arXiv:2305.03012v1 [math.CO] 4 May 2023

拟随机加法集和凯莱超图

Davi Castro-Silva

CWI & QuSoft

2023年5月5日

摘要

我们研究加性集合与超图的拟随机性概念之间的相互作用。特别地，我们展示了加性情形中的Gowers一致性概念与超图情形中以偏差形式刻画的拟随机性概念之间的紧密联系。利用这一联系，我们列举了关于加性集合以及由此类集合构造的Cayley型超图的大量不同拟随机性质，并证明这些性质彼此等价（按照Chung、Graham和Wilson的意义），且它们之间的相互依赖关系具有多项式界。

1 引言

拟随机性质可以非正式地理解为所研究对象具有随机性的证明。给定某一类组合对象，例如图或3-均匀超图，如果这些对象的某个（确定性）性质满足以下两个条件，我们就称其为拟随机性质：该类中均匀随机选取的对象以高概率满足这一性质；并且任何满足这一性质的对象，在许多其他方面也会表现得像一个随机对象。在这种情况下，仅凭知道某个对象满足某种拟随机性质，我们就能获得关于其在诸多方面行为的大量信息；这样的对象随后被称为拟随机对象。

拟随机性的概念最初是在图的背景下提出的，见 Chung、Graham和Wilson 的开创性论文 [10]。这些作者考察了随机图通常具有的若干自然性质——例如具有预期的子图计数、在顶点割上具有一致的边分布，或具有较大的谱隙——并证明这些性质在某种特定意义下彼此等价。继他们的工作之后，对拟随机性质的研究已扩展到其他几类组合对象；有关大量参考文献，请参阅 Chung的网站 [4]。本文将考察超图和加性集合（即加法群的子集），重点关注它们各自的拟随机性质之间的关系。

拟随机超图

拟随机图的概念提出后，Chung和Graham [7, 8] 以及Ko- hayakawa、R¨odl和Skokan [19] 着手将这类概念推广到超图。他们考察了 k-一致超图（k-图），这类超图模仿随机超图 $G^{(k)}(n,p)$：其中，$[n] := \{1,2,\dots,n\}$ 中每个含有 k 个元素的集合都独立地以概率 p 被选为一条超边。超边之间缺乏相关性，由此带来了很强的均匀性，使随机超图易于处理；随后，人们证明其中一些良好性质大致构成了一个随机类特征的等价类。

Chung 和 Graham 的研究中的核心概念是超图的偏差。给定一个 k 阶图 H，我们用 $v(H)$ 和 $e(H)$ 分别表示 H 中顶点和超边的数量，并用 $\delta(H)$ 表示其超边密度。超图的偏差可以看作衡量其超边分布与其试图模拟的随机分布相差多少；其形式化定义为

$$\mathrm{dev}_k(H) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}^{(0)},\mathbf{x}^{(1)}\in V(H)^k} \prod_{\omega\in\{0,1\}^k} \big(H(x_1^{(\omega_1)},\dots,x_k^{(\omega_k)}) - \delta(H)\big),$$

其中，$H(x_1,\dots,x_k)$ 表示超边示性函数 $\mathbb{I}\big[\{x_1,\dots,x_k\}\in E(H)\big]$。恒有 $0 \le \mathrm{dev}_k(H) \le 1$，并且可以证明，随机超图以高概率具有非常小的偏差。

相比之下，Kohayakawa、R¨odl 和 Skokan 研究中的核心概念是超图的偏差，它量化了相对于低阶结构衡量时，其超边分布距离均匀分布有多远。在他们的论文中，这些低阶结构由 $(k-1)$-图的 k 阶团给出；而在这里，我们将采用稍微更一般的 $(k-1)$-割概念。于是，k 阶图 H 的偏差定义为

$$\mathrm{disc}_{k-1}(H) = \max_{S_1,\dots,S_k\subseteq V(H)^{k-1}} \left| \mathbb{E}_{\mathbf{x}\in V(H)^k} \left[\big(H(\mathbf{x}) - \delta(H)\big) \prod_{i=1}^{k} S_i\big((x_j)_{j\neq i}\big) \right] \right|,$$

其中，我们对集合 S 及其示性函数 $\mathbb{I}[x\in S]$使用相同的记号。不难证明，随机超图以高概率具有非常小的偏差。偏差和偏差都可以视为拟随机性的度量。

在随机超图中，另一种可以准确估计的统计量是作为子图出现的各种较小超图的数量。给定两个超图 F 和 H，用 $N_F(H)$表示 H 中 F 的带标记副本数。如果 H是随机超图 $G^{(k)}(n,p)$，那么 $N_F(H)$的期望值为

$$p^{e(F)} n(n-1)\dots(n-v(F)+1) = p^{e(F)} n^{v(F)} + O(v(F)^2 n^{v(F)-1});$$

此外，$N_F(H)$高度集中于这一期望值附近。Chung 和 Graham [7, 8], 以及 Kohayakawa、R¨odl 和 Skokan [6], 证明，大型超图 H 若具有较小的偏差（$\mathrm{dev}_k(H) = o(1)$）或较小的偏差。

$(\mathrm{disc}_{k-1}(H) = o(1))$ 必须包含所有有界大小子图的近似预期数量： $N_F(H) = \delta(H)^{e(F)}v(H)^{v(F)} + o(v(F)^2 v(H)^{v(F)})$。

八面体在他们的研究结果中发挥着特殊作用。 k-八面体 $\mathrm{OCT}^{(k)}$ 是一个完全 k部 k图，其中每个顶点类恰好包含两个顶点。注意， k图 H 的偏差可以解释为八面体 $\mathrm{OCT}^{(k)}$的平均加权计数，其中权重由平衡示性函数$H(x_1, \dots, x_k) - \delta(H)$给出。文献 [19] 证明， $\mathrm{OCT}^{(k)}$ 对于上述拟随机性概念是完备的：任何具有近似“正确”比例的同构于 $\mathrm{OCT}^{(k)}$ 的子图的 k图 H ——即具有相同超边密度的随机超图中预期的比例——都将在他们的意义下表现出拟随机性；特别地，由此可知， H 作为子图，也将具有近似正确比例的其他任意固定 k图 F （其规模有界）。

尽管取得了这些成果，但与图这一更简单的情形形成对比的是，事实证明，超图的拟随机性概念存在若干彼此不同的等价类。这些不同的等价类及其相互关系已由 Chung [5], Kohayakawa、Nagle、R¨odl 和 Schacht [18], Conlon、H`an、Person 和 Schacht [11],Lenz 和 Mubayi [20] 以及 Towsner [21], 等学者进行了研究。

设 d 和 k 是满足 $1 \le d < k$的整数，并设 H 是一个 k-一致超图。 H 的d-偏差定义为

$$\mathrm{disc}_d(H) = \max_{S_B \subseteq V(H)^d : B \in \binom{[k]}{d}} \left| \mathbb{E}_{\mathbf{x} \in V(H)^k} \left[\big(H(\mathbf{x}) - \delta(H)\big) \prod_{B \in \binom{[k]}{d}} S_B\big((x_j)_{j \in B}\big) \right] \right|,$$

其中，最大值取遍所有由 $\binom{k}{d}$ 个 $V(H)^d$ 子集构成的集合，这些子集以 $[k]$的 d-子集为索引。它衡量的是：以 d阶结构为参照时， H 的超边距离均匀分布有多远；如果 H 的 d-偏差很小，我们就认为它具有 d阶拟随机性。更正式地说，如果 $\mathrm{disc}_d(H) \le \varepsilon$，我们称 H 是ε拟随机的，且阶为 d 。

偏差的概念也可以推广到其他阶。我们将 H的d-偏差记为 $\mathrm{dev}_d(H)$，并定义为

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)} \in V(H)^d} \mathbb{E}_{y_{d+1}, \dots, y_k \in V(H)} \prod_{\omega \in \{0,1\}^d} \big(H(x_1^{(\omega_1)}, \dots, x_d^{(\omega_d)}, y_{d+1}, \dots, y_k) - \delta(H)\big).$$

正如 k-偏差 $\mathrm{dev}_k(H)$可以看作八面体 $\mathrm{OCT}^{(k)}$的加权计数， d-偏差也可以看作压扁八面体 $\mathrm{OCT}_d^{(k)}$ 的加权计数；这些压扁八面体由向 $\mathrm{OCT}^{(d)}$ 添加 $k-d$ 个额外顶点，并将它们分别连接到每条超边上构成。Chung [5] 证明，每个 k图若其 d-偏差很小，则其 $(d-1)$-偏差也必然很小；然而，正如 Lenz 和 Mubayi [20], 所指出的，反方向并不成立，这两个概念彼此不同。

Kohayakawa、Nagle、R¨odl 和 Schacht [18] 证明了，1 阶拟随机性（也称为弱拟随机性）足以控制任意线性超图的计数，即每对超边至多相交于一个顶点的超图。

随后，Conlon、H`an、Person 和 Schacht [11] 证明，存在一个对弱拟随机性这一概念完备的线性超图 $\mathrm{M}_1^{(k)}$：如果一个超图 H 包含的与 $\mathrm{M}_1^{(k)}$ 同构的子图数量约等于预期数量，那么它必然是弱拟随机的。Lenz 和 Mubayi [20] 确定了若干拟随机性概念之间的蕴含偏序。

这些结果最终由 Towsner [21], 加以推广，他提出了许多拟随机性概念的等价类——包括此前研究过的所有概念——并得出了这些等价类之间的相互关系。他证明，阶为 d 的拟随机性等价于对所有 d-线性超图都具有相应的计数，其中每对超边至多相交于 d 个顶点；它也等价于某种特定类型的偏差很小。他还构造了一个特定的 d- 线性 k-图 $\mathrm{M}_d^{(k)}$，它对阶为 d的拟随机性是完备的；其结果在下文第 2.2 节中作了正式陈述。

一致加性集

另一方面，拟随机性的研究也扩展到了加性群的子集。在这种情形下，群运算带来了强大的内在结构，而拟随机性的概念则与所考察的集合相对于这种加性结构的表现有关。

最早研究这一情形的仍是 Chung 和 Graham [9]。他们考察了循环群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$的子集，并找出了许多自然但看似无关的性质；事实证明，这些性质对于 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的随机子集而言彼此等价。这些性质包括：非平凡傅里叶系数较小；与大集合的平移集相交的频率符合预期；加性四元组的数量符合预期[1], ；其 Cayley 和图是拟随机图；以及其他若干性质。Chung 和 Graham 的定理虽然仅适用于循环群，但其结果实际上可以推广到任意有限加性群（见 [2, 3]）。

Gowers 首先注意到，与超图的情形十分相似，加性集合（更一般地说，加法群上的有界函数）也存在一种自然的拟随机性概念层级。这些概念由所谓的 Gowers 一致性范数刻画，它们控制给定集合中若干加性模式（例如 k 项等差数列）的统计特征。这些范数最初由 Gowers 在其著名的 Szemer´edi 定理证明中定义 [13, 14], ，此后已被证明在加性组合学和理论计算机科学的许多问题中都很有用。

给定有限加性群 G 和整数 $k \geq 2$，我们将函数 $f\colon G \to \mathbb{R}$ 的一致性范数 U^k 定义为

$$\|f\|_{U^k} = \left(\mathbb{E}_{x,h_1,\ldots,h_k \in G} \prod_{\omega \in \{0,1\}^k} f\left(x + \sum_{i=1}^{k} \omega_i h_i \right) \right)^{1/2^k}.$$

[1]加性四元组是一个满足 $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ 的元组 (x_1, x_2, x_3, x_4)。

如果 $f: G \to \{-1,1\}$ 是一个均匀随机函数，且 G 非常大，那么以高概率， f的 U^k-范数会非常小：可以证明 $\mathbb{E}\|f\|_{U^k}^{2^k} = O(1/|G|)$。更一般地，如果我们通过以概率 δ 独立地纳入每个元素 $x \in G$ 来随机选取一个子集 $A \subseteq G$ ，那么以高概率有 $\|A-\delta\|_{U^k} = O(|G|^{-1/2^k})$。

满足 $\|A-\delta\|_{U^k} \le \varepsilon$ （对 $\delta = |A|/|G|$ ）的加性集合 $A \subseteq G$ 称为 ε-一致的，次数为 $k-1$。（这个名称的由来是，此类集合与任何次数为 $k-1$ 的结构都不相关。）如果 A 对某个较小的 $\varepsilon > 0$ 是该次数的 ε-一致的，我们就非正式地称 A 为次数为 $k-1$ 的一致集合。

事实证明， U^2-范数与傅里叶系数密切相关：容易证明，

$$\|f\|_{U^2}^4 = \sum_{\gamma \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\gamma)|^4.$$

因此，当且仅当一个集合 $A \subseteq G$ 是线性均匀的（即次数为 1 的均匀集合）时，它的所有非平凡傅里叶系数都很小；这与 Chung 和 Graham [9]，所研究的拟随机性概念一致，但这仅仅是拟随机阶梯的第一步。Gowers 一致性范数构成了一个层次结构，其中 U^{k+1}-范数比每个 $k \ge 2$ 的 U^k-范数都更强。通过依次考虑对每个 $d \ge 1$ 都具有次数为 d 的均匀性这一性质，我们便得到了一个关于加性集合的无限层次结构，其中拟随机性概念逐渐增强。

这些概念在加性组合学中的重要性，源于这样一个事实： k 阶一致性足以控制（$k+2$）项等差数列的计数，以及若干其他复杂度至多为k的线性构型。除此之外，每个“非退化”的线性形式系统都可以由某个一致性范数 U^k控制。从某种意义上说，近期加性组合学研究中相当大的一部分——尤其是高阶傅里叶分析领域——都可以看作是在寻找有用的拟随机性质，使其等价于某个给定阶的一致性范数较小。（这个问题通常以逆否命题的形式表述：如果有界函数 f 的 U^k范数不可忽略，那么我们能从中了解到关于 f的哪些结构信息？）

我们的结果：关联这两个概念

鉴于（超）图论与加性组合学之间已有诸多联系，我们不禁要问：超图中拟随机性概念的自然层级（由各阶 d的拟随机性给出）与加性群中拟随机性概念的自然层级（由 d阶一致性给出）之间有何关联?

Aigner-Horev 和 H`an [2],迈出了回答这一问题的第一步，他们证明了加性集合的线性均匀性与超图的弱拟随机性这两个概念之间存在紧密联系。给定一个整数 $k \ge 2$、一个有限加性群 $G$ 和一个子集 $A \subseteq G$，将 Cayley 超图 $\Gamma_A^{(k)}$ 定义为顶点为 $G$ 的元素，且当且仅当 $k$ 个顶点的和属于 $A$时，它们构成一条超边的超图。Aigner-Horev 和 H`an 证明，对于任意固定的 $k \ge 2$,

超图 $\Gamma_A^{(k)}$ 是弱拟随机的，当且仅当集合 A 是线性均匀的；此外，他们还获得了相关一致性度量与拟随机性度量之间的多项式界。

我们的第一个主要结果是将一致集合与拟随机凯莱超图之间的这种联系推广到拟随机性的所有阶 $d \geq 1$ 。我们将证明，一个次数为 d 的一致加法集合 A ，对于任意超边大小 $k \geq d+1$，都会生成阶为 d 的拟随机超图 $\Gamma_A^{(k)}$ ；反过来，只需知道这些超图中的任意一个是阶为 d 的拟随机超图，就可以断定 A 具有相同次数的一致性。更准确地说，我们证明：

定理 1。设 $d \geq 1$ 为整数，且 $\varepsilon \in \in (0,1)$。设 G 为有限加性群， $A \subseteq G$ 为其子集。

(i) 若 A 是 ε-一致的，次数为 d，则对所有 $k \geq d+1$，凯莱超图 $\Gamma_A^{(k)}$ 都是 ε-拟随机的，阶为 d。(ii) 反过来，若对于某个 $k \geq d+1$， $\Gamma_A^{(k)}$ 是 ε-拟随机的，阶为 d，则 A 是$2\varepsilon^{c_{k,\ d}}$-一致的，次数为 d。这里可以取 $c_{k,\ d} = 2^{-(d+2)(2d+2)^k}$。

接下来，我们将结合这一“定理”与文献中关于拟随机超图的已知结果以及初等组合论论证，证明关于加性集合及其相关凯莱超图的一系列看似迥异的拟随机性质彼此等价。这是我们的第二个主要结果，我们称之为等价定理。

下面给出等价定理的非正式表述，其中用到的一些术语将在后文中正式定义；精确表述见定理 5。粗略地说， $\Phi_d^{(k)}$ 是超图 $\mathrm{M}_d^{(k)}$ 在算术上的对应物，而后者对阶为 d的拟随机性是完备的；$(d+1)$-简单超图则是 d-线性超图的一种推广，其中每条超边都有一个大小为 $d+1$、且仅属于它的“指纹”。

定理 2（等价定理，非正式表述）。设 $d \geq 1$ 是一个整数。对于每个固定的 $k \geq d+1$，以下陈述在多项式意义下等价，其中 G 是一个有限加性群， $A \subseteq G$ 是一个子集：

(i) A 具有次数为 d 的一致性。(ii) A 包含的 $\Phi_d^{(k)}$ 类型模式很少。(iii) $\Gamma_A^{(k)}$ 是 d 阶拟随机的。(iv) $\Gamma_A^{(k)}$ 能准确计数所有 d-线性超图。(v) $\Gamma_A^{(k)}$ 能准确计数所有 $(d+1)$-简单超图。(vi) $\Gamma_A^{(k)}$ 包含的压扁八面体 $\mathrm{OCT}_{d+1}^{(k)}$ 很少。

(vii) $\Gamma_A^{(k)}$ 的 $(d+1)$-偏差很小。

最后，我们指出这个最后的定理有一个耐人寻味的特点：对于一般的 k-图，所述超图性质（iii） $-$（vii）并不等价；只有对于由加性集合产生的图，它们才等价。事实上，可以证明，对于所有 k-图，性质（iii） $-$（iv）等价，性质（v） $-$（vii）也等价；但性质（iii） $-$（iv）严格弱于（v） $-$（vii）（这一事实最早由 Lenz 和 Mubayi [20] 指出）。这揭示了超图与加法群中的拟随机性概念之间一个有趣的差异，尽管定理 1 表明二者有着密切联系，这种差异依然存在。

2 预备知识：拟随机性的概念

这里我们汇集本文中将用到的必要记号，并正式引入超图中恰当的拟随机性概念。关于更深入的阐述，请读者参阅近期的综述 [3]。

2.1 基本定义与记号

为了简化记号，并避免在估计式中充斥可忽略的误差项，我们将采用带环的（简单、无向）超图。更正式地说：

定义 1（超图）。对于整数 $k \geq 2$， k-一致超图（也称为 k-图）是一个有序对 $H = (V(H), E(H))$，其中 $E(H)$ 是 $V(H)^k$ 的对称子集。我们用 $v(H) = |V(H)|$ 表示其顶点数，用 $e(H) = |E(H)|$ 表示其超边数，用 $\delta(H) = e(H)/v(H)^k$ 表示其超边密度，用 $H(x_1, \ldots, x_k)$ 表示其超边指示函数 $\mathbb{I}\big[\{x_1, \ldots, x_k\} \in E(H)\big]$。

注意，由于在 $V(H)^k$ 中至多有 $\binom{k}{2} v(H)^{k-1}$ 个含有重复元素的元组，而总共有 $v(H)^k$ k 个元组，因此在大型超图中，可能的环的数量与可能的超边数量相比可以忽略不计。我们的结果对于有环和无环超图并无实质区别。

我们使用标准的期望记号 $\mathbb{E}_{x \in X}$ 表示有限集 X上的平均值 $|X|^{-1} \sum_{x \in X}$。我们用相同的记号表示集合及其示性函数，并用 $x = a \pm b$ 这种形式表示 $a - b \leq x \leq a + b$。给定有限集 A、一个由 A 中的元素索引的元组 $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in A}$ 以及一个子集 $B \subseteq A$，我们用 $\mathbf{x}_B := (x_j)_{j \in B}$ 表示将 $\mathbf{x}$ 投影到其 B-坐标上所得的投影。

多项式等价

本文所使用的等价概念称为多项式等价。假设有两个性质 $P_1 = P_1(c_1)$ 和 $P_2 = P_2(c_2)$，某个给定对象 H 可能满足这两个性质，其中每个性质 P_i 都涉及一个正数常量 $0 < c_i \leq 1$，表示某个允许的误差界。我们称 P_1 和 P_2 多项式等价，如果存在一个常量 $K > 0$，使得对所有 $\varepsilon \in (0, 1]$，以下条件成立：

- 如果 H 的大小至少为 K/ε^K，并且以常量 $c_1 \leq \varepsilon^K/K$ 满足 $P_1(c_1)$，那么它也必须以常量 $c_2 = \varepsilon$ 满足 $P_2(c_2)$；
- 如果 H 的大小至少为 K/ε^K，并且满足带常数 $c_2 \leq \varepsilon^K/K$的 $P_2(c_2)$，那么它也必须满足带常数 $c_1 = \varepsilon$的 $P_1(c_1)$。

如果一列性质 $P_1,\ldots,P_k$ 两两多项式等价，则称它们是多项式等价的。

2.2 超图拟随机性

对于每个整数 $1 \leq d < k$，都有一个与之对应的 k-图拟随机性概念等价类；这些概念大致都与其和 d阶结构之间缺乏相关性有关。下面我们将考察其中几种拟随机性概念。

偏差

对我们而言，超图拟随机性的核心概念与其沿给定阶的割的超边分布偏差有关。偏差用于衡量超图的超边距离一致分布有多远，并且可以使用下文定义的割范数进行量化：

定义 2（割范数）。设 k、$d \geq 1$ 为满足 $d < k$ 的整数，且 V 为有限集。我们将函数 $f\colon V^k \to \mathbb{R}$ 的 d- 割范数定义为

$$\|f\|_{\square_d^k} := \max_{S_B \subseteq V^B \, \forall B \in \binom{[k]}{d}} \left| \mathbb{E}_{\mathbf{x} \in V^{[k]}} \left[f(\mathbf{x}) \prod_{B \in \binom{[k]}{d}} S_B(\mathbf{x}_B) \right] \right|,$$

其中，最大值取遍所有集合的族 $(S_B)_{B \in \binom{[k]}{d}}$，其中每个 S_B 都是 V^B 的子集。

直观地说，超图的超边分布得越一致，$\|H - \delta(H)\|_{\square_d^k}$ 的值就越小。由于随机超图的超边通常分布得非常一致，因此我们可以将割范数较小视为超图的一种拟随机性质。更准确地说：

定义 3（偏差）。d-图 H 的 d-偏差定义为

$$\mathrm{disc}_d(H) := \|H - \delta(H)\|_{\square_d^k} \quad \text{where } \delta(H) = e(H)/v(H)^k.$$

给定 $\varepsilon > 0$，如果 $\mathrm{disc}_d(H) \leq \varepsilon$，则称 k-图 H 是 ε-拟随机的，阶为 d。

从割范数的定义可以很容易看出，

$$0 \leq \|f\|_{\square_1^k} \leq \|f\|_{\square_2^k} \leq \cdots \leq \|f\|_{\square_{k-1}^k} \leq \|f\|_\infty,$$

因此

$$0 \le \mathrm{disc}_1(H) \le \mathrm{disc}_2(H) \le \cdots \le \mathrm{disc}_{k-1}(H) \le 1.$$

因此，k-图若是阶为 d 的 ε-拟随机图，那么对于所有 $1 \le \ell \le d$，它也将是阶为 ℓ 的 ε-拟随机图。

备注。Chung [5] 和 Kohayakawa、R¨odl 及 Skokan [19] 的研究中所使用的偏差概念与上述定义略有不同；我们在下文回顾这一概念，并将其称为团差异度。给定一个 d-图 G，令 $\mathcal{K}_k(G)$ 表示 G 中所有 k-团的集合（即由 k 个顶点组成的集合，其中每个 d-子集都是 G 的超边）。一个 k-一致超图 H 的d-团差异度定义为

$$\frac{1}{v(H)^k} \max_{d\text{-graph } G} \big||H \cap \mathcal{K}_k(G)| - \delta(H)|\mathcal{K}_k(G)|\big|,$$

其中最大值取遍所有与 H 具有相同顶点集的 d 图 G。从形式上看，这个概念与我们衡量 $\|H - \delta(H)\|_{\square_d^k}$ 的 d 阶拟随机性的方式非常相似（展开所有记号后即可看出），而且可以证明这两个量彼此之间存在多项式关系。我们将 d-团差异度和 d-偏差视为同一概念的不同表述，并出于技术原因选择使用后者。

子超图计数

大型超图 H 的一个重要统计量，是其中作为子图出现的各种较小超图 F 的数量。计算这类副本的一种便捷方法，是使用同态密度：

定义 4（同态密度）。设 F 和 H 是两个 k-图。F 在 H中的同态密度记作 $t(F,H)$，它是随机选取的映射 $\phi\colon V(F) \to V(H)$保持超边的概率。

同态密度也可以等价地用以下公式定义：

$$t(F,H) = \mathbb{E}_{\mathbf{x} \in V(H)^{V(F)}} \prod_{e \in E(F)} H(\mathbf{x}_e),$$

当 H 为边加权时，这个定义同样成立；后文也会用到这种加权情形。注意，

$$N_F(H) = t(F,H) v(H)^{v(F)} \pm \binom{v(F)}{2} v(H)^{v(F)-1},$$

其中 $N_F(H)$是 H 中与 F同构的带标号子图总数；因此，可以将关于大型超图中子图计数的陈述转化为关于同态密度的陈述，反之亦然。

以下是我们结果中一类重要的超图：

定义 5（d-线性超图）。如果超图 H 中的任意两条 H 超边至多相交于 d 个顶点，则称其为 d-线性超图。我们用 $\mathcal{L}_d^{(k)}$ 表示所有 d-线性 k图构成的集合。

Towsner 证明了，次数为 d 的拟随机性是控制每个 d-线性超图计数的必要且充分条件；参见下文的定理 3。

偏差

回顾一下， k-八面体 $\mathrm{OCT}^{(k)}$ 是完全 k-部图，其中每个顶点类都有两个顶点。压扁八面体是它们的推广，定义如下：

定义 6（压扁八面体）。给定整数 $1 \le d < k$，我们将压扁八面体 $\mathrm{OCT}_d^{(k)}$ 定义为顶点集为 $\{x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_d^{(0)}, x_d^{(1)}, y_{d+1}, \dots, y_k\}$、边集如下的 k-图：

$$E(\mathrm{OCT}_d^{(k)}) = \Big\{ \{x_1^{(\omega_1)}, \dots, x_d^{(\omega_d)}, y_{d+1}, \dots, y_k\} : \omega \in \{0,1\}^d \Big\}.$$

仿照 Chung [5], ，我们将 k-图 H 的 d-偏差定义为

$$\mathrm{dev}_d(H) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)} \in V(H)^d} \mathbb{E}_{y_{d+1}, \dots, y_k \in V(H)} \prod_{\omega \in \{0,1\}^d} \big(H(x_1^{(\omega_1)}, \dots, x_d^{(\omega_d)}, y_{d+1}, \dots, y_k) - \delta(H) \big).$$

注意 此处等于压扁八面体的加权计数 $t\big(\mathrm{OCT}_d^{(k)}, H - \delta(H)\big)$。

八面体范数

八面体范数提供了衡量强拟随机性的另一种方法，其依据是对八面体进行加权计数。其定义本质上归功于 Gowers [15]。

定义 7（八面体范数）。给定一个函数 $f\colon V^k \to \mathbb{R}$，我们将其八面体范数定义为

$$\|f\|_{\mathrm{OCT}^k} := \left(\mathbb{E}_{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)} \in V^k} \prod_{\omega \in \{0,1\}^k} f\big(\mathbf{x}^{(\omega)}\big) \right)^{1/2^k}, \tag{1}$$

其中我们记作 $\mathbf{x}^{(\omega)} := \big(x^{(\omega_i)}{}_i\big)_{i \in [k]}$。

可以证明，对于每个实值函数 f，式 (1) 右侧的期望均为非负，且 $\|\cdot\|_{\mathrm{OCT}^k}$ 确实定义了一个范数。八面体范数的一个重要性质是，它对应一个广义内积，记作 $\langle \cdot \rangle_{\mathrm{OCT}^k}$。对于 2^k 个函数 $f_\omega\colon V^k \to \mathbb{R}$、 $\omega \in \{0,1\}^k$，我们将其定义为

$$\big\langle (f_\omega)_{\omega \in \{0,1\}^k} \big\rangle_{\mathrm{OCT}^k} := \mathbb{E}_{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)} \in V^k} \prod_{\omega \in \{0,1\}^k} f_\omega\big(\mathbf{x}^{(\omega)}\big). \tag{2}$$

利用这个内积，我们有 $\|f\|_{\mathrm{OCT}^k}^{2^k} = \langle f、\ f、\ \ldots\ldots、\ f \rangle_{\mathrm{OCT}^k}$。

八面体范数及其相关内积的一个非常有用的性质是，它们满足一种柯西-施瓦茨不等式。该结果最初由 Gowers 提出（不过使用了不同的记号），如今称为 Gowers-柯西-施瓦茨不等式：

引理 1（Gowers-柯西-施瓦茨不等式）。对于任意一组函数 $f_\omega : V^k \to \mathbb{R}$, $\omega \in \{0,1\}^k$，我们有

$$\left\langle (f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^k} \right\rangle_{\mathrm{OCT}^k} \le \prod_{\omega\in\{0,1\}^k} \|f_\omega\|_{\mathrm{OCT}^k}.$$

该引理通过反复应用柯西-施瓦茨不等式得到证明；证明参见例如 [3, 第 4 节。5] 作为 Gowers-柯西-施瓦茨不等式的推论，可以很容易地证明，八面体范数强于割范数：

引理 2. 对于任意函数 $f\colon V^k \to \mathbb{R}$，我们有 $\|f\|_{\square_{k-1}^k} \le \|f\|_{\mathrm{OCT}^k}$。

证明。给定函数 $u_B\colon V^B \to [0,1]$, $B \in \binom{[k]}{k-1}$，令 $f_{\omega_B}\colon V^{[k]} \to \mathbb{R}$ 为由 $f_{\omega_B}(\mathbf{x}^{[k]}) = u_B(\mathbf{x}_B)$ 定义的函数，其中 $\omega_B \in \{0,1\}^{[k]}$ 是集合B的示性向量。对于所有未包含在集合 $\{\omega_B$ 中的 $\omega \in \{0,1\}^{[k]} \setminus \{\mathbf{1}\}$，也记作 $f_{\mathbf{1}} = f$ 和 $f_\omega \equiv 1\colon B \in \binom{[k]}{k-1}\}$。

利用 Gowers-柯西-施瓦茨不等式，我们得出

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}_{\mathbf{x}\in V^{[k]}}\left[f(\mathbf{x})\prod_{B\in\binom{[k]}{k-1}} u_B(\mathbf{x}_B)\right]\right| &= \left|\mathbb{E}_{\mathbf{x}^{(0)},\mathbf{x}^{(1)}\in V^k}\prod_{\omega\in\{0,1\}^k} f_\omega\left(\mathbf{x}^{(\omega)}\right)\right| \\ &\le \prod_{\omega\in\{0,1\}^k}\|f_\omega\|_{\mathrm{OCT}^k}.\end{aligned}$$

由于显然对所有 $\omega \in \{0,1\}^{[k]} \setminus \{\mathbf{1}\}$ 都有 $\|f_\omega\|_{\mathrm{OCT}^k} \le \|f_\omega\|_\infty \le 1$，最后一个乘积至多为 $\|f\|_{\mathrm{OCT}^k}$。由于该不等式对所有函数 $u_B\colon V^B \to [0,1]$, $B \in \binom{[k]}{k-1}$ 都成立，结论得证。□

超图等价定理

接下来，我们将介绍 Towsner 定理，该定理阐述了对于任意给定的阶 $d \ge 1$，拟随机性的多种概念之间的关系。我们首先构造在这些概念下具有完备性的超图。

给定一个 k 部 k 图 F，其顶点划分为 $X_1, \ldots, X_k$，并给定一个由 $I \in \binom{[k]}{d}$ 索引的 d 集合，我们将 F 的 I 倍扩张定义为超图 $\mathrm{db}_I(F)$：取 F 的两个副本，并对所有 $i \in I$，将第 X_i 类中的对应顶点识别为同一顶点。更确切地说，该 I 倍扩张的顶点集为

$$V(\mathrm{db}_I(F)) = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k \quad \text{where} \quad Y_i = \begin{cases} X_i & \text{if } i \in I, \\ X_i \times \{0,1\} & \text{if } i \notin I \end{cases}$$

其边集由所有形如以下形式的 k 集合组成

$$\{x_i : i \in I\} \cup \{(x_j, a) : j \in [k] \setminus I\},$$

其中，$a \in \{0,1\}$ 和 $\{x_i : i \in [k]\}$ 是 F的一条超边。从一个具有 k 个顶点和一条超边的 k 部超图开始，然后按照任意顺序，依次对每个$I \in \binom{[k]}{d}$ 应用 db_I，我们便得到一个 k图，将其记为 $\mathrm{M}_d^{(k)}$。

下面我们重述 Towsner [21] 的主要结果的定量版本；该版本可以通过 [1] 中介绍的方法得到。

定理 3（阶为 d 的拟随机性等价定理）。设 $1 \le d < k$ 为整数，且设 H 为一个 k-一致超图，其超边密度为 δ。则以下性质是多项式等价的：

(i) H 具有较小的 d偏差：$\mathrm{disc}_d(H) \le c_1$。

(ii) H 正确计算所有 d-线性超图：

$$t(F,H) = \delta^{e(F)} \pm e(F)c_2 \quad \forall F \in \mathcal{L}_d^{(k)}.$$

(iii) H *has few copies of* $M = \mathrm{M}_d^{(k)}$：$\quad t(M,H) \le \delta^{e(M)} + c_3$.

(iv) H 相对于 $M = \mathrm{M}_d^{(k)}$ 的偏差较小：

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x} \in V(H)^{V(M)}} \prod_{e \in E(M)} \big(H(\mathbf{x}_e) - \delta\big) \le c_4.$$

2.3 值得记住的例子

对于我们所考虑的每一种拟随机性概念，记住一个具体的例子可能会有所帮助。接下来，我们将利用二次剩余众所周知的伪随机性质来给出这类例子。

L设 p 为一个较大的素数，并将 Q_p 记为模 p 的二次剩余集合。 :

$$Q_p = \big\{x \in \mathbb{F}_p : \text{exists } y \in \mathbb{F}_p \text{ with } x = y^2\big\}.$$

这个集合的大小为 $(p+1)/2$，Fouvry、Kowalski 和 Michel [12] 证明了它几乎达到了可能的拟随机程度，也就是说

$$\|Q_p - 1/2\|_{U^{d+1}} = O_d(p^{-1/2^{d+1}}) \quad \text{for all } d \ge 1.$$

这个界与随机 $\{-1,1\}$ 值函数所预期的阶相同，而对于任意定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的 $\{-1,1\}$ 值函数 f，我们有 $\|f\|_{U^{d+1}} \ge p^{-1/2^{d+1}}$。

我们将 Paley k-图 $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}^{(k)}(p)$ 定义为这样一种超图：其顶点是 $\mathbb{F}_p$ 中的元素，并且当且仅当 $x_1 + \cdots + x_k \in Q_p$ 时，$\{x_1, \ldots, x_k\}$ 是一条超边。从

二次剩余的性质表明， $\mathcal{P}^{(k)}$ 的超边密度为 $1/2+o(1)$，并且满足

$$\|\mathcal{P}^{(k)}-1/2\|_{\square^k_{k-1}} \le \|\mathcal{P}^{(k)}-1/2\|_{\mathrm{OCT}^k} = \|Q_p-1/2\|_{U^k} = O_k(p^{-1/2^k}),$$

其中不等式由引理 2 得出，而第一个等式则是对定义 U^k-范数的表达式进行简单的变量代换后得到的（见下一节的引理 3）。Chung 和 Graham [7] 此前已将此超图作为拟随机超图的一个例子加以考察。

现在固定一个整数 $2 \le d < k$，并令 $\mathcal{P}^{(k)}_d = \mathcal{P}^{(k)}_d(p)$ 表示在 $\mathcal{P}^{(d)}(p)$ 中编码 k-团的超图。更明确地说， $\mathcal{P}^{(k)}_d$ 的顶点集为 $\mathbb{F}_p$，且一个 k-集合 $\{x_1,\dots,x_k\}\subset\mathbb{F}_p$ 是一条超边，当且仅当

$$\sum_{i\in B} x_i \in Q_p \quad \text{for all } B\in\binom{[k]}{d}.$$

$\mathcal{P}^{(k)}_d$ 的超边密度恰好是 $\mathcal{P}^{(d)}$ 中 k-团的同态密度，而根据 $\mathcal{P}^{(d)}$ 的拟随机性，该密度等于 $2^{-\binom{k}{d}}+o(1)$。

容易证明 $\big\|\mathcal{P}^{(k)}_d - 2^{-\binom{k}{d}}\big\|_{\square^k_{d-1}} = o(1)$，因为任何用于证明 $\mathcal{P}^{(k)}_d$ 具有较高 $(d-1)$-偏差的见证集合，都可以转化为用于证明 $\mathcal{P}^{(d)}$ 具有较高 $(d-1)$-偏差的见证集合（而这些集合是不可能存在的）。最后，我们注意到，

$$\begin{aligned}\big\|\mathcal{P}^{(k)}_d - 2^{-\binom{k}{d}}\big\|_{\square^k_d} &\ge \mathbb{E}_{\mathbf{x}\in\mathbb{F}_p^k}\left[\big(\mathcal{P}^{(k)}_d(\mathbf{x})-2^{-\binom{k}{d}}\big)\prod_{B\in\binom{[k]}{d}}\mathcal{P}^{(d)}(\mathbf{x}_B)\right]\\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}\in\mathbb{F}_p^k}\left[\big(\mathcal{P}^{(k)}_d(\mathbf{x})-2^{-\binom{k}{d}}\big)\mathcal{P}^{(k)}_d(\mathbf{x})\right]\\ &= 2^{-\binom{k}{d}} - 2^{-2\binom{k}{d}} + o(1).\end{aligned}$$

由此可知， $\mathcal{P}^{(k)}_d$ 是 $d-1$阶拟随机的，但不是 d阶拟随机的。

3 一致集及其凯莱超图

正如引言中所述，在同一框架下考察加性集合和超图的一种便捷方式，是定义与加性集合相关联的 Cayley 超图：

定义 8（Cayley 超图）。设 A 是加法群 G 的子集，且 $k\ge 2$ 是一个整数。 A 的 Cayley k-图是超图 $\Gamma^{(k)}_A$，其顶点是 G 的所有元素，并且当且仅当 k 个顶点 x_1、……、x_k 形成一个超边时， $x_1+\cdots+x_k\in A$。

注意，第 2.3 节中讨论的 Paley k-图 $\mathcal{P}^{(k)}$ 是 Cayley 超图的一个例子。下一个定义引入了一个技术性记号，旨在稍微简化论述：

定义 9（求和算子）。给定一个整数 k 和一个加法群 G，我们用 $\Sigma\colon G^k \to G$ 表示其求和算子

$$\Sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) := x_1 + x_2 + \cdots + x_k.$$

注。这里存在轻微的符号滥用，因为无论求和项有多少，也无论各求和项属于哪个加法群，都使用同一个记号。这些隐藏参数可能会在每次使用该算子时发生变化。

借助这一记号，我们可以更简洁地写出定义在 G^k 上的凯莱超图 $\Gamma^k(A)$ 的示性函数： $A \circ \Sigma$。类似地，我们可以定义与函数 $f\colon G \to \mathbb{R}$ 相关联的加权凯莱 k-图：

$$\Gamma_f^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := f \circ \Sigma(x_1, \ldots, x_k) \quad \text{for all } x_1, \ldots, x_k \in G;$$

这一扩展有助于简化某些表达式。

我们关于加性集合和凯莱超图拟随机性的概念有一个简单但重要的性质，即平移不变性：

定义 10（平移算子）。给定一个元素 $a \in G$，我们定义作用于 $\mathbb{R}^G$ 上的平移算子 T^a 为 $\mathrm{T}^a f(x) := f(x+a)$。若 A 是一个集合（的示性函数），则 $\mathrm{T}^a A$ 是平移后的集合 $A - a$（的示性函数）。

我们将反复使用以下易于证明的恒等式： $\|\mathrm{T}^a f\|_{U^k} = \|f\|_{U^k}$ 以及 $\|\Gamma^{(k)}{}_{\mathrm{T}^a f}\|_{\square_d^k} = \|\Gamma_f^{(k)}\|_{\square_d^k}$，对所有 $1 \le d < k$ 均成立。后一恒等式直观地意味着，平移运算保持 Cayley 超图的割结构，从而使我们能够通过更“算术化”的方法分析这些超图。

作为连接加法群与超图中拟随机性概念的第一步，我们给出 U^k 一致性范数与 OCT^k 八面体范数之间一个简单且众所周知的联系。

引理 3（ U^k 范数与 OCT^k 范数之间的关系）。对于每个实值函数 $f\colon G \to \mathbb{R}$，均有 $\|\Gamma_f^{(k)}\|_{\mathrm{OCT}^k} = \|f\|_{U^k}$。

证明。我们进行变量代换。

$$x := \Sigma\big(\mathbf{x}^{(0)}\big) = x_1^{(0)} + \cdots + x_k^{(0)}, \quad h_i := x_i^{(1)} - x_i^{(0)} \quad \text{for } i \in [k].$$

那么对于所有 $\omega \in \{0,1\}^k$， $\Sigma\big(\mathbf{x}^{(\omega)}\big) = x + \sum_{i=1}^k \omega_i h_i$，恒等式便得证。 □

3.1 连接一致性与拟随机性

我们的主要技术结果是：对于集合 A，给定次数 d 的一致性，与其 Cayley 超图 $\Gamma_A^{(k)}$ 的相同阶 d 的拟随机性，在多项式意义下等价，且这对任意 $k > d$ 的取值都成立。这推广了 Aigner-Horev 和 H`an [2], 的一条定理；该定理考虑的是 $d = 1$ 这一特殊情形。

回顾一下， k-图 H 若满足 $\|H - \delta(H)\|_{\square_d^k} \le \varepsilon$，则称其为具有阶 d 的 ε-拟随机图；若集合 $A \subseteq G$ 满足 $\|A - \delta\|_{U^{d+1}} \le \varepsilon$，其中 $\delta = |A|/|G|$，则称其为次数为 d 的 ε-一致集合。我们的主要结果如下：

定理 4（定理 1 的重述）。设 $d \geq 1$ 为整数，且 $\varepsilon \in$ 属于 (0, 1)。设 G 为有限加性群，$A \subseteq G$ 为一个子集。

(i) 若 A 是次数为 d的 ε-一致集合，则对所有 $k \geq d+1$，Cayley 超图 $\Gamma_A^{(k)}$ 都是阶为 d的 ε-准随机超图。(ii) 反过来，若 $\Gamma_A^{(k)}$ 对某个 $k \geq d+1$是阶为 d 的 ε-准随机超图，则 A 是次数为 d的 $2\varepsilon^{c_{k,d}}$-一致集合。此处可取 $c_{k,d} = 2^{-(d+2)(2d+2)^k}$。

正如该陈述给出的界所示，命题 (ii) 的证明比命题 (i) 的证明复杂得多。两项证明都是初等的，因为它们只用到三角不等式和柯西-施瓦茨；但证明命题 (ii) 所需的柯西-施瓦茨应用颇为复杂，需要仔细分析。

命题 (i) 的证明。令 $f_A := A - \delta$ 为所考察集合 A的平衡指示函数。选取最优函数 $u_B \colon G^B \to [0,1]$, $B \in \binom{[k]}{d}$，使得

$$\left\|\Gamma_A^{(k)} - \delta\right\|_{\square_d^k} = \left| \mathbb{E}_{\mathbf{x} \in G^k} \left[f_A(\Sigma(\mathbf{x})) \prod_{B \in \binom{[k]}{d}} u_B(\mathbf{x}_B) \right] \right|.$$

我们可以将前 $d+1$ 个变量 $\mathbf{x}^{[d+1]}$ 与其余部分分开，并写作

$$\left\|\Gamma_A^{(k)} - \delta\right\|_{\square_d^k} = \left| \mathbb{E}_{\mathbf{x}_{[k]\setminus[d+1]}} \mathbb{E}_{\mathbf{x}_{[d+1]}} \left[f_A\big(\Sigma(\mathbf{x}_{[d+1]}) + \Sigma(\mathbf{x}_{[k]\setminus[d+1]})\big) \prod_{B \in \binom{[k]}{d}} u_B(\mathbf{x}_B) \right] \right|,$$

其中，第一个期望是对 $G^{[k]\setminus[d+1]}$ 取的，第二个期望是对 $G^{[d+1]}$ 取的。

现在固定 $\mathbf{x}_{[k]\setminus[d+1]} \in G^{[k]\setminus[d+1]}$，并考虑最后一个表达式中的内层期望。将 $y := \Sigma(\mathbf{x}^{[k]\setminus[d+1]})$ 记为，这个表达式可以写成

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x}_{[d+1]}} \left[\mathrm{T}^y f_A \circ \Sigma(\mathbf{x}_{[d+1]}) \prod_{D \in \binom{[d+1]}{d}} v_D(\mathbf{x}_D) \right]$$

对于某些合适的函数 $v_D \colon G^D \to [0,1]$, $D \in \binom{[d+1]}{d}$，因此其绝对值至多为

$$\|\mathrm{T}^y f_A \circ \Sigma\|_{\square_d^{d+1}} = \left\|\Gamma_{\mathrm{T}^y A}^{(d+1)} - \delta\right\|_{\square_d^{d+1}} = \left\|\Gamma_A^{(d+1)} - \delta\right\|_{\square_d^{d+1}}.$$

由于八面体范数强于割范数（引理 2），最后一项至多为 $\left\|\Gamma_A^{(d+1)} - \delta\right\|_{\mathrm{OCT}^{d+1}} = \|A - \delta\|_{U^{d+1}}$（这里用到了引理 3）。对 $\mathbf{x}_{[k]\setminus[d+1]} \in G^{[k]\setminus[d+1]}$ 取平均并使用三角不等式，我们得出 $\left\|\Gamma_A^{(k)} - \delta\right\|_{\square_d^k} \trianglelefteq \|A - \delta\|_{U^{d+1}} \leq \varepsilon$，如愿以偿。

□

本节余下部分将用于证明命题（ii）。

3.2 拟随机性蕴含一致性的证明

固定一个加法群 G 和整数 k、 $d \geq 1$，其中 $k \geq d+1$。我们希望证明，只要 $\Gamma_A^{(k)}$ 是阶为 d的拟随机集合，$A \subseteq G$ 就是次数为 d 的一致集合。我们的证明将采用迭代论证，构造并分析定义在 G上的若干线性形式系统。

3.2.1 线性系统与范数

我们只考虑线性形式 ϕ： $G^V \to G$ 其系数为 0 或 1，其中 V 是变量的有限索引集合。这些形式可以通过其支撑集来刻画：即满足 ϕ 的子集 supp($\subseteq V$)，使得

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{v \in \mathrm{supp}(\phi)} x_v \quad \text{for all } \mathbf{x} \in G^V.$$

一组线性形式 $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ 是一个线性系统，其支撑集是所有组成形式的支撑集的并集：supp(Φ) $= \bigcup_{i=1}^m$supp(ϕ_i)。

按照 Green 和 Tao [17], 的说法，如果对于每个 $i \in [m]$，都存在一个大小至多为 $s+1$ 的子集 $\sigma_i \subseteq$supp(ϕ_i)，且它不完全包含在任意 $j \neq i$ 的 supp(ϕ_j) 中，那么线性系统 $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ 就是s-正规形式。这一概念的重要性由下一个结果体现，该结果基本归功于 Green 和 Tao；证明见 [17, 附录 C]或 [16,第 2] 节。

引理 4. 若 $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ 是 s-正规形式的线性系统，那么对于所有函数 $f_1, \ldots, f_m$: $G \to [-1, 1]$，我们有

$$\left| \mathbb{E}_{\mathbf{x} \in G^V} \prod_{i=1}^m f_i(\phi_i(\mathbf{x})) \right| \leq \min_{1 \leq i \leq m} \|f_i\|_{U^{s+1}}.$$

有一个特定的集合 V_0:= {(0, 1), (0, 2) . . . , (0, k)}，它由线性形式中的变量的指标组成，与其余部分分开考虑，并且将在我们的论证中发挥关键作用。粗略来说，这个集合标记了我们真正关心的 k 变量，而其他变量只是用于辅助分析，并会在最后用适当选取的值代入。给定一个线性形式 ϕ，我们将其权重 w_0(φ) 定义为它所用到的 V_0 中的变量个数： $w_0(\phi) := |\mathrm{supp}(\phi) \cap V_0|$。线性系统 Φ 的权重是其中某个形式的最大权重： w_0(Φ) =max{$w_0(\phi)$: $\phi \in \Phi$}。

在我们的分析中，我们将需要一种与线性系统相关联的割型半范数，它起到桥梁作用，连接加性集合的 U^{d+1}-范数与其凯莱超图的 d-割范数。

定义 11（割型范数）。设 Φ 是 G 上的线性系统，并记 V(Φ) =$V_0 \cup$supp(Φ)。给定一个函数 f: $G \to \mathbb{R}$，我们定义

$$\|f\|_{\square(\Phi)} := \max_{u_\phi : G \to [-1,1], \forall \phi \in \Phi} \mathbb{E}_{\mathbf{x} \in G^{V(\Phi)}} \left[f\Big(\sum_{v \in V_0} x_v \Big) \prod_{\phi \in \Phi} u_\phi\big(\phi(\mathbf{x})\big) \right].$$

现在我们可以概述命题（ii）的证明。我们将通过一个迭代算法进行，在每一步中，s 我们都有一个线性系统 Φ_s，它由其线性形式的支撑集刻画。我们从仅包含一个线性形式的 Φ_0 开始，该形式的支撑集为 V_0，其权重为 $k \geq d+1$。每当所考虑的系统 Φ_s 中存在某个形式 ϕ，其权重高于 d 时，我们就用 $2^{d+1}-1$ 个权重严格更低的“对偶”形式替换 ϕ，从而构造出系统 Φ_{s+1}。这里的关键在于，与系统 Φ_s 和 Φ_{s+1} 相关的割型范数彼此相关（借助某种柯西-施瓦茨巧妙技巧）。一旦 Φ_s 中所有形式的权重都不超过 d，我们就停止；由于权重由 d 限定，因此我们能够用通常的 d-割范数来界定相关范数 $\|\cdot\|_{\square(\Phi_s)}$。此外，我们还证明第一个范数 $\|\cdot\|_{\square(\Phi_1)}$ 由 U^{d+1} 范数从下方界定。最后，对所考虑集合 $A \subseteq G$ 的平衡指示函数 $A-\delta$ 应用由此得到的范数不等式，即可推出该命题。

3.2.2 对偶线性形式

我们还需要给出算法中要用到的对偶线性形式的概念，这一概念的灵感来自 U^{d+1}-对偶函数的概念。对于函数 $f\colon G \to \mathbb{R}$，其对偶函数 $\mathcal{D}_{d+1}f$ 定义为

$$\mathcal{D}_{d+1}f(y) = \mathbb{E}_{h_1,\dots,h_{d+1}\in G} \prod_{\omega\in\{0,1\}^{d+1}\setminus\{0\}} f\Big(y+\sum_{i=1}^{d+1}\omega_i h_i\Big),$$

于是我们可以写成 $\|f\|_{U^{d+1}}^{2^{d+1}} = \mathbb{E}_{y\in G}\big[f(y)\mathcal{D}_{d+1}f(y)\big]$。对偶线性形式旨在模拟这一概念，但相对于给定的“重”形式 ϕ而言。

设 $\phi\colon G^V \to G$ 是权重为 $w_0(\phi) \geq d+1$ 的线性形式，并设 I_d 是一个与 V 不相交的、由 $d+1$ 个元素组成的集合。对于每个 $\omega \in \{0,1\}^{d+1}\setminus\{0\}$，我们定义一个线性形式 $\mathfrak{D}^\omega\phi\colon G^{V\cup I_d} \to G$，满足 $w_0(\mathfrak{D}^\omega\phi) < w_0(\phi)$，使得

$$\mathcal{D}_{d+1}f(\phi(\mathbf{x}_V)) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}_{I_d}\in G^{I_d}} \prod_{\omega\in\{0,1\}^{d+1}\setminus\{0\}} f\big(\mathfrak{D}^\omega\phi(\mathbf{x}_{V\cup I_d})\big) \quad \text{for all } \mathbf{x}_V \in G^V. \tag{3}$$

可以通过以下方式实现：

定义 12（对偶形式）。给定一个权重为 $w_0(\phi) \geq d+1$ 的线性形式 ϕ，令 I_d 为集合 $\{1,2,\dots,d+1\}$ 的一个副本，与 $\operatorname{supp}(\phi) \cup V_0$ 不相交，并记下】【。

$$\operatorname{supp}(\phi)\cap V_0 = \big\{(0,j_1),(0,j_2),\dots,(0,j_{w_0(\phi)})\big\}.$$

对于每个 $\omega \in \{0,1\}^{d+1}\setminus\{0\}$，我们定义一个线性形式 $\mathfrak{D}^\omega\phi$（其系数为 0 或 1），使得

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\phi)\setminus\operatorname{supp}(\mathfrak{D}^\omega\phi) &= \big\{(0,j_i)\colon 1\leq i\leq d+1,\, \omega_i=1\big\},\\ \operatorname{supp}(\mathfrak{D}^\omega\phi)\setminus\operatorname{supp}(\phi) &= \big\{i\in I_d\colon 1\leq i\leq d+1,\, \omega_i=1\big\}.\end{aligned}$$

换言之， $\mathfrak{D}^{\omega}\phi$ 是通过将 ϕ 中由那些$(0, j_i)$标记的变量替换为 $\omega_i = 1$ 中的新变量构造而成的。注意，在$\mathrm{supp}(\phi) \cap V_0$ 或 I_d中，我们以何种顺序为元素编号并不重要，因为无论采用哪种编号方式，所得形式都是等价的。还要注意，该定义确实满足等式(3)：记 V 为 ϕ 的支撑集，并进行变量代换

$$y = \sum_{v \in V} x_v \quad \text{and} \quad h_i = x_i - x_{(0,j_i)} \quad \text{for all } 1 \le i \le d+1,$$

我们看到 $\mathfrak{D}^{\omega}\phi(\mathbf{x}^{V \cup I_d}) = y + \sum_{i=1}^{d+1} \omega_i h_i$。

3.2.3 主算法及其分析

考虑以下算法：[2]

Algorithm SystemCut(k, d)

$V_0 \leftarrow \{(0,1),(0,2),\ldots,(0,k)\}$
$\Phi_0 \leftarrow \{\Sigma_{V_0}\}$
$s \leftarrow 0$
while $w_0(\Phi_s) > d$ **do**
  take $\psi_s \in \Phi_s$ with $w_0(\psi_s) = w_0(\Phi_s)$
  $\Phi_{s+1} \leftarrow (\Phi_s \setminus \{\psi_s\}) \cup \{\mathfrak{D}^{\omega}\psi_s : \omega \in \{0,1\}^{d+1} \setminus \{0\}\}$
  $s \leftarrow s+1$
结束 while 循环

$\mathfrak{s}_f \leftarrow s$

关于这个算法，我们将证明：

引理 5. 对于任意有界函数 $f\colon G \to [-1,1]$，我们有：

1. $\|f\|_{\square(\Phi_1)} \ge \|f\|_{U^{d+1}}^{2^{d+1}}$.
2. $\|f\|_{\square(\Phi_{\mathfrak{s}_f})} \le 2^{\binom{k}{d}} \|\Gamma_f^{(k)}\|_{\square_d^k}$.
3. $\Phi_s \cup \{\Sigma_{V_0}\}$ *is in* d*-normal form for all* $s \ge 1$.
4. $\|f\|_{\square(\Phi_{s+1})} \ge \|f\|_{\square(\Phi_s)}^{2^{d+2}}$ *for* $1 \le s < \mathfrak{s}_f$.
5. $\mathfrak{s}_f < (2d+2)^k$.

借助这个引理，定理 4 的命题 (ii) 很容易得出：

定理 4 的证明。(ii)。设 $\Gamma_A^{(k)}$ 是 ε-拟随机的，阶为 d。将引理 5 的条目 2 应用于 $f = A - \delta$，可得 $\|A-\delta\|_{\square(\Phi_{\mathfrak{s}_f})} \le 2^{\binom{k}{d}}\varepsilon$。应用条目4

[2]符号‘←’表示‘递增’，本质上是一个等号，也允许出现形式为 $s \leftarrow s+1$ 的表达式（这表示变量 s 在此处递增 1）。

从 $s = \mathfrak{s}_\mathfrak{f} - 1$ 到 $s = 1$递归地应用，我们得出 $\|A - \delta\|_{\square\,\Phi_1}^{2^{(d+2)\mathfrak{s}_\mathfrak{f}}}() \leq 2^{\binom{k}{d}}\varepsilon$。结合条目 1 和条目 5 给出的界 $\mathfrak{s}_\mathfrak{f} < (2d+2)^k$，可推得

$$\|A - \delta\|_{U^{d+1}}^{2^{(d+2)(2d+2)^k}} \leq \big(\|A - \delta\|_{U^{d+1}}^{2^{d+1}}\big)^{2^{(d+2)\mathfrak{s}_\mathfrak{f}}} \leq \|A - \delta\|_{\square(\Phi_1)}^{2^{(d+2)\mathfrak{s}_\mathfrak{f}}} \leq 2^{\binom{k}{d}}\varepsilon,$$

因此，对于 $c_{k,\ d} = 2^{-(d+2)(2d+2)^k}$，$A$ 是次数为 d 的 $2\varepsilon^{c_{k,\ d}}$-一致的。 □

接下来只需证明引理 5。

引理 5 的证明。在整个证明过程中，我们将线性系统 Φ_s 的支撑集记为 V_s，即: $V_s = \bigcup_{\phi\in\Phi_s} \mathrm{supp}(\phi)$。注意，$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{\mathfrak{s}_\mathfrak{f}}$。

条目 1。利用恒等式 (3)（该恒等式促使我们定义了对偶形式），我们有

$$\begin{aligned}
\|f\|_{U^{d+1}}^{2^{d+1}} &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}\in G^{V_0}}\left[f(\Sigma_{V_0}(\mathbf{x}))\mathcal{D}_{d+1}f(\Sigma_{V_0}(\mathbf{x}))\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{x}\in G^{V_0\cup I_d}}\left[f\Big(\sum_{v\in V_0} x_v\Big)\prod_{\omega\in\{0,1\}^{d+1}\setminus\{0\}} f\big(\mathfrak{D}^\omega\Sigma_{V_0}(\mathbf{x})\big)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{x}\in G^{V_1}}\left[f\Big(\sum_{v\in V_0} x_v\Big)\prod_{\phi\in\Phi_1} f\big(\phi(\mathbf{x})\big)\right].
\end{aligned}$$

由于 $\|f\|_\infty \leq 1$，上一个表达式至多为 $\|f\|_{\square(\Phi_1)}$，如 desideratum。

条目 2。根据 $\mathfrak{s}_\mathfrak{f}$ 的定义，我们有 $w_0(\phi) \leq d$ 对所有 $\phi \in \Phi_{\mathfrak{s}_\mathfrak{f}}$ 均成立。选择最优函数 $u_\phi\colon\ G \to [-1,1],\ \ \phi \in \Phi_{\mathfrak{s}_\mathfrak{f}}$，使得

$$\|f\|_{\square(\Phi_{\mathfrak{s}_\mathfrak{f}})} = \mathbb{E}_{\mathbf{x}\in G^{V_{\mathfrak{s}_\mathfrak{f}}}}\left[f\Big(\sum_{v\in V_0} x_v\Big)\prod_{\phi\in\Phi_{\mathfrak{s}_\mathfrak{f}}} u_\phi\big(\phi(\mathbf{x})\big)\right].$$

根据平均原理，我们可以将以 $V_{\mathfrak{s}_\mathfrak{f}} \setminus V_0$ 为索引的变量固定为某个 $\mathbf{y}_{V_{\mathfrak{s}_\mathfrak{f}}\setminus V_0} \in G^{V_{\mathfrak{s}_\mathfrak{f}}\setminus V_0}$，使得

$$\|f\|_{\square(\Phi_{\mathfrak{s}_\mathfrak{f}})} \leq \mathbb{E}_{\mathbf{x}_{V_0}\in G^{V_0}}\left[f\Big(\sum_{v\in V_0} x_v\Big)\prod_{\phi\in\Phi_{\mathfrak{s}_\mathfrak{f}}} u_\phi\big(\phi\big(\mathbf{x}_{V_0}, \mathbf{y}_{V_{\mathfrak{s}_\mathfrak{f}}\setminus V_0}\big)\big)\right].$$

注意，上述乘积中的每个函数至多依赖于 d 个变量 $\mathbf{x}_{V_0}$，因此可以将其写成 $h_B(\mathbf{x}_B)$ 的形式，其中 $B \subset V_0$ 是大小至多为 d 的某个集合，而 $h_B\colon G^B \to [-1,1]$ 是某个函数。由此可得

$$\|f\|_{\square(\Phi_{\mathfrak{s}_\mathfrak{f}})} \leq \max_{h_B:G^B\to[-1,1],\forall B\in\binom{V_0}{d}} \mathbb{E}_{\mathbf{x}_{V_0}\in G^{V_0}}\left[f\Big(\sum_{v\in V_0} x_v\Big)\prod_{B\in\binom{V_0}{d}} h_B(\mathbf{x}_B)\right].$$

将上述表达式中的每个函数 h_B 分解为其正部 $h'_B := \max\{h_B, 0\}$ 和负部 $h''_B := \max\{-h_B, 0\}$，从而写成 $h_B = h'_B - h''_B$。将所得乘积展开为 $2^{\binom{k}{d}}$ 项，并利用三角不等式，可知该表达式有如下界

$$2^{\binom{k}{d}} \max_{g_B : G^B \to [0,1], \forall B \in \binom{V_0}{d}} \left| \mathbb{E}_{\mathbf{x}_{V_0} \in G^{V_0}} \left[f\Big(\sum_{v \in V_0} x_v \Big) \prod_{B \in \binom{V_0}{d}} g_B(\mathbf{x}_B) \right] \right|.$$

这正是 $2^{\binom{k}{d}} \|\Gamma_f^{(k)}\|_{\square_d^k}$，证明完毕。

条目 3。固定 $1 \le s \le \mathfrak{s}_{\mathfrak{f}}$，并令 $\phi \in \Phi_s$ 为任意形式。根据构造，我们有 $\phi = \mathfrak{D}^{\omega} \psi_t$，其中某个 $\omega \in \{0,1\}^{d+1} \setminus \{0\}$ 和某个 $0 \le t < s$ 满足此式（其中 $\psi_t \in \Phi_t$ 是算法在第 t 步选取的重形式）。将第 t 步使用的 $I_d = [d+1]$ 副本记为 $\{(t+1, \mathbf{1}) \dots, (t+1, d+1)\}$，并记

$$\operatorname{supp}(\psi_t) \cap V_0 = \big\{(0, j_1), (0, j_2), \dots, (0, j_{w_0(\psi_t)})\big\}.$$

接着容易验证，$\Phi_s \cup \{\Sigma_{V_0}\}$ 中唯一一个支撑集包含.....的形式是 $\mathfrak{D}^{\omega} \psi_t$

$$\big\{(0, j_i) : 1 \le i \le d+1, \omega_i = 0\big\} \cup \big\{(t+1, i) : 1 \le i \le d+1, \omega_i = 1\big\}.$$

最后，$\Phi_s \cup \{\Sigma_{V_0}\}$ 中唯一使用了全部变量 $(0, \mathbf{1}) \dots, (0, d+1)$ 的形式是 Σ_{V_0}，因此该系统处于 d-正规形式。

条目4. 选择最优函数 $u_\phi : G \to [-1, 1]$, $\phi \in \Phi_s$，使得

$$\|f\|_{\square(\Phi_s)} = \mathbb{E}_{\mathbf{x} \in G^{V_s}} \left[f\big(\Sigma_{V_0}(\mathbf{x})\big) \prod_{\phi \in \Phi_s} u_\phi\big(\phi(\mathbf{x})\big) \right].$$

我们将关注点转向函数 u_ψ，其中 $\psi = \psi_s \in \Phi_s$ 是算法在步骤 s 中选出的最大权重线性形式。我们可以将上述期望改写为 $\mathbb{E}_{\mathbf{x} \in G^{V_s}} \big[u_\psi(\psi(\mathbf{x})) g(\psi(\mathbf{x}))\big]$，其中

$$g(z) := \mathbb{E}_{\mathbf{y} \in G^{V_s} : \psi(\mathbf{y}) = z} \left[f\big(\Sigma_{V_0}(\mathbf{y})\big) \prod_{\phi \in \Phi_s \setminus \{\psi\}} u_\phi\big(\phi(\mathbf{y})\big) \right].$$

注意，由于其定义中出现的所有函数都以 1 为界，因此 $\|g\|_\infty \le 1$。由于 $\|u_\psi\|_\infty \le 1$，根据柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\begin{aligned} \|f\|_{\square(\Phi_s)} &= \mathbb{E}_{\mathbf{x} \in G^{V_s}} \big[u_\psi(\psi(\mathbf{x})) g(\psi(\mathbf{x}))\big] \\ &\le \mathbb{E}_{\mathbf{x} \in G^{V_s}} \big[g(\psi(\mathbf{x}))^2\big]^{1/2} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{x} \in G^{V_s}} \left[g\big(\psi(\mathbf{x})\big) f\big(\Sigma_{V_0}(\mathbf{x})\big) \prod_{\phi \in \Phi_s \setminus \{\psi\}} u_\phi\big(\phi(\mathbf{x})\big) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

现在我们利用这一事实（来自条目 3.）： $\Phi_s \cup \{\Sigma_{V_0}\}$ 处于 d-正规形式。由于上面的期望中的所有项都以 1 为界，根据引理 4，我们得出这个最后的表达式至多为 $\|g\|_{U^{d+1}}^{1/2}$，因此

$$\|f\|_{\square(\Phi_s)} \le \|g\|_{U^{d+1}}^{1/2}. \tag{4}$$

接下来我们对 $\|g\|_{U^{d+1}}$ 进行界定。注意到

$$\begin{aligned}\|g\|_{U^{d+1}}^{2^{d+1}} &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}\in G^{V_s}}\left[g(\psi(\mathbf{x}))\mathcal{D}_{d+1}g(\psi(\mathbf{x}))\right]\\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}\in G^{V_s}}\left[f\big(\Sigma_{V_0}(\mathbf{x})\big)\prod_{\phi\in\Phi_s\setminus\{\psi\}}u_\phi\big(\phi(\mathbf{x})\big)\cdot\mathcal{D}_{d+1}g(\psi(\mathbf{x}))\right].\end{aligned}$$

根据线性形式 $\mathfrak{D}^\omega\psi$ 的构造，对于每个固定的 $\mathbf{x}_{V_s}\in G^{V_s}$，我们有

$$\mathcal{D}_{d+1}g(\psi(\mathbf{x}_{V_s})) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}_{V_{s+1}\setminus V_s}\in G^{V_{s+1}\setminus V_s}}\prod_{\omega\in\{0,1\}^{d+1}\setminus\{0\}}g\big(\mathfrak{D}^\omega\psi(\mathbf{x}_{V_{s+1}})\big);$$

由此可得

$$\|g\|_{U^{d+1}}^{2^{d+1}} = \mathbb{E}_{\mathbf{x}\in G^{V_{s+1}}}\left[f\big(\Sigma_{V_0}(\mathbf{x})\big)\prod_{\phi\in\Phi_s\setminus\{\psi\}}u_\phi\big(\phi(\mathbf{x})\big)\prod_{\omega\in\{0,1\}^{d+1}\setminus\{0\}}g\big(\mathfrak{D}^\omega\psi(\mathbf{x})\big)\right].$$

由于 $\Phi_{s+1} = \big(\Phi_s\setminus\{\psi\}\big)\cup\big\{\mathfrak{D}^\omega\psi\colon\ \omega\in\{0,1\}^{d+1}\setminus\{0\}\big\}$，这个最后的表达式至多为 $\|f\|_{\square(\Phi_{s+1})}$。然后我们根据不等式（4）得出结论。

条目 5. 将 $\mathfrak{s}_{\mathfrak{f}}(n)$ 记为算法 SystemCut(n,d) 中 $\mathfrak{s}_{\mathfrak{f}}$ 的最终值（即当 $|V_0|=n$ 时）。我们将通过归纳法证明，对于每个 $n\ge 1$，均有 $\mathfrak{s}_{\mathfrak{f}}(n) < (2d+2)^n$。

首先注意，$\mathfrak{s}_{\mathfrak{f}}(n)$ 等于算法中进入循环的次数；特别地，$\mathfrak{s}_{\mathfrak{f}}(n) = 0$ if $n\le d$，因为在这种情况下 $w_0(\Sigma_{V_0}) = n \le d$，我们不会进入循环。这就处理了归纳的基本情形。

首次进入循环后，我们将权重为 n 的形式 Σ_{V_0} 替换为形式 $\mathfrak{D}^\omega\Sigma_{V_0}$、$\omega\in\{0,1\}^{d+1}\setminus\{0\}$，它们的权重为

$$w_0(\mathfrak{D}^\omega\Sigma_{V_0}) = (d+1-|\omega|)+(n-d-1) = n-|\omega|.$$

由此可知

$$\mathfrak{s}_{\mathfrak{f}}(n) = 1+\sum_{\omega\in\{0,1\}^{d+1}\setminus\{0\}}\mathfrak{s}_{\mathfrak{f}}(n-|\omega|) = 1+\sum_{i=1}^{d+1}\binom{d+1}{i}\mathfrak{s}_{\mathfrak{f}}(n-i).$$

根据归纳假设，我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d+1}\binom{d+1}{i}\mathfrak{s}_{\mathfrak{f}}(n-i) &< \sum_{i=1}^{d+1}\binom{d+1}{i}(2d+2)^{n-i}\\ &= (2d+2)^n\sum_{i=1}^{d+1}\binom{d+1}{i}\Big(\frac{1}{2d+2}\Big)^i\\ &= (2d+2)^n\left(\Big(1+\frac{1}{2d+2}\Big)^{d+1}-1\right).\end{aligned}$$

利用对所有 $x \geq 0$ 都有 $1 + x \leq e^x$ 这一事实，我们得出

$$\mathfrak{s}_{\mathfrak{f}}(n) < 1 + (2d+2)^n \left(e^{1/2} - 1\right) < (2d+2)^n,$$

由此完成归纳证明。 □

4 凯莱超图的等价定理

在上一节中，我们展示了加性集合的一致性概念与超图的拟随机性之间存在密切联系。特别地，若集合 $A \subseteq G$ 是 d 次数一致的，那么它的 Cayley 超图 $\Gamma_A^{(k)}$ 都将是 d 阶拟随机的。由此，根据 Towsner 定理（定理 3），可以计算次数为 d 的一致集合的 Cayley 超图中所有 d-线性子图的数量。

有趣的是，Cayley 超图所满足的额外对称性意味着一个强得多的结果成立。为了证明这一点，我们需要定义另一类超图：

定义 13（s-简单超图）。给定 $s \geq 1$，若超图 F 是s-简单的，则满足以下条件：对于每条超边 $e \in E(F)$，都存在一个由 s 个顶点$\{v_1, \ldots, v_s\} \subseteq e$组成的集合，该集合不包含在 F 的任何其他超边中（即，对于所有 $e' \in E(F)$， $\{v_1, \ldots, v_s\} \nsubseteq e' \setminus \{e\}$）。我们用 $\mathcal{S}_s^{(k)}$ 表示所有 s-简单 k-图构成的集合。

根据定义可知，所有 d-线性超图都是 $(d+1)$-简单的，但如下一个例子所示，反过来并不成立。

例 1. 设 F 是一个由 $2k - d$ 个顶点和两条超边构成的连通 k-图。那么 F 仅是 d-线性的，但它是 1-简单的。

这个非常简单的例子表明，超图的“线性程度”与“简单程度”之间的差异可以是无界的。它还表明，我们不能仅凭 s 阶（例如）的拟随机性，就指望控制所有 s-简单子图的数量：第 2.3 节中的佩利图 $\mathcal{P}_d^{(k)}$ 具有 $d-1$ 阶拟随机性，但其中上述 1-简单 k-图 F 的副本数量是预期值的两倍。

相比之下，Gowers 和 Wolf [16, 在第 4] 节中隐含地证明了，次数为 d 的一致集合所对应的凯莱超图，其所有 $(d+1)$-简单超图作为子图的数量大约符合预期。下文证明等价定理（定理 5）时，将给出这一事实的简明证明。

为了陈述本节的主要结果，我们必须先定义一族线性系统 $(\Phi_{k,\,d})_{k \geq d+1}$，它们对于次数为 d 的一致性是完备的：

定义 14（系统 $\Phi_{k,d}$）。设 $\Phi_{k,d}$ 为定义在 $k2^{\binom{k-1}{d}}$ 个变量和 $2\binom{k}{d}$ 个线性形式上的线性系统，其定义如下。变量由属于该集合的映射进行索引。

$$\mathcal{J}_{k,d} = \bigcup_{j=1}^{k} \left\{ \tau : \binom{[k] \setminus \{j\}}{d} \to \{0,1\} \right\}$$

并且，对于每个 $\sigma \in \{0,1\}^{\binom{[k]}{d}}$，都有一个线性形式 $\phi_\sigma \in \Phi_{k,\ d}$ 给定为

$$\phi_\sigma\big((x_\tau)_{\tau\in\mathcal{J}_{k,d}}\big) = \sum_{j=1}^{k} x_{\sigma_{-j}},$$

其中，σ_{-j} 表示将 σ 限制在$\binom{[k]\setminus\{j\}}{d}$上。

换言之，我们有以从 $\binom{[k]}{d}$ 到 $\{0,1\}$ 的部分映射为索引的变量，以及以（全）映射 $\sigma:\binom{[k]}{d} \to \{0,1\}$ 为索引的形式，其中每个形式 ϕ_σ 都是所有以那些与 σ 兼容的部分映射为索引的变量之和。注意，线性系统 $\Phi_{k,d}$ 是 d-线性 k-图 $\mathrm{M}_d^{(k)}$ 的算术类比，后者对于阶 d 的拟随机性是完备的：当且仅当对于所有 $K = v(\mathrm{M}_d^{(k)}) = k2^{\binom{k-1}{d}}$，一组元素 $(x_1,\dots,x_K) \in G^K$ 构成 $\Gamma_A^{(k)}$ 中 $\mathrm{M}_d^{(k)}$ 的一个副本。即，对于所有 $\phi \in \Phi_{k,d}$，均有 $\phi(x_1,\dots,x_K) \in A$。根据第 2.2 节中给出的 $\mathrm{M}_d^{(k)}$ 的构造，可以很容易地证明这一点。

我们现在可以正式陈述并证明我们的凯莱超图等价定理，该定理曾在引言中以定理 2 的形式非正式地陈述。

定理 5（拟随机凯莱超图的等价定理）。设 k、$d \geq 1$ 为满足 $k \geq d+1$ 的整数。则以下陈述多项式等价，其中 G 是一个有限加性群，$A \subseteq G$ 是一个子集，且 $\delta = |A|/|G|$：

(i) *A is uniform of degree d:* $\|A-\delta\|_{U^{d+1}} \leq c_1$.

(ii) A 中类型为 $\Phi_{k,\ d}$ 的模式很少：

$$\mathbb{P}_{\mathbf{x}\in G^{\mathcal{J}_{k,d}}}\big(\Phi_{k,d}(\mathbf{x}) \subseteq A\big) \leq \delta^{2^{\binom{k}{d}}} + c_2.$$

(iii) $\Gamma_A^{(k)}$ 是 d 阶拟随机的：$\mathrm{disc}_d(\Gamma_A^{(k)}) \leq c_3$。

(iv) $\Gamma_A^{(k)}$ 能正确计数所有 d-线性超图：

$$t(F,\Gamma_A^{(k)}) = \delta^{e(F)} \pm e(F)c_4 \quad \textit{for all } F \in \mathcal{L}_d^{(k)}.$$

(v) $\Gamma_A^{(k)}$ 能正确计数所有 $(d+1)$-简单超图：

$$t(F,\Gamma_A^{(k)}) = \delta^{e(F)} \pm e(F)c_5 \quad \textit{for all } F \in \mathcal{S}_{d+1}^{(k)}.$$

(vi) $\Gamma_A^{(k)}$ 含有少量压扁八面体 $\mathrm{Oct}_{d+1}^{(k)}$：

$$t\big(\mathrm{Oct}_{d+1}^{(k)},\Gamma_A^{(k)}\big) \leq \delta^{2^{d+1}} + c_6.$$

(vii) $\Gamma_A^{(k)}$ 具有较小的 $(d+1)$ 偏差：$\mathrm{dev}_{d+1}\left(\Gamma_A^{(k)}\right) \leq c_7$。

证明。此前已经证明了其中若干推论。事实上，定理 4 是等价关系（i） $\iff$ （iii）的定量形式，而定理 3 表明（ii）、（iii）和（iv）是多项式等价的（请回想，$\Phi_{k,\ d}$ 正是超图 $\mathrm{M}_d^{(k)}$ 的加法对应物）。接下来我们将证明以下推论

$$(i) \implies (v) \implies (vi) \implies (vii) \implies (i),$$

这将完成该定理的证明。

(*i*) $\implies$ (*v*)：假设 $\|A-\delta\|_{U^{d+1}} \le c_1$，并令 F为一个$(d+1)$-简单超图。记 $V = V(F)$、 $E(F) = \{e_1, \dots, e_{e(F)}\}$，且对每个 $1 \le i \le e(F)$，令 $f_i \subseteq e_i$为一个含有 $d+1$ 个元素的集合，它不包含于任何其他超边 e_j。由通常的望远镜求和论证可得

$$\begin{aligned}
&\left|t(F,\Gamma_A^{(k)}) - \delta^{e(F)}\right| \\
&\quad\le \sum_{i=1}^{e(F)} \left| \mathbb{E}_{\mathbf{x}_V \in G^V} \left[\big(A\circ\Sigma(\mathbf{x}_{e_i}) - \delta\big) \prod_{j=i+1}^{e(F)} A\circ\Sigma(\mathbf{x}_{e_j}) \right] \right| \\
&\quad\le \sum_{i=1}^{e(F)} \mathbb{E}_{\mathbf{x}_{V\setminus f_i}} \left| \mathbb{E}_{\mathbf{x}_{f_i}} \left[\big(A\big(\Sigma(\mathbf{x}_{f_i}) + \Sigma(\mathbf{x}_{e_i\setminus f_i})\big) - \delta\big) \prod_{j=i+1}^{e(F)} A\big(\Sigma(\mathbf{x}_{e_j\cap f_i}) + \Sigma(\mathbf{x}_{e_j\setminus f_i})\big) \right] \right|.
\end{aligned}$$

考虑最后一个求和中的第 i 项。固定一个 $\mathbf{x}_{V\setminus f_i} \in G^{V\setminus f_i}$，并对每个 $i+1 \le j \le e(F)$，在 $G^{e_j\cap f_i}$ 上定义函数 $u_j = u_{j,\ \mathbf{x}_{V\setminus f_i}} := \mathrm{T}^{\Sigma(\mathbf{x}_{e_j\setminus f_i})} A\circ\Sigma$；根据假设，$|e_j \cap f_i| \le d$，而 $|f_i| = d+1$。于是，求和中的第 i 项可写为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbf{x}_{V\setminus f_i}} \left| \mathbb{E}_{\mathbf{x}_{f_i}} \left[\big(\mathrm{T}^{\Sigma(\mathbf{x}_{e_i\setminus f_i})} A\circ\Sigma(\mathbf{x}_{f_i}) - \delta\big) \prod_{j=i+1}^{e(F)} u_j(\mathbf{x}_{e_j\cap f_i}) \right] \right| & \\
\le \mathbb{E}_{\mathbf{x}_{V\setminus f_i}} \left\| \mathrm{T}^{\Sigma(\mathbf{x}_{e_i\setminus f_i})} A\circ\Sigma - \delta \right\|_{\square_d^{d+1}} & \\
= \|A\circ\Sigma - \delta\|_{\square_d^{d+1}}, &
\end{aligned}$$

其中最后一个等式用到了平移不变性。因此，整个和的上界为 $e(F)\cdot\|A\circ\Sigma-\delta\|_{\square_d^{d+1}}$。由于八面体范数强于割范数（引理 2），结论（$v$）现在由以下事实得出：

$$\|A\circ\Sigma-\delta\|_{\square_d^{d+1}} = \left\|\Gamma_A^{(d+1)} - \delta\right\|_{\square_d^{d+1}} \le \left\|\Gamma_A^{(d+1)} - \delta\right\|_{\mathrm{OCT}^{d+1}} = \|A-\delta\|_{U^{d+1}} \le c_1,$$

且我们可以取 $c_5 = c_1$。

（v） $\implies$ **(*vi*)**：这是一个特例，我们可以取 $c_6 = 2^{d+1}c_5$。

（vi） $\implies$ （vii）：首先注意到，对于

所有函数 $f\colon G\to\mathbb{R}$，确实有

$$\begin{aligned} t\big(\mathrm{OCT}_{d+1}^{(k)},\,\Gamma_f^{(k)}\big) &= \mathbb{E}_{\mathbf{y}\in G^{k-d-1}}\,\mathbb{E}_{\mathbf{x}^{(0)},\mathbf{x}^{(1)}\in G^{d+1}} \prod_{\omega\in\{0,1\}^{d+1}} f\big(\Sigma(\mathbf{y})+\Sigma(\mathbf{x}^{(\omega)})\big) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{y}\in G^{k-d-1}}\, t\big(\mathrm{OCT}^{(d+1)},\,\Gamma^{(d+1)}_{\mathrm{T}^{\Sigma(\mathbf{y})}f}\big) \\ &= t\big(\mathrm{OCT}^{(d+1)},\,\Gamma_f^{(d+1)}\big). \end{aligned}$$

那么，条件（vi）等价于要求 $t\big(\mathrm{OCT}^{(d+1)},\,\Gamma_A^{(d+1)}\big)\le\delta^{2^{d+1}}+c_6$。由超图拟随机性的等价定理及其证明，我们得出 $t\big(\mathrm{OCT}^{(d+1)},\,\Gamma_A^{(d+1)}-\delta\big)\le 2^{2^{d+2}}c_6^{1/2^{d+1}}$；利用上面关于 $f=A-\delta$ 的恒等式，这等价于说 $t\big(\mathrm{OCT}_{d+1}^{(k)},\,\Gamma_A^{(k)}-\delta\big)\le 2^{2^{d+2}}c_6^{1/2^{d+1}}$，这正是取 $c_7=2^{2^{d+2}}c_6^{1/2^{d+1}}$ 时的条件（vii）。

(vii) $\Longrightarrow$ (i)】【：如前面讨论的等价关系所述，条件 (vii) 等同于要求 $t\big(\mathrm{OCT}^{(d+1)},\,\Gamma_A^{(d+1)}-\delta\big)\le c_3$。由于

$$t\big(\mathrm{OCT}^{(d+1)},\,\Gamma_A^{(d+1)}-\delta\big)=\big\|\Gamma_A^{(d+1)}-\delta\big\|_{\mathrm{OCT}^{d+1}}^{2^{d+1}}=\|A-\delta\|_{U^{d+1}}^{2^{d+1}},$$

我们得到包含 $c_1=c_3^{1/2^{d+1}}$ 的条目（i）。 □

致谢

本文所述研究工作是在作者任职于科隆大学期间完成的。该研究获得了欧盟「地平线2020」研究与创新框架计划下的玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动资助（资助协议编号：764759，MINOA），以及荷兰研究理事会（NWO）作为 NETWORKS 计划的一部分提供的资助（资助编号：024.002.003）。

参考文献

[1] E. Aigner-Horev, D. Conlon, H. Hàn, Y. Person, and M. Schacht, 超图中的拟随机性，《电子组合学杂志》25（2018），第3.34号论文，22页。
[2] E. Aigner-Horev and H. Hàn，阿贝尔群及超图子集的线性拟随机性，《欧洲组合学杂志》88（2020），第103116号论文，16页。[3] D. Castro-Silva，加法群及超图中的拟随机性：综述，2021。[4] F. R. K. Chung，按时间顺序排列的拟随机图参考文献。https://mathweb.ucsd.edu/~fan/qr/ref.html。访问日期：2023年3月16日。

[5] ——, 超图的拟随机类，《随机结构与算法》1（1990），第363–382页。[6] ——, 超图的正则性引理与拟随机性，《随机结构与算法》2（1991），第241–252页。[7] F. R. K. Chung and R. L. Graham，拟随机超图，《随机结构与算法》1（1990），第105–124页。[8] ——, ，拟随机集合系，《美国数学会杂志》4（1991），第151–196页。[9] ——, ， $\mathbb{Z}_n$的拟随机子集，《组合理论杂志》A辑61（1992），第64–86页。[10] F. R. K. Chung, R. L. Graham, and R. M. Wilson, 拟随机图，《组合数学》9（1989），第345–362页。[11] D. Conlon, H. Hàn, Y. Person, and M. Schacht，一致超图的弱拟随机性，《随机结构与算法》40（2012），第1–38页。[12] E. Fouvry, E. Kowalski, and P. Michel，关于$\mathbf{F}_p$上迹函数的Gowers范数的逆定理，《剑桥哲学学会数学学报》155（2013），第277–295页。[13] W. T. Gowers，Szemer´edi关于长度为四的等差数列定理的新证明，《几何与泛函分析》8（1998），第529–551页。[14] ——, Szemer´edi定理的新证明，《几何与泛函分析》11（2001），第465–588页。[15] ——, 超图正则性与多维Szemer´edi定理，《数学年刊》第二辑166（2007），第897–946页。[16] W. T. Gowers and J. Wolf，线性方程组的真正复杂度，《伦敦数学学会学报》第三辑100（2010），第155–176页。[17] B. Green and T. Tao，素数中的线性方程，《数学年刊》第二辑171（2010），第1753–1850页。[18] Y. Kohayakawa, B. Nagle, V. Rödl, and M. Schacht，弱超图正则性与线性超图，《组合理论杂志》B辑100（2010），第151–160页。[19] Y. Kohayakawa, V. Rödl, and J. Skokan，超图、拟随机性与正则性的条件，《组合理论杂志》A辑97（2002），第307–352页。[20] J. Lenz and D. Mubayi，超图拟随机性的偏序集，《随机结构与算法》46（2015），第762–800页。[21] H. Towsner, σ，拟随机超图的代数，《随机结构与算法》50（2017），第114–139页。