arXiv:2305.03060v1 [math.NA] 4 May 2023

关于伯努利自由边界问题中跟踪狄利克雷数据的适定性

龚伟和刘乐

Abstract. 本文旨在研究用于求解伯努利自由边界问题的形状优化方法。伯努利自由边界问题是一个著名的病态问题，旨在通过柯西数据确定未知的自由边界。文献中提出了不同的形式，其区别在于目标泛函的选择。具体而言，[15] 和 [16] 分别证明，跟踪诺伊曼数据是适定的，而跟踪狄利克雷数据则不是。本文提出一种新的适定目标泛函，用于跟踪自由边界上的狄利克雷数据。通过计算目标泛函的欧拉导数和形状海森矩阵，我们证明了这种新形式是适定的，即形状海森矩阵在极小值处具有强制性。形状海森矩阵的强制性或可确保非线性 Ritz-Galerkin 近似方法存在最优解并收敛，因此对该形式至关重要。总之，我们得出结论：以能量范数跟踪狄利克雷数据或诺伊曼数据并不足以使问题适定，而以高半阶范数跟踪这些数据则可以保证适定性。为支持我们的理论结果，我们进行了大量数值实验。

关键词。F 自由边界问题，形状优化，欧拉导数，形状海森矩阵，强制性 ity.

1. Introduction

本文研究下述所谓的外部伯努利自由边界问题：给定足够光滑的函数 $f \geqslant 0$、$g > 0$ 和 $h > 0$，求一个区域 Ω（或自由边界 Γ），使其满足以下超定边值问题：

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g, \ u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ u = h \quad \text{on} \quad \Sigma, \end{cases}$$

其中区域 Ω 的内边界 Σ 固定，外边界 Γ 为自由边界，示意图见图 1。

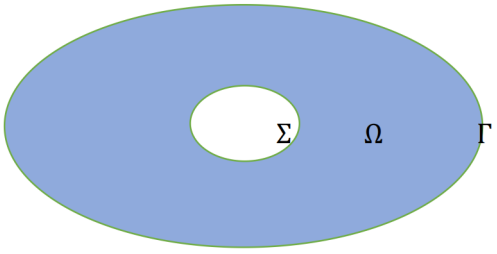

Figure 1. 区域 Ω、其固定边界 Σ 和自由边界 Γ的示意图。

伯努利自由边界问题出现在许多应用领域中，包括理想流体动力学、最优设计、电化学、静电学等，不一而足。在本文中，我们不研究问题（<style id='1'>P</style>）的解是否存在。

*中国科学院大学数学科学学院与中国科学院数学与系统科学研究院计算数学研究所 LSEC，北京 100190，中国。电子邮箱：wgong@lsec.cc.ac.cn；liule2020@lsec.cc.ac.cn。作者感谢国家重点研发计划（项目编号：2022YFA1004402）和国家自然科学基金（项目编号：12071468）的资助。

相反，我们假设问题（$\mathbf{P}$）存在一个解，并将其记为 Ω^*，并将 Ω^* 的 Γ^* 自由边界记为。关于解的存在性，更多详情请参见 [7] 。

目前已有一些求解伯努利自由边界问题的经典方法，包括变分方法、隐式诺伊曼格式等，更多细节可参见 [3]。形状优化方法是求解自由边界问题最常用的数值方法之一（参见 [22, 6, 5]）。在 [15], Eppler 和 Harbrecht 提出了跟踪自由边界处的诺伊曼数据 Γ 来求解问题（$\mathbf{P}$），即求解如下形状优化问题:

$$\inf_{\Omega} J_1(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma}\left(g + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)^2 d\sigma, \tag{1.1}$$

约束条件为

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ u = h \quad \text{on} \quad \Sigma. \end{cases} \tag{1.2}$$

另一方面 ，在 [16] 中，作者提出跟踪自由边界处的狄利克雷数据 Γ，即

$$\inf_{\Omega} J_2(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} u^2 d\sigma, \tag{1.3}$$

约束条件为

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ u = h \quad \text{on} \quad \Sigma. \end{cases} \tag{1.4}$$

显然，如果存在 Ω^* （或 Γ^*）是问题（$\mathbf{P}$）的解，那么 Ω^* 必定是形状优化问题 (1.1)–(1.2) 的最优解（且 $J_1(\Omega^*) = 0$）；反之，如果 $J_1(\Omega^*) = 0$，那么 Ω^*也是问题（$\mathbf{P}$）的一个解。目标泛函 J_2也具有相同的性质。

使用形状优 化方法求解问题（$\mathbf{P}$）时，应选择目标泛函 J 使 其满足以下 性质：

- (SP)： J 是一个非负泛函，即对于所有 Ω， $J(\Omega) \geq 0$ ；当且仅当 Ω^* 是问题（$\mathbf{P}$）的解时， $J(\Omega^*) = 0$ 。

显然， J_1 和 J_2 满足性质（SP）。

形状优化问题通常是强非凸的，因此我们通常只能期待得到局部极小值。形状优化算法收敛到局部极小值不仅取决于初始猜测的选择，还取决于该极小值的局部性质，即确保局部最优性的二阶充分最优性条件。然而，后者在很大程度上取决于形状优化问题的表述，或者换言之，取决于目标泛函的选择。以伯努利自由边界问题为例，我们倾向于选择这样的目标泛函：除Ω^*外，其在Ω^* 的邻域内严格大于0；也就是说，要确保形状优化问题的最优解Ω^* 具有局部唯一性。我们称这样的目标泛函为适定的，或者称相应的形状优化问题是适定的。

文献中很少研究形状优化问题的适定性（参见 [11, 15, 16]）。然而，这对于形状优化算法的收敛性分析是不可或缺的。在 [24]和 [19]中，分别研究了一个二维形状优化问题，其中待优化的边界部分是某个函数的图像，所涉及的方程分别为椭圆方程和斯托克斯方程。该形状优化问题被转化为一个最优控制问题，并证明了在二阶充分最优性条件下，数值近似以二阶收敛到该优化问题的一个局部解。在 [18], 中研究了椭圆形状优化问题的边界参数化，并在最优区域为星形且无穷维形状优化问题存在满足二阶最优性条件的稳定优化器这一假设下，获得了有限元方法（FEM）的误差估计。

关于形状优化问题适定性的系统研究，请参阅 Eppler 和 Harbrecht 的工作（参见 [15, 16, 17, 13]）。他们研究了形状的欧拉导数和形状海森矩阵。

在星形区域上提出的优化问题，并通过分析形状泛函在极小值处的强制性，研究了形状泛函的适定性。对于星形区域，自由边界可以表示为函数 $r \in X := C^{k,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1})$，其中 $\mathbb{S}^{n-1}$ 是 $\mathbb{R}^n$中的单位球面。具体而言，

$$\Gamma = \left\{ x = r(\widehat{x})\widehat{x} : \quad \widehat{x} \in \mathbb{S}^{n-1} \right\}.$$

设 $dr \in X$ 为 一个能够生成将 Γ 转换为扰动后状态的速度场的函数

$$\Gamma_\varepsilon = \left\{ x = r(\widehat{x})\widehat{x} + \varepsilon dr(\widehat{x})\widehat{x} : \quad \widehat{x} \in \mathbb{S}^{n-1} \right\}.$$

类似地，在研究形状海森矩阵时，相关的边界由以下内容给出。

$$\Gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \left\{ x = r(\widehat{x})\widehat{x} + \varepsilon_1 dr_1(\widehat{x})\widehat{x} + \varepsilon_2 dr_2(\widehat{x})\widehat{x} : \quad \widehat{x} \in \mathbb{S}^{n-1} \right\},$$

其中 $dr_1,\ dr_2 \in X$。

对于追踪诺伊曼数据的问题 (1.1)-(1.2)，Eppler 和 Harbrecht 在 [15] 中指出，在伯努利自由边界问题的解 Ω^* 处，对于所有 $dr \in X$，一阶最优性条件 $dJ_1(\Omega^*)[dr] = 0$ 均成立，并且在 Ω^*的邻域 $B_\delta^X(r^*)$ 中，形状海森矩阵是定义在 $H^1(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$ 上的双线性连续泛函，即，

$$\left| d^2 J_1(\Omega)[dr_1, dr_2] \right| \le c(r) \left\| dr_1 \right\|_{H^1(\Gamma)} \left\| dr_2 \right\|_{H^1(\Gamma)} \quad \forall r \in B_\delta^X(r^*),$$

以及相应的二阶泰勒余项 $R_2(J_1(\Omega)\ dr)$ 满足

$$|R_2(J_1(\Omega), dr)| = o(\|dr\|_{C^{3,\alpha}(\Gamma)}) \left\| dr \right\|_{H^1(\Gamma)}^2.$$

随后，文献 [18] 证明，若满足强制性条件

$$d^2 J_1(\Omega^*)[dr, dr] \ge c_E \left\| dr \right\|_{H^1(\Gamma)}^2 \quad \forall dr \in X$$

则目标泛函 J_1 是适定的，并且保证最优解的存在以及非线性 Ritz-Galerkin 方法的收敛。作者确实在文献 [15] 中证明了目标泛函 J_1 满足强制性。

对于追踪狄利克雷数据的问题 (1.3)-(1.4)，Eppler 和 Harbrecht 在文献 [16] 中证明，形状海森矩阵也是 $H^1(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$ 上的双线性连续泛函，其中 Ω^* 的邻域为 $B_\delta^X(r^*)$，但他们只证明了

$$d^2 J_2(\Omega^*)[dr, dr] \ge c_E \left\| dr \right\|_{L^2(\Gamma^*)}^2 \quad \forall dr \in X,$$

因此，我们无法确定 J_2 是否适定。文献 [16] 进一步证明了 J_2 是代数不适定的。此外，Eppler 和 Harbrecht 在文献 [17] 中提出了以下用于追踪诺伊曼数据的形状优化问题：

$$\inf_{\Omega} J_3(\Omega) = \int_\Omega (\left\| \nabla u \right\|^2 - 2fu + g^2) dx, \tag{1.5}$$

满足

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ u = h \quad \text{on} \quad \Sigma. \end{cases} \tag{1.6}$$

他们证明，目标泛函 J_3 也是适定的，其中形状海森矩阵是定义在 $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ 上的双线性连续泛函，且

$$d^2 J_3(\Omega^*)[dr, dr] \ge c_E \left\| dr \right\|_{H^{1/2}(\Gamma^*)}^2 \quad \forall dr \in X.$$

值得一提的是，Kohn 和 Vogelius 提出了以下形状优化问题 [14, 25]:

$$\inf_{\Omega} J_4(\Omega) = \int_\Omega \left\| \nabla (v - w) \right\|^2 dx, \tag{1.7}$$

满足条件的彩
票娱乐

$$\begin{cases} -\Delta v = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ v = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ v = h \quad \text{on} \quad \Sigma \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} -\Delta w = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ -\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = g \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ w = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma. \end{cases} \tag{1.8}$$

Eppler 和 Harbrecht 在 [13] 中证明了 $J_4(\Omega) \sim \|w\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \left\|g + \frac{\partial v}{\partial n}\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$。因此，这个问题同时跟踪自由边界处的狄利克雷数据和诺伊曼数据。他们指出，在 Ω^* 的邻域 $B_\delta^X(r^*)$ 中，形状海森矩阵是 $H^1(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$ 上的双线性连续泛函，但他们仅证明了热在线精品

$$d^2 J_4(\Omega^*)[dr, dr] \geq c_E \|dr\|^2_{H^{1/2}(\Gamma^*)} \quad \forall dr \in X,$$

因此，我们仍无法确定 J_4 是否适定，更多详情请参见 [13] 。

过去几十年来，人们还提出了其他几种目标泛函来求解伯努利自由边界问题（参见 [4, 26]）。然而，据我们所知，目前还没有适用于跟踪自由边界处狄利克雷数据的适定目标泛函。本文提出一种新的目标泛函，并研究以下形状优化问题：

$$\inf_{\Omega} J(\Omega) = \frac{1}{2} \int_\Gamma \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\right)^2 d\sigma, \tag{1.9}$$

约束条件为

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ u = h \quad \text{on} \quad \Sigma \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} -\Delta w = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ w = u \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ w = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma. \end{cases} \tag{1.10}$$

显然，该目标泛函跟踪自由边界处的狄利克雷数据，并满足性质（SP）。我们通过分析其形状海森矩阵的强制性，证明该目标泛函是适定的。形状海森矩阵的强制性对问题的构造至关重要。事实上，它将确保非线性 Ritz-Galerkin 近似方法的最优解存在并保证其收敛（参见 [18]）。

本文结构安排如下：第 2 节介绍形状优化的相关知识，并给出形状优化问题的最优性定理。第 3 节计算本文提出的新目标泛函的欧拉导数和形状海森矩阵，并通过证明形状海森矩阵的强制性，展示形状优化问题的适定性。第 4 节阐述选择这一新目标泛函的动机，并进行一些讨论。第 5 节开展数值实验，以支持本文的理论。

2. Preliminaries

本节分为两部分。一方面，我们介绍形状优化的一些基础知识，包括速度场、区域变换、物质导数与形状导数、欧拉导数和形状海森矩阵。这部分主要参考 [10, 28]。另一方面，我们将给出形状优化问题的最优性定理，更多详情请参阅 [18] 。

2.1. 形状优化的基础知识。 形状微积分研究目标泛函相对于区域扰动的变化。实现区域扰动有两种常见方法：一种是速度法，另一种是直接变换法。本文采用前一种方法。

若V满足以下条件，则称其为速度场：对于 $\tau > 0$、 V： $[0, \tau] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, V(\cdot, x) \in C([0, \tau]; \mathbb{R}^n),$$
$$\exists c > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|V(\cdot, y) - V(\cdot, x)\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^n)} \leq c\,|y - x|\,.$$

下文中， $V(0)$表示向量值函数 $V(0, x)$。区域的变换可以通过速度场实现。事实上，令 $x_V(t; X)$表示微分方程的解

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = V(t, x(t)) \quad t \in [0, \tau], \\ x(0) = X \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

那么，该变换可定义如下：

$$X \mapsto T_t(V)(X) \triangleq x_V(t; X) : \Omega \to \Omega_t.$$

有时，Ω_t 也写作 $\Omega_t(V)$。区域变换的示意图参见图 2。现在我们可以给出欧拉导数和形状海森矩阵的定义。

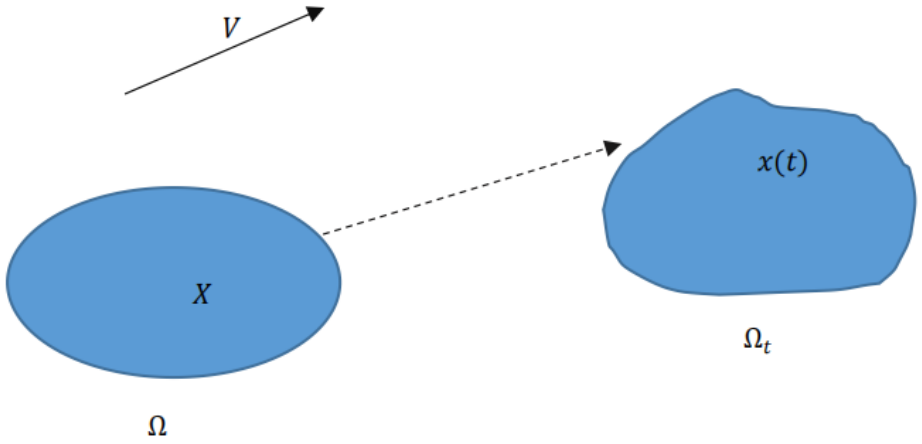

FIGURE 2. 区域变换。

定义 2.1。 设 $\tau > 0$, V 是一个速度场， J 是一个实值形状泛函，若极限

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t}$$

若极限存在，则称其为 J 在Ω 沿速度场 V 的欧拉导数，记作 $dJ(\Omega)[V]$。设 W 为另一个速度场，我们知道， $dJ(\Omega)[V]$ 也是一个实值形状泛函，若极限

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{dJ(\Omega_t(W))[V] - dJ(\Omega)[V]}{t}$$

若极限存在，则称其为 J 在Ω 沿速度场 V 和 W 的形状海森矩阵，记作 $d^2J(\Omega)[V, W]$。

对于定义在 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 上的函数，我们可以定义物质导数和形状导数，并区分区域型和边界型 [28, 第2章，第98-114]页。

定义 2.2。 设Ω 为一个有界区域，其边界为 C^k 边界 $\partial\Omega$ ，并设 V 为一个速度场。对于$y(\Omega) \in W^{s,p}(\Omega)$, $s \in [0, k]$, $p \in [1, \infty)$，若极限

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{y(\Omega_t) \circ T_t(V) - y(\Omega)}{t}$$

若其存在，则称其为 y 在速度场 V 作用下沿 Ω 的物质导数，记为 $\mathring{y}(\Omega; V) \in W^{s,p}(\Omega)$。对于 $y(\Gamma) \in W^{r,p}(\Gamma)$, $r \in [0, k]$, $p \in [1, \infty)$，如果该极限

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{y(\Gamma_t) \circ T_t(V) - y(\Gamma)}{t}$$

如果存在，则称其为沿速度场 V 的 $y(\Gamma)$ 物质导数，记作 $\mathring{y}(\Gamma; V) \in W^{r,p}(\Gamma)$。

形状导数将通过物质导数来定义。

定义 *2.3*。设 *Ω* 是一个有界区域，其边界为 C^k $\partial\Omega = \Gamma$。设 V 为一个速度场，且 $W(\Omega)$ 是一个索博列夫空间。若 $y(\Omega) \in W(\Omega)$ 具有物质导数 $\mathring{y}(\Omega; V)$，则 $y'(\Omega; V) = \mathring{y}(\Omega; V) - \nabla y(\Omega) \cdot V(0) \in W(\Omega)$ 称为 $y(\Omega)$ 沿速度场 V 的形状导数。设 $W(\Gamma)$ 是另一个索博列夫空间。若 $z(\Gamma) \in W(\Gamma)$ 具有物质导数 $\mathring{z}(\Gamma; V)$，则 $z'(\Gamma; V) = \mathring{z}(\Omega; V) - \nabla_\Gamma z(\Gamma) \cdot V(0) \in W(\Gamma)$ 称为 $z(\Gamma)$ 沿速度场 V 的形状导数。

偏微分方程解的形状导数在后续分析中发挥着重要作用。以下两个定理的证明可见于 [28, 第 3 章，第 118-121] 页。

定理 2.4. 设 $h(\Omega) \in L^2(\Omega)$, $z(\Gamma) \in H^{1/2}(\Gamma)$, 并且

$$\begin{cases} -\Delta y(\Omega) = h(\Omega) \quad \text{in} \quad L^2(\Omega), \\ y(\Omega) = z(\Gamma) \quad \text{on} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{2.2}$$

然后 $y'(\Omega; V) \in H^1(\Omega)$ 以及

$$\begin{cases} -\Delta y'(\Omega; V) = h'(\Omega; V) \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \\ y'(\Omega; V) = -\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{n}}(\Omega) V(0) \cdot \boldsymbol{n} + z'(\Gamma; V) \quad \text{on} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{2.3}$$

定理 m 2.5. 设 $h(\Omega) \in L^2(\Omega)$、 $z(\Gamma) \in H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{R}$, 满足相容条件:

$$\int_\Omega h(\Omega) dx + \int_\Gamma z(\Gamma) d\sigma = 0$$

and

$$\begin{cases} -\Delta y(\Omega) = h(\Omega) \quad \text{in} \quad L^2(\Omega), \\ \frac{\partial y(\Omega)}{\partial \boldsymbol{n}} = z(\Gamma) \quad \text{on} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{2.4}$$

然后 $y'(\Omega;\ V) \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ 和

$$\begin{cases} -\Delta y'(\Omega; V) = h'(\Omega; V) \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \\ \frac{\partial y'(\Omega; V)}{\partial \boldsymbol{n}} = \mathrm{div}_\Gamma(V(0) \cdot \boldsymbol{n} \nabla_\Gamma y(\Omega)) + [h(\Omega) + \mathcal{H} z(\Gamma)] V(0) \cdot \boldsymbol{n} + z'(\Gamma; V) \quad \text{on} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中, $\mathcal{H}$ 是 Γ的加性曲率, 即 Γ的平均曲率的 $n-1$ 倍。 .

2.2. **形状优化问题的最优性定理**。本小节介绍形状优化问题的最优性定理。为简便起见, 我们仅考虑定义在星形区域上的问题（参见 [10, 第 4 章, 第 177-178] 页及 [15]）。

令 $\mathbb{S}^{n-1}$ 为 n维欧几里得空间中的单位球, 并且

$$\Omega = \left\{ x = \rho \widehat{x} \in \mathbb{R}^n : \quad \widehat{x} \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad L(\widehat{x}) \le \rho \le U(\widehat{x}) \right\}.$$

在此, $L \in X$ 是固定边界的参数化, $U \in X$ 是自由边界的参数化。为确保边界的光滑性, 我们取 $X = C^{3,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1})$。除非另有说明, 以下文本中的 X 均具有相同的含义。可以看出, 区域 Ω 的自由边界为 $\Gamma = \{U(\widehat{x})\widehat{x} : \ \widehat{x} \in \mathbb{S}^{n-1}\}$。由于内边界 $\Sigma = \{L(\widehat{x})\widehat{x} : \ \widehat{x} \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ 是固定的, 区域 Ω 与自由边界 Γ一一对应, 因此区域 Ω 与函数 U一一对应。因此, 我们可以直接用 U 指代区域 Ω。我们也可以直接将 $J(\Omega)$表示为 $J(U)$。

我们考虑如下给出的变换后区域:

$$\Omega_t = \left\{ x = \rho \widehat{x} \in \mathbb{R}^n : \quad \widehat{x} \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad L(\widehat{x}) \le \rho \le U(\widehat{x}) + t dr(\widehat{x}) \right\},$$

其中 $dr \in X$, 则 $x = \rho \widehat{x} \in \Omega$ 在 Ω_t 中的对应点为

$$T_t(x) = x + t \left[\frac{\rho - L(\widehat{x})}{U(\widehat{x}) - L(\widehat{x})} \right] dr(\widehat{x}) \widehat{x}.$$

因此, 根据速度场与变换 [10, Chapter 4, pp. 181-183], 之间的关系, 我们可以得到 $V(t,\ x) = \frac{\partial T_t}{\partial t}(T_t^{-1}(x))$, 特别地, $V(0,\ x)|_\Gamma = dr(\widehat{x})\widehat{x}$。我们称 V 为由 dr 诱导的速度场, 并直接将 V 记为 dr。相应地, 我们也可以将 $dJ(\Omega)[V]$ 记为 $dJ(U)[dr]$。对于形状优化问题

$$\inf_{r \in X} J(r), \tag{2.6}$$

我们有如下定理:

定理 2.6. （[18,第 9-11]）设

（A1） $dJ(r^*)[dr] = 0, \ \forall dr \in X$ 对某个 $r^* \in X$ 成立;

(A2) 存在 $\delta > 0$，使得

$$\left|d^2J(r)[h_1,h_2]\right| \le c_S(r)\left\|h_1\right\|_{H^s}\left\|h_2\right\|_{H^s} \quad \forall h_1,h_2 \in H^s$$

对所有 $r \in B_\delta^X(\overline{r^*})$均成立。其中， H^s 是索博列夫空间，且 $X \subset H^s$。

那么，区域 r^* 是一个二阶强正则局部最优解，即，

$$J(r) - J(r^*) \ge \frac{c_E}{4}\left\|r - r^*\right\|_{H^s}^2 \quad \forall r \in B_\delta^X(r^*)$$

当且仅当以下两个条件成立时：

(A3) 形状海森矩阵在 r^* 处具有强制性：

$$d^2J(r^*)[h,h] \ge c_E\left\|h\right\|_{H^s}^2 \quad \forall h \in H^s.$$

(A4) 以下估计

$$\left|d^2J(r)[h_1,h_2] - d^2J(r^*)[h_1,h_2]\right| \le \eta(\left\|r - r^*\right\|_X)\left\|h_1\right\|_{H^s}\left\|h_2\right\|_{H^s} \quad \forall h_1,h_2 \in H^s$$

holds for all $r \in B_\delta^X(r^*)$, *where* η *satisfies* $\lim_{t\to 0^+}\eta(t) = 0$.

证明。这里只证明充分性。事实上，根据泰勒展开，我们有

$$J(r) - J(r^*) = 0 + \frac{1}{2}d^2J(r^* + \xi h)[h,h] \quad \xi \in (0,1)$$

对所有 $r = r^* + h \in B_\delta^X(r^*)$ 均成立。因此，由条件 (A3) 和 (A4)，我们可以得到

$$\begin{aligned} J(r) - J(r^*) &= \frac{1}{2}d^2J(r^*)[h,h] + \frac{1}{2}d^2J(r^* + \xi h)[h,h] - \frac{1}{2}d^2J(r^*)[h,h] \\ &\ge \frac{c_E}{2}\left\|h\right\|_{H^s}^2 - \frac{1}{2}\eta(\left\|\xi h\right\|)\left\|h\right\|_{H^s}^2 \\ &= \left(\frac{c_E}{2} - \frac{1}{2}\eta(\left\|\xi h\right\|)\right)\left\|r - r^*\right\|_{H^s}^2. \end{aligned}$$

因此，鉴于 $\lim_{t\to 0^+}\eta(t) = 0$，我们得出结论。 □

注释 2.7. 这里有几点说明：

(1) 证明上述定理的充分性时，条件 $(A3)$ 可以弱化为

$$(A3') \quad d^2J(r^*)[h,h] \ge c_E\left\|h\right\|_{H^s}^2 \quad \forall h \in X.$$

(2) 条件 $(A2)$ 对 $h_1, h_2 \in H^s$ 在稠密意义下成立，参见 [18, pp. 4-5] .
对于边界型目标泛函，该结论对 $s = 1$ 成立，参见 [13, 12] 和 [18, 第 5] ，以 *th* *e*
细节。(3) 条件 $(A4)$ 确保二阶泰勒余项 $R_2(J(\Omega)\ dr)$ 满足

$$|R_2(J(\Omega), dr)| = o(\left\|dr\right\|_X)\left\|dr\right\|_{H^s}^2.$$

对于本文研究的边界型目标泛函，条件$(A4)$ 在 $s = 1$ 时成立，详情请参见[9, 8] 。

条件 $(A3')$ 对解的存在性以及非线性 Ritz-Galerkin 逼近方法的收敛起着关键作用。我们回顾 [14, 第二部分第 283-284] 页中的以下定理。

定理 2.8. 假设欧拉导数满足条件 $(A1)$ ，且形状海森矩阵在 r^* 处满足条件 $(A2)$、$(A3')$ ，那么存在 r^* 的一个邻域 $U(r^*) \subset X$ ，使得离散问题

$$seek \quad r_N^* \in V_N \quad s.t. \quad dJ(r_N^*)[dr] = 0 \quad \forall dr \in V_N \tag{2.7}$$

有唯一解 $r_N^* \in V_N \cap U(r^*)$，并且我们有如下估计

$$\left\|r_N^* - r^*\right\|_{H^s} \lesssim \inf_{r_N \in V_N}\left\|r_N - r^*\right\|_{H^s}, \tag{2.8}$$

其中 $V_N =$跨度$\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\} \subset X$ 足够大时。

注 2.9. 由于 V_N 是一个线性空间，且形状海森矩阵连续，一阶必要条件 *(2.7)*确实可以保证 r_N^* 是一个局部最优解，这与定理 *2.6* 的充分性证明思路相同。

3. Shape calculus

本节计算新提出的形状优化问题 (1.9)-(1.10) 的欧拉导数和形状海森矩阵。关于该目标泛函的动机和讨论将推迟至第 4 节。

3.1. 若干引理。 本小节首先汇集进行形状微积分所需的一些材料。对于向量场 V，我们将使用缩写 $v_n := \langle V(0), \mathbf{n}\rangle$，其中 $\mathbf{n}$ 为 Γ 的单位外法向量。

引理 3.1。 设 $y(\Omega) \in H^1(\Omega)$ 为定义在区域 Ω 上的函数，$z(\Gamma)$ 为定义在自由边界 Γ 上的函数，V 为速度场，并且 $z(\Gamma)$ 的边界型形状导数 $z'(\Gamma; V)$ 和 $y(\Omega)$ 的区域型形状导数 $y'(\Omega; V)$ 均存在。若 $z(\Gamma) = y(\Omega)|_\Gamma$，则有以下恒等式：

$$z'(\Gamma; V) = y'(\Omega; V) + \frac{\partial y(\Omega)}{\partial \boldsymbol{n}} v_n \quad \text{on} \quad \Gamma. \tag{3.1}$$

证明。 根据物质导数和形状导数的定义，在 Γ上有

$$\begin{aligned} z'(\Gamma; V) &= \mathring{z}(\Gamma; V) - \nabla_\Gamma z(\Gamma) \cdot V(0) \\ &= \mathring{y}(\Omega; V) - \nabla_\Gamma y(\Omega) \cdot V(0) \\ &= y'(\Omega; V) + \nabla y(\Omega) \cdot V(0) - \nabla_\Gamma y(\Omega) \cdot V(0) \\ &= y'(\Omega; V) + \frac{\partial y(\Omega)}{\partial \mathbf{n}} v_n. \end{aligned}$$

由此即得结论。 □

引理 3.2。 ([28, 第 3 章，第 125-126], [10, 第 9 章，第 488-491]) 设 $\boldsymbol{n}$ 为自由边界的单位外法向量，并设 $N = \nabla b$ 为其在Ω中的延拓。则有以下恒等式：

$$\begin{aligned} \mathring{\boldsymbol{n}}(\Gamma; V) = \mathring{N}(\Omega; V) = (DV\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - {}^*DV\boldsymbol{n}, \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ N'(\Omega; V) = (DV\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - {}^*DV\boldsymbol{n} - \nabla^2 bV, \end{aligned}$$

其中 $b(x) = d_\Omega(x) - d_{\Omega^c}(x)$，$d$ 为距离函数。我们通常将 $\mathring{\boldsymbol{n}}(\Gamma; V)$ 记作 $d\boldsymbol{n}[V]$。

引理 3.3。 设 $y(\Omega) \in H^2(\Omega)$，且 $z(\Gamma) = \frac{\partial y(\Omega)}{\partial \boldsymbol{n}}$则有以下恒等式：

$$z'(\Gamma; V) = \frac{\partial dy}{\partial n} + \nabla y \cdot (d\boldsymbol{n} - \nabla^2 bV) + \frac{\partial^2 y}{\partial \boldsymbol{n}^2} v_n \quad \text{on} \quad \Gamma, \tag{3.2}$$

其中 $dy = y'(\Omega;\ V)$，$\frac{\partial^2 y}{\partial \boldsymbol{n}^2} = \nabla^2 y\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}$，$d\boldsymbol{n} = \mathring{\boldsymbol{n}}(\Gamma;\ V)$。

证明。 事实上，我们知道 $z(\Gamma) = \nabla y \cdot \nabla b|_\Gamma$。由引理 3.1 可得

$$z'(\Gamma; V) = (\nabla y \cdot \nabla b)'(\Omega; V)|_\Gamma + \frac{\partial(\nabla y \cdot \nabla b)}{\partial \mathbf{n}} v_n.$$

利用链式法则，我们可以得到

$$(\nabla y \cdot \nabla b)'(\Omega; V) = \nabla dy \cdot \nabla b + \nabla y \cdot N'(\Omega; V) = \nabla dy \cdot \nabla b + \nabla y \cdot (d\mathbf{n} - \nabla^2 bV).$$

注意到 $\nabla^2 b\mathbf{n} = 0$，有

$$\frac{\partial(\nabla y \cdot \nabla b)}{\partial \mathbf{n}} = \nabla(\nabla y \cdot \nabla b) \cdot \mathbf{n} = (\nabla^2 y \nabla b + \nabla^2 b \nabla y) \cdot \mathbf{n} = \nabla^2 y\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$$

关于 Γ。因此，结论得证。 □

引理 3.4。 ([28, 第 2 章，第 115-116]页) 设 $z(\Gamma) \in L^1(\Gamma)$ 具有形状导数 $z'(\Gamma;V) \in L^1(\Gamma)$，则形状泛函 $J(\Omega) = \int_\Gamma z(\Gamma)d\sigma$ 的欧拉导数为

$$dJ(\Omega)[V] = \int_\Gamma z'(\Gamma;V)d\sigma + \int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma(z(\Gamma)V(0))d\sigma. \tag{3.3}$$

引理 3.5。 ([10, 第 9 章，第 497]) 设 $\boldsymbol{v} \in C^1(\Omega)^n$, $v_n = \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{n}\rangle$ 以及 $v_\Gamma = \boldsymbol{v} - v_n\boldsymbol{n}$，则下列恒等式成立：

$$D\boldsymbol{v}|_\Gamma = D_\Gamma \boldsymbol{v} + D\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}^*\boldsymbol{n}, \quad \mathrm{div}_\Gamma \boldsymbol{v} = \mathrm{div}_\Gamma v_\Gamma + \mathcal{H}v_n, \quad \nabla_\Gamma v_n = {}^*D_\Gamma \boldsymbol{v}\boldsymbol{n} + \nabla^2 b v_\Gamma.$$

引理 3.6. ([28, 第 2 章，第 94]) 设 Γ 属于 C^2 和 $\phi \in H^3(\Omega)$，则下述恒等式成立。 :

$$\Delta\phi = \Delta_\Gamma\phi + \mathcal{H}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\boldsymbol{n}^2} \quad \text{on} \quad \Gamma,$$

其中 $\frac{\partial^2\phi}{\partial \boldsymbol{n}^2} = \nabla^2\phi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}$。

最后，根据定理 2.4 和 2.5，我们可以推导出以下引理。

引理 3.7. 令 $u'(\Omega\ V)$ 为 *(1.10)* 中 u 沿速度场 V的形状导数，并记$u'(\Omega\ V)$ 为 du，则 du 满足以下方程：

$$\begin{cases} -\Delta du = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \frac{\partial du}{\partial\boldsymbol{n}} = \mathrm{div}_\Gamma(v_n\nabla_\Gamma u) + v_n\left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{n}}\right] \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ du = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.4}$$

其中， $\mathcal{H}$ 是 Γ的加性曲率。

引理 3.8. 令 $w'(\Omega\ V)$ 为 *(1.10)* 中 w 沿速度场 V的形状导数，并记$w'(\Omega\ V)$ 为 dw，则 dw 满足以下方程：

$$\begin{cases} -\Delta dw = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ dw = -\frac{\partial w}{\partial\boldsymbol{n}}v_n + du - gv_n \quad \text{on} \quad \Gamma \\ dw = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma. \end{cases} \tag{3.5}$$

3.2. 欧拉导数。 现在我们可以计算欧拉导数了。

定理 3.9. $J(\Omega) = \frac{1}{2}\int_\Gamma \left(\frac{\partial w}{\partial\ \boldsymbol{n}}\right)^2 d\sigma$ 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 沿速度场 V的欧拉导数为

$$dJ(\Omega)[V] = \int_\Gamma v_n\left\{-\frac{1}{2}p^2\mathcal{H} + p\left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{n}}\right] - (g+p)\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{n}}\right\}d\sigma, \tag{3.6}$$

其中， p 满足以下伴随方程：

$$\begin{cases} -\Delta p = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ p = \frac{\partial w}{\partial\boldsymbol{n}} \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ p = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma. \end{cases} \tag{3.7}$$

证明。 我们在引理 3.4 中取 $z(\Gamma) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\ \mathbf{n}}\right)^2$，并将 $V(0)$ 记为 V，则

$$\begin{aligned} dJ(\Omega)[V] &= \int_\Gamma z'(\Gamma;V)d\sigma + \int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma(z(\Gamma)V)d\sigma \\ &= \int_\Gamma z'(\Gamma;V)d\sigma + \int_\Gamma \nabla_\Gamma z(\Gamma)\cdot V d\sigma + \int_\Gamma z(\Gamma)\mathrm{div}_\Gamma V d\sigma. \end{aligned}$$

利用引理 3.3，我们有

$$\left(\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\right)'(\Gamma;V) = \frac{\partial dw}{\partial\mathbf{n}} + \nabla w\cdot(d\mathbf{n} - \nabla^2 bV) + \frac{\partial^2 w}{\partial\mathbf{n}^2}v_n.$$

通过使用链式法则，我们得到

$$z'(\Gamma;V) = \frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\left(\frac{\partial dw}{\partial\mathbf{n}} + \nabla w\cdot(d\mathbf{n} - \nabla^2 bV) + \frac{\partial^2 w}{\partial\mathbf{n}^2}v_n\right).$$

注意到

$$\frac{1}{2}\nabla[(\nabla w\cdot\nabla b)^2]=(\nabla w\cdot\nabla b)\left(\nabla^2 w\nabla b+\nabla^2 b\nabla w\right)=\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\left(\nabla^2 w\mathbf{n}+\nabla^2 b\nabla w\right)$$

并 $\nabla^2 b\mathbf{n}=\mathbf{0}$ on Γ，我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(\nabla w\cdot\nabla b)^2}{\partial\mathbf{n}}=\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\frac{\partial^2 w}{\partial\mathbf{n}^2}.$$

由切向梯度的定义可知

$$\nabla_\Gamma z(\Gamma)=\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\left(\nabla^2 w\mathbf{n}+\nabla^2 b\nabla w\right)-\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\frac{\partial^2 w}{\partial\mathbf{n}^2}\mathbf{n}.$$

此外，有

$$\nabla_\Gamma z(\Gamma)\cdot V=\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\left(\nabla^2 w\mathbf{n}\cdot V+\nabla^2 b\nabla w\cdot V\right)-\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\frac{\partial^2 w}{\partial\mathbf{n}^2}v_n.$$

由引理 3.5 可知

$$z(\Gamma)\mathrm{div}_\Gamma V=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\right)^2\left[\mathrm{div}_\Gamma v_\Gamma+\mathcal{H}v_n\right],$$

我们可以得到

$$\begin{aligned}dJ(\Omega)[V]=&\int_\Gamma\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\left[\frac{\partial dw}{\partial\mathbf{n}}+\nabla w\cdot(d\mathbf{n}-\nabla^2 bV)\right]\\&+\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\left(\nabla^2 w\mathbf{n}\cdot V+\nabla^2 b\nabla w\cdot V\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\right)^2\left[\mathrm{div}_\Gamma v_\Gamma+\mathcal{H}v_n\right]d\sigma.\end{aligned}$$

接下来，我们将分几步简化 $dJ(\Omega)[V]$ 的表达式。

首先，我们回顾切向格林公式（参见 [10, 第 9 章，第 498] 页） ：

$$\int_\Gamma f\mathrm{div}_\Gamma\mathbf{v}+\nabla_\Gamma f\cdot\mathbf{v}d\sigma=\int_\Gamma\mathcal{H}f\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}d\sigma \tag{3.8}$$

对于 $f\in C^1(\Gamma)$ 和 $\mathbf{v}\in C^1(\Gamma)^n$。因此，我们得到

$$\int_\Gamma\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\right)^2\mathrm{div}_\Gamma v_\Gamma d\sigma=-\frac{1}{2}\int_\Gamma\nabla_\Gamma\left(\left(\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\right)^2\right)\cdot v_\Gamma d\sigma.$$

由 $\nabla_\Gamma z(\Gamma)$ 的表达式可知,

$$\nabla_\Gamma\left(\left(\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\right)^2\right)=2\left[\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\left(\nabla^2 w\mathbf{n}+\nabla^2 b\nabla w\right)-\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\frac{\partial^2 w}{\partial\mathbf{n}^2}\mathbf{n}\right].$$

此外，我们由恒等式 $v_\Gamma\cdot\mathbf{n}=0$ 得出,

$$\nabla_\Gamma\left(\left(\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\right)^2\right)\cdot v_\Gamma=2\left[\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\left(\nabla^2 w\mathbf{n}+\nabla^2 b\nabla w\right)\cdot v_\Gamma\right].$$

因此,

$$\int_\Gamma\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\right)^2\mathrm{div}_\Gamma v_\Gamma d\sigma=-\int_\Gamma\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\left(\nabla^2 w\mathbf{n}\cdot v_\Gamma+\nabla^2 b\nabla w\cdot v_\Gamma\right)d\sigma.$$

结合上述计算，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\right)^2 \mathrm{div}_\Gamma v_\Gamma + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\left(\nabla^2 w\mathbf{n}\cdot V + \nabla^2 b\nabla w\cdot V\right)\\
&= \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\left(\nabla^2 w\mathbf{n}\cdot V + \nabla^2 b\nabla w\cdot V - \nabla^2 w\mathbf{n}\cdot v_\Gamma - \nabla^2 b\nabla w\cdot v_\Gamma\right) d\sigma\\
&= \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{n}^2}v_n + v_n\nabla^2 b\nabla w\cdot\mathbf{n}\right) d\sigma\\
&= \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{n}^2}v_n d\sigma.
\end{aligned}$$

其次，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\nabla w\cdot\left[d\mathbf{n} - \nabla^2 bV\right] &= \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}{}^*\nabla w\left[d\mathbf{n} - \nabla^2 bV\right]\\
&= \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}{}^*\nabla w\left[(DV\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - {}^*DV\mathbf{n} - \nabla^2 bV\right]\\
&= \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\left[(DV\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}){}^*\nabla w\mathbf{n} - \nabla w\cdot\left({}^*DV\mathbf{n} + \nabla^2 bV\right)\right]\\
&= \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\left[\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}(DV\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) - \nabla w\cdot\left({}^*DV\mathbf{n} + \nabla^2 bV\right)\right].
\end{aligned}$$

利用引理 3.5，我们有

$${}^*DV\mathbf{n} = {}^*D_\Gamma V\mathbf{n} + (DV\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}.$$

因此，

$$\nabla w\cdot({}^*DV\mathbf{n}) = \nabla w\cdot({}^*D_\Gamma V\mathbf{n}) + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}(DV\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}).$$

此外，由引理 3.2、引理 3.5 和切向格林公式，我们可以推导出：

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\nabla w\cdot\left[d\mathbf{n} - \nabla^2 bV\right] = -\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\nabla w\cdot\left[{}^*D_\Gamma V\mathbf{n} + \nabla^2 bV\right] = -\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\nabla w\cdot\nabla_\Gamma v_n = -\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\nabla_\Gamma w\cdot\nabla_\Gamma v_n$$

and

$$\int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\nabla w\cdot\left[d\mathbf{n} - \nabla^2 bV\right] d\sigma = -\int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\nabla_\Gamma w\cdot\nabla_\Gamma v_n d\sigma = \int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma\left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\nabla_\Gamma w\right) v_n d\sigma.$$

到目前为止，我们可以得到

$$dJ(\Omega)[V] = \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\frac{\partial dw}{\partial \mathbf{n}} + \left[\mathrm{div}_\Gamma\left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\nabla_\Gamma w\right) + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{n}^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\right)^2\mathcal{H}\right] v_n d\sigma.$$

接下来，令 p 满足式 (3.7) 中定义的伴随方程。利用格林公式、切向格林公式 (3.8) 以及 w、du、dw 在 Γ 上的方程，我们可以推导出

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\frac{\partial dw}{\partial \mathbf{n}} d\sigma &= \int_\Gamma p\frac{\partial dw}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = \int_\Gamma dw\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} d\sigma\\
&= \int_\Gamma du\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} - \left(g + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\right)\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} v_n d\sigma = \int_\Gamma p\frac{\partial du}{\partial \mathbf{n}} - \left(g + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\right)\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} v_n d\sigma\\
&= \int_\Gamma p\mathrm{div}_\Gamma(v_n\nabla_\Gamma u) d\sigma + \int_\Gamma p\left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\right] v_n d\sigma - \left(g + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\right)\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} v_n d\sigma\\
&= \int_\Gamma v_n\left\{-\nabla_\Gamma p\cdot\nabla_\Gamma u + p\left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\right] - \left(g + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\right)\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right\} d\sigma\\
&= \int_\Gamma v_n\left\{-\nabla_\Gamma p\cdot\nabla_\Gamma w + p\left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\right] - (g + p)\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right\} d\sigma.
\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} dJ(\Omega)[V] &= \int_\Gamma \left\{ -\nabla_\Gamma p \cdot \nabla_\Gamma w + p\left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right] - (g+p)\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right\} v_n \\ &\quad + \left[\mathrm{div}_\Gamma \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \nabla_\Gamma w \right) + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{n}^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 \mathcal{H} \right] v_n d\sigma \\ &= \int_\Gamma \left\{ -\nabla_\Gamma p \cdot \nabla_\Gamma w + p\left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right] - (g+p)\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right\} v_n \\ &\quad + \left[\mathrm{div}_\Gamma \left(p \nabla_\Gamma w \right) + p\frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{n}^2} + \frac{1}{2} p^2 \mathcal{H} \right] v_n d\sigma. \end{aligned}$$

最后，利用引理 3.6，我们得到

$$0 = \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{n}^2} + \Delta_\Gamma w + \mathcal{H}\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}.$$

因此，

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_\Gamma \left(p \nabla_\Gamma w \right) &= \nabla_\Gamma p \cdot \nabla_\Gamma w + p\Delta_\Gamma w \\ &= \nabla_\Gamma p \cdot \nabla_\Gamma w + p\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{n}^2} - \mathcal{H}\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right) \\ &= \nabla_\Gamma p \cdot \nabla_\Gamma w - p\frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{n}^2} - p^2 \mathcal{H}. \end{aligned}$$

现在我们得到

$$dJ(\Omega)[V] = \int_\Gamma v_n \left\{ -\frac{1}{2}p^2\mathcal{H} + p\left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right] - (g+p)\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right\} d\sigma.$$

由此，我们完成了证明。 □

回顾一下，Ω^* 是带有自由边界 Γ^* 的问题（$\mathbf{P}$）的解，即 Ω^* 满足以下超定边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega^*, \\ -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g,\ u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma^*, \\ u = h \quad \text{on} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.9}$$

我们有如下推论。

推论 3.10. 最优区域 Ω^* 满足一阶最优性条件：

$$dJ(\Omega^*)[dr] = 0 \quad \forall dr \in X. \tag{3.10}$$

证明。 容易验证 $p(\Omega^*) \equiv 0$ 在 Ω^*中，因此将 p 代入 $dJ(\Omega^*)[V]$的表达式即可得到结论。 □

3.3. **形状海森矩阵**。 本小节中我们计算形状海森矩阵。首先，我们给出单位法向量和边界积分的变量替换公式。

引理 3.11. ([10, 第 9 章，第 488-489], [1, 第 4 章，第 15]) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界的 C^1 区域，且 T 是 $\mathbb{R}^n$的一个 C^1 微分同胚。则

$$\boldsymbol{n}_T \circ T = \frac{{}^*(DT)^{-1}\boldsymbol{n}}{\|{}^*(DT)^{-1}\boldsymbol{n}\|}, \tag{3.11}$$

其中$\boldsymbol{n}$ 和$\boldsymbol{n}_T$ 分别是 $\partial\Omega$ 和 $T(\partial\Omega)$ 的单位法向量。此外， $f \in L^1(T(\partial\Omega))$ 当且仅当 $f \circ T \in L^1(\partial\Omega)$ 且

$$\int_{T(\partial\Omega)} f d\sigma = \int_{\partial\Omega} f \circ T \|{}^*(DT)^{-1}\boldsymbol{n}\| |\det(DT)| d\sigma. \tag{3.12}$$

设 $r(\widehat{x}) \in X$ 为Ω的自由边界参数化，设 $r_\varepsilon(\widehat{x}) = r(\widehat{x}) + \varepsilon dr(\widehat{x})$为Ω$_\varepsilon$的自由边界参数化，其中 $dr \in X$。那么，变换前后的自由边界分别为

$$\Gamma = \left\{\gamma(\widehat{x}) = r(\widehat{x})\widehat{x} : \quad \widehat{x} \in \mathbb{S}^{n-1}\right\}, \quad \Gamma_\varepsilon = \left\{\gamma(\widehat{x}) = r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x} : \quad \widehat{x} \in \mathbb{S}^{n-1}\right\}.$$

定理 m 3.12. 在上述记号和条件下，以下两个结论成立：

(1) $x \in \Gamma$ 处的单位外法向量由下式给出：

$$\boldsymbol{n}(x) = \frac{r(\widehat{x})\widehat{x} - \nabla_{\mathbb{S}} r(\widehat{x})}{\sqrt{r^2(\widehat{x}) + \|\nabla_{\mathbb{S}} r(\widehat{x})\|^2}}, \tag{3.13}$$

其中，$\widehat{x} = \frac{x}{\|x\|}$ 和 $\nabla_{\mathbb{S}} r(\widehat{x})$ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$上沿 $\mathbb{S}^{n-1}$的 r 的切向梯度。

(2) 若 $f \in L^1(\Gamma)$，则

$$\int_\Gamma f d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f r^{n-2} \sqrt{r^2(\widehat{x}) + \|\nabla_{\mathbb{S}} r(\widehat{x})\|^2} d\widehat{\sigma}. \tag{3.14}$$

证明。该定理中的结论已在文献中得到广泛应用（参见 [15, 16]）。为便于阅读，我们在此给出一个简要证明。

注意，从单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 到 Γ 的映射由 $T(\widehat{x}) = r(\widehat{x})\widehat{x}$给出，其逆映射为 $T^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|}$。因此，我们知道 T是一个微分同胚。由雅可比矩阵的定义可知，

$$DT(\widehat{x}) = \widehat{x}^* \nabla_{\widehat{x}} r(\widehat{x}) + r(\widehat{x}) I,$$

这意味着

$$\begin{aligned}
\det DT(\widehat{x}) &= r(\widehat{x})^n \det\left(\frac{1}{r(\widehat{x})}\widehat{x}^* \nabla_{\widehat{x}} r(\widehat{x}) + I\right) \\
&= r(\widehat{x})^n \left(1 + \frac{1}{r(\widehat{x})}{}^*\nabla_{\widehat{x}} r(\widehat{x})\widehat{x}\right) \\
&= r(\widehat{x})^{n-1}(r(\widehat{x}) + {}^*\nabla_{\widehat{x}} r(\widehat{x})\widehat{x}).
\end{aligned}$$

我们使用著名的 Sherman-Morrison-Woodbury 公式推导 DT^{-1} 的公式：

$$DT^{-1}(\widehat{x}) = \frac{1}{r(\widehat{x})} I - \frac{\widehat{x}^* \nabla_{\widehat{x}} r(\widehat{x})}{r(\widehat{x})^2 + r(\widehat{x})^* \nabla_{\widehat{x}} r(\widehat{x})\widehat{x}}$$

and

$$\begin{aligned}
{}^*DT^{-1}(\widehat{x})\widehat{x} &= \frac{1}{r(\widehat{x})}\widehat{x} - \frac{\nabla_{\widehat{x}} r(\widehat{x})}{r(\widehat{x})^2 + r(\widehat{x})^* \nabla_{\widehat{x}} r(\widehat{x})\widehat{x}} \\
&= \frac{1}{r(\widehat{x})}\widehat{x} - \frac{\nabla_{\mathbb{S}} r(\widehat{x}) + ({}^*\nabla_{\widehat{x}} r(\widehat{x})\widehat{x})\widehat{x}}{r(\widehat{x})^2 + r(\widehat{x})^* \nabla_{\widehat{x}} r(\widehat{x})\widehat{x}} \\
&= \frac{\widehat{x}}{r(\widehat{x}) + {}^*\nabla_{\widehat{x}} r(\widehat{x})\widehat{x}} - \frac{\nabla_{\mathbb{S}} r(\widehat{x})}{r(\widehat{x})(r(\widehat{x}) + {}^*\nabla_{\widehat{x}} r(\widehat{x})\widehat{x})}.
\end{aligned}$$

由于单位球面上 $\widehat{x}$ 处的法向量为 $\widehat{x}$，我们有 $\langle \nabla_{\mathbb{S}} r(\widehat{x})\ \widehat{x}\rangle = 0$。通分后即得第一个结论。此外，直接计算可得

$$|\det DT| \|{}^*DT^{-1}(\widehat{x})\widehat{x}\| = r(\widehat{x})^{n-2} \sqrt{r(\widehat{x})^2 + \|\nabla_{\mathbb{S}} r(\widehat{x})\|^2}.$$

将 $|\det DT| \|{}^*DT^{-1}(\widehat{x})\widehat{x}\|$ 代入 (3.12)，即可得出第二个断言。 □

如果 V是由 dr诱导的速度场，那么在 $x \in \Gamma$ 处有

$$v_n = \langle dr(\widehat{x})\widehat{x}, \mathbf{n}(x)\rangle = \frac{dr(\widehat{x}) r(\widehat{x})}{\sqrt{r^2(\widehat{x}) + \|\nabla_{\mathbb{S}} r(\widehat{x})\|^2}}.$$

我们将 $dJ(\Omega)[V]$ 记作 $dJ(\Omega)[dr]$，利用定理 3.12(2)可得

$$dJ(\Omega)[dr] = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dr r^{n-1} \left\{-\frac{1}{2}p^2 \mathcal{H} + p\left[f - \mathcal{H} g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\right] - (g+p)\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right\} d\widehat{\sigma}. \tag{3.15}$$

Let

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ x = \rho\widehat{x} \in \mathbb{R}^n : \quad \widehat{x} \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad L(\widehat{x}) \le \rho \le r(\widehat{x}) + \varepsilon dr_2(\widehat{x}) \right\},$$

then

$$d^2 J(\Omega)[dr_1, dr_2] = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \{ dJ(\Omega_\varepsilon)[dr_1] \},$$

并得到 $dJ(\Omega_\varepsilon)[dr_1]$的表达式

$$\begin{aligned} dJ(\Omega_\varepsilon)[dr_1] = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} & dr_1(\widehat{x}) r_\varepsilon^{n-1}(\widehat{x}) \left\{ -\frac{1}{2} p_\varepsilon (r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x})^2 \mathcal{H}_\varepsilon (r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x}) \right. \\ & + p_\varepsilon (r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x}) \left[f(r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x}) - \mathcal{H}_\varepsilon (r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x}) g(r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x}) - \frac{\partial g(r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x})}{\partial \mathbf{n}_\varepsilon} \right] \\ & \left. - \left(g(r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x}) + p_\varepsilon (r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x}) \right) \frac{\partial p_\varepsilon (r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x})}{\partial \mathbf{n}_\varepsilon} \right\} d\widehat{\sigma}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

其中 $r_\varepsilon(\widehat{x}) = r(\widehat{x}) + \varepsilon dr_2(\widehat{x})$】【。

通过使用

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right)' (\Gamma; V) = \frac{\partial dw[dr_2]}{\partial \mathbf{n}} + \nabla w \cdot (d\mathbf{n} - \nabla^2 b V) + \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{n}^2} v_n$$

以及伴随方程 (3.7)，我们可以得到， p 沿由 dr_2 诱导的速度场的形状导数，记为 $dp[dr_2]$，满足以下方程:

$$\begin{cases} -\Delta dp[dr_2] = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ dp[dr_2] = -\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} v_n + \frac{\partial dw[dr_2]}{\partial \mathbf{n}} + \nabla w \cdot (d\mathbf{n} - \nabla^2 b V) + \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{n}^2} v_n \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ dp[dr_2] = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma. \end{cases} \tag{3.17}$$

现在我们可以计算形状海森矩阵了。注意到

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{r_\varepsilon(\widehat{x}) - r(\widehat{x})}{\varepsilon} &= dr_2(\widehat{x}), \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{p_\varepsilon(r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x}) - p(r(\widehat{x})\widehat{x})}{\varepsilon} &= dp[dr_2] + dr_2(\widehat{x}) \left\langle \nabla p, \widehat{x} \right\rangle, \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x}) - f(r(\widehat{x})\widehat{x})}{\varepsilon} &= dr_2(\widehat{x}) \left\langle \nabla f, \widehat{x} \right\rangle, \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g(r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x}) - g(r(\widehat{x})\widehat{x})}{\varepsilon} &= dr_2(\widehat{x}) \left\langle \nabla g, \widehat{x} \right\rangle, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(\nabla g)(r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x}) - (\nabla g)(r(\widehat{x})\widehat{x})}{\varepsilon} &= (\overset{\circ}{\nabla} g)(\Omega; V)|_{\Gamma^*} = (\nabla g)'(\Omega; V) + \nabla^2 g V = dr_2(\widehat{x}) \nabla^2 g \widehat{x}, \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(\nabla p_\varepsilon)(r_\varepsilon(\widehat{x})\widehat{x}) - (\nabla p)(r(\widehat{x})\widehat{x})}{\varepsilon} &= (\overset{\circ}{\nabla} p)(\Omega; V)|_{\Gamma} = (\nabla p)'(\Omega; V) + \nabla^2 p V = \nabla dp[dr_2] + dr_2 \nabla^2 p \widehat{x}, \end{aligned}$$

我们对 ε 求 $dJ(\Omega_\varepsilon)[dr_1]$ 的导数，得到

$$
\begin{aligned}
d^2J(\Omega)[dr_1,dr_2] = &\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(n-1)dr_1r^{n-2}\left\{-\frac{1}{2}p^2\mathcal{H}+p\left[f-\mathcal{H}g-\frac{\partial g}{\partial\mathbf{n}}\right]-(g+p)\frac{\partial p}{\partial\mathbf{n}}\right\}d\widehat{\sigma}\\
&+\int_{\mathbb{S}^{n-1}}dr_1r^{n-1}\left\{-p\mathcal{H}\left(dp[dr_2]+dr_2\left\langle\nabla p,\widehat{x}\right\rangle\right)-\frac{1}{2}p^2\frac{d\mathcal{H}}{d(dr_2)}\right\}d\widehat{\sigma}\\
&+\int_{\mathbb{S}^{n-1}}dr_1r^{n-1}\left\{\left(dp[dr_2]+dr_2\left\langle\nabla p,\widehat{x}\right\rangle\right)\left[f-\mathcal{H}g-\frac{\partial g}{\partial\mathbf{n}}\right]\right\}d\widehat{\sigma}\\
&+\int_{\mathbb{S}^{n-1}}dr_1r^{n-1}\Big\{p\Big[dr_2\left\langle\nabla f,\widehat{x}\right\rangle-\frac{d\mathcal{H}}{d(dr_2)}g-\mathcal{H}dr_2\left\langle\nabla g,\widehat{x}\right\rangle\\
&-\left(dr_2\left\langle\nabla^2g\widehat{x},\mathbf{n}\right\rangle+\left\langle\nabla g,d\mathbf{n}[dr_2]\right\rangle\right)\Big]\Big\}d\widehat{\sigma}\\
&-\int_{\mathbb{S}^{n-1}}dr_1r^{n-1}\left\{\frac{\partial p}{\partial\mathbf{n}}\left(dr_2\left\langle\nabla g,\widehat{x}\right\rangle+dp[dr_2]+dr_2\left\langle\nabla p,\widehat{x}\right\rangle\right)\right.\\
&\left.+(g+p)\left(\frac{\partial dp[dr_2]}{\partial\mathbf{n}}+dr_2\left\langle\nabla^2p\widehat{x},\mathbf{n}\right\rangle+\left\langle\nabla p,d\mathbf{n}[dr_2]\right\rangle\right)\right\}d\widehat{\sigma},
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

其中 $d\frac{d\mathcal{H}}{dr_2()}$ 表示加性曲率 $\mathcal{H}$ 的物质导数。

推论 3.13. 以下恒等式成立：

$$
d^2J(\Omega^*)[dr_1,dr_2]=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}dr_1r^{*(n-1)}\left\{dp[dr_2]\left[f-\mathcal{H}g-\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{n}}\right]-g\frac{\partial dp[dr_2]}{\partial\boldsymbol{n}}\right\}d\widehat{\sigma}. \tag{3.19}
$$

证明. 容易得知，$p(\Omega^*)\equiv 0$ 在 Ω^*中，因此将 p 代入 $d^2J(\Omega^*)[dr_1,dr_2]$的表达式即可得到该恒等式。□

由于 $d^2J(\Omega)[dr_1,dr_2]$ 的表达式包含 $d\frac{d\mathcal{H}}{dr_2()}$，显然，$dJ(\Omega)[\cdot,\cdot]$ 是 $H^1(\Gamma)\times H^1(\Gamma)$上的连续双线性泛函（参见 [15, 16, 13, 12, 18]），且二阶泰勒余项为

$$
|R_2(J(\Omega),dr)|=o(\|dr\|_{C^{3,\alpha}(\Gamma)})\|dr\|^2_{H^1(\Gamma)}.
$$

因此，根据定理 2.6，若满足以下条件，则 Ω^* 是严格局部极小值

$$
d^2J(\Omega^*)[dr,dr]\gtrsim\|dr\|^2_{H^1(\Gamma^*)}.
$$

此外，形状海森矩阵的强制性还确保了非线性 Ritz-Galerkin 近似方法存在局部最优解，并根据定理 2.8 保证其收敛。

为了证明形状海森矩阵的强制性，我们首先按照 [15, 16] 的思路寻找一种算子表示。

引理 3.14 ([15, 16])**.** 设 $\boldsymbol{n}$ 为 Γ^* 的单位法向量，则该算子

$$
M(dr)\triangleq g\left\langle d\widehat{r}\widehat{x},\boldsymbol{n}\right\rangle=\frac{gr^*}{\sqrt{r^{*2}+\|\nabla_{\mathbb{S}}r^*\|^2}}dr
$$

对所有 $s\in[0,1]$，都是从 $H^s(\Gamma^*)$ 到 $H^s(\Gamma^*)$ 的连续双射映射。

定义 3.15 ([15, 16])**.** 设对所有 $x\in\Gamma^*$，$g(x)>0$。我们定义算子 $\mathcal{A}:H^s(\Gamma^*)\to H^s(\Gamma^*)$,$s\in[0,1]$ 如下

$$
(\mathcal{A}u)(x)\triangleq A(x)u(x)=\left\{\mathcal{H}(x)+\left[\frac{\partial g(x)}{\partial\boldsymbol{n}}-f(x)\right]\Big/g(x)\right\}u(x).
$$

定义 3.16. 我们定义狄利克雷到诺伊曼 映射 $\Lambda:H^{1/2}(\Gamma^*)\to H^{-1/2}(\Gamma^*)$ 为 $\Lambda(v)\triangleq\partial^{\partial w}_{\boldsymbol{n}}\big|_{\Gamma^*}$，其中 $w\in H^1(\Omega^*)$ 满足以下方程：

$$
\begin{cases}
-\Delta w=0 \quad in \quad \Omega^*,\\
w=v \quad on \quad \Gamma^*,\\
w=0 \quad on \quad \Sigma.
\end{cases}
$$

引理 3.17 ([16])**.** 映射 Λ 是 $H^{1/2}(\Gamma^*)$-*coercive*，其逆映射是诺伊曼到狄利克雷映射 $\Upsilon = \Lambda^{-1}$，即 Υ : $H^{-1/2}(\Gamma^*) \to H^{1/2}(\Gamma^*)$ 由 $\Upsilon(v) := w|_{\Gamma^*}$定义，其中 $w \in H^1(\Omega^*)$ 满足以下方程:

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 \quad \text{in} \quad \Omega^*, \\ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}} = v \quad \text{on} \quad \Gamma^*, \\ w = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma. \end{cases}$$

现在我们可以将 $d^2J(\Omega^*)[dr_1, dr_2]$ 改写为算子形式。

定理 3.18。 下面的恒等式成立:

$$d^2J(\Omega^*)[dr_1, dr_2] = \langle (\mathcal{A}+\Lambda)(M(dr_1)), (\mathcal{A}+\Lambda)(M(dr_2))\rangle_{L^2(\Gamma^*)} \quad \forall dr_1, dr_2 \in X. \tag{3.20}$$

证明。 令 $dp[dr_2]$ 为方程 (3.17) 的解，其中将 Ω 和 Γ 分别替换为 Ω^* 和 Γ^*。回忆在 Γ^* 上有

$$\frac{\partial du[dr_2]}{\partial \mathbf{n}} = \langle dr_2 \widehat{x}, \mathbf{n}\rangle \left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right] = -\mathcal{A}(M(dr_2)),$$

我们有

$$du[dr_2] = -\Upsilon(\mathcal{A}(M(dr_2))).$$

利用引理 3.8 以及 Γ^* 上的 $w|_{\Gamma^*} = 0$ 这一事实，我们有

$$dw[dr_2] = du[dr_2] - g\langle dr_2 \widehat{x}, \mathbf{n}\rangle = -\Upsilon(\mathcal{A}(M(dr_2))) - M(dr_2),$$

这意味着

$$\frac{\partial dw[dr_2]}{\partial \mathbf{n}} = \Lambda(-\Upsilon(\mathcal{A}(M(dr_2))) - M(dr_2)) = -\mathcal{A}(M(dr_2)) - \Lambda(M(dr_2)).$$

此外，我们可以得到

$$dp[dr_2] = \frac{\partial dw[dr_2]}{\partial \mathbf{n}} = -\mathcal{A}(M(dr_2)) - \Lambda(M(dr_2))$$

and

$$\frac{\partial dp[dr_2]}{\partial \mathbf{n}} = -\Lambda(\mathcal{A}(M(dr_2)) + \Lambda(M(dr_2))).$$

令 v 满足

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 \quad \text{in} \quad \Omega^*, \\ v = M(dr_1) \quad \text{on} \quad \Gamma^*, \\ v = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \end{cases}$$

利用格林公式可得

$$\int_{\Gamma^*} M(dr_1)\frac{\partial dp[dr_2]}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = \int_{\partial\Omega^*} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dp[dr_2] d\sigma = \int_{\Gamma^*} \Lambda(M(dr_1)) dp[dr_2] d\sigma.$$

综合以上计算可得

$$\begin{aligned} d^2J(\Omega^*)[dr_1, dr_2] &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dr_1 r^{*(n-1)} \left\{ dp[dr_2] \left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right] - g\frac{\partial dp[dr_2]}{\partial \mathbf{n}} \right\} d\widehat{\sigma} \\ &= \int_{\Gamma^*} \langle dr_1 \widehat{x}, \mathbf{n}(x)\rangle \, dp[dr_2] \left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right] d\sigma - \int_{\Gamma^*} M(dr_1)\frac{\partial dp[dr_2]}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \\ &= \int_{\Gamma^*} g\langle dr_1 \widehat{x}, \mathbf{n}(x)\rangle \, dp[dr_2] \left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right] \Big/ g d\sigma - \int_{\Gamma^*} M(dr_1)\frac{\partial dp[dr_2]}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \\ &= -\int_{\Gamma^*} \mathcal{A}(M(dr_1)) dp[dr_2] d\sigma - \int_{\Gamma^*} \Lambda(M(dr_1)) dp[dr_2] d\sigma \\ &= \langle \mathcal{A}(M(dr_1)), \mathcal{A}(M(dr_2)) + \Lambda(M(dr_2))\rangle_{L^2(\Gamma^*)} \\ &\quad + \langle \Lambda(M(dr_1)), \mathcal{A}(M(dr_2)) + \Lambda(M(dr_2))\rangle_{L^2(\Gamma^*)} \\ &= \langle (\mathcal{A}+\Lambda)(M(dr_1)), (\mathcal{A}+\Lambda)(M(dr_2))\rangle_{L^2(\Gamma^*)}. \end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

接下来，我们将证明本节的主要结果，即形状海森矩阵的强制性。

定理 3.19。若

$$A(x)=\mathcal{H}(x)+\left[\frac{\partial g(x)}{\partial \boldsymbol{n}}-f(x)\right]\Big/ g(x)\geqslant 0\quad \forall x\in\Gamma^*$$

且 $A\in L^\infty(\Gamma^*)$，则

$$d^2J(\Omega^*)[dr,dr]\gtrsim \|dr\|^2_{H^1(\Gamma^*)}. \tag{3.21}$$

证明。另一方面，根据 Λ 和 $\mathcal{A}$的定义，我们有

$$(\Lambda+\mathcal{A})(M(dr))=\left.\frac{\partial w^*}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma^*}+Aw^*,$$

其中 w^* 满足以下方程:

$$\begin{cases}-\Delta w^*=0 \quad \text{in} \quad \Omega^*,\\ w^*=M(dr) \quad \text{on} \quad \Gamma^*,\\ w^*=0 \quad \text{on} \quad \Sigma.\end{cases}$$

回顾迹定理可得

$$\|w^*\|_{H^{3/2}(\Omega^*)}\gtrsim \|M(dr)\|_{H^1(\Gamma^*)}\sim \|dr\|_{H^1(\Gamma^*)}.$$

另一方面，令 $v\triangleq \frac{\partial w^*}{\partial}\mathbf{n}+Aw^*$，则

$$\begin{cases}-\Delta w^*=0 \quad \text{in} \quad \Omega^*,\\ \frac{\partial w^*}{\partial \mathbf{n}}+Aw^*=v \quad \text{on} \quad \Gamma^*,\\ w^*=0 \quad \text{on} \quad \Sigma.\end{cases}$$

利用具有 Robin 边界条件的二阶椭圆方程的适定性，我们得到

$$\|w^*\|_{H^{3/2}(\Omega^*)}\lesssim \|v\|_{L^2(\Gamma^*)}=\|(\Lambda+\mathcal{A})(M(dr))\|_{L^2(\Gamma^*)}.$$

综合以上两个结果，我们得到

$$\|(\mathcal{A}+\Lambda)(M(dr))\|_{L^2(\Gamma^*)}\gtrsim \|dr\|_{H^1(\Gamma^*)}.$$

因此，我们有

$$d^2J(\Omega^*)[dr,dr]\gtrsim \|dr\|^2_{H^1(\Gamma^*)},$$

证明至此完成。 □

注记 3.20 ([15]). 如果区域 $\{x=\rho\widehat{x}\in\mathbb{R}^n:\ \widehat{x}\in\mathbb{S}^{n-1},0\leqslant\rho\leqslant r^*(\widehat{x})\}$ 是凸的，g 是正的常数函数且 $f\equiv 0$，则

$$d^2J(\Omega^*)[dr,dr]\gtrsim \|dr\|^2_{H^1(\Gamma^*)}.$$

因此，J 是一个适定的目标泛函，用于跟踪自由边界上的狄利克雷数据。

4. Motivations and discussions

本节将详细说明提出目标泛函 $\frac{1}{2}\int_\Gamma\left(\frac{\partial w}{\partial}\mathbf{n}\right)^2 d\sigma$ 的动机。

如 [16], 所示，在 $L^2(\Gamma)$中跟踪狄利克雷数据是不适定的。直观地说，这是因为狄利克雷数据的$L^2(\Gamma)$正则性太弱。由于数据 f，g，h 以及区域 Ω 足够光滑，我们可以预期解 u 具有更高的正则性，从而狄利克雷数据也具有更高的正则性。

受这一观察的启发，我们的出发点是在自由边界上使用更强的范数来追踪狄利克雷数据。我们的首选是将目标泛函 $J_2(\Omega)=\frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Gamma)}$ 增强为 $\widetilde{J}(\Omega)=\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}$ 以追踪狄利克雷数据。鉴于二阶椭圆方程的标准变分解，我们指出，$\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ 是狄利克雷数据的正确能量空间。存在若干不同的

范数$\|\cdot\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$的等价定义中，这里我们选择使用 Dirichlet-to-Neumann映射的定义，以便于进行形状微积分。令

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ u = h \quad \text{on} \quad \Sigma \end{cases} \qquad \text{and} \qquad \begin{cases} -\Delta w = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ w = u \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ w = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma. \end{cases}$$

不难证明（参见 [20]）。

$$\|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \approx \langle u, \mathcal{D}u\rangle_{H^{1/2}(\Gamma),H^{-1/2}(\Gamma)} = \langle u, \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\rangle_{H^{1/2}(\Gamma),H^{-1/2}(\Gamma)}, \tag{4.1}$$

其中，$\mathcal{D}: H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ 是标准的 Dirichlet-to-Neumann映射，满足 $\mathcal{D}u := \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$。因此，我们可以直接设定 $\widetilde{J}(\Omega) = \frac{1}{2}\langle u, \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\rangle_{H^{1/2}(\Gamma)\ H^{-1/2}(\Gamma)}$。

我们可以如下得到 $J(\Omega)$ 的欧拉导数：

$$d\widetilde{J}(\Omega)[V] = \frac{1}{2}\int_\Gamma v_n \left\{ -\nabla w \cdot \nabla w - 2g\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} + 2w\left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right] \right\} d\sigma. \tag{4.2}$$

最优点 Ω^* 处的形状海森矩阵表示为：

$$d^2\widetilde{J}(\Omega^*)[dr_1, dr_2] = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dr_1 r^{*(n-1)} \left\{ dw[dr_2]\left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right] - g\frac{\partial dw[dr_2]}{\partial \mathbf{n}} \right\} d\widehat{\sigma}. \tag{4.3}$$

与上述章节类似，我们已经证明了

$$d^2\widetilde{J}(\Omega^*)[dr_1, dr_2] = \langle \Upsilon((\mathcal{A}+\Lambda)(M(dr_1))), (\mathcal{A}+\Lambda)(M(dr_2)))\rangle_{L^2(\Gamma^*)} \quad \forall dr_1, dr_2 \in X \tag{4.4}$$

且形状海森矩阵是在 Ω^* 的邻域 $B^X_\delta(r^*)$ 中定义于 $H^1(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$ 上的双线性连续泛函，其中 $\Upsilon, \mathcal{A}, M$和 Λ 的定义与上一节相同。然而，我们只证明了

$$d^2\widetilde{J}(\Omega^*)[dr, dr] \geq c_E \|dr\|^2_{H^{1/2}(\Gamma^*)} \quad \forall dr \in X,$$

因此，我们无法确定 J 是否适定。

回顾一下，在 $L^2(\Gamma)$ 中跟踪诺伊曼数据是适定的（参见 [15]），而对于诺伊曼数据，能够为二阶椭圆方程提供标准变分解的能量空间是 $H^{-1/2}(\Gamma)$。设 u 为问题 (1.2) 的解。如果我们能够证明形状泛函 $\breve{J}(\Omega) = \frac{1}{2}\|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + g\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ 也不适定，那么我们就可以说，在能量空间中跟踪边界条件不足以保证适定性。为验证这一猜想，我们研究目标泛函 $\breve{J}(\Omega)$ 的适定性。由于通过对偶性给出的范数$\|\cdot\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ 的标准定义不便于进行形状微积分，我们采用一种通过 Neumann-to-Dirichlet映射给出的等价定义。设 u 为问题 (1.2) 的解，并令 $z \in H^1(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta z = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + g \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ z = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \end{cases}$$

不难证明（参见 [2]）

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + g \right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \approx \left\langle \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + g, \mathcal{N}(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + g) \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)} = \langle \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + g, z\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)}, \tag{4.5}$$

其中 $\mathcal{N}: H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$ 是标准的 Neumann-to-Dirichlet映射，使得 $\mathcal{N}(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + g) := z|_\Gamma$。因此，我们可以直接设定 $\breve{J}(\Omega) = \frac{1}{2}\langle z, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + g\rangle_{H^{1/2}(\Gamma)\ H^{-1/2}(\Gamma)}$。

我们可以得到.....的欧拉导数。 $\breve{J}(\Omega)$ 如下：

$$d\breve{J}(\Omega)[V] = \int_\Gamma v_n \left\{ -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} + z\mathcal{H}\frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} + z\left[\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2} \right] - \frac{1}{2}\nabla_\Gamma z \cdot \nabla_\Gamma z \right\} d\sigma. \tag{4.6}$$

最优点 Ω 处的形状海森矩阵为:

$$d^2\breve{J}(\Omega^*)[dr_1,dr_2]=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}dr_1r^{*(n-1)}\left\{dz[dr_2]\left[f-\mathcal{H}g-\frac{\partial g}{\partial\mathbf{n}}\right]-g\frac{\partial dz[dr_2]}{\partial\mathbf{n}}\right\}d\widehat{\sigma}. \tag{4.7}$$

此外,

$$d^2\breve{J}(\Omega^*)[dr_1,dr_2]=\langle\Upsilon((\mathcal{A}+\Lambda)(M(dr_1))),(\mathcal{A}+\Lambda)(M(dr_2))\rangle_{L^2(\Gamma^*)}\quad\forall dr_1,dr_2\in X.$$

情况 i $\breve{}$与 J完全相同，因此我们无法确定 J 是否适定 .

结合上述关于在能量空间中追踪狄利克雷或诺伊曼数据的结果可知，能量空间不足以保证适定性。这一观察也解释了为什么问题（1.7）–（1.8）不适定。然而，在 L^2(Γ)中追踪诺伊曼数据的适定性促使我们采用一个比 $H^{1/2}$(Γ)更强的范数，这启发我们选择第二个目标泛函 $\widehat{J}(\Omega)=\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1(\Gamma)}$。也就是说，我们考虑以下形状优化问题。

$$\inf_{\Omega}\widehat{J}(\Omega)=\frac{1}{2}\int_\Gamma u^2+\nabla_\Gamma u\cdot\nabla_\Gamma u d\sigma, \tag{4.8}$$

受制于诺伊曼问题（1.4）。 [14] 也提出了选择这一目标泛函，但尚无相关分析。然而，处理形状海森矩阵时我们遇到了很大困难，因为我们需要计算边界上 $\Delta_\Gamma u$的形状导数。此外，将形状海森矩阵改写为算子形式也存在困难。不过，通过观察 $\frac{1}{2}\int_\Gamma u^2d\sigma$和$\frac{1}{2}\langle u,\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\rangle_{H^{1/2}(\Gamma)\ H^{-1/2}(\Gamma)}$的代数结构，我们选择$\frac{1}{2}\int_\Gamma\left(\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\right)^2d\sigma$，并预期它是与$\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1(\Gamma)}$等价的范数。 事实上，我们可以在下面的引理中证明这一等价性。

引理 4.1. 设(u,w) 是 *(1.10)* 的解。两者等价。

$$\|u\|^2_{H^1(\Gamma)}\approx\int_\Gamma\left(\frac{\partial w}{\partial\boldsymbol{n}}\right)^2d\sigma.$$

证明。 一方面，回顾迹定理以及具有狄利克雷边界条件的二阶椭圆方程的适定性，我们有

$$\int_\Gamma\left(\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\right)^2d\sigma=\left\|\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\right\|^2_{L^2(\Gamma)}\lesssim\|w\|^2_{H^{3/2}(\Omega)}\lesssim\|u\|^2_{H^1(\Gamma)}. \tag{4.9}$$

另一方面，令 $\widehat{g}:=\frac{\partial w}{\partial n}$ 在 Γ上，则

$$\begin{cases}-\Delta w=0 & \text{in}\quad\Omega,\\ \frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}=\widehat{g} & \text{on}\quad\Gamma,\\ w=0 & \text{on}\quad\Sigma.\end{cases}$$

因此，根据迹定理以及具有诺伊曼边界条件的二阶椭圆方程的适定性，我们有

$$\|u\|_{H^1(\Gamma)}=\|w\|_{H^1(\Gamma)}\lesssim\|w\|_{H^{3/2}(\Omega)}\lesssim\|\widehat{g}\|_{L^2(\Gamma)}=\left\|\frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}\right\|_{L^2(\Gamma)}.$$

综合上述两个结果，我们得出结论。 □

现在，我们在表1中总结了关于伯努利自由边界问题中不同边界条件跟踪问题的已知结果。我们可以看到，通过选择适当的目标泛函，狄利克雷数据和诺伊曼数据的跟踪问题都是适定的。

5. Numerical experiments

本节中，我们采用非线性 Ritz-Galerkin 近似方法（参见 [15]）求解形状优化问题 (1.9)-(1.10)。

TABLE 1. 不同目标泛函的适定性。

目标	连续性空间	强制性空间	跟踪数据类型	适定性
J_1 ([15])	$H^1(\Gamma)$	$H^1(\Gamma)$	诺伊曼	适定
J_2 ([16])	$H^1(\Gamma)$	$L^2(\Gamma)$	狄利克雷	代数不适定
J_3 ([17])	$H^{1/2}(\Gamma)$	$H^{1/2}(\Gamma)$	诺伊曼	适定
J_4 ([13])	$H^1(\Gamma)$	$H^{1/2}(\Gamma)$	诺伊曼+狄利克雷	代数不适定
$\check{J}$ (本文)	$H^1(\Gamma)$	$H^{1/2}(\Gamma)$	诺伊曼	代数不适定
$\widetilde{J}$ (本文)	$H^1(\Gamma)$	$H^{1/2}(\Gamma)$	狄利克雷	代数不适定
J （本文）	H^1（Γ）	H^1（Γ）	狄利克雷	适定

5.1. 非线性 Ritz-Galerkin 近似方法。 为简便起见，我们假设区域 Ω 是星形区域。根据前文的记号，其自由边界参数化为

$$\Gamma = \left\{ x = dr(\widehat{x})\widehat{x} : \quad \widehat{x} \in \mathbb{S}^{n-1} \right\},$$

其中 $dr \in X$。因此，我们可以将形状优化问题 (1.9)-(1.10) 转化为

$$\inf_{r \in X} J(r).$$

所谓的 Ritz-Galerkin 方法是选取一个有限维子空间 $V_N \subset X$ ，并求解以下有限维优化问题:

$$(\mathbf{P}_N) \qquad \inf_{r_N \in V_N} J(r_N).$$

在此，空间 V_N 的维数随 N 线性变化。如下文所示，我们选取的空间 V_N 的维数为 $2N+1$。

由于全局优化问题难以处理，且目标泛函 J 的适定性也是局部的，因此我们考虑以下局部优化问题:

$$(\mathbf{P}^{\delta}) \quad \inf_{r} J(r), \quad r \in \overline{B_{\delta}^{X}(r^*)},$$

其中， r^* 是 Ω^* 的自由边界的参数化表示。相应地，该局部问题的 Ritz-Galerkin 离散化为

$$(\mathbf{P}_N^{\delta}) \quad \inf_{r} J(r), \quad r \in V_N \cap \overline{B_{\delta}^{X}(r^*)}. \tag{5.1}$$

设 V 为由 dr 诱导的速度场， t 为变换步长，我们可以定义自由边界从

$$\Gamma = \left\{ r(\widehat{x})\widehat{x} : \quad \widehat{x} \in \mathbb{S}^{n-1} \right\}$$

to

$$\Gamma_t = \left\{ r(\widehat{x})\widehat{x} + t dr(\widehat{x})\widehat{x} : \quad \widehat{x} \in \mathbb{S}^{n-1} \right\}.$$

为简单起见，我们只 考虑情形 $n = 2$， 三维情形见 [21, 15]。则
自由边界可以 等价地参数化为

$$\Gamma = \left\{ r(\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} : \quad \theta \in [0, 2\pi] \right\}, \quad \Gamma_t = \left\{ r(\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} + t dr(\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} : \quad \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

由于 $r(\theta)$ 是一个周期函数，它具有傅里叶级数展开，我们取前 N 项进行截断。也就是说

$$r(\theta) \approx a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i \cos(i\theta) + \sum_{i=1}^{N} b_i \sin(i\theta).$$

Let

$$V_N = \operatorname{span}\left\{ 1, \cos\theta, \cos(2\theta), \ldots, \cos(N\theta), \sin\theta, \sin(2\theta), \ldots, \sin(N\theta) \right\}.$$

那么， $J(\Omega)$ 完全由实向量（a_0， a_1，……， a_N， b_1，……， b_N）确定，该问题也就转化为实向量空间中的经典优化问题。

设 $J(\Omega) = F(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N)$，其中区域 Ω 由 $r_N(\theta) = a_0+\sum_{i=1}^N a_i\cos(i\theta)+\sum_{i=1}^N b_i \sin(i\theta)$ 确定。对于所有 $0 \le i \le N$:

$$\frac{\partial F(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N)}{\partial a_i} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(a_0, \ldots, t + a_i \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N) - F(a_0, \ldots, a_i \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N)}{t},$$

与 $(a_0, \ldots, t + a_i, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N)$ 对应的边界函数为 $r_N(\theta) + t\cos(i\theta)$。因此，诱导速度场的函数为 $dr(\theta) =\cos(i\theta)$，而速度场在边界上的值为 $V(0, r_N(\widehat{x})\widehat{x}) = dr(\widehat{x})\widehat{x}$。此外，

$$\frac{\partial F(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N)}{\partial a_i} = dJ(\Omega)[V]. \tag{5.2}$$

类似地，

$$\frac{\partial F(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N)}{\partial b_i} = dJ(\Omega)[V], \tag{5.3}$$

其中 $V(0, r(\widehat{x})\widehat{x}) = dr(\widehat{x})\widehat{x}$, $dr(\theta) = \sin(i\theta)$。

由（3.6）可知，欧拉导数涉及自由边界的曲率，而曲率难以计算。因此，我们提出使用切向格林公式来避免计算曲率。事实上，

$$\begin{aligned}
dJ(\Omega)[V] &= \int_\Gamma v_n \left\{ -\frac{1}{2}p^2\mathcal{H} + p\left[f - \mathcal{H}g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\right] - (g+p)\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right\} d\sigma \\
&= \int_\Gamma v_n \left\{ p\left[f - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\right] - (g+p)\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right\} d\sigma - \int_\Gamma v_n \left(\frac{1}{2}p^2 + pg\right)\mathcal{H} d\sigma \\
&= \int_\Gamma v_n \left\{ p\left[f - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\right] - (g+p)\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right\} d\sigma - \int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma \left(\left(\frac{1}{2}p^2 + pg\right)V\right) d\sigma \\
&= \int_\Gamma v_n \left\{ p\left[f - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\right] - (g+p)\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right\} d\sigma \\
&\quad - \int_\Gamma \left\{ \mathrm{div}\left(\left(\frac{1}{2}p^2 + pg\right)V\right) - D\left(\left(\frac{1}{2}p^2 + pg\right)V\right)\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} \right\} d\sigma.
\end{aligned}$$

在恒等式 (5.2) 中，根据上述分析，我们知道，边界点 $x = (x_1, x_2)$ 处 $V(0, x)$ 的值为 $\cos(i\theta)$，其中 θ 是对应点 $\widehat{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$ 相对于 $x \in \Gamma$ 的极角。由于 x 和 $\widehat{x}$ 共线，θ 也是 x 的极角。(x_1, x_2) 的极角记为 $\theta(x_1, x_2)$，并且有

$$V(0, x) = \cos(i\theta(x_1, x_2))\begin{pmatrix}\cos\theta(x_1, x_2)\\ \sin\theta(x_1, x_2)\end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma.$$

根据欧拉导数的表达式，$dJ(\Omega)[V]$ 完全由 $V(0, x)$ 在 Γ 上的值确定。换言之，若 $U(x) = W(x)\ \forall x \in \Gamma$，则 $dJ(\Omega)[U] = dJ(\Omega)[W]$。如上所示，为避免计算曲率，我们需要知道 $V(0, x)$ 在 Γ 邻域内的值。令 $U(x) = V(0, x)$, $x \in \Gamma$，我们可以对 $V(0, x) = (v_1, v_2)$ 作如下调和延拓:

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ w_1 = v_1 \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ w = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma \end{cases} \qquad \text{and} \qquad \begin{cases} -\Delta w_2 = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ w_2 = v_2 \quad \text{on} \quad \Gamma, \\ w_2 = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma. \end{cases}$$

那么 $dJ(\Omega)[V] = dJ(\Omega)[W]$，其中 $W = (w_1, w_2)$。同时，W确保内边界 Σ在变换过程中保持固定。

我们将计算 F 偏导数的公式总结如下:

$$\frac{\partial F(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N)}{\partial a_i} = dJ(\Omega)[W], \quad i = 0, 1, \ldots, N,$$

其中，Ω 是由 $(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N)$ 确定的区域，而 W 是.....的调和延拓

$$V(x) = \begin{cases} \cos(i\theta(x_1, x_2))\binom{\cos\theta(x_1, x_2)}{\sin\theta(x_1, x_2)} & x = (x_1, x_2) \in \Gamma, \\ 0 \quad x = (x_1, x_2) \in \Sigma. \end{cases}$$

类似地,

$$\frac{\partial F(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N)}{\partial b_i} = dJ(\Omega)[W], \quad i = 1, \ldots, N,$$

其中，Ω 是由 $(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N)$ 确定的区域，且 W 是.....的调和延拓。

$$V(x) = \begin{cases} \sin(i\theta(x_1, x_2)) \binom{\cos\theta(x_1,x_2)}{\sin\theta(x_1,x_2)} & x = (x_1, x_2) \in \Gamma, \\ 0 \quad x = (x_1, x_2) \in \Sigma. \end{cases}$$

हम आंशकि अवकलजों की गणना में शामलि आंशकि अवकल समीकरणों को हल करने के लएि FreeFem++ ([23]) का उपयोग करते हैं। आं शकि अवकलजों की गणना के सूत्रों की सहायता से, हम नम्निलखिति अनुकूलन समस्या को हल करने के लएि ग्रेडएिंट डसिेंट एल्गोरदिम या BFGS एल्गोरदिम का उपयोग कर सकते हैं:

$$\inf_{(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N) \in \mathbb{R}^{2N+1}} F(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N).$$

令 $\mathbf{x} \triangleq (a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N)$，梯度下降算法如下所示 [27, 第 3 章，第 56-57] 页:

算法 梯度下降法 1. 初始化：选择一个初始点 $\mathbf{x}^0$, 、初始步长 $\alpha > 0$、步长下界 ε、最大迭代次数 M、$k = 0$、 β_1、 $\beta_2 \in (0, 1)$ 以及一个辅助变量 $z = 0$。 2. 过程： 3. 对 $k = 0 = 1, 2, \ldots, M$ 执行 4. $z = F(\mathbf{x}^k - \alpha \nabla F(\mathbf{x}^k))$。 5. 如果 $z < F(\mathbf{x}^k)$，则 6. $\alpha = \alpha / \beta_1$。 7. 结束 if 8. 当 $z \geq F(\mathbf{x}^k)$ 且 $\alpha \geq \varepsilon$ 时 9. $\alpha = \alpha * \beta_2$， 10. $z = F(\mathbf{x}^k - \alpha \nabla F(\mathbf{x}^k))$。 11. 结束 while 12. 如果 $\alpha < \varepsilon$ ，则 13. break； 14. 结束 if 15. $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha \nabla F(\mathbf{x}^k)$ 16. 结束 for 17. 输出：最新的 $\mathbf{x}^k$。

注释 5.1. 这里我们选择 $\alpha < \varepsilon$ 作为停止准则，原因有二。首先，当步长足够小时，优化变量仅发生微小变化，因此在形状优化过程中，形状几乎不会改变。另一方面，当我们选择相对较大的 N 时，梯度范数通常会非常大。在这种情况下，不宜将梯度范数用作停止准则。

我们指出，形状海森矩阵 $d^2 J(\Omega^*)[\cdot, \cdot]$ 的 $\|\cdot\|_{H^1(\Gamma^*)}$-范数强制性将确保非线性 Ritz-Galerkin 近似方法存在局部最优解并收敛，正如定理 2.8 所述。容易看出，当 V_N 趋近于 X 时，误差 $\|r_N^* - r^*\|_{H^1(\mathbb{S}^{n-1})} \to 0$ 。

5.2. **数值实验**。 非线性 Ritz-Galerkin 近似方法的误差来自两个方面：第一个来源是子空间 V_N 对 X的截断误差；第二个来源是在子空间中求解优化问题所产生的误差。对于前者，由于 $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_N \subset \cdots \subset X$，其取决于 N的选择；对于后者，在子空间中求解优化问题的误差主要来自欧拉导数的近似误差，而该误差又取决于 u、 w、 p 以及速度场 V的数值精度。由于我们采用有限元方法求解偏微分方程，后一误差取决于区域划分的网格尺寸。

我们从这两个角度开展数值实验，以评估数值解的质量。根据注记 3.20，我们选择 $f \equiv 0$、$g \equiv 3$、$h \equiv 1$。此外，我们将固定边界选为 $(-0.25,\ 0.25)^2 \setminus (0,\ 0.25)^2$，并将初始自由边界选为

$$\Gamma = \left\{ \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{12}\cos(3t) \right) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} : \quad t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

初始区域及其三角剖分示意见图 3。在实验中，我们选择参数 $\alpha = 0.005$、$\beta_1 = \frac{2}{3}$，$\beta_2 = \frac{1}{2}$、$\varepsilon = 10^{-4}$ 和 $M = 200$。

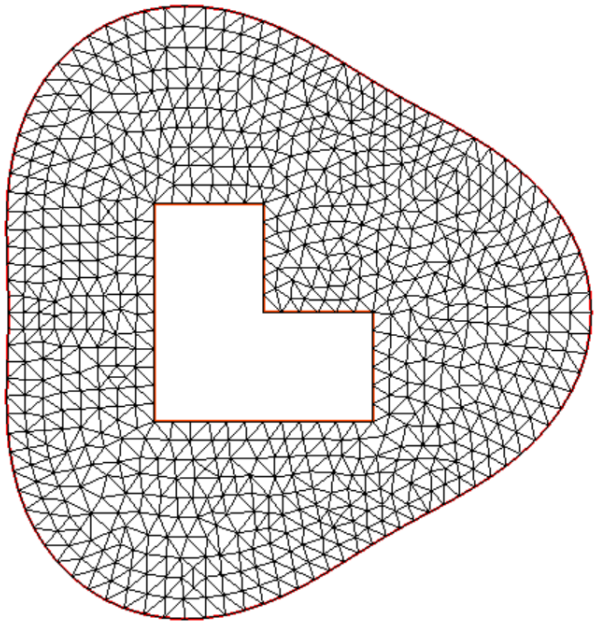

FIGURE 3. 实验 1 的初始区域及其三角剖分。

在第一组实验中，网格尺寸保持不变。我们始终将自由边界和固定边界上的网格点数分别控制为 100 和 48。我们逐步增加空间维数 N，以观察误差的变化。这里的误差是指目标泛函 J 的值，可以将其视为自由边界处跟踪狄利克雷数据的误差。实验结果见表 2，其中 NoI 表示迭代次数。不同 N下的误差收敛历史如图 4 所示，其中图 (a) 和图 (b) 使用了不同的纵轴；最终形状见图 5。

TABLE 2. 实验 1 中误差随维数的变化 N

N	维度	初始误差	NoI	最终误差
3	7	4.60377	15	0.035097700
4	9	4.60377	15	0.006114220
5	11	4.60377	15	0.001840740
6	13	4.60377	17	0.001218670
7	15	4.60377	28	0.001033880
8	17	4.60377	29	0.000846881
9	19	4.60377	36	0.000828824
10	21	4.60377	40	0.000854410
11	23	4.60377	50	0.000785928

从表 2 可以看出，在最初几步中，随着空间维数的增加，误差可以显著降低。当 $N \geq 8$ 时，误差基本稳定在 0.0008 左右。这是因为，除了子空间近似带来的固有误差外，u, w, p, V的有限元解也会产生误差。此外，由于我们使用多边形来近似光滑区域，还会出现几何近似误差。

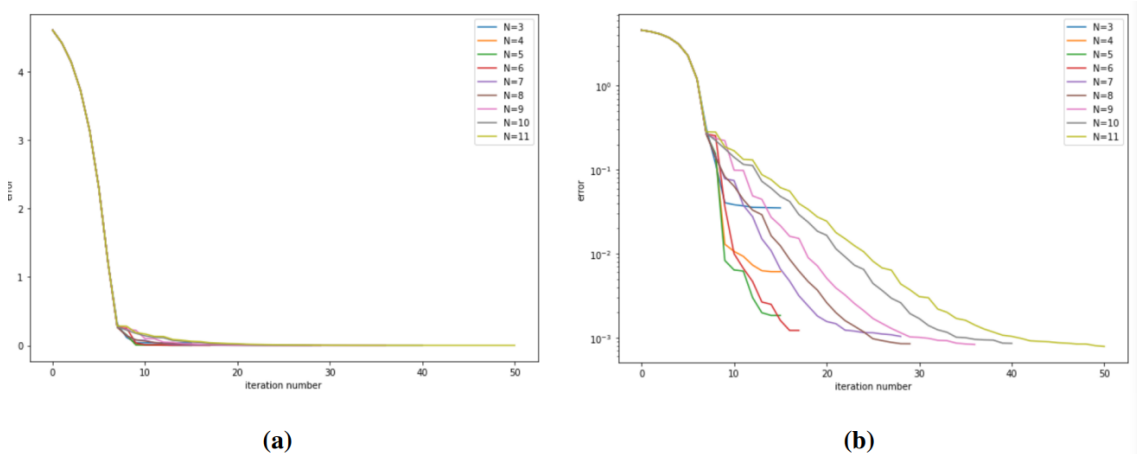

FIGURE 4. 实验 1 中误差随迭代次数和 V_N 的收敛历史。

在第二组实验中，我们通过使用比第一组实验中用于 $N = 8$ 的网格更粗和更细的网格，研究误差行为。固定边界和自由边界上的网格点数分别记为 cnt1 和 cnt2。实验结果见表 3。

TABLE 3. 实验 2 中误差随网格层级的变化。

cnt1	cnt2	初始误差	NoI	最终误差
24	50	4.51939	23	0.004479200
48	100	4.60377	29	0.000846881
96	200	4.63436	29	0.000702069
192	400	4.64579	33	0.000777745

根据表 3，减小网格尺寸总体上可以降低误差，但也可能增大有限元刚度矩阵的规模和计算成本，并降低计算精度，未必能够减少误差。例如，误差从 cnt1=96, cnt2=200 增加到了 cnt1=192, cnt2=400。另一个重要原因是，我们只能保证初始阶段的网格尺寸较小，但在形状优化过程中，网格尺寸可能会增大。

第三组实验独立于前两组实验。在此，构造了一个具有已知精确解 u 和区域 Ω^* 的超定方程，以验证算法的性能。可以验证，如果区域 Ω^* 的自由边界是一个中心为 (x_0, y_0) 的单位圆面，且其固定边界任意，那么它可确保该超定方程

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega^*, \\ -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = C, u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma^*, \\ u = -C \log \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad \text{on} \quad \Sigma \end{cases}$$

存在一个解，由 $u = -C \log \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ 给出。接下来，我们选择 $C = 1$、$x_0 = 0$、$y_0 = 0$ 来验证我们算法的有效性。

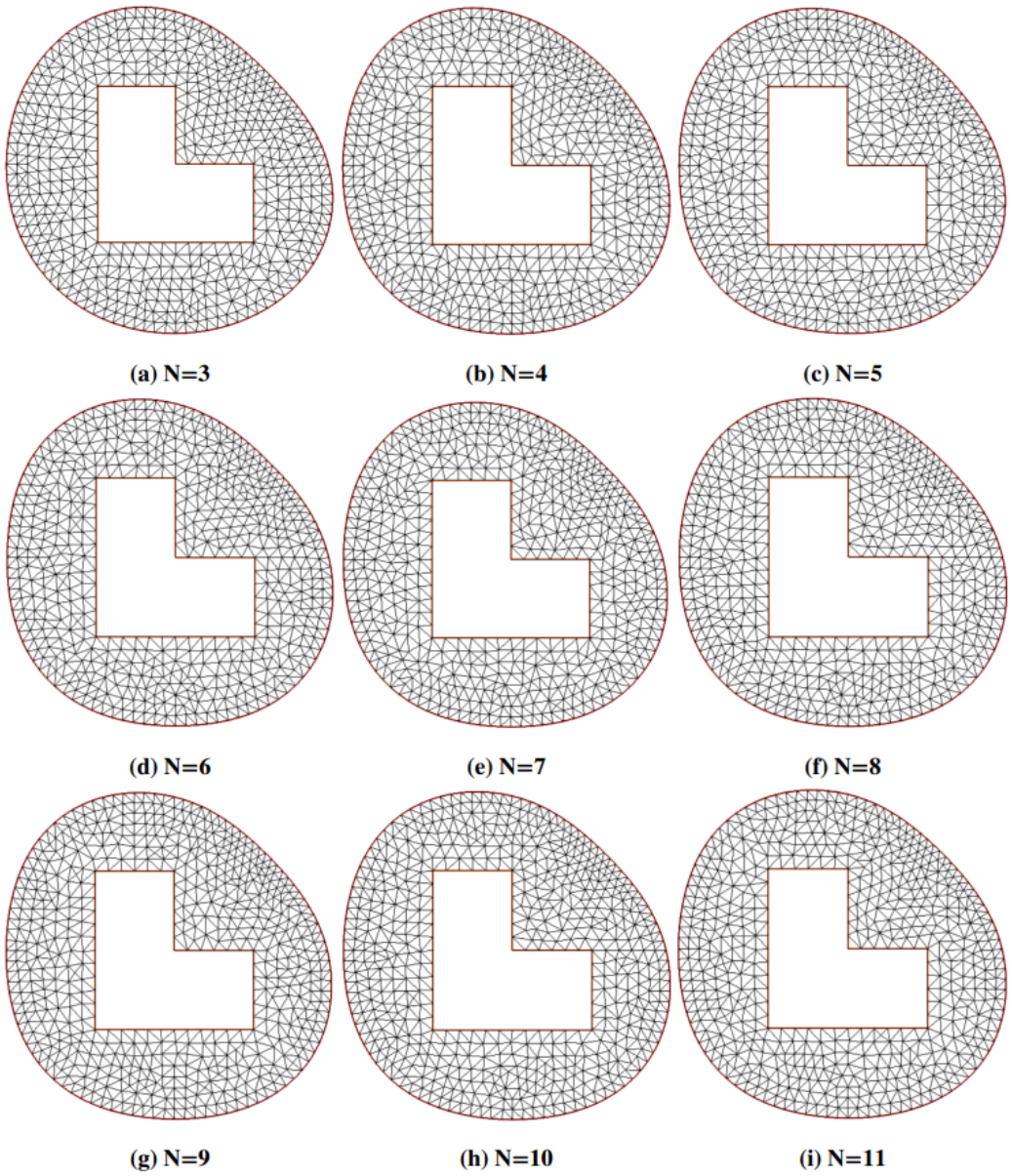

FIGURE 5. 对于实验 1，采用不同的 N 所获得的最终形状。

由于 Ω^* 的自由边界是以原点为中心的圆形曲面， $r^* \in V_1$。我们将通过改变网格尺寸来研究数值计算的影响。我们将初始自由边界选为

$$\Gamma = \left\{ \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{12}\sin(t) \right) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} : \quad t \in [0, 2\pi] \right\},$$

固定边界选为圆形 $\{x^2 + y^2 = 0.3^2\}$。固定边界上的网格点数记为 cnt1，自由边界上的网格点数记为 cnt2。实验结果见表4，而图6展示了 cnt1=160、cnt2=400 时的初始形状和最终形状。从表4可以看出，我们观察到的收敛性质与第二组实验中的类似。

TABLE 4. 实验 3 中误差随网格层级的变化。

cnt1	cnt2	初始误差	NoI	最终误差
20	50	4.16158	14	0.000518986
40	100	4.14181	15	0.000512769
80	200	4.13028	20	0.000486740
160	400	4.12340	27	0.000545819

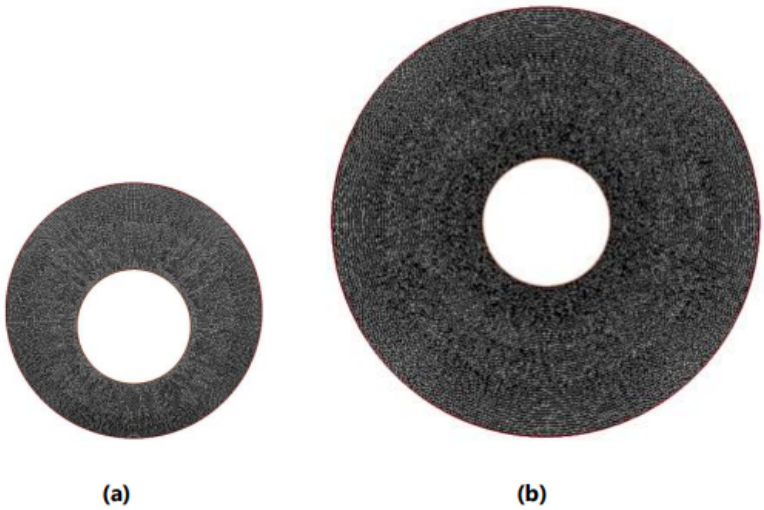

FIGURE 6. 实验 3 的初始形状和最终形状。

REFERENCES

[1] G. Allaire、C. Dapogny 和 F. Jouve，《形状与拓扑优化》，载于 *Geometric Partial Differential Equations*，Bonito A. 等编，Elsevier，阿姆斯特丹，1 132, 2021 3 11 – . . T. Apel、O. Steinbach 和 M. Winkler，具有能量正则化的诺伊曼边界[2]控制问题的误差估计。《数值数学杂志》，24 2016 4, 207 233 4 ( )，第 - 期。M.F. Bach 和 M. Flucher，《具有集中现象的变分问题》。Springer Science & Business[3] Media，1999 1 。A. Boulkhemair、A. Chakib、A. Nachaoui、A.A. Niftiyev 和 A. Sadik，关于一类自由边界问题的数值形状优化方法。《计算优化与应用》，77 2020 2, 509 537 1 ( )，第 – 期。E. Burman、D. Elfverson、P. Hansbo、M.G. Larson 和 K. Larsson，伯努利自由边界值问题的切割有限元方法。《计算方法与应用力学和工程》，317 2017 598 618 1 ( )，-。R. Brugger、R. Croce 和 H. Harbrecht，求解具有随机扩散的伯努利型自由边界问题。ESAIM 控制、优化与变分法，26 2020 56, 16 1 ( )，论文编号 pp. L.A Caffarelli 和 H.W. Alt，具有自由边界的极小化问题的存在性与正则性。《莱因应用数学杂志》，325 1981 105 144 1 ( )，-。M. Dambrine，关于形状海森矩阵的变分及临界形状稳定性的充分条件。RACSAM。《西班牙皇家科学院数学与自然科学评论》，A辑，( )，-。M. Dambrine 和 M. Pierre，关于平衡形状的稳定性。ESAIM：数学建模与数值分析，34(2000)，811-834。2.7[10] M.C. Delfour 和 J.P. Zol´esio，《形状与几何：度量、分析、微分计算与优化》。SIAM，宾夕法尼亚州费城，2011。2，2.2，2.2，3.2，3.5，3.2，3.11[11] K. Eppler，形状泛函的二阶导数及充分最优性条件。《控制与控制论》，29(2000)，第 2, 485 511 1 – 期。K. Eppler，基于边界积分方程方法的椭圆方程最优形状设计。《国际应用数学与计算机科学杂志》，10(2000)，487-516。2.7，3.3[13] K. Eppler 和 H. Harbrecht，关于自由边界问题的一种 Kohn-Vogelius 型表述。《计算优化与应用》，52 2012 69 85 1, 1, 2 7, 3 3, 1 ( )，-。K. Eppler 和 H. Harbrecht，自由边界问题的形状优化——分析与数值，载于 *mization and Optimal Control for Partial Differential Equations*，Leugering G. 等编，国际数值数学丛书，Birkh¨auser Basel，277-288，2012。1，2.2，4

[15] K. Eppler 和 H. Harbrecht, 《跟踪稳态自由边界问题的诺伊曼数据》。SIAM《控制与优化杂志》, 48 2010 2901 2916 1, 1, 2 2, 3 3, 3 3, 3 14, 3 15, 3 20, 4, 5, 1, 5 1 ( ), -。（文献），。。。。。。。K. Eppler 和 H. [16] Harbrecht, 《在 中跟踪狄利克雷数据是一个病态问题》。J. Optim. Theory Appl., 145(2010), 17 35 1, 1, 3 3, 3 3, 3 14, 3 15, 3 17, 4, 1 -。（文献），。。。。。。。K. Eppler 和 H. Harbrecht, 《稳态自由边界问题的高效处 [17] 理》。《应用数值数学》, 56(2006), 1326-1339。1, 1[18] K. Eppler、H. Harbrecht 和 R. Schneider, 《椭圆形状优化中的收敛性》。SIAM《控制与优化杂志》, 46(2007), 第 1, 61 83 1, 1, 2, 2 6, 2 7, 3 3 - 号。。。。。。I. Fumagalli、N. Parolini 和 M. Verani, 《斯托克斯流的 形状优化：有限元收敛分析》。《ESAIM数学建模与数值分析》, 49 2015 4, 921 951 1 ( ), 第 号，第 - [19] 页。W. Gong 、 M. Mateos 、 John R. Singler 和 Y. Zhang, 《能量空间中斯托克斯流狄利克雷边界控制的分析与近似》。SIAM 《数值分析杂志》, 60 2022 1, 450 474 4 ( ), 第 号，-。H. Harbrecht, 《三维伯努利自由边界问题的 [20] 牛顿法》。《计算》, 82(2008), 11-30。5.1[21] J. Haslinger、K. Ito、T. Kozubek、K. Kunisch 和 G. Peichl, 《伯努利型问题的形状导数》。《界面与自由边界》, 11 2009 2, 317 330 1 ( ), 第 号，–。F. Hecht, 《FreeFem 的新发展》。《数值数学杂 [22] 志》, ++ 20 2012 3 4, 251 265 5 1 ( ), 第 号，- –。B. Kiniger 和 B. [23] Vexler, 《形状优化问题有限元离散的先验误差估计》。《ESAIM数学建模与数值分析》, 47 2013 1733 1763 1 ( ), 第 - 页。R. Kohn 和 M. Vogelius, 《通过边界测量确定电导率》。《纯粹与应用 [24] 数学通讯》, 37(1984), 289-298。1[25] J.F.T. Rabago 和 H. Azegami, 《使用新的边界代价泛函求解外部伯努利自由边界问题的二阶形状优化算法》。《计算优化与应用》, 77 2020 1, 251 305 1 ( ), 第 号，–。 [26] 1985 5 1 LE. Scales, 《非线性优化导论》。麦克米伦，。。[27] ´ J. Sokolowski 和 J.P. Zolesio, 《形状优化导论》。施普林格出版社，柏林，1992。2，2.1，2.1，3.2，3.4，3.6 [28]