots}c_{\alpha^1\beta^1}^\lambda c_{\alpha^2\beta^2}^{\beta^1}\cdots c_{\alpha^{k-1}\alpha^k}^{\beta^{k-1}}\tag{4}$$

由此容易看出，它们计算的是形状为 λ、型为 $(\alpha^1 \diamond \alpha^2 \diamond \cdots)$ 的半标准杨表 T 的数量，并且对于每个 $r = 1, \ldots\ldots, k-1$，对应于值介于 $1+\sum_{i=1}^{r} \ell(\alpha^i)$ 和 $\sum_{i=1}^{r+1} \ell(\alpha^i)$ 之间的项的每个斜子表的读字都是格排列。例如，



是两个多重 具有形状 $\lambda = (7, 6, 5)$ 和类型 $\alpha^1 = (4, 3, 1)$、$\alpha^2 = (3, 3)$、$\alpha^3 = (3, 1)$ 的 i-LR 杨表 .

克罗内克系数可以通过以下展开式进行研究

$$s_\lambda[x \cdot y] = \sum_{\mu,\nu} \mathtt{k}(\lambda, \mu, \nu) s_\mu(x) s_\nu(y), \tag{5}$$

其中， $x \cdot y = (x_1 y_1, x_1 y_2, \ldots, x_2 y_1, \ldots)$ 由两组变量的两两乘积组成。特别地，这给出

$$h_m[x \cdot y] = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y).$$

因此，由雅可比-特鲁迪恒等式可得

$$s_\lambda[x \cdot y] = \det[h_{\lambda_i - i + j}[x \cdot y]] = \sum_{\sigma \in S_\ell} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\alpha^i \vdash \lambda_i - i + \sigma_i} s_{\alpha^1}(x) \cdots s_{\alpha^\ell}(x) s_{\alpha^1}(y) \cdots s_{\alpha^\ell}(y),$$

so

$$\mathtt{k}(\lambda, \mu, \nu) = \sum_{\sigma \in S_\ell} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\alpha^i \vdash \lambda_i - i + \sigma_i} c^{\mu}_{\alpha^1 \cdots \alpha^k} c^{\nu}_{\alpha^1 \cdots \alpha^k}. \tag{6}$$

请注意，该恒等式在文献中多次出现，包括 [Val09、PP17a、PP17b]。下

以下称为 “三重柯西恒等式 ”，参见例如 [Sta99，第 7 题。78]:

$$\sum_{\lambda,\mu,\nu} \mathtt{k}(\lambda, \mu, \nu) s_\lambda(x) s_\mu(y) s_\nu(z) = \prod_{i,j,k} \frac{1}{1 - x_i y_j z_k},$$

$$\sum_{\lambda,\mu,\nu} \mathtt{k}(\lambda, \mu, \nu) s_\lambda(x) s_\mu(y) s_{\nu'}(z) = \prod_{i,j,k} (1 + x_i y_j z_k),$$

其中，第二个恒等式可通过对变量 z 中的对称函数施加对合 ω，由第一个恒等式推出。记 $C(\alpha, \beta, \gamma) := |\mathcal{C}(\alpha, \beta, \gamma)|$。于是，第二个恒等式变为

$$\sum_{\lambda,\mu,\nu} \mathtt{k}(\lambda, \mu, \nu) s_\lambda(x) s_\mu(y) s_{\nu'}(z) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C(\alpha, \beta, \gamma) x^\alpha y^\beta z^\gamma \tag{7}$$

注意，通过比较等式两边 $x^\lambda y^\mu z^{\nu'}$ 处的系数，可以立即得到引理 3 中的上界。

W现在将 $\mathtt{k}(\lambda, \mu, \nu)$ 表示为列联数组上的交错和。记 b y

$$\Delta(x) = \det[x_i^{a-j}] = \prod_{i<j} (x_i - x_j) = \sum_{\sigma \in S_a} \operatorname{sgn}(\sigma) x_1^{a-\sigma_1} \cdots x_a^{a-\sigma_a},$$

并将方程（7）的两边都乘以 $\Delta(x)\Delta(y)\Delta(z)$。根据 2 中的行列式之比表示舒尔函数，我们得到

$$\sum_{\lambda,\mu,\nu} \mathtt{k}(\lambda, \mu, \nu) \det[x_i^{\lambda_j + a - j}] \det[y_i^{\mu_j + b - j}] \det[z_i^{\nu'_j + c - j}] = \Delta(x)\Delta(y)\Delta(z) \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C(\alpha, \beta, \gamma) x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

比较两边 $x_1^{\lambda_1 + a - 1} \ldots y_1^{\mu_1 + b - 1} \ldots z_1^{\nu'_1 + c - 1} \ldots$ 处的系数，我们得到

$$\mathtt{k}(\lambda, \mu, \nu) = [x_1^{\lambda_1 + a - 1} \ldots y_1^{\mu_1 + b - 1} \ldots z_1^{\nu'_1 + c - 1} \ldots] \Delta(x)\Delta(y)\Delta(z) \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C(\alpha, \beta, \gamma) x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

其中， $[\cdots]$ 表示系数提取。将 Δ展开为单项式，并将其边缘分布纳入考虑，我们得到必须满足 $\lambda_i + a - i = \alpha_i + a - \sigma_i$ 等条件，因此 $\alpha_i = \lambda_i + \sigma_i - i$，从而得到，另见 [PP20a]。

$$\mathtt{k}(\lambda, \mu, \nu) = \sum_{\sigma \in S_a,\, \pi \in S_b,\, \rho \in S_c} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\rho) C(\lambda + \sigma - \mathrm{id}, \mu + \pi - \mathrm{id}, \nu' + \rho - \mathrm{id}). \tag{8}$$

其中，置换 σ 被解释为向量 $(\sigma(1) \ldots, \sigma(a))$，而 $\mathrm{id} = (1,2,\ldots)$ 是相应大小的恒等置换。

4.2 通过对称函数进行证明

通过对称函数证明引理1。令 $\hat{\nu} = 1^{lm} + \nu$。我们使用如下舒尔函数。将变量 $x_1, \ldots, x_\ell$ 和 $y_1, \ldots, y_m$ 代入等式 (5)，于是 $x_i = 0$ 对应于 $i > l$，而 $y_j = 0$ 对应于 $j > m$，从而得到

$$s_{\hat{\nu}}[x \cdot y] = \sum_{\theta, \tau} \mathtt{k}(\hat{\nu}, \theta, \tau) s_\theta(x) s_\tau(y). \tag{9}$$

如果 $\mathtt{k}(\hat{\nu}, \theta, \tau) > 0$，则必有 $\ell(\theta)\ell(\tau) \geq \ell(\hat{\nu}) = lm$。由于 $s_\theta(x_1, \ldots, x_l) = 0$ 当且仅当 $\ell(\theta) > l$，且 $s_\tau(y_1, \ldots, y_m) = 0$ 当且仅当 $\ell(\tau) > m$，因此只能出现满足 $\ell(\theta) = l$, $\ell(\tau) = m$ 的分拆。

由于 $s_{\hat{\nu}}$ 是以 $x_1 y_1, \ldots, x_l y_m$ 为元素、且第一列长度恰为 lc 的半标准杨表的生成函数，因此所有元素 $x_i y_j$ 都必须在该列中恰好出现一次。由于这是可能的最短列，剩余形状和元素 $x_1 y_1, \ldots, x_l y_m$ 构成的任意半标准杨表都可以作为其余部分。因此

$$s_{\hat{\nu}}[x \cdot y] = s_\nu[x \cdot y] \prod_{i,j} x_i y_j = (x_1 \ldots x_l)^m (y_1, \ldots, y_m)^l \sum_{\rho, \eta} \mathtt{k}(\nu, \rho, \eta) s_\rho(x) s_\eta(y) \tag{10}$$

我们还注意到 $s_{l^m + \mu}(y_1, \ldots, y_m) = (y_1 \ldots y_m)^l s_\mu(y)$，因为前 l 列长度为 m 的列必须填入 $1, \ldots, m$，而对于其余杨表，除了必须是半标准杨表之外，没有其他限制。类似地，$s_{m^l + \lambda}(x_1, \ldots, x_l) = (x_1 \ldots x_l)^m s_\lambda(x)$。比较方程 (9) 和 (10) 中 $s_\lambda(x) s_\mu(y)$ 的系数，我们由此可知

$$\mathtt{k}(\hat{\nu}, l^m + \mu, m^l + \lambda) = \mathtt{k}(\nu, \lambda, \mu).$$

□

通过列联数组和对称函数证明定理2。从现在起，我们将使用公式(8)和引理4来证明，唯一可能的列联数组是图2所示的那些数组。

现在考虑题目中的 $\mathtt{k}(\lambda + h, \mu + h, \nu + h)$，并令 $\alpha = (\lambda + h)$ $\beta = (\mu + h)$, $\gamma = (\nu + h)'$，使得 $\mathtt{k}(\alpha, \beta, \gamma') = \mathtt{k}(\lambda + h, \mu + h, \nu + h)$。令 $\nu_1 = c$, $\ell(\lambda) = a$ 和 $\ell(\mu) = b$，因此我们有 $\alpha_1 \geq bc + h, \beta_1 \geq ac + h$, $\gamma_i = 1$，其中 $i = c + 1, \ldots, c + h$，并且

$$\mathtt{k}(\alpha, \beta, \gamma') = \sum_{\sigma \in S_a,\, \pi \in S_b,\, \rho \in S_{c+h}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\rho) C(\alpha + \sigma - \mathrm{id}, \beta + \pi - \mathrm{id}, \gamma + \rho - \mathrm{id}) \tag{11}$$

于是，在公式(11)中，我们考虑边缘分布为 Q 的 $\{0,1\}$-列联数组

$$Q_{1**} := \sum_{j,k} Q_{1,j,k} = \lambda_1 + \sigma_1 - 1 \geq bc + h, \quad Q_{*1*} := \sum_{i,k} Q_{i,1,k} = \mu_1 + \pi_1 - 1 \geq ac + h,$$

$$Q_{**k} := \sum_{i,j} Q_{i,j,k} = 1 + \rho_k - k, \text{ for } k = c + 1, \ldots, c + h.$$

注意，此时我们有

$$\sum_{k > c} Q_{**k} = h + \sum_{k=c+1}^{c+h} \rho_k - \sum_{k=c+1}^{c+h} k \leq h,$$

且该数组的支撑集位于 $[1,a]\times[1,b]\times[1,c+h]$ 中，因此我们可以应用引理4并得出结论：

$$Q_{1,j,k}=0 \text{ iff } (j,k)\in[2,b]\times[c+1,c+h],\quad Q_{i,1,k}=0 \text{ iff } (i,k)\in[2,a]\times[c+1,c+h].$$

因此，我们必须有 $Q_{1**}=bc+h$, $Q_{*1*}=ac+h$，于是 $\sigma_1=\pi_1=1$, $\{\rho_{c+1},\dots,\rho_{c+h}\}=\{c+1,\dots,c+h\}$，并且对于 $k\in[c+1,c+h]$，必须有 $Q_{i,j,k}=0$，除非 $i=j=1$。这也迫使我们有 $Q_{1,1,k}=1$，对于所有这些 k 都成立，因此对于 $k=c+1$, ..., $c+h$，有 $\rho_k=k$。

这完全确定了 $Q_{i,j,k}$（对于 $k>c$），以及 ρ_k（对于 $k>c$），还有 $\rho=\bar{\rho}$、$(c+1)$.....、$(c+h)$（对于 $\bar{\rho}\in S_c$）。因此，我们可以将公式 (11) 写为

$$\begin{aligned}\mathtt{k}(\lambda+h,\mu+h,\nu+h)&=\sum_{\sigma\in S_a,\,\pi\in S_b,\,\rho\in S_{c+h}}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\rho)C(\alpha+\sigma-id,\beta+\pi-id,\gamma+\rho-id)\\&=\sum_{\sigma\in S_a,\,\pi\in S_b,\,\eta\in S_c}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\eta)C(\bar{\alpha}+\sigma-id,\bar{\beta}+\pi-id,\bar{\gamma}+\eta-id),\end{aligned}$$

其中，$\bar{\alpha}=\alpha-(h)=\lambda$，$\beta=\beta-(h)=\mu$ 且 $\bar{\gamma}=(\gamma_1\dots,\gamma_c)=\nu'$。由于最后一部分与式（8）中 $\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu)$ 的表达式一致，因此得到所需的恒等式。 □

定理的证明　　m 2 通过 Littlewood-Richardson 系数。再次设 $\ell(\lambda)=a,\ell(\mu)=b$ 和 $\nu_1=c$。

我们有 $\mathtt{k}(\lambda+h,\mu+h,\nu+h)=\mathtt{k}(\nu'\diamond(1^h)\ \lambda'\diamond(1^h)\ \mu+h)$，接下来要对这一组分拆应用公式 (6)。设 $\hat{}\mu=\mu+h$，$\hat{}\lambda=\lambda'\diamond(1^h)=(\lambda+h)'$，以及 $\hat{}\nu=\nu'\diamond(1^h)(\nu+h)'$。这里$\ell(\nu'\diamond(1^h))=c+h$，因此

$$\mathtt{k}(\lambda+h,\mu+h,\nu+h)=\sum_{\sigma\in S_{c+h}}\operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{\alpha^i\vdash\hat{\nu}_i-i+\sigma_i}c^{\hat{\lambda}}_{\alpha^1\alpha^2\dots}c^{\hat{\mu}}_{\alpha^1\alpha^2\dots}$$

我们现在将刻画这一求和中涉及的可能分拆 α^i。根据多重 Littlewood-Richardson 系数 (4) 的迭代定义可知，要使这些系数非零，必须满足 $\alpha^i\subset\hat{}\mu$ 和 $\alpha^i\subset\hat{}\lambda$。特别地，因此有 $\ell(\alpha^i)\le\ell(\mu)=b$ 和 $\alpha^i_1\le\hat{}\lambda_1=a$。注意，多重 Littlewood-Richardson 系数计算的是具有型 $(\alpha^1\diamond\alpha^2\diamond\dots\diamond\alpha^c\diamond\dots)$ 的某些半标准杨表（SSYTs）的数量。因此，在形状 $\hat{}\lambda$ 中，第一列来自前 c 个分拆的元素最多有 $\ell(\alpha^1)+\dots+\ell(\alpha^c)\le bc$ 个。所以，第一列中至少有 h 个方格需要由分拆 α^{c+1}, ..., α^{c+h} 来覆盖。于是我们有

$$h\le\ell(\alpha^{c+1})+\dots+\ell(\alpha^{c+h})\le|\alpha^{c+1}|+\dots+|\alpha^{c+h}|=\sum_{i=c+1}^{c+h}1-i+\sigma_i\le h,$$

如 $\sigma_{c+1}+\dots+\sigma_{c+h}\le c+1+\dots c+h$。因此我们需要满足等式，从而

$$|\alpha^{c+1}|+\dots+|\alpha^{c+h}|=h,\ell(\alpha^i)=|\alpha^i|,$$

所以 α^i 是单列分拆，可能为空。

此外，我们有 $\alpha^i\le a,\alpha^i\subset\hat{}\mu$。由于存在一个型为 $(\alpha^1\diamond\alpha^2\cdots)$ 的多重 LR，杨表的第一行只能由每种型中最小的元素占据。因此我们必须有

$$ac+h=\hat{\mu}_1\le\sum_i\alpha^i_1\le\sum_{i=1}^{c}a+\sum_{i=c+1}^{c+h}\alpha^i_1.$$

因此 $\alpha_1^{c+1}+\dots+\alpha_1^{c+h}\ge h$。由于根据上述考虑，$\alpha^i_1\le1$，我们必须对所有$i>c$都有 $\alpha^i=(1)$。所以对于 $i=c+1$,... , $c+h$，有 $\sigma_i=i$。

Then

$$c^{\hat{\lambda}}_{\alpha^1\alpha^2\dots\alpha^{c+h}}=c^{\lambda'}_{\alpha^1\dots\alpha^c}\quad\text{and}\quad c^{\hat{\mu}}_{\alpha^1\alpha^2\dots\alpha^{c+h}}=c^{\mu}_{\alpha^1\dots\alpha^c}.$$

由此我们得到

$$\begin{aligned}\mathtt{k}(\lambda+h,\mu+h,\nu+h)&=\sum_{\sigma\in S_{c+h}}\operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{\alpha^i\vdash\hat{\nu}_i-i+\sigma_i}c^{\hat{\lambda}}_{\alpha^1\alpha^2\dots}c^{\hat{\mu}}_{\alpha^1\alpha^2\dots}\\&=\sum_{\sigma\in S_c}\operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{\alpha^i\vdash\nu'_i-i+\sigma_i}c^{\lambda'}_{\alpha^1\alpha^2\dots}c^{\mu}_{\alpha^1\alpha^2\dots}=\mathtt{k}(\nu',\lambda',\mu)=\mathtt{k}(\lambda,\mu,\nu),\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

现在我们来讨论如何从下面这个恒等式看出定理 1。该恒等式最早发表于 [BOR11], , 当时是利用对称函数算子证明的。随后, 它在研究分拆代数的[BDVO15, 定理 43], 中被重新表述如下。

设 $m = r + s$, 并令 $\nu \vdash m - l$、 $\lambda \vdash r$、 $\mu \vdash s$, 其中 l 为某个非负整数。于是

$$\overline{\mathtt{k}}(\lambda, \mu, \nu) = \sum_{\substack{l_1, l_2 \\ l = l_1 + 2l_2}} \sum_{\substack{\alpha \vdash r - l_1 - l_2 \\ \beta \vdash s - l_1 - l_2}} \sum_{\substack{\pi, \rho, \sigma \vdash l_1 \\ \gamma \vdash l_2}} c^{\nu}_{\alpha,\beta,\pi} c^{\lambda}_{\alpha,\rho,\gamma} c^{\mu}_{\gamma,\sigma,\beta} \mathtt{k}(\pi, \rho, \sigma)$$

现在我们用它来计算定理 1 中的约化 Kronecker 系数。设 $\hat{}\lambda = \nu_1^{\ell(\lambda)} + \lambda$、$\hat{}\mu = \nu_1^{\ell(\mu)} + \mu$ 和 $\hat{}\nu = (\nu_1^{\ell(\lambda)+\ell(\mu)}, \nu)$。则 $m - l = (\ell(\lambda) + \ell(\mu))\nu_1 + n$, $r = \ell(\lambda)\nu_1 + n$, $s = \ell(\mu)\nu_1 + n$, 因此 $l = n$, 上述恒等式可改写为

$$\overline{\mathtt{k}}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\nu}) = \sum_{\substack{l_1, l_2 \\ n = l_1 + 2l_2}} \sum_{\substack{\alpha \vdash r - l_1 - l_2 \\ \beta \vdash s - l_1 - l_2}} \sum_{\substack{\pi, \rho, \sigma \vdash l_1 \\ \gamma \vdash l_2}} c^{\hat{\nu}}_{\alpha,\beta,\pi} c^{\hat{\lambda}}_{\alpha,\rho,\gamma} c^{\hat{\mu}}_{\gamma,\sigma,\beta} \mathtt{k}(\pi, \rho, \sigma)$$

现在注意到 $|\alpha| \geq \ell(\lambda)\nu_1$, 并且若 $c^{\hat{\lambda}}_{\alpha,\ \rho,\ \gamma} > 0$, $c^{\hat{\nu}}_{\alpha,\ \beta,\ \pi} > 0$, 则 $\alpha \subset \hat{}\nu \cap \hat{}\lambda = (\nu_1^{\ell(\lambda)})$。于是必有 $\alpha = \nu_1^{\ell(\lambda)}$, 从而 $l_1 + l_2 = n$。由于 $l_1 + 2l_2 = n$, 必有 $l_2 = 0$ 和 $l_1 = n$, 因此 $\gamma = \emptyset$。类似地, 我们得到 $\beta = (\nu_1^{\ell(\mu)})$, 剩下

$$\overline{\mathtt{k}}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\nu}) = \sum_{\pi, \rho, \sigma \vdash n} c^{\hat{\nu}}_{\alpha,\beta,\pi} c^{\hat{\lambda}}_{\alpha,\rho} c^{\hat{\mu}}_{\sigma,\beta} \mathtt{k}(\pi, \rho, \sigma),$$

$\hat{}$ 注意到, 由于 α 是 λ 开头的矩形, Littlewood-Richardson 规则给出: $c^{\hat{\lambda}}_{\alpha,\ \rho} = 0$ 若 $\rho \neq \hat{}\lambda/\alpha = \lambda$, 否则为 1。类似地, 其他 Littlewood-Richardson 系数除非 $\sigma = \mu$ 和 $\pi = \nu$, 否则均为零, 因此只剩下一个分拆三元组 $(\pi, \rho, \sigma) = (\nu, \lambda, \mu)$, 其系数为 1, 从而得到定理 1 中的恒等式。

参考文献

[BB17] Christine Bessenrodt 和 Christopher Bowman。对称群特征标的无重数克罗内克积。 *Advances in Mathematics*, 322:473–529, 2017年。[BDVO15] Christopher Bowman、Maud De Visscher 和 Rosa Orellana。分拆代数与克罗内克系数。 *Transactions of the American Mathematical Society*, 367(5):3647–3667, 2015年。[BL18] Jonah Blasiak 和 Ricky Ini Liu。克罗内克系数与非交换超 Schur 函数。 *Journal of Combinatorial Theory Series A* 158 315 361, 2018 , ,:–。[

Bla17] Jonah Blasiak。单钩形状的克罗内克系数。 *Sém. Lothar. Combin*, 77:2016–2017, 2017年。[BMS15] Jonah Blasiak、Ketan Mulmuley 和 Milind Sohoni。几何复杂性理论 IV: 克罗内克问题的非标准量子群。载于 *Memoirs of the American Mathematical Society*, 第235卷。2015年。[BO05] Cristina M Ballantine 和 Rosa C Orellana。关于克罗内克积

$s_{(n-p,p)} * s_\lambda$ *The Electronic Journal*。 , 第 R 页。 *of Combinatorics* 28, 2005

[BO06] Cristina M Ballantine 和 Rosa C Orellana。克罗内克积$s_{(n-p,p)} * s_\lambda$中系数的一种组合解释。 *Sém. Lothar. Combin. A*, 54A:B54Af, 2006年。[BOR09] Emmanuel Briand、Rosa Orellana 和 Mercedes Rosas。约化克罗内克系数及对 Mulmuley 强饱和猜想的反例: 附录由 Ketan Mulmuley 撰写。 *Computational Complexity* 18 577 600, 2009 , :–。[

BOR11] Emmanuel Briand、Rosa Orellana 和 Mercedes Rosas。舒尔函数克罗内克积的稳定性。 *Journal of Algebra*, 331(1):11–27, 2011。[Bri93] Michel Brion。复合的稳定性质: 关于 Foulkes 的两个猜想。 *Manuscripta mathematica*, 80 347 371, 1993 : – g[Chr06] Matthias Christandl *The Structure of Bipartite Quantum States - Insights from Group Theory and Cryptography* 2006 0604183 。博士论文, 。

arXiv:guant-ph/。[CR15] Laura Colmenarejo 和 Mercedes Rosas。一族约化克罗内克系数的组合学。 *Comptes Rendus Mathématique*, 353:865–869, 2015年。[Dvi93] Yoav Dvir。关于 S_n 特征标的克罗内克积。 *Journal of Algebra*, 154(1):125–140, 1993年。

[Ful97] William Fulton。 *Young tableaux: with applications to representation theory and geometry*。第35号。剑桥大学出版社，1997年。[GR85] Adriano M Garsia 和 Jeffrey Remmel。排列的洗牌与克罗内克积。 *Graphs and Combinatorics* 1 217 263, 1985 ，：–。[Ike12] Christian Ikenmeyer。 *Geometric complexity theory, tensor rank, and Littlewood-Richardson coefficients*。博士论文，帕德博恩，帕德博恩大学¨，2012年。[IMW17] Christian Ikenmeyer、Ketan Mulmuley 和 Michael Walter。关于克罗内克系数的消失。 *computational complexity* 26 949 992, 2017 ，：–。[IP17] Christian Ikenmeyer 和 Greta Panova。几何复杂性理论中的矩形克罗内克系数与复合运算。 *Advances in Mathematics*，319:40–66，2017年。[IP22] Christian Ikenmeyer 和 Igor Pak。什么属于#P，什么不属于? 载于*on Foundations of Computer Science (FOCS)* 860 871 2022 *2022 IEEE 63rd Annual Symposium* ，第–页。IEEE，。[JK84] Gordon James 和 Adalbert Kerber。 *The Representation Theory of the Symmetric Group*。《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，1984年。[Kir04] Anatol N Kirillov。广义饱和猜想导论。 *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* 40 4 1147 1239, 2004 ，( ): –。[Kly04] Alexander Klyachko。量子边缘问题与对称群的表示。arXiv:quant-ph/0409113，2004年。[KT99] Allen Knutson 和 Terence Tao。$GL_n(\mathbb{C})$张量积的蜂窝模型 I：饱和猜想的证明。 *Journal of the American Mathematical Society*, 12(4):1055–1090，1999年。[Las79] Alain Lascoux。对称群表示的克罗内克积。载于 , , 第–页。施普林格，。[Liu17] Ricky Liu。单钩形状的一条简化克罗内克规则。 *Proceedings of the American Mathematical Society* 145 9 3657 3664, 2017 ，( ): –。[Mac98] Ian Grant Macdonald。 *Symmetric functions and Hall polynomials*。牛津大学出版社，第2版，1998年。[Man15] Laurent Manivel。克罗内克系数的渐近性。*Journal of Algebraic Combinatorics*，42 4 999 1025，2015 ( ): –。[Mur38] Francis D Murnaghan。对称群不可约表示的克罗内克积分析。 *American journal of mathematics*，60(3):761–784，1938年。[Mur56] Francis D Murnaghan。关于对称群不可约表示的克罗内克积。 *Proceedings of the National Academy of Sciences*，42(2):95–98，1956年。[OZ20] Rosa Orellana 和 Mike Zabrocki。多元多项式环分解为 S_n-模的一种组合模型。 *The Electronic Journal of Combinatorics*，27:#P3.24，2020。[OZ21] Rosa Orellana 和 Mike Zabrocki。作为对称函数的对称群特征标。 *Advances in Mathematics* 390 2021 ，，。[Pak22] Igor Pak。什么是组合解释? 预印本，https://www.samuelfhopkins.com/OPAC/files/proceedings/pak.pdf，即将发表于 Proc. OPAC，2022年。[Pan15] Greta Panova。克罗内克系数：组合、复杂性及其他。演示文稿，https://drive.google.com/file/d/1T2bVbLa4Bozy2_VBzT_Z0aezw8Y7ysrX/view，2015年。[Pan23] Greta Panova。结构常数的复杂性与渐近性。 *Open Problems in Algebraic Combinatorics* 2023 ，。[PP14] Igor Pak 和 Greta Panova。通过克罗内克积证明单峰性。 *Journal of Algebraic Combinatorics*，40 1103 1120，2014 : –。[PP17a] I. Pak 和 G. Panova。关于计算克罗内克系数的复杂性。 *Comput. Complexity*，26 36，2017 1: –。[PP17b] Igor Pak 和 Greta Panova。某些类克罗内克系数和 q-二项式系数的界。 *Journal of Combinatorial Theory Series A* 147 1 17, 2017 ，，: –。[PP20a] Igor Pak 和 Greta Panova。通过列联表给出克罗内克系数的界。 *Linear Algebra and its Applications* 602 157 178, 2020 ，: –。[PP20b] Igor Pak 和 Greta Panova。分解约化克罗内克系数。 *Comptes Rendus Mathématique* 358 4 463 468, 2020 ，( ): –。[Rem89] Jeffrey B. Remmel。钩形舒尔函数克罗内克积的一个公式。 *J. Algebra*，120 1 100 118，1989 ( ): –。[RW94] Jeffrey B. Remmel 和 Tamsen Whitehead。关于两行形舒尔函数的克罗内克积。*Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 1(5):649–683，1994年。[Sag13] Bruce E Sagan。 *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*，第203卷。施普林格科学与商业传媒，2013年。

[SS16] Steven Sam 和 Andrew Snowden。关于 Kronecker 系数稳定性的 Stembridge 猜想的证明。
Journal of Algebraic Combinatorics，43(1)：1–10，2016。[Sta99] Richard Stanley。 *Enumerative Combinatorics*，第 2 卷。剑桥大学出版社，第 1 版，1999 年。[Sta00] Richard P Stanley。代数组合学中的正性问题与猜想。*Mathematics: Frontiers and Perspectives* 295 319, 2000 ，第 – 页。[Ste] John R. Stembridge。Kronecker 系数的广义稳定性。http://www.math.lsa.umich.edu/~jrs。[Tew15] Vasu V Tewari。某些近矩形分拆的 Kronecker 系数。*Journal of Algebra* 429 287 317, , ： –。2015
[Val99] Ernesto Vallejo。对称群不可约特征的 Kronecker 积的稳定性。*The Electronic Journal of Combinatorics* 6 39, 1999 ，：R。[Val09] Ernesto Vallejo。复 S_n *The* 特征标的 Kronecker 积中系数的一种稳定性。*Electronic Journal of Combinatorics* 16 22 1, 2009 ，（）：。[Val20] Ernesto Vallejo。通过离散层析成像研究 Kronecker 系数的稳定性。*Discrete Mathematics*，343 5 111817，2020（）：。