arXiv:2305.03046v1 [math.GT] 4 May 2023

黎曼曲面与把手体模空间的最高权上同调

LOUIS HAINAUT 和 DAN PETERSEN

摘要。我们证明，双曲曲面模空间 $\mathcal{M}_g$ 中的一个特定子空间——由具有“足够多”短测地线的曲面构成——是把手体映射类群的分类空间。这一构造的一个推论是，Chan–Galatius–Payne 研究的 $\mathcal{M}_g$ 的最高权上同调可单射映入把手体映射类群的上同调。

1. 引言

1.1. 把手体群与映射类群。设 $V_g^{m,n}$ 是一个亏格为 g 的把手体，其边界上有 m 个彼此不同且有序标记的圆盘，以及 n 个彼此不同且有序标记的点。令 $\Sigma_g^{m,n} = \partial V_g^{m,n}$ 为一个亏格为 g、带有 m 个标记圆盘和 n 个标记点的曲面。记作

$$\mathrm{Mod}_{g,n}^m := \pi_0 \mathrm{Diff}(\Sigma_{g,n}^m)$$

曲面的映射类群；此处，$\mathrm{Diff}(\Sigma_g^{m,n})$表示逐点固定标记点和圆盘的曲面自微分同胚所构成的拓扑群；若$m = 0$，我们还必须要求微分同胚保持定向。同样地，我们令

$$\mathrm{HMod}_{g,n}^m := \pi_0 \mathrm{Diff}(V_{g,n}^m)$$

表示把手体群；同样，$\mathrm{Diff}(V_g^{m,n})$表示逐点固定曲面上标记点和圆盘的自微分同胚。当 m 或 n 为零时，可以在记号中省略它。就许多用途而言，考虑标记圆盘还是标记点并无太大区别，因为这两类群由以下短正合列联系起来：

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathrm{HMod}_{g,n}^{m+1} \to \mathrm{HMod}_{g,n+1}^m \to 1,$$

通常的映射类群也有类似结论。

$V_g^{m,n}$ 上的任意自微分同胚都限制为$\partial V_g^{m,n} = \Sigma_g^{m,n}$上的自微分同胚。限制定义了一个映射 $\mathrm{Diff}(V_g^{m,n}) \to \mathrm{Diff}(\Sigma_g^{m,n})$，因此

$$\mathrm{HMod}_{g,n}^m \to \mathrm{Mod}_{g,n}^m.$$

事实证明，这个映射是单射，因此称映射类群中的把手体子群。该子群在共轭意义下是良定义的；对于 $g = 0$，这个映射是一个同构。

本文的主定理，即定理 1.4，是利用 Teichmüller 理论和双曲几何构造把手体群 $\mathrm{HMod}_{g,n}^m$ 的分类空间。不过，在陈述定理之前，我们将说明这一构造的缘起，以及它的一些推论。

映射类群的同调长期以来一直受到深入研究。把手体群的研究则较少，但这两类群的同调之间存在许多有趣的相似之处（也有差异）。下表总结了其中几项：

	$\mathrm{Mod}_{g,n}^m$	$\mathrm{HMod}_{g,n}^m$
vcd	$4g-4+m+2n$	$4g-4+m+2n$
χ^{orb}	$\zeta(1-2g)$	0
同调稳定性	是的，斜率 $\frac{2}{3}$	是的，斜率 $\frac{1}{2}$
稳定有理上同调	$\mathbf{Q}[\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\dots]$	$\mathbf{Q}[\kappa_2,\kappa_4,\kappa_6,\dots]$
无穷循环空间	Ω_0^∞MTSO(2)	$\Omega_0^\infty\Sigma_+^\infty B$SO(3)

下面我们依次对这些条目作简要说明：

(1) Harer [Har86] 证明，对于 $2g-2+m+n>0$，有 $\mathrm{vcd}\,\mathrm{Mod}_{g,n}^m = 4g-4+m+2n-\delta_{m+n,0}+\delta_g$，其中 δ 是克罗内克 δ 符号。Hirose [Hir03] 证明了，对于 $g\geq 2$，$\mathrm{vcd}\,\mathrm{HMod}_g = 4g-5$，并且事实上，在所有情况下，虚拟上同调维数都相同[1]。(2) Harer 和 Zagier [HZ86] 证明了，对于 $g\geq 1$，有 $\chi^{\mathrm{orb}}(\mathrm{Mod}_g) = \zeta(1-2g)$。其他 m 和 n 取值下的轨形欧拉示性数可由此轻易得出。另一方面，Hirose [Hir03] 证明了 $\chi^{\mathrm{orb}}(\mathrm{HMod}_g)=0$。(3) Harer [Har85] 已证明，对于 $i\leq \frac{2g}{3}$，$H_i(\mathrm{Mod}_g^1,\mathbf{Z}) \to H_i(\mathrm{Mod}_{g+1}^1,\mathbf{Z})$ 是一个同构。这里给出的范围归功于 Boldsen [Bol12]。把手体群的类似同调稳定性结果归功于 Hatcher–Wahl [HW10]。已知映射类群的稳定范围是最优的，但把手体群的这一点尚未得到证实。(4) Madsen–Weiss [MW07] 证明，在 Harer 稳定性定理所涵盖的范围内，Mod_g^1 的有理上同调是由 κ-类生成的多项式代数，从而证实了所谓的 Mumford 猜想。Hatcher [Hat12] 概述了一种证明，指出把手体群的稳定上同调由偶数阶 κ-类自由生成，但目前文献中尚无详细论证。Shaul Barkan 和 Jan Steinebrunner（私人通信）提出了另一种论证，该论证将发表于即将发表的研究成果中，并以 Giansiracusa 定理 [Gia11]为基础。(5) Mumford 猜想的实际证明，以及其在把手体群中的类似结论，都是通过将稳定映射类群（把手体群）的分类空间的同伦类型与一个明确的无限循环空间相识别（在加号构造意义下）来实现的，如表中所示。

还要提到，$\mathrm{Diff}(\Sigma_{g,n}^m)$ 和 $\mathrm{Diff}(V_{g,n}^m)$ 的连通分支均为可缩的，但有少数低亏格例外。对于曲面情形，这一结果可追溯至 Earle–Eells[EE69]。对于把手体情形，同痕扩张表明 $\mathrm{Diff}(V_{g,n}^m) \to \mathrm{Diff}(\Sigma_{g,n}^m)$ 是一个纤维化，而根据 [Hat99]，其纤维为空或可缩。（特别是，正如前文所述，$\mathrm{HMod}_{g,n}^m \to \mathrm{Mod}_{g,n}^m$ 确实是单射。）

我们参阅 [Hen20]，其中对把手体群作了有益的综述。

1.2. **最高权上同调**。 Mumford 猜想意味着，映射类群的稳定上同调随着的增长，遵循数论分拆函数的规律，

[1]事实上，$g\geq 2$ 和 $r,s>0$ 的情形可由此结果与 Birman正合列归纳得出，参见 [Bie81，定理 5.5]。当 $g=0$ 时，映射 $\mathrm{HMod}_{0,m}^n \to \mathrm{Mod}_{0,m}^n$ 是一个同构。当 $g=1$ 时，$\mathrm{HMod}_{1,1} \cong \{\pm 1\} \ltimes \mathbf{Z}$，因此 $\mathrm{vcd}\,\mathrm{HMod}_{1,1} = \mathrm{vcd}\,\mathrm{Mod}_{1,1} = 1$，一般情形同样可由此结果与 Birman正合列推出。

其 g，尤其是亚指数增长。另一方面，Harer–Zagier [HZ86]利用他们对轨形欧拉示性数的计算，得到了实际整数值欧拉示性数的公式，并证明二者渐近相等。由于伯努利数呈超指数增长，因此映射类群有理同调的绝大部分都处于非稳定范围，无法由 Mumford 猜想解释。

长期以来，这种状况多少令人不满：人们已知大多数同调会随着 $g \gg 0$ 而不稳定，但唯一被明确构造出来的不稳定同调类，只是低亏格中的零星例子。最近，Chan–Galatius–Payne [CGP21]，开展的研究改变了这一状况，他们研究了曲线模空间的最高权上同调。

令$\mathcal{M}_{g,\,n}$ 表示由 n个点标记的黎曼曲面的模轨形。作为一个轨形，有同伦等价$\mathcal{M}_{g,\,n} \simeq B$映射类群$_{g,\,n}$，且 $H_\bullet(\mathcal{M}_{g,\,n},\,\mathbf{Z}) \cong H_\bullet$(映射类群$_{g,\,n}$，$\mathbf{Z}$)。它是一个维数为 $3g-3+n$的复轨形，因此满足系数为 $\mathbf{Q}$的庞加莱对偶：

$$H_k(\mathcal{M}_{g,n},\mathbf{Q}) \cong H_c^{6g-6+2n-k}(\mathcal{M}_{g,n},\mathbf{Q}).$$

空间 $\mathcal{M}_{g,\,n}$ 不仅是一个复轨形，而且还是一个代数 Deligne–Mumford 叠的解析化。这特别意味着，其有理上同调自然带有一种混合霍奇结构，这是 Deligne 的结果。我们所说的“最高权上同调”是指紧支撑上同调上的混合霍奇结构的零权重[2] 部分，$W_0H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,\,n},\,\mathbf{Q})$。

若 U 是一个光滑簇，那么可以通过明确写出 Deligne 关于光滑簇上的混合霍奇结构的构造 [Del71]，来计算 U 的最高权上同调。首先，选取一个紧化 $U \subset \overline{U}$，使得 $\overline{U} \setminus U$ 是一个简单正规交叉除子，并将该除子视为定义了 U的一个分层。其次，写出上链复形 $D(U,U)$：其 p 次项是一个 Q-向量空间，以余维为 p的各个分层为基，并配备一个显然的微分，用以记录边界分层之间的邻接关系。上链复形 $D(U,U)$的上同调与 U的选取无关，并且等于 $W_0H_c^\bullet(U,\mathbf{Q})$。从某种意义上说，最高权上同调是上同调中组合性最强的部分；在刚才解释的例子中，最高权部分仅仅记录了紧化中边界除子彼此相交的组合关系。

对于 $\mathcal{M}_{g,\,n}$，存在一种自然给定的正规交叉除子紧化选择，即 ***Deligne–Mumford*** 紧化 $\overline{\mathcal{M}}_{g,\,n}$。前一段中给出的最高权上同调的具体描述同样适用于这种情形，不过当 $g>0$ 时，由于边界并非简单正规交叉除子，因此还存在一些额外的微妙之处。$\overline{\mathcal{M}}_{g,\,n}$ 的边界分层标记了一个亏格为 n、带有 g 个标记点的稳定曲线的各种可能拓扑类型，并由稳定图进行索引，如图 1 和图 2所示。

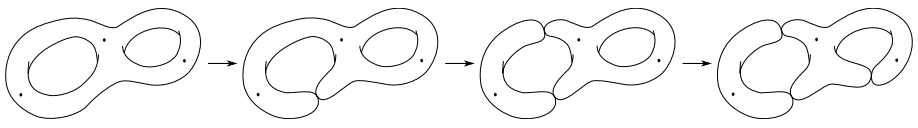

图1. $\overline{\mathcal{M}}_2$内稳定曲线的一系列退化.[3]

[2]“最高权重”这一术语似乎有些名不副实，因为零权重是可能的最低权重。这种不一致是因为 Chan–Galatius–Payne 考虑的是通常上同调。

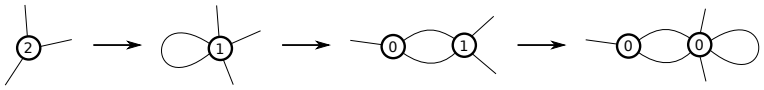

图 2. 对应的稳定图序列。

两个稳定图定义的分层恰好在其中一个可以通过收缩另一图的一条边得到时相邻，如图所示。因此，上链复形 $D(\mathcal{M}_{g,n},\mathcal{M}_{g,n})$ 是图复形的一个实例：它是由某种特定类型的图的同构类张成的上链复形，其微分由边的扩张给出，并加入符号以确保 $d^2 = 0$。事实上，$D(\mathcal{M}_{g,n},\mathcal{M}_{g,n})$ 是 Kontsevich 提出的毛图复形 HGC_0，的一个密切相关对象。复形 HGC_0 分解为若干直和项 $\mathsf{HGC}_0^{(g,n)}$，这些项由环阶数 g 和毛刺数量 n标记，而 $\mathsf{HGC}_0^{(g,n)}$ 自然是 $D(\mathcal{M}_{g,n},\mathcal{M}_{g,n})$ 的一个子复形——张成 $D(\mathcal{M}_{g,n},\mathcal{M}_{g,n})$ 的图在各顶点处带有亏格标记，而 $\mathsf{HGC}_0^{(g,n)}$ 是由所有顶点均为零亏格的图张成的子复形。Chan–Galatius–Payne 定理指出，事实上，$\mathsf{HGC}_0^{(g,n)} \hookrightarrow D(\mathcal{M}_{g,n},\mathcal{M}_{g,n})$ 几乎总是一个拟同构。

定理 1.1 (Chan–Galatius–Payne)。 映射 $H^\bullet(\mathsf{HGC}_0^{(g,n)}) \to W_0 H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n},\mathbf{Q})$ 对所有 $(g,n) \neq (1,1)$都是同构。

图复形，例如 HGC 及其众多相关对象，广泛存在于低维和高维拓扑、模空间理论、变形量子化以及许多其他领域。我们不打算综述这一庞杂主题，但提及 [Wil18] 作为入门起点。

Willwacher [Wil15] 计算了 $H^0(\mathsf{GC}_2)$，并证明它可以与*Grothendieck–Teichmüller* 李代数 $\mathfrak{grt}_1$对应；该李代数由 Drinfeld 引入 [Dri90]。此处 GC 表示 HGC 中不含毛的图所构成的直和项，下标 2 表示次数的平移。[3]结合 Willwacher 定理与前面的推论，并考虑其中涉及的平移，可得以下结论。

推论 1.2。 存在一个同构 $\bigoplus_{g\geq 2} W_0 H_c^{2g}(\mathcal{M}_g,\mathbf{Q}) \cong \mathfrak{grt}_1$。

存在一个映射 $\mathrm{FreeLie}(\sigma_3,\sigma_5,\sigma_7,\dots) \to \mathfrak{grt}_1$ 据猜想是一个同构[Dri90，第 859]页。在推论 1.2的同构下，生成元 σ_p 映到亏格 p中的一个类，且李括号与按亏格分级相容。由 Brown 的一个定理可知 [Bro12]，$\mathrm{FreeLie}(\sigma_3,\sigma_5,\sigma_7,\dots) \to \mathfrak{grt}_1$ 是单射。基于这一事实以及对自由李代数分次部分维数的估计，Chan–Galatius–Payne 推导出：

推论 1.3。 贝蒂数 $\dim H_{4g-6}$(映射类群$_g$, $\mathbf{Q}$) 对于 $g = 3$、5 和 $g \geq 7$ 均非零，且至少以指数速度随 g 增长。

注意，映射类群的虚拟上同调维数$_g = 4g-5$。已知 H_{4g-5}（映射类群$_g$，$\mathbf{Q}$）$= 0$ 对所有 g均成立；该结果由 Harer 宣布，但直到 [CFP12、MSS13]才出现证明。因此，该构造产生了非平凡的“最大不稳定”有理同调类（即处于其可能出现的最高次数中的类），而且数量众多。将上述关于权0 的结果与随后关于权 2 [PW21] 和权 11 [PW23] 的研究结合起来（后者是

[3]更一般地，人们通常会考虑一整族复形 $\mathsf{HGC}_{m,\ n}$ 其中 $m,\ n \in \mathbf{Z}$；除次数平移外，它们的上同调仅取决于 m 和 n 的奇偶性。但我们还要指出，按照惯例，这些复形是通过对腿集合的置换进行对称化或反对称化来定义的，而我们不想这样做。

最小的非零奇权 [BFP22]），现在已有 ≈ 50 个不同的 k 值，使得我们知道$\dim H_c^{2g+k}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})$至少随 g [PW23呈指数增长，推论 1。2]。

1.3. 热带曲线与把手体的模空间。Chan–Galatius–Payne 的工作也可以从热带曲线模空间的角度来理解 [BMV11, ACP15, Cap13]。我们将亏格为 g 、带有 n 个标记的热带曲线定义为亏格为g 、带有 n 条外部腿的稳定图，恰如图 2 所示，并在每条内部边上附加一个正实数，称为该边的长度。此类热带曲线的模空间 $\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}}$ 是一个轨形锥复形：对于给定的固定稳定图 Γ ，其带有 p 条内部边时，$\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}}$ 中底层图为 Γ 的热带曲线所构成的子空间是商轨形 $[(\mathbf{R}_{>0})^p/\mathrm{Aut}(\Gamma)]$；这些轨形胞腔以如下方式粘合：令某条边的长度趋于零，对应于收缩相应的边。因此，$\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}}$ 的 p维胞腔与 $\mathcal{M}_{g,n}$ 中余维为 p 的分层一一对应。

空间$\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}}$ 是可缩的：令边长趋于零，即可将所有内容收缩到唯一一个没有边的稳定图。但它仍具有有趣的拓扑——尤其是，它的紧支撑上同调非常复杂。事实上，正如通常上同调可以通过 CW分解计算一样，紧支撑上同调也可以通过分层为开胞腔来计算。将这一方法应用于按稳定图进行的分层，可得[4] 胞腔链复形 $C_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}}, \mathbf{Q})$ 恰好就是上一小节所描述的复形 $D(\mathcal{M}_{g,n}, \mathcal{M}_{g,n})$。特别地，$H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}}, \mathbf{Q}) \cong W_0 H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n}, \mathbf{Q})$。

我们定义 $\mathcal{CV}_{g,n} \subset \mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}}$ ，即 ***Culler–Vogtmann***图模空间，为所有对应于顶点装饰均为0的稳定图的轨形胞腔之并。于是 $\mathcal{CV}_{g,n}$ 是 $\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}}$ 的一个开子空间。这些空间是在研究自由群的自同构时引入的 [CV86]：有 $\mathcal{CV}_{g,1} \simeq B\mathrm{Aut}(F_g)$ 和 $\mathcal{CV}_{g,0} \simeq B\mathrm{Out}(F_g)$。按照上一段中的推理可知，$C_c^\bullet(\mathcal{CV}_{g,n}, \mathbf{Q}) \cong \mathsf{HGC}_0^{(g,n)}$。此外，从毛图上同调到 $\mathcal{M}_{g,n}$ 的最高权上同调的映射可以等同于自然映射

$$H_c^\bullet(\mathcal{CV}_{g,n}, \mathbf{Q}) \to H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}}, \mathbf{Q})$$

由 $H_c^\bullet(-)$ 在开浸入下具有协变函子性而得到。

在他们的论文中，Chan–Galatius–Payne 还对该映射给出了另一种几何诠释

$$H^\bullet(\mathsf{HGC}_0^{(g,n)}) \to H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n}, \mathbf{Q}),$$

通过一个“热带化”态射 $\lambda_{g,n} : \mathcal{M}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}}$。这种解释将成为本文的一个重要组成部分，因此让我们尝试对其进行说明。

下面介绍其构造：将 $\mathcal{M}_{g,n}$ 理解为亏格为 g 且有n 个尖点的双曲曲面空间。选取一个足够小的实数 ε ，使得这类曲面上任意两条长度为 $< \varepsilon$ 的闭测地线互不相交；我们称这类测地线为短测地线。对于双曲曲面 $\Sigma \in \mathcal{M}_{g,n}$，考虑将 Σ 上的每条短测地线收缩为一点后得到的结点曲面。该结点曲面确定一个稳定图，其内部边与 Σ上的短测地线一一对应，并在每条边上标记实数 $-\log(\ell/\varepsilon)$，其中 ℓ 是该测地线的长度。所得结果是 $\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}}$中的一个点，我们将此点定义为$\lambda_{g,n}(\Sigma)$。事实证明，这是一个连续的适当映射；又由于 $H_c^\bullet(-)$ 对适当态射具有反变函子性，因此可得到一个同态

$$H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}}, \mathbf{Q}) \to H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n}, \mathbf{Q}),$$

[4]这里需要使用$\mathbf{Q}$系数，因为我们只有轨形胞腔分层，而这些轨形胞腔在整系数下可能具有非常复杂的（上）同调。

事实证明，该同态与如下复合相一致

$$H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}}, \mathbf{Q}) \cong W_0 H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n}, \mathbf{Q}) \subset H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n}, \mathbf{Q}).$$

总之，我们有如下空间图示：

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{M}_{g,n} \\ & & \big\downarrow \text{proper} \\ \mathcal{CV}_{g,n} & \xhookrightarrow{\text{open}} & \mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}} \end{array}$$

应用函子 $H_c^\bullet(-)$，并利用它对开嵌入是协变的、对适当映射是逆变的这一性质，便定义了从毛图上同调到 $\mathcal{M}_{g,\,n}$ 的紧支撑上同调的映射。但现在有一种显而易见的方式可以补全该图示，并得到映射 $H_c^\bullet(\mathcal{CV}_{g,\,n},\ \mathbf{Q}) \to H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,\,n},\ \mathbf{Q})$ 的另一种分解。定义$\mathcal{HM}_{g,\,n} \subset \mathcal{M}_{g,\,n}$ 为 $\mathcal{CV}_{g,\,n}$ 在热带化态射 $\lambda_{g,\,n}$ 下的逆像：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{HM}_{g,n} & \xhookrightarrow{\text{open}} & \mathcal{M}_{g,n} \\ \big\downarrow \text{proper} & & \big\downarrow \text{proper} \\ \mathcal{CV}_{g,n} & \xhookrightarrow{\text{open}} & \mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{trop}} \end{array}$$

具体而言，$\mathcal{HM}_{g,\,n}$ 是 $\mathcal{M}_{g,\,n}$ 的开子空间，其参数化的是具有以下性质的双曲曲面：沿所有短测地线的并集切割曲面后，曲面会分解成若干零亏格部分。更一般地，对于 $2g-2+n+m>0$，定义 $\mathcal{HM}_{g\,,\,n}^{m}$ 为亏格为 g、具有 n 个尖点和 m 个长度为 ε 的带参数测地边界分支的双曲曲面空间，并要求沿短测地线切割曲面后仍分解成若干零亏格部分。现在可以陈述我们的主定理。

定理 1.4。空间 $\mathcal{HM}_{g\,,\,n}^{m}$ 是把手体群 $\mathrm{HMod}_{g\,,\,n}^{m}$的分类空间。如果 $m=0$ 则必须将其理解为轨形意义下的空间，但如果 $m>0$ 那么 $\mathcal{HM}_{g\,,\,n}^{m}$ 则是一个实际的拓扑空间。

我们预计定理 1.4 将在把手体群的研究中发挥广泛作用。事实上，毫无疑问，Teichmüller 理论一直是研究曲面映射类群的强大工具，人们也可以期待，本文建立的模型能够同样有力地用于把手体的研究。实际上，直到现在，人们还不知道$B\mathrm{HMod}_{g\,,\,n}^{m}$ 的自然几何模型。但定理 1.4 的直接推论是：从毛图复形的上同调到映射类群同调的映射，可以通过把手体子群的同调进行分解，所使用的复合为

$$H^\bullet(\mathsf{HGC}_0^{(g,n)}) \cong H_c^\bullet(\mathcal{CV}_{g,n}, \mathbf{Q}) \to H_c^\bullet(\mathcal{HM}_{g,n}, \mathbf{Q}) \to H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n}, \mathbf{Q}).$$

结合庞加莱对偶 $H_k(\mathcal{HM}_{g,\,n},\ \mathbf{Q}) \cong H_c^{6g-6+2n-k}(\mathcal{HM}_{g,\,n},\ \mathbf{Q})$ 可立即得到：

推论 1.5. 存在一个单射 $\mathfrak{grt}_1 \hookrightarrow \bigoplus_{g\geq 2} H_{4g-6}(\mathrm{HMod}_g, \mathbf{Q})$。复合映射自由李代数$(\sigma_3, \sigma_5, \ldots)$ $\hookrightarrow \bigoplus_{g\geq 2} H_{4g-6}(\mathrm{HMod}_g, \mathbf{Q})$ 将类 σ_p 映射为亏格 p中的一个同调类，并且李括号与按亏格分级相容。

推论 1.6。群 $H_{4g-6}(\mathrm{HMod}_g, \mathbf{Q})$ 在 $g=3$、$g=5$ 和 $g\geq 7$ 时非零。贝蒂数至少呈指数增长：更具体地说，

$$\liminf_{g\to\infty} \beta^{-g} \dim H_{4g-6}(\mathrm{HMod}_g, \mathbf{Q}) \geq 1,$$

其中，$\beta = 1.3247\ldots$ 是 $t^3 - t - 1 = 0$的实根。

图上同调的其他已知计算结果还揭示了把手体群同调中更多的非平凡类：

$$\begin{aligned} H_{15}(\mathrm{HMod}_6, \mathbf{Q}) &\neq 0, \\ H_{23}(\mathrm{HMod}_8, \mathbf{Q}) &\neq 0, \\ H_{27}(\mathrm{HMod}_9, \mathbf{Q}) &\neq 0, \\ H_{27}(\mathrm{HMod}_{10}, \mathbf{Q}) &\neq 0, \\ \dim H_{31}(\mathrm{HMod}_{10}, \mathbf{Q}) &\geq 2, \end{aligned}$$

这里我们采用了引自 [Wil18]的计算。关于$n > 0$ 的许多计算也已见于文献 [KWŽ17、CGP22、Yun22、BCGY21、GH22]。

注 1.7。热带化映射 $\mathcal{HM}_g \to \mathcal{CV}_g$ 在几何上实现了从把手体群到 Out(F_g) 的自然同态。更一般地，从微分同胚到同伦自同构的自然映射 Diff($V_{g,n}$) $\to$ hAut($V_{g,n}$)，在分类空间上由映射 $\mathcal{HM}_{g,n} \to \mathcal{CV}_{g,n}$ 实现。注意，hAut($V_{g,n}$) $\simeq \pi_0$hAut($V_{g,n}$) $\cong \Gamma_{g,n}$，其中 $\Gamma_{g,n}$ 表示例如 [CHKV16] 中所研究的那族群。

注 1.8。我们证明定理1.4 的一个重要要素是 Giansiracusa 的一条定理：拓扑模算子 $\{B\mathrm{Diff}(V_g^m)\}$ 是带框小圆盘运算子的导出模包络。带框小圆盘运算子是动机的——参见 [Vai19、Vai21]，或参阅 [BDPW23第 8]节中对 Vaintrob 工作的综述——因此，把手体运算子也必然同样具有动机性。特别是，带框小圆盘运算子上的链具有自然的归纳混合霍奇结构，因此把手体群本身的同调具有自然的（泰特型）混合霍奇结构。相对于这一混合霍奇结构，我们的定理或可更自然地表述为：把手体群的最高权上同调与整个映射类群的最高权上同调相同。不过，我们在此不再进一步展开这一观点。

备注 1.9. 无需借助几何定理 1.4，也可以证明 $\mathrm{Mod}_{g,n}^m$ 的最高权上同调嵌入 $\mathrm{HMod}_{g,n}^m$ 的上同调中。（不过，分类空间的几何模型本身似乎也很有趣。）具体而言，Giansiracusa 定理允许我们写出 $B\mathrm{HMod}_g^m$的一个模型，即一个以某些稳定图为指标的同伦余极限，正如定理 3.3 之后紧接着所解释的那样。由此可以像 [Gia11 第 7]节中那样进行推理，得到一个计算 HMod_g^m上同调的图复形。Giansiracusa 研究的是空间图表 $\mathcal{O} : F_{g,n} \to$ Spaces（记号同第 3 节），这会导出一个带有二价顶点、颇为繁琐的图复形；对 $\mathcal{O}^\# : F_g^{\mathrm{stab}},_n \to$ Spaces 运用相同的推理，则得到一个由稳定图构成的图复形，并且在 H_0 上恢复出毛图复形的一个变体。Giansiracusa 利用了 $\mathcal{O}$ 是一个形式函子 [GS12]这一点；出于动机论方面的考虑，$\mathcal{O}^\#$ 同样具有这一性质[CH20, Vai19]。尽管本文不采用这条路线，但这种方法的一个优点是，它同样可以产生某种图复形，用于计算$\mathcal{HM}_{g,n}$ 的权二紧支撑上同调（当然也可以计算更高权）。将其与 Payne–Willwacher [PW21]所研究的 $\mathcal{M}_{g,n}$的权二紧支撑上同调进行比较，将会很有意思。

备注 1.10。 正如我们在小节 1.2中指出的，根据欧拉示性数的考量，可以推断出 $\mathrm{Mod}_{g,n}$ 的不稳定同调会显著大于稳定同调，这甚至早于 Chan–Galatius–Payne 的工作。$\mathrm{HMod}_{g,n}$ 的情况则并非如此：正如小节 1.1中指出的，$\mathrm{HMod}_{g,n}$ 的轨形欧拉示性数为零；在本文发表之前，人们或许会认为，把手体群的大多数同调都可能落在稳定范围内。尽管如此，正如 $\mathrm{Mod}_{g,n}$ 的情形一样，我们预计，即便是从顶权检测到的呈指数增长的类族，也亚洲视频

权上同调仅占整个不稳定同调中极其微小的一部分，如$g \gg 0$。

注 1.11. 我们最初出于完全独立的原因，开始思考把手体与曲线模空间的最高权上同调之间的联系。如果 $\pi : \mathcal{M}_{g,n} \to \mathcal{M}_g$ 表示显然的遗忘映射，那么可以考虑相应紧支撑 Leray–Serre 谱序列的权零部分

$$E_2^{pq} = \mathrm{Gr}_0^W H_c^p(\mathcal{M}_g, R^q\pi_!\mathbf{Q}) \implies \mathrm{Gr}_0^W H_c^{p+q}(\mathcal{M}_{g,n}, \mathbf{Q}).$$

然而，正如 Nir Gadish 指出的那样，还有另一种谱序列也可用于研究$\mathcal{M}_{g,n}$的最高权上同调，这将是 Bibby–Chan–Gadish–Yun 即将开展的工作的主题 [BCGY]。具体而言，可以考虑投影 $\mathcal{C}_{g,n} \to \mathcal{CV}_g$的紧支撑 Leray–Serre 谱序列，

$$E_2^{pq} = H_c^p(\mathcal{CV}_g, R^q\rho_!\mathbf{Q}) \implies H_c^{p+q}(\mathcal{CV}_{g,n}, \mathbf{Q}).$$

我们猜想，不仅谱序列终项自然同构（通过 [CGP21]），而且整个谱序列也可以用一种自然的方式对应起来。在本文最后一节（§5）中，我们试图阐释这一猜想，并解释它为何会引出将曲面加厚为把手体这一思路。

致谢。 我们感谢 Nir Gadish，我们从他那里学到了通过紧支撑 Leray–Serre 谱序列研究最高权上同调的思路，适用于 $\mathcal{CV}_{g,\ n} \to \mathcal{CV}_g$。我们感谢 Sam Payne 和 Jan Steinebrunner 提供的宝贵意见。两位作者均获得 ERC-2017-STG 759082 项目资助和 Wallenberg Academy Fellowship。

2. 一些双曲几何与 Teichmüller 理论

2.1. 芬切尔–尼尔森坐标与伯斯图册。 令 $2g - 2 + n > 0$。可以将 $\mathcal{M}_{g,\ n}$ 定义为 n点标记黎曼曲面的模空间，但在本节中，$\mathcal{M}_{g,\ n}$将被视为参数化亏格为 g 、具有 n 个有序尖点的双曲曲面的空间。选取一个亏格为 g 、具有 n 个穿孔的定向参考曲面 S 。这一选择导出模空间 $\mathcal{M}_{g,\ n}$的一个万有覆盖的选取；由此得到泰希米勒空间$T(S)$，它参数化了 S 上沿穿孔带有尖点的双曲度量的同伦类，而 $T(S)$/映射类群$_{g,\ n} \cong \mathcal{M}_{g,\ n}$。 若 γ 是 S上的一条简单闭曲线，那么对于每个 S 上的双曲度量，在 γ的自由同伦类中都有唯一的测地线。这条测地线的长度仅取决于该双曲度量的同伦类，并定义了一个连续函数$\ell_\gamma : T(S) \to \mathbf{R}_{>0}$。

长度函数 ℓ_γ 构成了 Teichmüller 空间上芬切尔–尼尔森坐标系的“一半”。选择 S 的一个裤子分解；它由互不相交的简单闭曲线 $\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3+n}$ 组成。对于三个边界的指定长度（包括尖点的情形，我们将其视为长度为零的边界），总是存在唯一的双曲裤子。因此，根据数值 $\ell_{\gamma_1}, \dots, \ell_{\gamma_{3g-3+n}}$，我们可以唯一地重构裤子分解中每个裤子上的双曲度量。为了确定 S 上的双曲度量，剩下要做的就是指定沿每条 γ_i 的一个“扭转参数”，以确定如何将这些裤子粘合在一起的方向。一个众所周知但令人困惑的事实是，扭转参数的取值范围不是 S^1，而是 $\mathbf{R}$。理解这一不匹配的一种方式是：此处所述的芬切尔–尼尔森坐标实际上定义在商空间 $T(S)/\mathbf{Z}^{3g-3+n}$ 上，其中 $\mathbf{Z}^{3g-3+n} \subset$ 映射类群$_{g,n}$ 表示由沿着 S 的所选裤子分解中所有曲线进行的德恩扭转所生成的子群，接下来我们有

$$T(S)/\mathbf{Z}^{3g-3+n} \cong \mathbf{R}_{>0}^{3g-3+n} \times (S^1)^{3g-3+n}.$$

芬切尔–尼尔森坐标既可视为泰希米勒空间上的全局坐标，也可视为 $\mathcal{M}_g$ 上任意一点附近的局部坐标，n （因为 $T(S) \to \mathcal{M}_g$ 是n 覆盖映射）。对构造稍作修改，也可以给出 Deligne–Mumford 紧化 $\mathcal{M}_g$ 上n任意一点附近的局部坐标：这称为 伯斯图册，综述见[EG08] 。与通常的芬切尔–尼尔森坐标不同，这里不存在相应的全局坐标系——空间 $\mathcal{M}_g$ 是n 单连通的，不存在非平凡的覆盖空间。同样，固定参考曲面 S 的一个裤子分解，并考虑这些坐标

$$T(S)/\mathbf{Z}^{3g-3+n} \cong \mathbf{R}_{>0}^{3g-3+n} \times (S^1)^{3g-3+n}$$

如上一段所述。将 $\mathbf{R}_{>0} \times S^1$ 与挖心平面 $\mathbf{C}^\times$ 等同。通过粘入原点，我们得到一个开嵌入

$$T(S)/\mathbf{Z}^{3g-3+n} \subset \mathbf{C}^{3g-3+n}.$$

现在，覆盖映射 $T(S)/\mathbf{Z}^{3g-3+n} \to \mathcal{M}_{g,n}$ 延拓为局部微分同胚 $\mathbf{C}^{3g-3+n} \to \mathcal{M}_{g,n}$。通俗地说，我们允许裤子分解中的曲线长度变为零；此时，这些曲线被视为双曲度量的尖点，而扭转参数则不再有定义。映射 $\mathbf{C}^{3g-3+n} \to \mathcal{M}_{g,n}$ 将结果解释为一个可能带有结点的曲面，从而定义了 $\mathcal{M}_{g,n}$中的一个点。注意，$\mathbf{C}^{3g-3+n} \to \mathcal{M}_{g,n}$ 并非满射，因为其像只包含那些能够通过收缩所选裤子分解中的一部分曲线而得到的结点曲面的拓扑类型。但是，对所有裤子分解的组合类型取并集后，我们就得到了一套坐标系，覆盖 Deligne–Mumford 紧化中的任意点。

对于 S 上的任意简单闭曲线 γ，长度函数 ℓ_γ 可连续延拓为映射 $\ell_\gamma : \mathbf{C}^{3g-3+n} \to [0, \infty]$，其中 $\mathbf{C}^{3g-3+n}$ 是前一段中讨论的空间。在这个延拓后的长度函数下，长度为零的曲线恰好对应于被收缩为尖点的曲线，而长度为无穷大的曲线则对应于穿过一条被收缩为尖点的曲线的曲线。

假设 $2g - 2 + n + m > 0$。若改为取 S 为一个亏格为 g、带有 n 个有序穿孔和 m 个有序边界分支的曲面，则令 $T(S)$ 表示 S 上双曲度量的同伦类空间，其中穿孔处带有尖点，且每个边界分支都是全测地的，其固定长度为 ε。商空间 $T(S)/\mathrm{Mod}_{g,\,n}^{m}$ 可与空间 $\mathcal{M}_{g,\,n}^{m}$ 等同；该空间以亏格为 g、带有 n 个尖点和 m 个参数化边界分支的双曲曲面为参数。

空间 $T(S)$ 仍可用芬切尔–尼尔森坐标参数化，与情形$m = 0$相同。于是， S的裤子分解由 $3g-3+n+2m$ 条曲线组成，其中 m 条是选定的边界曲线。由于边界的长度已固定， m 条边界曲线在芬切尔–尼尔森坐标中没有长度参数，但我们为每条边界都加入一个扭转参数。因此，$\mathcal{M}_{g,\,n}^{m}$ 的实维数为 $6g - 6 + 2n + 3m$。

2.2. **厚Teichmüller空间**。众所周知，模空间 $\mathcal{M}_{g,\,n}$ 并不紧致，因此有 Deligne–Mumford 紧化 $\overline{\mathcal{M}}_{g,\,n}$。模空间的厚区域 $\widehat{\mathcal{M}}_{g,\,n}(\varepsilon)$，可视为 $\overline{\mathcal{M}}_{g,\,n}$ 中 Deligne–Mumford边界的一个管状邻域的补集。厚区域取决于参数 ε，该参数必须选得足够小。回想一下，双曲曲面上足够短的测地线总是彼此不相交：

定理2.1 (领圈引理)。 设 S 为一个双曲曲面。若 γ、$\gamma' \subset S$ 是闭测地线曲线，且 $\ell(\gamma)$ $\ell(\gamma')$ $< \log(3 + 2\sqrt{2})$，则 $\gamma \cap \gamma' = \varnothing$。

在本文余下部分，固定一个实数 $\varepsilon < \log(3 + 2\sqrt{2})$。长度为 $\leq \varepsilon$ 的闭测地线称为短测地线。

定义 2.2. ε-厚区域 $\mathcal{M}_{g,n}^{m}$ 是参数化双曲曲面的子区域，其中所有闭曲线的长度均为 $\ell(\gamma)$ $\geq \varepsilon$，且每个边界分支的长度恰为 ε。我们将 ε-厚区域记为$\mathcal{M}_{g,n}^{m}(\varepsilon)$。

我们在以下定理中概述 $\mathcal{M}_{g,n}^{m}(\varepsilon)$ 的性质。

定理 2.3. </style}空间 ,$_{n}(\varepsilon)$ 在 $m > 0$ 时是紧致带角流形。当$m = 0$ 时，它只是带角轨形。包含映射 $\mathcal{M}_{g,n}^{m}(\varepsilon) \hookrightarrow \mathcal{M}_{g,n}^{m}$ 是同伦等价。

,$_{n}(\varepsilon)$ 的紧致性就是芒福德紧致性定理 [Mum71]。它是带角流形这一事实，是领圈引理和芬切尔–尼尔森坐标的推论。事实上，给定一个双曲曲面 S，根据领圈引理，我们知道 S 上的短测地线彼此不相交，这尤其意味着存在一个包含所有短测地线的 S 裤子分解。相对于所选裤子分解的芬切尔–尼尔森坐标中，定义 $\mathcal{M}_{g,n}^{m}(\varepsilon)$ 的方程 $\ell_{\gamma}[X] \geq \varepsilon$ 显然刻画出一个带角流形。此外，我们还需要知道，在模空间中 S 的某个邻域内不会出现额外的短测地线：这可由 Wolpert 的以下引理推出。

定理 2.4 (沃尔珀特引理)。 对于任意 $[X]$、$[Y] \in T(S)$，以及 γ 上的一条简单闭曲线 S，有如下不等式

$$|\log \ell_{\gamma}[X] - \log \ell_{\gamma}[Y]| \leq d_{\mathrm{Teich}}(X, Y)$$

其中， d_{Teich} 表示特*ich*米勒度量。

证明。 [Wol79，引理 3。1]。 □

关于 $\mathcal{M}_{g,n}^{m}(\varepsilon) \hookrightarrow \mathcal{M}_{g,n}^{m}$ 是同伦等价这一事实，参见 [JW10、Ji14]。简言之，Ji 和 Wolpert 在 $\mathcal{M}_{g,n}^{m} \setminus \mathcal{M}_{g,n}^{m}(\varepsilon)$ 上构造了一个向量场，使得沿该向量场流动的效果是连续增加双曲曲面的最短闭测地线的长度。如果存在多条最短闭测地线，则以相同速率增加它们的长度。沿该向量场流动定义了一个从 $\mathcal{M}_{g,n}^{m}$ 向下至厚区域的变形收缩。

3. Giansiracusa 定理与把手体的双曲模型

3.1. **循环 operad 与模 operad**。 本节将简要回顾循环 operad 和模 operad 的概念，主要是为了统一记号与约定。关于更全面的介绍，请参阅原始文献，见 [GK98]。我们采用的定义以 Costello [Cos04]的定义为蓝本。

一个对偶图 由有限集 H （半边）、有限集 V（顶点）、 H上的对合 $\imath$、函数 $f\colon H \to V$以及亏格函数 $g\colon V \to \mathbf{N}$构成。 $\imath$ 的不动点称为腿，大小为二的轨道称为边。对于 $v \in V$，我们记作 $n(v)$: $= |f^{-1}(v)|$。

若对偶图满足对所有 $v \in V$， $2g(v)-2+n(v) > 0$，则称其为稳定 。若对所有 $v \in V$， $2g(v)-2+n(v) \geq 0$, 则称其为半稳定 。

从给定的对偶图 Γ 得到无边图有两种自然方式：我们可以收缩每条边，也可以将每条边切成两条腿，从而得到单顶点图的不交并。

具体而言，若 $\Gamma = (H, V)$ 是一个对偶图，则 $\operatorname{Contr}\Gamma = (H', V')$ 定义如下：H' 是 Γ 的腿集；V' 是 V 关于由 $f(h) \sim f(i(h))$（其中 $h \in H$）生成的等价关系所得的商；亏格函数 $g' \colon V' \to \mathbf{N}$ 是满足以下条件的唯一函数

$$2g'(v') - 2 + n(v') = \sum_{\substack{v \in V \\ [v] = v'}} 2g(v) - 2 + n(v)$$

对所有 $v' \in V'$ 都成立。也就是说，右侧的和遍历自然商 $V \to V'$ 下 v' 的原像。注意，如果 Γ 是稳定或半稳定的，那么 $\operatorname{Contr}\Gamma$ 也是如此。

我们将 $\operatorname{Cut}\Gamma$ 定义为一个图，它与 Γ 具有相同的半边、顶点和亏格标记，但 $\operatorname{Cut}\Gamma$ 的半边上的对合是恒等映射。

我们将图范畴 Graphs 定义为对象为无边半稳定图的范畴。一个态射 $\gamma \to \gamma'$ 是一个带有 $\operatorname{Cut}\Gamma = \gamma$ 的半稳定图 Γ，以及一个同构 $\operatorname{Contr}\Gamma \cong \gamma'$。图范畴 Graphs 在图的不交并运算下成为对称幺半范畴。令 Forests $\subset$ Graphs 为其子范畴，其态射是无环的图，且所有亏格标记均恒为零。

定义 3.1。对称幺半范畴 $\mathcal{E}$ 中的模 *operad* 是一个从图范畴到 $\to \mathcal{E}$的强对称幺半函子。循环 *operad* 是一个从 Forests到 $\to \mathcal{E}$的强对称幺半函子。

如果 $\mathcal{O}$ 是一个模 operad，我们有时会将 $\mathcal{O}(g, n)$ 写作 $\mathcal{O}(*_{g,n})$，其中 $*_{g,n}$ 表示一个只有一个亏格为 g 的顶点和 n 条腿的图。我们称 $\mathcal{O}(g, n)$ 为 $\mathcal{O}$ 的亏格为 g、元数为 n 的分量。更明确地说，模 operad 可以定义为：对于所有 $2g - 2 + n \geq 0$，在 $\mathcal{E}$ 中的一族对象 $\mathcal{O}(g, n)$，对于所有 g, n，$\mathbb{S}_n$ 在 $\mathcal{O}(g, n)$ 上的作用，以及粘合映射。

$$\mathcal{O}(g, n+1) \otimes \mathcal{O}(g', n'+1) \to \mathcal{O}(g+g', n+n') \qquad \text{and} \qquad \mathcal{O}(g, n+2) \to \mathcal{O}(g+1, n)$$

满足适当的结合性和等变性公理。类似地，若 $\mathcal{O}$ 是一个循环 operad，则我们有时将 $\mathcal{O}(*_{0,n})$ 记作 $\mathcal{O}(n)$。

我们最感兴趣的例子，是拓扑空间范畴中的运算子，也就是拓扑模 *operad*。空间族 $\{B\operatorname{Diff}(\Sigma_g^n)\}$ 具有拓扑模算子结构，其运算由沿边界粘合曲面给出；我们称之为曲面 *operad*。（这一事实比乍看之下更微妙，参见例如 [BDPW23第 3 节中的讨论。1]。）类似地，空间族 $\{B\operatorname{Diff}(V_g^n)\}$ 也构成一个拓扑模算子，我们称之为把手体算子。

曲面 operad 的循环部分称为带框小圆盘运算子。它也可以通过定向圆盘的粘合来建模，参见 [Get94]。

这里给出的模 operad 和循环 operad 的定义与 Getzler–Kapranov 的定义并不完全等价：在他们的定义中，图范畴（分别为 Forests）取为稳定的，而不是半稳定的。也就是说，按照 Getzler–Kapranov 的定义，模 operad 不包含亏格 0、元数 2 的分量，也不包含亏格 1、元数 0 的分量。其原因在于，他们所依据的动机性例子是由 Deligne–Mumford 空间$\{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}\}$组成的拓扑模算子，其运算子结构由沿节点粘合曲线给出。（一个小小的细节是，这里的模 operad 并非定义在拓扑空间中，而是定义在轨形中。）按照 Getzler–Kapranov 的定义，每个模 operad 都可以用一种规范方式视为这里所定义意义下的模 operad：规定亏格 0、元数 2 分量和亏格 1、元数 0 分量为幺半群单位，并赋予显然的结构映射。因此，我们不会在术语上区分模 operad 的这两种概念。

施加稳定性条件 $2g-2+n>0$ 也使得双曲几何中的例子成为可能：由具有参数化边界、边界长度为 ε 的双曲曲面空间 $\{\mathcal{M}_g^n\}$ 组成的集合构成一个模 operad；双曲曲面可以沿其参数化边界曲线粘合在一起（这里，坚持要求所有边界曲线都是全测地的，并且具有完全相同的长度，是很重要的）。模空间中的厚部分的集合，

$$\mathcal{M}_g^n(\varepsilon) \hookrightarrow \mathcal{M}_g^n$$

形成一个子 operad，且该子 operad 到拓扑模算子的包含映射是同伦等价。尽管圆柱上不存在双曲度量，我们可以将 $\mathcal{M}_0^2$ 定义为群 SO(2)，其运算子复合

$$\mathcal{M}_0^2 \times \mathcal{M}_g^n \to \mathcal{M}_g^n$$

通过重新参数化所选边界分支给出。我们还令 $\mathcal{M}_0^2(\varepsilon) = \mathrm{SO}(2)$。根据这些定义，两个运算子 $\{\mathcal{M}_g^n\}$ 和 $\{\mathcal{M}_g^n(\varepsilon)\}$ 都等价于曲面 operad$\{B\mathrm{Diff}(\Sigma_g^n)\}$，但亏格 1、元数 0 分量除外，在该分量上它们有所不同（不过这不会影响本文）。事实上，$B\mathrm{Diff}(\Sigma_0^2) \cong B\mathbf{Z} \cong \mathrm{SO}(2)$，其中 $\mathbf{Z}$ 由圆柱的一个德恩扭转生成。

注 3.2。文献中还常见循环 operad 和模 operad 定义的其他变体。可以将没有顶点的“自由悬浮”边作为图允许的一种形式：因为一个图 Γ 带有 n 条腿定义了一个映射 $\bigotimes_{v\in V(\Gamma)}\mathcal{O}(n(v)) \to \mathcal{O}(n)$ 在循环 operad 中 $\mathcal{O}$，这样的自由边定义了一个映射 $\mathbf{1}\to\mathcal{O}(2)$，从而使其 $\mathcal{O}$ 含单位。就我们的目的而言，考虑含单位还是非含单位 operad 并不会真正产生影响。此外，许多作者（例如[Cos04、Gia11]）省略顶点上的亏格标记，在这种情况下，按亏格分级是模 operad 可能具有、也可能不具有的额外结构；例如，任何模包络（见下一节）都带有典范亏格分级。

3.2. 模包络与 Giansiracusa 定理。

现在假设 $\mathcal{E}$ 是余完备的。那么存在一个伴随

$$\mathrm{Cyc} : \mathrm{Fun}(\mathsf{Graphs}, \mathcal{E}) \leftrightarrows \mathrm{Fun}(\mathsf{Forests}, \mathcal{E}) : \mathrm{Env}$$

其中 Cyc 是限制函子，而 Env 是左 Kan 延拓。尽管强幺半函子的左 Kan 延拓通常不一定是强幺半函子，但在这里确实如此，相关解释及更广泛的背景见 [BKW18]。因此，函子 Cyc 和 Env在 $\mathcal{E}$中限制为循环运算子与模运算子之间的伴随。我们称 Env 为模包络。

若 $\mathcal{O} : \mathsf{Forests} \to \mathcal{E}$ 是一个循环 operad，那么 Kan 延拓的余极限公式给出 Env $\mathcal{O}$的显式公式：

$$(\mathrm{Env}\,\mathcal{O})(g,n) = \operatorname*{colim}_{\Gamma\in F_{g,n}} \mathcal{O}(\Gamma).$$

这里 $F_{g,\,n}$ 是切片范畴 Forests$\downarrow *_{g,\,n}$：其对象是亏格为 g、带有 n 条有序腿的图，且所有顶点的亏格均为零；态射由自同构与边收缩复合而成。我们有

$$\mathcal{O}(\Gamma) = \bigotimes_{v\in V(\Gamma)} \mathcal{O}(n(v)).$$

这种记法或许稍显滥用，更准确地说应写作 $\mathcal{O}(\mathrm{Cut}\qquad\qquad\Gamma)$.

如果 $\mathcal{E}$ 是拓扑空间范畴、链复形范畴，或者更一般地说，是一个对称幺半模型范畴，那么我们就可以定义模包络的一个导出版本。

函子，通过取导出左 Kan 延拓。它也有类似的同伦余极限公式：

$$(\mathbf{L}\mathrm{Env}\,\mathcal{O})(g,n) = \operatorname*{hocolim}_{\Gamma\in F_{g,n}} \mathcal{O}(\Gamma).$$

我们证明定理 1.4 的一个关键依据是 Giansiracusa 的以下定理[Gia11]：

定理 3.3 (Giansiracusa)。 带框架小圆盘 *operad* 的导出模包络与把手体模 *operad* 等价，但亏格为 1 且元数为 0时的取值除外。

证明中的一个要点对我们很重要，即从半稳定图到稳定图的过渡 [Gia11，第 6 小节。4]。（Giansiracusa 使用的术语是约化而非稳定图。）

假设 $\mathcal{O}$ 是一个拓扑循环运算子 Forests $\to$ Spaces。那么 $G = \mathcal{O}(2)$ 是一个拓扑幺半群（通过运算子复合），并且带有一个幺半群同构ϕ： $G \xrightarrow{\sim} G^{\mathrm{op}}$，使得 $\phi\circ\phi^{\mathrm{op}} = \mathrm{id}$；这是通过 $\mathcal{O}(2)$ 上的 $\mathbb{S}_2$-作用给出的。现在假设 G 实际上是一个拓扑群，也就是说， G 上的幺半群结构是群结构，且同构 $G \xrightarrow{\sim} G^{\mathrm{op}}$ 由群中的取逆给出。正如上一小节所解释的，对于任意拓扑循环运算子，我们有

$$(\mathbf{L}\mathrm{Env}\,\mathcal{O})(g,n) = \operatorname*{hocolim}_{\Gamma\in F_{g,n}} \mathcal{O}(\Gamma).$$

当 $\mathcal{O}(2) \cong G$按上述意义是一个群时，Giansiracusa 说明，我们可以为右侧的同伦余极限找到一个“更小”的模型：

$$(\mathbf{L}\mathrm{Env}\,\mathcal{O})(g,n) = \operatorname*{hocolim}_{\Gamma\in F^{\mathrm{stab}}_{g,n}} \mathcal{O}^{\#}(\Gamma), \qquad \text{if } 2g-2+n>0,$$

其中 $F^{\mathrm{stab}}_{g,n}$ 是 $F_{g,n}$ 的子范畴，仅由稳定图构成，并且

$$\mathcal{O}^{\#}(\Gamma) = \Big(\prod_{v\in V(\Gamma)} \mathcal{O}(n(v))\Big)\Big/ G^{\mathrm{Edge}(\Gamma)},$$

其中每个因子 G 通过运算子复合在乘积上作用。具体而言， G 以乘法作用于其中一个因子，并通过沿另一个因子与其逆元复合；所得商与选择哪一个因子无关。这里取的是同伦商。

非正式地说，这是因为允许图具有二价顶点，意味着在稳定图的每条边上，我们都允许任意细分，而所有这些细分共同构成了一个针对 G的作用的 Borel 构造副本。因此，取同伦余极限便得到一个同伦商的模型。另一种等价的观点是， $\mathcal{O}^{\#}$ 是 $\mathcal{O}$ 沿稳定化函子 $F_{g,n} \to F^{\mathrm{stab}}_{g,n}$ 的导出左 Kan 延拓；参见 [Gia11，引理 6.4。1]。

3.3. **余纤维化图表与带角流形。** 定义 $G_{g,n}$ 为图范畴 Graphs$\downarrow *_{g,n}$，即由亏格为 g 且有 n 条腿的所有半稳定图构成的切片范畴；并定义 $G^{\mathrm{stab}}_{g,n}$ 为稳定图的子范畴。

范畴 $G^{\mathrm{stab}}_{g,n}$ 及其子范畴 $F^{\mathrm{stab}}_{g,n}$ 自然地是广义 ***Reedy*** 范畴[BM11]。我们将选择以下度函数 d：$G^{\mathrm{stab}}_{g,n} \to \mathbf{N}$ 函数

$$d(\Gamma) = \sum_{v\in V(\Gamma)} 3g(v) - 3 + n(v);$$

这一选择的动机在于，这是$\mathcal{M}_{g,n}$ 中与 Γ 对应的分层的复维数。

令 $\mathcal{O}$ 表示拓扑模算子 $\{\mathcal{M}_g^n(\varepsilon)\}$，并令 $G = \mathcal{O}(0,\ 2) = \mathrm{SO}(2)$。我们可以通过重复前一小节中说明的构造，定义一个从 $G^{\mathrm{stab}}_{g\ n,}$ 到空间的函子 $\mathcal{O}^{\#}$：

$$\mathcal{O}^{\#}(\Gamma) = \Big(\prod_{v\in V(\Gamma)} \mathcal{O}(g(v), n(v)) \Big) \Big/ G^{\mathrm{Edge}(\Gamma)}.$$

若 $n > 0$，则对于所有 $\Gamma \in G^{\mathrm{stab}}_{g\ n,}$，$G^{\mathrm{Edge}(\Gamma)}$ 在 $\prod_{v\in V(\Gamma)} \mathcal{O}(g(v)\ n(v))$ 上自由作用，因此我们可以在 $\mathcal{O}^{\#}$ 的定义中用实际商替代同伦商。这是因为空间 $\mathcal{M}_g^n$ 虽然先验上是一个轨形，但当 $n > 0$ 时实际上是一个流形。若 $n = 0$，则 $G^{\mathrm{Edge}(\Gamma)}$ 的作用具有有限稳定子群；此时我们将函子 $\mathcal{O}^{\#}$ 视为取值于可微叠或拓扑叠。

引理 3.4。令 $n > 0$。按照前一小节中的记号，函子 $\mathcal{O}^{\#}: G^{\mathrm{stab}}_{g\ ,\ n} \to$ 空间 是广义 ***Reedy*** 余纤维的。

证明。由于 $G^{\mathrm{stab}}_{g\ n\ ,}$ 中的每个非同构都会提高次数，因此 $(G^{\mathrm{stab}}_{g\ n\ ,})^{-}$ 仅包含同构，而 $(G^{\mathrm{stab}}_{g\ n\ ,})^{+} = G^{\mathrm{stab}}_{g\ n\ ,}$。现在，对每个图 Γ，锁定对象 $L_\Gamma\mathcal{O}^{\#}$ 是余极限

$$L_\Gamma\mathcal{O}^{\#} = \operatorname*{colim}_{\Gamma'\to\Gamma} \mathcal{O}^{\#}(\Gamma')$$

其中余极限遍历所有不可逆态射 $\Gamma' \to \Gamma$。

我们需要证明，对于每个稳定图 Γ，映射 $L_\Gamma\mathcal{O}^{\#} \to \mathcal{O}^{\#}(\Gamma)$ 都是 Aut(Γ)-等变余纤维化。

当 $g = 0$ 时，这一点最为清楚，此时 $G^{\mathrm{stab}}_{0\ n\ ,}$ 是一个偏序集。事实上，对于所有亏格为零的 Γ，$\mathcal{O}^{\#}(\Gamma)$ 都是一个带角流形，偏序集 $G^{\mathrm{stab}}_{0\ n\ ,}$ 是流形$\mathcal{O}^{\#}(*_{0,\ n})$ 的分层偏序集，而图表 $\mathcal{O}^{\#}: G^{\mathrm{stab}}_{0\ ,\ n} \to$ Spaces 则通过取各分层的闭包给出。这显然是 Reedy 余纤维的，而衔接对象（latching object）恰好是所有正余维分层的并集。

当 $g > 0$时，类似的陈述也成立。不过，必须处理图可能具有自同构这一事实（因此我们有一个广义 Reedy范畴）。令$G^{\mathrm{stab}}_{g\ ,n}/\simeq$ 为范畴 $G^{\mathrm{stab}}_{g\ n\ ,}$的同构类集合。它自然构成一个偏序集。空间 $\mathcal{O}^{\#}(*_{g,n})$ 是一个带角流形，其分层偏序集为 $G^{\mathrm{stab}}_{g\ ,n}/\simeq$。与图 Γ 对应的开分层是如下商空间

$$\big(\operatorname{Int}\mathcal{O}^{\#}(\Gamma)\big)\big/\operatorname{Aut}(\Gamma),$$

其中，Int(–)表示带角流形的内部。由此可知，对于所有 Γ，有限群 Aut(Γ) 在 $L_\Gamma\mathcal{O}^{\#}$ 和 $\mathcal{O}^{\#}(\Gamma)$ 上都自由作用，而诱导映射

$$L_\Gamma\mathcal{O}^{\#}/\operatorname{Aut}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{O}^{\#}(\Gamma)/\operatorname{Aut}(\Gamma)$$

是所有正余维分层之并的包含映射，特别地，它是一个余纤维化。因此，$L_\Gamma\mathcal{O}^{\#} \to \mathcal{O}^{\#}(\Gamma)$是一个等变余纤维化。□

当 $n = 0$ 时，类似的陈述不可能严格成立，因为 $\mathcal{O}^{\#}(g,0)$ 是一个轨形。据我们所知，拓扑或可微叠上并不存在合适的模型结构——它们甚至都不构成一个 1-范畴。然而，确实有 $\mathcal{O}^{\#}(*_{g,0}) = \mathcal{M}_g(\varepsilon)$。

一个带角轨形，其分层偏序集为 $G_g^{\mathrm{stab}}{}_{,0}\ /\!\simeq$。对应于图 Γ 的开分层是商集

$$\big(\operatorname{Int}\mathcal{O}^{\#}(\Gamma)\big)\big/\operatorname{Aut}(\Gamma).$$

如果我们现在固定一个由复流形给出的有限覆盖 $X\to\mathcal{M}_g$，例如在由 $\mathcal{M}_g$ 参数化的黎曼曲面上置入一个层结构，那么我们可以考虑 $\mathcal{M}_g(\varepsilon)$ 在 X 中的逆像。现在它成为一个带角流形，其分层图如前所述是余纤维的。

3.4. 把手体的双曲模型。 回顾一下，双曲曲面上的一条短测地线是一条闭测地线 γ，满足 $\ell(\gamma)<\varepsilon$。令 $2g-2+n+m>0$。回顾引言中的定义，$\mathcal{HM}_{g,\,n}^{m}\subset\mathcal{M}_{g,\,n}^{m}$ 表示参数化具有如下性质的双曲曲面的开子空间：所有短测地线构成的集合将其切分为若干个零亏格部分。我们将 $\mathcal{HM}_{g,\,n}^{m}$ 定义为 $\mathcal{HM}_{g,\,n}^{m}$ 在 $\mathcal{M}_{g,\,n}^{m}$中的闭包。因此，$\mathcal{HM}_{g,\,n}^{m}$ 参数化了这样一些曲线：它们被满足 $\ell(\gamma)\le\varepsilon$ 的测地线集合切分为若干个零亏格部分。注意，$\mathcal{HM}_{0,\,n}^{m}=\mathcal{M}_{0,\,n}^{m}$。最后，我们定义

$$\mathcal{X}_{g,n}^{m}:=\overline{\mathcal{H}}\mathcal{M}_{g,n}^{m}\cap\mathcal{M}_{g,n}^{m}(\varepsilon).$$

具体而言，$\mathcal{X}_{g,\,n}^{m}$ 参数化所有闭测地线长度至少为 ε 的双曲曲面，其中长度恰为 ε 的闭测地线将曲面切分为亏格为零的部分。

命题 3.5. 这些映射

$$\mathcal{HM}_{g,n}^{m}\hookrightarrow\overline{\mathcal{H}}\mathcal{M}_{g,n}^{m}\hookleftarrow\mathcal{X}_{g,n}^{m}$$

是同伦等价。

证明。由第 2.2 小节的讨论可知，$\mathcal{HM}_{g,\,n}^{m}$ 是带角流形（当 $\overline{m}=0$ 时为轨形），且 $\mathcal{HM}_{g,\,n}^{m}$ 是其内部。因此，第一个断言显然成立。

对于第二个断言，我们使用 Ji–Wolpert 构造的从 $\mathcal{M}_{g,\,n}^{m}$ 到 $\mathcal{M}_{g,\,n}^{m}(\varepsilon)$ 的变形收缩，该构造在第 2.2 小节末尾有所描述。从那里给出的变形收缩描述可轻易看出，它限制为从 $\mathcal{HM}_{g,\,n}^{m}$到 $\mathcal{X}_{g,\,n}^{m}$ 的变形收缩。□

空间 $\{\mathcal{M}_g^m(\varepsilon)\}$ 上的模 operad 结构可通过沿参数化边界粘合双曲曲面，限制为这些空间 $\{\mathcal{X}_g^m\}$上的模 operad 结构。

定理 3.6。 由空间 $\{\mathcal{X}_g^m\}$ 给出的模 *operad*（其中 $2g-2+m>0$）等价于把手体模 *operad*。

证明。 与小节 3.3 中一样，我们令 $\mathcal{O}$ 表示厚模空间的模 operad$\{\mathcal{M}_g^m(\varepsilon)\}$，其中 $\mathcal{O}(0,\,2)=\mathrm{SO}(2)$。记 $\mathcal{O}_c=\operatorname{Cyc}\mathcal{O}$ 为其到循环 operad 的限制；它等价于带框小圆盘运算子。Giansiracusa 定理 3.3 表明，导出模包络 $\mathbf{L}\mathrm{Env}\,\mathcal{O}_c$ 等价于把手体模 operad，但亏格 1 和元数0的情形除外。

如定理 3.3 之后所述，$\mathbf{L}\mathrm{Env}\ \mathcal{O}_c(g,n)$ 是 $\mathcal{O}_c^{\#}$在范畴 $F_{g\,n}^{\mathrm{stab}}$ 上的同伦余极限。但根据引理 3.4，函子 $\mathcal{O}_c^{\#}$是定义在 $G_{g\,n}^{\mathrm{stab}}$ 上的空间的余纤维图表，因此也是定义在其子范畴 $F_{g\,n}^{\mathrm{stab}}$ 上的余纤维图表，所以我们可以用普通余极限替代同伦余极限。当 $n=0$ 时，这一点并不能由引理 3.4推出，而是由紧接引理之后的讨论推出的。无论如何，普通余极限不过是 $\mathcal{O}$ 的映射类群子 operad，它由伴随的余单位的像给出

$$\operatorname{Env}\operatorname{Cyc}\mathcal{O}\to\mathcal{O},$$

展开定义可知，余单位的像不过就是拓扑映射类群 operad $\{\mathcal{X}_g^m\}$。□

Cor推论 3.7。$\mathcal{HM}_{g,\,n}^m$ 是把手体群 $\mathrm{HMod}_{g,\,n}^m$的分类空间。

证明。当 $n=0$ 这由定理 3.6 和命题 3.5 得出。一般情形也可由此推出。事实上，我们首先考虑短正合列

$$0 \to \mathbf{Z}^n \to \mathrm{HMod}_g^{n+m} \to \mathrm{HMod}_{g,n}^m \to 1 \tag{1}$$

其中 $\mathbf{Z}^n$ 表示由围绕（$n+m$）个边界分支中的 n 的德恩扭转生成的子群。我们还可以从几何上知道，$\mathcal{M}_g^{n+m}$是一个覆盖$\mathcal{M}_{g,n}^m$的 n重圆丛总空间：将$\mathcal{M}_{g,n}^m$ 与 $\mathcal{M}_g^{n+m}$在 SO(2)^{n}作用下的商空间相等同，其中该作用通过重新参数化 n 个边界分支给出。通过限制，$\mathcal{HM}_g^{n+m}$ 成为一个覆盖$\mathcal{HM}_{g,n}^m$的 n重圆丛，我们可以考虑由此诱导的同伦群长正合序列。将此长正合序列与（1）进行比较，我们看到，只需证明$\mathcal{HM}_g^{n+m} \simeq B\mathrm{HMod}_g^{n+m}$，即可推出$\mathcal{HM}_{g,n}^m \simeq B\mathrm{HMod}_{g,n}^m$。□

4. 热带化映射

在小节 1.3 中，我们使用了 热带化 态射 $\lambda_{g,\,n} : \mathcal{M}_{g,\,n} \to \mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{trop}}$。该映射由 Chan–Galatius–Payne [CGP21, §7.1]，引入，作为类似的非阿基米德热带化映射的类比 $\mathcal{M}_{g,\,n}^{\mathrm{Berk}} \to \mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{trop}}$，参见 Abramovich–Caporaso–Payne [ACP15]。前一个映射定义在代数叠 $\mathcal{M}_{g,\,n}$ 的复解析化上，后一个则定义在*Berkovich* 解析化上。

本文本节的目标是证明映射 $\lambda_{g,\,n}$ 连续且适当，并且它诱导出一个同构 $H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{trop}}, \mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} W_0 H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,\,n}, \mathbf{Q})$。这些性质在 [CGP21,§7.1] 中陈述过，但未给出证明。

此时我们还需要作一项重要的免责声明。迄今为止，我们一直将空间 $\mathcal{M}_{g,\,n}$ 视为叠，并未多作讨论。它最自然的形式或许是代数叠或解析叠，此时它表示一个几何上自然的函子 [HV 10]，但也可以通过解析化将其视为拓扑叠，或轨形。类似地，在 [CCUW20] 之后，空间 $\mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{trop}}$ 最自然的理解是定义在某个多面锥范畴上的叠，在该范畴上它表示一个热带曲线的模空间函子。通过解析化，它也可以被视为拓扑叠。现在，人们当然会期望存在一个性质良好的拓扑叠热带化态射 $\mathcal{M}_{g,\,n} \to \mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{trop}}$ ——然而，我们实际上不知道如何证明这一点，根本问题在于，我们甚至不知道 $\mathcal{M}_{g,\,n}$ 或 $\mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{trop}}$ 在拓扑空间的位点上分别表示什么函子。

因此，在本节中，我们仅将热带化映射构造为相应拓扑叠的粗模空间之间的态射：为此，只需从集合论角度定义一个函数，将双曲曲面的同构类对应到热带曲线的同构类，然后在局部坐标中验证该函数是连续的。对于我们预期的应用而言，知道热带化态射作为粗空间之间的映射存在就完全足够了，因为投影到粗空间的映射在有理上同调（以及具有紧支撑的有理上同调）上诱导出一个同构。

下文中，我们将 $M_{g,n}$ （分别将 $M_{g\,n}^{\mathrm{trop}}$）记作 $\mathcal{M}_{g,n}$ 和 $\mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{trop}}$

事实上，对于我们的论证，考虑将热带化态射延拓至Deligne–Mumford边界，从而得到连续映射 $M_{g,\,n} \to M_{g\,n}^{\mathrm{trop}}$，会更方便。该

空间 $\mathfrak{M}^{\mathrm{trop}}_{g,n}$，是$\mathcal{M}^{\mathrm{trop}}_{g,n}$ 的紧化，其构造方式是允许度量图中的边长度取值为 ∞ [Cap13]，以及 $M^{\mathrm{trop}}_{g,n}$，是其粗空间。—

考虑一点$[X] \in M_{g,n}$。我们将 X 视为带节点的双曲曲面，每个尖点和节点处都有一个尖点。我们将 $\lambda_{g,n}[X]$ 定义为如下度量图。其底层图 Γ 是将 X 上每条短测地线压缩为一点后所得曲面的对偶图。根据领圈引理，这一定义是良定的。Γ 上的度量定义如下：对应于 X 节点的边，其长度设为 ∞。对应于 X 上一条长度为 ℓ 的短测地线的边，其长度设为 $-\log(\ell/\epsilon)$。

命题 4.1. 刚刚定义的函数 $\lambda_{g,n}\colon M_{g,n} \to M_{\mathrm{trop}\,g,n}$ 是连续的。

证明。只需在伯斯图册所提供的坐标中局部验证这一点，因为投影 $\mathcal{M}_{g,n} \to M_{g,n}$ 局部是一个商映射。因此，取一点$[X] \in M_{g,n}$。为在 $[X]$ 附近定义一个伯斯坐标图，我们固定一个满射 $S \to X$，其定义域为所选的亏格为g 且带有 n 个穿孔的参考曲面。取 S 的一个裤子分解，其中包含所有在 X中收缩为节点的曲线，此外还包含所有在 S 中的像为长度短于 $\log(3+2\sqrt{2})$ 的闭测地线的曲线。事实上，根据领圈引理，这些曲线彼此不相交，因此可以扩充为一个裤子分解。

现在我们断言，存在一个 $[X]$ 的开邻域，使得对于由该邻域中任一点确定的任意双曲度量，任意短测地线（或收缩为一个节点的曲线）都包含在 S 的固定裤子分解中。由此断言即可得出结论：在这个邻域内，相对于所选裤子分解的伯斯图册局部坐标，映射到 $M^{\mathrm{trop}}_{g,n}$，显然是连续的。—

如果 $[X]$ 位于 $M_{g,n}$ 的内部，那么该断言直接由沃尔珀特引理以及我们选择 ε 严格小于 $\log(3+2\sqrt{2})$ 得出。如果 $[X]$ 位于 Deligne–Mumford边界上，那么我们可以考虑其正规化，从而得到较小的泰希米勒空间之积中的一个点，并可对其应用沃尔珀特引理。但我们还需要考虑曲线集合 $\mathfrak{C} = \{\gamma \subset S : \ell_\gamma[X] = \infty\}$，即在 S 上其像在 X 上经过某个节点的那些曲线。我们断言，对于任意 $M \in \mathbb{R}$，集合$\{[Y] \in \mathcal{C}^{3g-3+n} : \ell_\gamma[Y] > M$ 对所有 $\gamma \in \mathfrak{C}\}$ 都成立，是 X 的一个开邻域，由此即可完成证明。事实上，沃尔珀特引理以及黎曼曲面长度谱的离散性 [FM12, 引理 12.4] 表明，无穷交集 $\bigcap_{\gamma\in\mathfrak{C}}\{[Y] : \ell_\gamma[Y] > M\}$ 局部由有限个超曲面定义，因此是开集。□

通过限制，我们还得到一个连续函数 $M_{g,n} \to M^{\mathrm{trop}}_{g,n}$。我们记录如下观察：

推论 4.2。 映射 $M_{g,n} \to M^{\mathrm{trop}}_{g,n}$ 是适当的。

证明。事实上，它延拓为紧化之间的连续映射。□

命题 4.3。 映射 $H^\bullet_c(M^{\mathrm{trop}}_{g,n}, \mathbb{Q}) \to H^\bullet_c(M_{g,n}, \mathbb{Q})$ 是单射，其像是 $H^\bullet_c(M_{g,n}, \mathbb{Q})$ 上的混合霍奇结构的权零部分。

证明。考虑按拓扑类型对 $\mathcal{M}_{g,n}$ 进行的分层，以及由此诱导出的 $M_{g,n}$ 的分层。相应地，对 $\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{trop}}_{g,n}$ 进行分层，分层依据是哪些边具有长度 ∞，这同样诱导出 $M^{\mathrm{trop}}_{g,n}$ 的分层。这些分层是相容的，也就是说，$M_{g,n}$ 按拓扑类型进行的分层是沿映射的拉回

$M_{g\,n}^{\mathrm{trop}}$ 、沿映射 $\lambda_{g、\,n}$ 对分层的拉回。相应分层中的开稠密层分别为 $M_{g、\,n}$ 和 $M_{g\,n}^{\mathrm{trop}}$。

根据 [Pet17] 的构造，在这种情况下存在两个相关的谱序列，分别收敛到 $H_c^\bullet(M_{g,\,n})$ 和 $H_c^\bullet(M_{g\,n}^{\mathrm{trop}}{}_{,\,})$。由[Pet17] 构造的函子性，两个谱序列之间存在一个态射，它在谱序列终项上给出映射 $H_c^\bullet(M_{g\,n}^{\mathrm{trop}}{}_{,\,}, \mathbf{Q}) \to H_c^\bullet(M_{g,\,n}, \mathbf{Q})$。

将 [Pet17] 的一般构造应用于由正规交叉除子分层的光滑射影簇，可得到 Deligne 用于定义光滑簇上的混合霍奇结构的谱序列的庞加莱对偶，见 [Del71], 参见 [Pet17，例 3。5]。这尤其适用于按拓扑类型对 $\mathcal{M}_{g,\,n}$ 进行的分层。在 E_1-页上，我们看到各分层闭包的紧支撑上同调。这些闭包是较小空间的乘积 $\mathcal{M}_{g',\,n'}$ (可能还需对有限群作用取商)。特别地，权零部分集中在谱序列的单独一行上，该行由各分层闭包的 H^0 给出，因为分层闭包是光滑且完备的。根据 [Del71], 和/或谱序列中微分与权的相容性，该谱序列在 E_1-微分之后退化。

转而考虑 $\mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{trop}}{}_{,}$，我们会看到，分层的闭包同构于较小空间的乘积 $\mathcal{M}_{g'\,n'}^{\mathrm{trop}}{}_{,}$，因此是紧致且可缩的。特别是，它们的紧支撑上同调与一点相同。谱序列的 E_1 页现在集中在单独一行上。事实上，由此得到的链复形就是带有环和权的交换图复形，因为分层由对偶图标记，邻接关系由边收缩定义。无论如何，两个谱序列之间在 E_1 页上的映射，只是由定义上同调权零部分的那一行的包含映射给出。

最后，投影 $\mathcal{M}_{g,n} \to \overline{M_{g,n}}$ 在相应分层的谱序列之间诱导出一个同构；对于 $\mathcal{M}_g^{\mathrm{trop}}{}_{,\,n} \to \overline{M_{g\,n}^{\mathrm{trop}}}{}_{,}$，情形也类似。结论得证。□

注 4.4。前一个命题的证明有些不严谨：证明中声称，$\overline{M_{g,n}}$ 内部的分层闭包是较小模空间的乘积，这并不正确。问题在于，粘合映射，例如 $M_{g,n+1} \times M_{g',n'+1} \to M_{g+g',n\pm n'}$，通常在模空间的内部是单射的，但在边界上却是多对一的。证明中描述的并非分层的实际闭包（如果我们讨论的是实际光滑簇上的正规交除子，这种描述才是正确的），而是重数为 $\geq k$ 的边界点轨迹的归一化的分量，其中 k。幸运的是，后者才是德利涅谱序列中实际出现的对象。涉及德利涅谱序列以及[Pet17], 的谱序列的构造之所以适用于轨形情形，是因为这两种构造本质上都是局部的、层论的，可以在某个点的 étale 邻域上进行，而该点实际是一个复流形。

注 4.5。上同调群族 $\{H^\bullet(\mathcal{M}_{g,\,n}, \mathbf{Q})\}$ 构成上同调场论余运算子 CohFT。（这个模余运算子的循环部分通常称为超交换余运算子。）零次部分 $H^0(\mathcal{M}_{g,\,n}, \mathbf{Q}) \hookrightarrow H^\bullet(\mathcal{M}_{g,\,n}, \mathbf{Q})$ 构成一个子余运算子，我们将其记为 TFT。因此，TFT 是交换余运算子的（非导出）模包络；它由 $\mathbb{S}_n$ 的平凡表示给出，该表示在每个元数和亏格下都集中于 0 次度。

费曼变换CohFT 等价于重力模算子，这可由结合 [GK98，命题 611] 以及模算子 $\{\mathcal{M}_{g,n}\}$的形式性得出，而后者又源自 [DGMS75、GSNPR05]，（另见 [CH20]）。具体而言，这里所说的重力模算子是指

由紧支撑上链 $\{C_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,\ n})\}$ 给出的 $\mathfrak{K}$-扭曲 dg 模 operad，其模算子结构映射由连接同态给出，这些同态源自将 $\mathcal{M}_{g,\ n+1}\times\mathcal{M}_{g',\ n'+1}$ 作为余维 1 边界分层嵌入$\mathcal{M}_{g+g',\ n+n'}$的紧化中。

TFT 的费曼变换按照定义，是带有环和权的交换图复形，正如 [CGP21] 中所解释的，它计算 $H_c^\bullet(\mathcal{M}^{\mathrm{trop}}_{g\ n},\ \mathbf{Q})$，以及 $H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,\ n},\ \mathbf{Q})$ 的权零部分。

这由命题的证明4.3 可知，几何定义的同态$\lambda^*_{g,\ n}\colon H_c^\bullet(M^{\mathrm{trop}}_{g\ n},\ \mathbf{Q})\to H_c^\bullet(M_{g,\ n},\ \mathbf{Q})$ 与通过对包含映射 TFT $\to$CohFT 应用费曼变换所得到的映射一致。事实上，投影 $M_{g,\ n}\to M^{\mathrm{trop}}_{g\ n}$ 在上同调上诱导的映射等价于 $H^0(M_{g,\ n},\ \mathbf{Q})\hookrightarrow H^\bullet(M_{g,\ n},\ \mathbf{Q})$。此外，CohFT 的费曼变换与重力模算子的识别恰恰是通过 Deligne 谱序列实现的，而 TFT 的费曼变换与 $\mathfrak{K}$-扭曲的 $M^{\mathrm{trop}}_{g\ n}$ 上的紧支撑上链的模 operad 的识别——这或许可以称为“热带重力模算子”——也可以用类似的方式来理解。

5. 两个 Leray–Serre 谱序列

本节旨在讨论并阐释备注 1.11 中所述的猜想，并说明在思考这一猜想时，把手体为何会自然出现。为简化记号和讨论，我们假设 $g\geq 2$。

猜想 5.1。 两个谱序列之间存在一个自然同构

$$\begin{array}{ccc} E_2^{pq}=H_c^p(\mathcal{CV}_g,R^q\rho_!\mathbf{Q}) & \Longrightarrow & H_c^{p+q}(\mathcal{CV}_{g,n},\mathbf{Q}) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ E_2^{pq}=W_0H_c^p(\mathcal{M}_g,R^q\pi_!\mathbf{Q}) & \Longrightarrow & W_0H_c^{p+q}(\mathcal{M}_{g,n},\mathbf{Q}) \end{array}$$

它提升了谱序列终项之间的同构，其中 $\rho\colon\ \mathcal{CV}_{g,\ n}\to\mathcal{CV}_g$ 和 $\pi\colon\ \mathcal{M}_{g,\ n}\to\mathcal{M}_g$ 分别是相应的遗忘映射。

第一个谱序列是 Bibby–Chan–Gadish–Yun [BCGY] 即将发表的工作的主题。他们特别证明，局部系统 $R^q\rho_!\mathbf{Q}$ 同构于 $H_c^q(F(\vee_g S^1,n),\mathbf{Q})$（楔合 g 个圆圈上 n 个互不相同的有序点的构形空间的紧支撑上同调），并带有 $\mathrm{Out}(F_g)\simeq\mathrm{hAut}(\vee_g S^1)$ 的自然作用，相关研究见 [BCGY21, GH22]。这是一个颇为微妙的事实——事实上，这要求始终将空间 $\mathcal{CV}_{g,n}$ 视为拓扑叠；此外，ρ 的纤维显然并不是热带曲线上的点的构形空间。无论如何，局部系统 $R^q\pi_!\mathbf{Q}$ 的性质则截然不同，它由 $H_c^q(F(\Sigma_g,n),\mathbf{Q})$ 给出，其中 Σ_g 是一个定向闭亏格 g 曲面，并带有 Mod_g 的自然作用。此外，为了使最低权子空间 $W_0H_c^p(\mathcal{M}_g,R^q\pi_!\mathbf{Q})$ 有意义，我们必须将 $R^q\pi_!\mathbf{Q}$ 视为可容许混合霍奇结构变分，从而 Saito [Sai90] 的工作为其上同调赋予了混合霍奇结构。

乍看之下，甚至不存在一个自然映射 $H_c^p(\mathcal{CV}_g,R^q\rho_!\mathbf{Q})\to H_c^p(\mathcal{M}_g,R^q\pi_!\mathbf{Q})$，可作为猜想 5.1 中给出该同构的候选映射。但空间 $\mathcal{HM}_g$以及把手体的诠释提供了这样一个映射。事实上，考虑热带化映射 $\lambda\colon\mathcal{HM}_g\to\mathcal{CV}_g$，并取其拉回 $\lambda^*R^q\rho_!\mathbf{Q}$。将 $\mathcal{HM}_g$ 认作把手体的模空间后，我们便可将此局部系统认作 $H_c^q(F(V_g,n),\mathbf{Q})$，

配备其自然的 HMod$_g$作用。我们还可以将 $R^q\pi_!\mathbf{Q}$ 限制到 $\mathcal{HM}_g$上。闭嵌入 $F(\Sigma_g, n) \hookrightarrow F(V_g, n)$ 定义了 $\mathcal{HM}_g$ 上的一个局部系统映射，

$$\lambda^* R^q\rho_!\mathbf{Q} \longrightarrow R^q\pi_!\mathbf{Q}.$$

现在我们可以更精确地表述猜想5.1：复合映射

$$H_c^p(\mathcal{CV}_g, R^q\rho_!\mathbf{Q}) \longrightarrow H_c^p(\mathcal{HM}_g, \lambda^* R^q\rho_!\mathbf{Q}) \longrightarrow H_c^p(\mathcal{HM}_g, R^q\pi_!\mathbf{Q}) \longrightarrow H_c^p(\mathcal{M}_g, R^q\pi_!\mathbf{Q})$$

诱导出一个同构 $H_c^p(\mathcal{CV}_g,\ R^q\rho_!\mathbf{Q}) \cong W_0H_c^p(\mathcal{M}_g,\ R^q\pi_!\mathbf{Q})$。请注意，这个复合映射确实定义了一个谱序列映射：从 ρ的紧支撑 Leray–Serre 谱序列映射到 π的紧支撑 Leray–Serre 谱序列。

猜想 5.1 之所以具有权，是因为局部系统 $R^q\rho_!\mathbb{Q}$ 和 $R^q\pi_!\mathbb{Q}$ 的关系比乍看之下更为密切；下面试着论证这一点。首先分析这两个局部系统的半单化最为简单。在 $R^q\rho_!\mathbb{Q}$ 的半单化上，单值化经由满射 Out(F_g) $\to$ GL(g,Z) 分解；并且在半单化意义下，有 $R^q\rho_!\mathbb{Q} \cong \bigoplus_i V_{\mu_i}$，其中 V_μ 表示 GL(g) 的一个不可约代数表示，其最高权向量为 $\mu = (\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_g \geq 0)$。类似地，$R^q\pi_!\mathbb{Q}$ 的半单化的单值化经由 Mod$_g \to$ Sp($2g$,Z) 分解；并且在半单化意义下，有 $R^q\pi_!\mathbb{Q} \cong \bigoplus_j \mathbb{V}_{\lambda_j}(-n_j)$；这里，$\mathbb{V}_\lambda$ 表示$\mathcal{M}_g$上的极化霍奇结构变分，其权为 $|\lambda|$，对应于最高权为 $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_g \geq 0)$的表示，而整数 $n_j \geq 0$ 表示塔特扭曲。

论文 [Pet20] 定义了与交换微分分次代数 A 和正整数 n 相关联的链复形 $\mathcal{CF}(A, n)$（在上述文献中，这个链复形记作 $\mathcal{CF}(\Pi_n\backslash\{\hat{}0\}, A)$）。复形 $\mathcal{CF}(A, n)$ 是 A 的次数平移张量幂的显式直和，其微分由 A 上的杯积和内微分给出。当 A 是 $C_c^\bullet(X, \mathbb{Q})$ 的交换微分分次代数模型时，这个链复形计算 $H_c^\bullet(F(X, n), \mathbb{Q})$。如果 X 是紧致且形式的，那么 A 可以取为上同调环 $H^\bullet(X, \mathbb{Q})$。如果 X 是代数簇，并且保留 $H^\bullet(X, \mathbb{Q})$ 上的混合霍奇结构信息，那么这一构造可以在半单化意义下恢复 $H_c^\bullet(F(X, n), \mathbb{Q})$ 上的混合霍奇结构。

下面简要插叙一段纯粹的表示论内容。考虑一个 $2g$维辛向量空间 $\mathbb{V}$ 以及一个 g维的拉格朗日商 $\mathbb{V} \to L$。舒尔–韦尔对偶，以及韦尔关于辛群不可约表示的构造[FH91，§17。3]，告诉我们如何将 $\mathbb{V}$ 和 L 的张量幂分解为$\mathrm{Sp}(2g)$ 和$\mathrm{GL}(g)$的不可约表示。可以得到

$$L^{\otimes k} \cong \bigoplus_{|\lambda|=k} S^\lambda(L) \otimes \sigma_\lambda,$$

其中，$S^\lambda(-)$表示一个 Schur 函子，σ_λ 表示一个 Specht 模，且

$$\mathbb{V}^{\otimes k} \cong \bigoplus_{\substack{|\lambda|\leq k \\ |\lambda|\equiv k \pmod 2}} \mathbb{V}_\lambda \otimes \beta_{\lambda,k},$$

其中，$\mathbb{V}_\lambda$ 是 Sp($2g$) 中最高权为 λ 的不可约表示，而 $\beta_{\lambda,\ k}$ 是 Brauer 代数在 k 条线上的某个模。当 $|\lambda| = k$ 时，有 $\beta_{\lambda,\ k} \cong \sigma_\lambda$。此外，可以清楚地看到这些直和项在自然投影 $\mathbb{V}^{\otimes k} \to L^{\otimes k}$ 下的具体行为：每个满足 $|\lambda| < k$ 的直和项 $\mathbb{V}_\lambda$ 都映射为 0（因为 L 是拉格朗日的）；而当 $|\lambda| = k$ 时，直和项 $\mathbb{V}_\lambda \otimes \sigma_\lambda$ 自然满射到 $S^\lambda(L) \otimes \sigma_\lambda$。

回到当前主题，当 $X = \Sigma_g$ 是亏格为 g的光滑射影曲线时，有

$$A_\Sigma := H^\bullet(\Sigma_g, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}(0)[0] \oplus \mathbb{V}[-1] \oplus \mathbf{Q}(-1)[-2],$$

其中 $\mathbb{V}$ 表示该曲线的第一上同调群，我们将其视为 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbf{Z})$ 的定义表示。若选择一个加厚，使其成为把手体 $\Sigma_g \hookrightarrow V_g$，则

$$A_V := H^\bullet(V_g,\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}[0]\oplus V[-1],$$

其中我们将 V 视为 $\mathbb{V}$的一个拉格朗日子空间 。包含映射 $A_V \to A_\Sigma$ 诱导出一个链映射 $\mathcal{CF}(A_V,n) \to \mathcal{CF}(A_\Sigma,n)$，它在同调上给出自然映射$H_c^\bullet(F(V_g,n),\mathbf{Q}) \to H_c^\bullet(F(\Sigma_g,n),\mathbf{Q})$，这正是猜想中出现的映射。

现在注意，如果我们只关心 $H_c^p(\mathcal{M}_g,R^q\pi_!\mathbf{Q})$的权零部分，那么 $R^q\pi_!\mathbf{Q}$中所有包含正塔特扭曲（即 $n_j>0$）的直和项都可以忽略。我们声称，舍弃含有 $n_j>0$ 的项，恰好对应于将 Σ_g 加厚为一个把手体。事实上， $\mathcal{CF}(A_\Sigma,n)$中所有涉及 $H^2(\Sigma_g,\mathbf{Q})\cong\mathbf{Q}(-1)$的直和项都会产生严格正的塔特扭曲。此外，回想一下， $\mathcal{CF}(A,n)$定义为 A的张量幂之和，因此我们需要将 A_Σ的张量幂分解。由于 $\mathbb{V}^{\otimes k}$ 是权为 k的纯对象，因此将其分解为不可约表示 $\mathbb{V}_\lambda$时，其中满足 $|\lambda|<k$的 λ 恰好是具有非零塔特扭曲的直和项。从表示论插曲——或者更确切地说，其线性对偶，因为这里有的是拉格朗日子空间，而非拉格朗日商——可知，包含映射 $\mathcal{CF}(A_V,n) \to \mathcal{CF}(A_\Sigma,n)$恰好命中那些以零塔特扭曲出现的直和项；而 $\mathcal{CF}(A_\Sigma,n)$中没有塔特扭曲的子空间，可以通过将 $\mathcal{CF}(A_V,n)$中的每个直和项 $S^\lambda(V)$形式上替换为不可约表示 $\mathbb{V}_\lambda$得到。

我们可以将上述讨论概括为以下定理：

定理 5.2. 对于任意分拆 λ，表示 V_λ 在 $\mathrm{GL}(g)$ 的半单化 $H_c^q(F(\vee_g S^1,n),\mathbf{Q})$ 中的重数，始终与表示 $\mathbb{V}_\lambda$ 在 $\mathrm{Sp}(2g)$ 的 $\mathrm{Gr}^W_{|\lambda|}H_c^q(F(\Sigma_g,n),\mathbf{Q})$中的重数相同。事实上，这两个重数空间作为 $\mathbb{S}_n$的表示是相同的。

注意，应用 $\mathrm{Gr}^W_{|\lambda|}$ 可确保 $\mathbb{V}_\lambda$ 不带塔特扭曲出现，且该表示是半单的。基于定理 5.2 和猜想 5.1，进一步提出以下猜想是很自然的：

猜想 5.3. 对于任意分拆 $\lambda=(\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_g\geq 0)$，有

$$H_c^\bullet(\mathcal{CV}_g,V_\lambda)\cong W_0H_c^\bullet(\mathcal{M}_g,\mathbb{V}_\lambda).$$

这里， $\mathbb{V}_\lambda$ 是权为 $|\lambda|$ 的$\mathbf{Q}$-PVHS，其底层局部系统由最高权为 λ的不可约表示给出；而 V_λ 是$\mathrm{GL}(g)$的最高权为 λ的不可约表示。

猜想 5.3 在 $g=2$ 时已知。由定理 $g=2$ 的5.2 情形可以推得这一结论，前提是猜想 5.1 中的两个谱序列都立即退化，并且层 $R^q\rho_!\mathbf{Q}$ 和 $R^q\pi_!\mathbf{Q}$ 在 $g=2$ 时是半单的。对于映射 ρ，其半单性和退化性源于 $\mathrm{Out}(F_2)$ 的托雷利子群是平凡的，即 $\mathrm{Out}(F_2)\to\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})$是一个同构。对于映射 π，其半单性和退化性更为微妙，可以由 Ceresa 环的消失推得。第二作者与 Orsola Tommasi 将在即将发表的工作中对此作出说明。不过，我们可以给出更明确的结果：对于任意 $a\geq b\geq 0$，有

$$\dim H_c^3(\mathcal{CV}_2,V_{a,b})=\dim W_0H_c^3(\mathcal{M}_2,\mathbb{V}_{a,b})=\begin{cases}\lfloor\frac{a-b}{6}\rfloor+1 & a\equiv b\equiv 1 \pmod 2\\ \lfloor\frac{a-b}{6}\rfloor & a\equiv b\equiv 0 \pmod 2\\ 0 & a\not\equiv b \pmod 2\end{cases},$$

并且如果 $k \neq 3$ 那么 $H_c^k(\mathcal{CV}_2, V_{a,b}) = W_0 H_c^k(\mathcal{M}_2, \mathbb{V}_{a,b}) = 0$。参见 [GH22 第 6 节中的讨论。1]。第二个等式可由 [Pet15] 的主定理以及 [Pet13 命题 3 中的分支规则4]推得。

假设猜想5.3，由定理5.2 可得

$$H_c^p(\mathcal{CV}_g, (R^q\rho_!\mathbf{Q})^{\mathrm{ss}}) \cong W_0 H_c^p(\mathcal{M}_g, (R^q\pi_!\mathbf{Q})^{\mathrm{ss}})$$

对所有 $g \geq 2$ 都成立，其中 $(-)^{\mathrm{ss}}$ 表示半单化。若要将其提升为不含半单化的同构，即 $H_c^p(\mathcal{CV}_g, R^q\rho_!\mathbf{Q}) \cong W_0 H_c^p(\mathcal{M}_g, R^q\pi_!\mathbf{Q})$，就需要比较 Out($F_g$) 的各种表示 V_λ 的 Ext群与模空间 $\mathcal{M}_g$ 上局部系统（或霍奇结构变分） $\mathbb{V}_\lambda$ 的 Ext群。如果 GL(g)-表示在 $R^q\rho_!\mathbf{Q}$ 内的非平凡扩张，能够与 Sp($2g$)-表示在 $R^q\pi_!\mathbf{Q}$ 内的非平凡扩张建立有意义的“对应”，那将很有意思。这类扩张可由 Out(F_g) 的托雷利子群（分别为 Mod$_g$）中的元素检测到；这些元素在 $H_c^q(F(\vee_g S^1, n), \mathbf{Q})$（分别为 $H_c^q(F(\Sigma_g, n), \mathbf{Q})$）上作用非平凡。近年来，人们深入研究了托雷利群在曲面的点构形空间上的作用是否平凡这一问题 [Mor07, Loo23, BMW22, Bia20, Sta23, BS22]；对 Out(F_g) 在圆的楔和上的点构形的类似问题，以及 Out(F_g) 的表示 V_λ 的非平凡扩张的构造，也有同样深入的研究 [TW19, Ves18, PV18, BCGY21, GH22]。

参考文献

[ACP15] Dan Abramovich、Lucia Caporaso 和 Sam Payne。曲线模空间的热带化。Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 48(4):765–809, 2015年。 [BCGY] Christin Bibby、Melody Chan、Nir Gadish 和 Claudia He Yun。热带曲线模空间的 Serre 谱序列。手稿准备中。[BCGY21] Christin Bibby、Melody Chan、Nir Gadish 和 Claudia He Yun。应用于 $\mathcal{M}_{2,n}$ 的图上紧化构形的同调表示。arXiv:2109.03302, 2021年。 [BDPW23] Jonas Bergström、Adrian Diaconu、Dan Petersen 和 Craig Westerland。超椭圆曲线、扫描映射与二次 L 函数族的矩。arXiv:2302.07664, 2023年。 [BFP22] Jonas Bergström、Carel Faber 和 Sam Payne。稳定曲线模空间上的多项式点计数与奇次上同调消失。预印本见 arXiv:2206.07759, 2022年。 [Bia20] Andrea Bianchi。带标点映射类群的同调分裂。J. Topol., 13(3):1230–1260, 2020年。 [Bie81] Robert Bieri。离散群的同调维数。Queen Mary College Mathematics Notes。Queen Mary College, Department of Pure Mathematics, London, 第二版, 1981。 [BKW18] Michael Batanin、Joachim Kock 和 Mark Weber。正则模式、substitude、费曼范畴与运算子。Theory Appl. Categ., 33:Paper No. 7, 148–192, 2018年。 [BM11] Clemens Berger 和 Ieke Moerdijk。关于 Reedy 范畴概念的一种扩展。Math. Z., 269(3-4):977–1004, 2011。 [BMV11] Silvia Brannetti、Margarida Melo 和 Filippo Viviani。关于热带Torelli映射。Adv. Math., 226(3):2546–2586, 2011。 [BMW22] Andrea Bianchi、Jeremy Miller 和 Jennifer C. H. Wilson。映射类群在构形空间上的作用与 Johnson 过滤。Trans. Amer. Math. Soc., 375 5489, 2022 8 5461( ): – .[Bol12] Søren K. Boldsen。映射类群取整数系数或扭曲系数时同调稳定性的改进。Math. Z., 270(1-2):297–329, 2012。 [Bro12] Francis Brown。关于 $\mathbb{Z}$ 上的混合 Tate 动机。Ann. of Math. (2), 175(2):949–976, 2012。 [BS22] Andrea Bianchi 和 Andreas Stavrou。Johnson 过滤对构形空间同调的非平凡作用。预印本见 arXiv:2208.01608, 2022。 [Cap13] Lucia Caporaso。代数曲线与热带曲线：比较它们的模空间。载于《模空间手册》第 I 卷，Adv. Lect. Math. (ALM) 第 24 卷，第 119–160 页。Int. Press, Somerville, MA, 2013。[CCUW20] Renzo Cavalieri、Melody Chan、Martin Ulirsch 和 Jonathan Wise。热带曲线的一个模叠。Forum Math. Sigma, 8:Paper No. e23, 93, 2020。[CFP12] Thomas Church、Benson Farb 和 Andrew Putman。映射类群的有理上同调在其虚上同调维数处消失。Int. Math. Res. Not. IMRN, 2012(21):5025–5030, 2012。

[CGP21] Melody Chan、Søren Galatius 和 Sam Payne。 $\mathcal{M}_g$ 的热带曲线、图复形与最高权上同调。J. Amer. Math. Soc., 34(2):565–594, 2021年。 [CGP22] Melody Chan、Søren Galatius 和 Sam Payne。带标记点的热带曲线模空间的拓扑。载于《代数几何的若干方面》第 I 卷，London Math. Soc. Lecture Note Ser. 第 472 卷，第 77–131 页。Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2022。[CH20] Joana Cirici 和 Geoffroy Horel。对称幺半函子的混合霍奇结构与形式性。Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 53(4):1071–1104, 2020年。 [CHKV16] James Conant、Allen Hatcher、Martin Kassabov 和 Karen Vogtmann。自由群自同构群中的同调类拼合。Comment. Math. Helv., 91(4):751–806, 2016。 [Cos04] Kevin Costello。A-infinity 运算子与曲线模空间。arXiv:math/0402015 2, 2004 v。[CV86] Marc Culler 和 Karen Vogtmann。图的模空间与自由群的自同构。Invent. Math., 84(1):91–119, 1986。 [Del71] Pierre Deligne。霍奇理论。II。Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 40:5–57, 1971年。[DGMS75] Pierre Deligne、Phillip Griffiths、John Morgan 和 Dennis Sullivan。Kähler 流形的实同伦论。Invent. Math., 29(3):245–274, 1975。[Dri90] Vladimir Drinfeld。关于拟三角拟 Hopf 代数以及一个与 Gal(Q/Q) 密切相关的群。Algebra i Analiz, 2(4):149–181, 1990年。[EE69] Clifford J. Earle 和 James Eells。泰希米勒理论的纤维丛描述。J. Differential Geometry, 3:19–43, 1969。[EG08] Johannes Ebert 和 Jeffrey Giansiracusa。关于 Deligne-Mumford 紧化的同伦类型。Algebr. Geom. Topol., 8(4):2049–2062, 2008。[FH91] William Fulton 和 Joe Harris。表示论,一第 129 卷，Graduate Texts in Mathematics。Springer-Verlag, New York, 1991。入门课程，Readings in Mathematics。[FM12] Benson Farb 和 Dan Margalit。映射类群入门，第 49 卷，Princeton Mathematical Series。Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012。[Get94] Ezra Getzler。Batalin-Vilkovisky 代数与二维拓扑场论。Comm. Math. Phys., 159(2):265–285, 1994。 [GH22] Nir Gadish 和 Louis Hainaut。球面的楔和上的构形空间与 Hochschild–Pirashvili 同调。arXiv:2202.12494, 2022。[Gia11] Jeffrey Giansiracusa。带框架的小 2-圆盘运算子与把手体的微分同胚。Journal of Topology, 4(4):919–941, 2011。[GK98] Ezra Getzler 和 Mikhail M. Kapranov。模运算子。Compositio Math., 110 126, 1998 1 65( ): – .[GS12] Jeffrey Giansiracusa 和 Paolo Salvatore。零亏格曲面紧化模空间的循环 operad 形式性。Trans. Amer. Math. Soc., 364(11):5881–5911, 2012。[GSNPR05] Francisco Guillén Santos、Vicente Navarro、Pere Pascual 和 Agustí Roig。模空间与形式运算子。Duke Math. J., 129(2):291–335, 2005。[Har85] John L. Harer。可定向曲面的映射类群同调的稳定性。Ann. of Math. (2), 121(2):215–249, 1985。[Har86] John L. Harer。可定向曲面的映射类群的虚上同调维数。Invent. Math., 84(1):157–176, 1986。[Hat99] Allen Hatcher。不可压缩曲面的空间。arXiv:math/9906074, 1999。[Hat12] Allen Hatcher。图空间的稳定同调。2012 年在班夫的一场讲座幻灯片。见 https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/Papers/BanffTalk.pdf, 2012。[Hen20] Sebastian Hensel。把手体群入门。载于《群作用手册》第 V 卷，Adv. Lect. Math. (ALM) 第 48 卷，第 143–177 页。Int. Press, Somerville, MA, 2020。[Hir03] Susumu Hirose。三维把手体映射类群的一些同调不变量。Tohoku Math. J. (2), 55(4):543–549, 2003。[HV10] Vladimir Hinich 和 Arkady Vaintrob。增广泰希米勒空间与轨形。Selecta Math. (N.S.), 16(3):533–629, 2010。[HW10] Allen Hatcher 和 Nathalie Wahl。三维流形映射类群的稳定化。Duke Math. J., 155(2):205–269, 2010。[HZ86] John L. Harer 和 Don Zagier。曲线模空间的欧拉示性数。Invent. Math., 85(3):457–485, 1986。[Ji14] Lizhen Ji。泰希米勒空间的良圆等变变形收缩。Enseign. Math., 60(1-2):109–129, 2014。[JW10] Lizhen Ji 和 Scott A. Wolpert。映射类群适当作用的一个余有限通用空间。载于《继承 Ahlfors-Bers 传统》第 V 卷，Contemp. Math. 第 510 卷，第 151–163 页。Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010。[KWŽ17] Anton Khoroshkin、Thomas Willwacher 和 Marko Živković。图复形上的微分 II：毛图。Lett. Math. Phys., 107(10):1781–1797, 2017年。

[Loo23] Eduard Looijenga。《曲面构形空间上的 Torelli 群作用》。J. Topol. Anal., 15(1):215–222, 2023。[Mor07] Tetsuhiro Moriyama。《映射类群在曲面构形空间同调上的作用》。J. Lond. Math. Soc. (2), 76(2):451–466, 2007。[MSS13] Shigeyuki Morita、Takuya Sakasai 和 Masaaki Suzuki。《自由结合代数与自由李代数导子李代数的阿贝尔化》。Duke Math. J., 162(5):965–1002, 2013。[Mum71] David Mumford。《关于 Mahler 紧性定理的一则注记》。Proc. Amer. Math. Soc., 28:289–294, 1971。[MW07] Ib Madsen 和 Michael Weiss。《黎曼曲面的稳定模空间：Mumford 猜想》。Ann. of Math. (2), 165(3):843–941, 2007。[Pet13] Dan Petersen。《 d-椭圆阿贝尔曲面轨迹上的局部系统上同调》。Michigan Math. J., 62(4):705–720, 2013。[Pet15] Dan Petersen。《主极化阿贝尔曲面模空间上的局部系统上同调》。Pacific J. Math., 275(1):39–61, 2015。[Pet17] Dan Petersen。《分层空间与点构形空间的谱序列》。Geom. Topol., 21(4):2527–2555, 2017。[Pet20] Dan Petersen。《广义构形空间的上同调》。Compos. Math., 156(2):251–298, 2020。[PV18] Geoffrey Powell 和 Christine Vespa。《高阶 Hochschild 同调与指数函子》。预印本见 arXiv:1802.07574, 2018。[PW21] Sam Payne 和 Thomas Willwacher。《曲线模空间的权二紧支撑上同调》。arXiv:2110.05711, 2021。[PW23] Sam Payne 和 Thomas Willwacher。《曲线模空间的权重 11 紧支撑上同调》。预印本见 arXiv:2302.04204, 2023。[Sai90] Morihiko Saito。《混合霍奇模》。Publ. Res. Inst. Math. Sci., 26(2):221–333, 1990。[Sta23] Andreas Stavrou。《曲面构形空间的上同调作为映射类群表示》。Trans. Amer. Math. Soc., 376(4):2821–2852, 2023。[TW19] Victor Turchin 和 Thomas Willwacher。《悬挂上的 Hochschild-Pirashvili 同调与 Out(F_n) 的表示》。Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 52(3):761–795, 2019。[Vai19] Dmitry Vaintrob。《带框架形式曲线的模空间》。arXiv:1910.11550, 2019。[Vai21] Dmitry Vaintrob。《小圆盘的形式性与代数几何》。arXiv:2103.15054, 2021。[Ves18] Christine Vespa。《来自自由群的函子之间的扩张》。Bull. Lond. Math. Soc., 50(3):401–419, 2018。[Wil15] Thomas Willwacher。《M. Kontsevich 的图复形与 Grothendieck-Teichmüller 李代数》。Invent. Math., 200(3):671–760, 2015。[Wil18] Thomas Willwacher。《小圆盘运算子与费曼图》。载于《2018 年里约热内卢国际数学家大会论文集》第二卷：特邀报告，第 1241–1261 页。World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018。[Wol79] Scott Wolpert。《长度谱作为紧黎曼曲面的模参数》。Ann. of Math. (2), 109(2):323–351, 1979。[Yun22] Claudia He Yun。《热带模空间 $\Delta_{2,n}$ 的 S_n-等变有理同调》。Exp. Math., 31(4):1345–1357, 2022。