arXiv:2305.03072v1 [cond-mat.str-el] 4 May 2023

G_2 通过各向同性自旋 3 链刻画可积点

Chengshu Li, [1], * Victor L. Quito, [2,3], † Dirk Schuricht, [4], ‡ 以及 Pedro L. S. Lopes[5], §[1]清华大学高等研究院，中国北京 *100084*[2]爱荷华州立大学物理与天文学系，美国艾姆斯，爱荷华州 *50011*[3]艾姆斯国家实验室，美国艾姆斯，爱荷华州 *50011*[4]乌得勒支大学理论物理研究所、极端物质与涌现现象中心，荷兰乌得勒支普林斯顿广场 *5* 号，邮编 *3584 CE*[5] *QuEra Computing Inc.*，美国马萨诸塞州波士顿士兵原野路 *1284* 号，邮编 *MA 02135*(日期：2023年5月8日)

我们研究具有基本表示局域自由度的 G_2 对称可积链的物理性质。鉴于可积性与临界点之间通常存在联系，我们依据共形不变的长距离行为这一假设检验模型的性质。借助 G_2 例外李代数与 $SU(2)$ 对称、具有局域自旋 3 表示的链之间的嵌入关系，我们针对特定自旋扇区进行精确对角化（ED）数值分析，并采用非阿贝尔密度矩阵重整化群（DMRG）。对动量分辨的精确对角化谱的初步研究表明，低能系统可由一个 $(G_2)_1$ Wess–Zumino–Witten（WZW）理论有效描述，但我们发现进一步数值刻画共形数据颇具挑战。对该模型现象学的研究与调控，或将有助于开发可实现的斐波那契任意子模型。

I. 引言

例外李代数为凝聚态物质系统带来了奇异而丰富的涌现现象学。该领域最早的一些研究包括 Zamolodchikov 发现伊辛模型在纵向场和横向场作用下的 E_8 涌现行为 [1]，随后分别在约二十年前和十年前于钴铌酸盐中得到实验验证 [2]，。近年来，人们的兴趣从 E_8 扩展到其他例外代数，例如 G_2 和 F_4，这是因为它们可能对拓扑相，尤其是拓扑量子计算产生影响 [3, 4]。

与 G_2 群相关的拓扑相尤其支持低能局域激发，其行为与斐波那契任意子相符；斐波那契任意子是能够实现通用拓扑量子计算的最简单任意子 [5]。尽管人们对此兴趣浓厚，但由于群结构本身的复杂性，实现 G_2 对称系统的方案仍然有限，而且这些方案往往过于牵强，难以进行数值或解析计算，也难以实现实验实现。

本文旨在从基于标准磁性结构的模型实现出发，探索 G_2 物理。我们研究一维自旋链，并沿用我们部分作者近期的成果 [6]，，在一个由自旋 3 表示局域磁矩构成的 $SU(2)$ 对称磁性模型中嵌入一个具有 G_2 对称性的相空间。这一思路不仅使模型更贴近实验相关性，也使其适合通过采用 $SU(2)$ 对称性的非阿贝尔密度矩阵重整化群（DMRG）方法进行高效数值分析。

在 G_2- 对称相空间的各种特征中，我们重点关注一个著名的可积 点 [7–9]的特征。孤立可积模型与临界点之间的典型关联表明，这个点可能由具有 G_2-对称性的共形场论（CFT）描述。最简单的此类理论是 Wess–Zumino–Witten（WZW）$(G_2)_1$ 共形场论，其唯一的主场满足与斐波那契任意子相同的融合规则。若能确认这一可积模型由 $(G_2)_1$ WZW 共形场论描述，也将为存在具有涌现 G_2 对称性的临界相带来可能性，这类似于 Uimin–Lai–Sutherland $SU(3)$-对称自旋-1 $SU(2)$链的相 [10–13]。这类系统将是理想候选，可从一个具有 $SU(2)$不变性的系统出发，通过耦合线构造 [14–16] 实现含斐波那契任意子的二维拓扑相。

原则上，可积 G_2 链已在20世纪80年代 [7–9]得到刻画。这些经典文献表明，该模型的低能物理确实由一个 $(G_2)_1$ WZW 共形场论描述。然而，近期结果表明，尽管该模型无能隙，但它并不是共形场论，而是具有两个低能激发扇区，且自旋波速度不同 [17]。 G_2 并非由单边代数生成这一事实，以一种非平凡的方式影响了解析解的分析。因此，本文主体通过数值方法分析了这一可积 G_2 模型由一个 $(G_2)_1$WZW 共形场论描述的假设。通过精确对角化，我们证明了该系统小型实现的低能谱确实显示出预期的 $(G_2)_1$WZW 共形场论的组织结构和简并度。然而，利用非阿贝尔密度矩阵重整化群对共形数据进行的进一步刻画，却引出了令人困惑的结果。

* lichengshu272@gmail.com
† vquito@iastate.edu
‡ d.schuricht@uu.nl§
plopes@quera.com

相互矛盾的结果。我们通过能谱分析和纠缠熵有限尺寸标度等标准技术，以及一种利用循环轨形和波函数重叠的近期新方法，估算中心荷和初级场共形维数 [18]，但发现数值并不吻合。我们提出了造成这些不一致的原因，包括边缘微扰和系统尺寸较小所产生的强烈影响，以及该问题实际上并非由共形场论描述的可能性。

本文结构安排如下。第II节介绍将 G_2 链嵌入自旋-3 $SU(2)$ 对称链的方法，对 G_2 链相空间的已知情况进行全景分析，并通过精确对角化考察可积点的有限尺寸谱。本文论证了可能存在$(G_2)_1$ 行为。第III 节包含本文数值表征的主要内容，包括能谱有限尺寸标度、纠缠熵和波函数重叠的结果。我们在第IV节总结全文。附录以教学性的方式介绍将 $SU(2)$链与 G_2 链相映射时所采用的约定，并运用共形场论研究$(G_2)_1$，及其循环轨形。最后，我们在参考附录中将数值分析重新应用于自旋-1链的 Takhtajan–Babujian可积点，其连续描述可用 $SU(2)_2$ WZW 共形场论来表示，这一点已得到充分确立。在此情形下，我们得到了预期的共形数据结果，证明了数值计算的可靠性。

II. G_2不变性与自旋-3各向同性链

出于我们的目的，我们将一般的 $SU(2)$ 不变自旋-3链写成以下两种形式之一，

$$H=\sum_{i=1}^{N}\sum_{n=0}^{6}\alpha_n\left(\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_{i+1}\right)^n \tag{1}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{S=0}^{6}K_S P_S\left(\mathbf{S}_i,\mathbf{S}_{i+1}\right), \tag{2}$$

其中，$\mathbf{S}_i=(S_i^a)$、$a=x$、y、z 是作用于晶格点 i 的自旋-3算符；α_n 和 K_S 是常数；$P_S(\mathbf{S}_i,\mathbf{S}_{i+1})$ 是作用于两个局域 $\mathbf{S}_i$ 和 $\mathbf{S}_{i+1}$ 自旋之和的多重态 S 上的标准 $SU(2)$ 投影算符；整体采用周期性边界条件。式 (1) 展示了以 $SU(2)$ 不变量双线性项及其幂表示的熟悉形式，而式 (2) 则更便于分析参数空间的对称性结构。

该参数空间支持如下的 G_2 嵌入 [6]：令所有 $K_S=K$，哈密顿量便经过精细调谐，达到具有 $SU(7)$ 对称性的点。放宽约束，使得 $K_1=K_3=K_5$，同时 $K_2=K_4=K_6$，即可将投影算符组合成一个 $SO(7)$ 对称系统。由于 $SO(7)\supset G_2$，对称性还可以进一步降低。两个基本不可约表示（irrep）的克莱布施–戈丹级数为 G_2 如下

$$\mathbf{7}\otimes\mathbf{7}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{7}\oplus\mathbf{14}\oplus\mathbf{27}. \tag{3}$$

这里我们用维数表示不可约表示，例如，$\mathbf{7}$ 是最小的非平凡不可约表示。若要从我们的自旋-3各向同性哈密顿量中实现这些简并，只需进一步放宽约束，不要求 K_3 必然等于 $K_1=K_5$；也就是说，约束为 $K_1=K_5$ 和 $K_2=K_4=K_6$。

因此，如果$\mathcal{P}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 是不可约表示空间 $\boldsymbol{\lambda}$上的 G_2 投影算符，我们便有如下对应关系。

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathbf{1}}&=P_{S=0},\\ \mathcal{P}_{\mathbf{7}}&=P_{S=3},\\ \mathcal{P}_{\mathbf{14}}&=P_{S=1}+P_{S=5},\\ \mathcal{P}_{\mathbf{27}}&=P_{S=2}+P_{S=4}+P_{S=6},\end{aligned} \tag{4}$$

从而得到一般的 G_2-对称哈密顿量

$$H_{G_2}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{\boldsymbol{\lambda}=\{\mathbf{1},\mathbf{7},\mathbf{14},\mathbf{27}\}}F_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{P}_{\boldsymbol{\lambda}}\left(\boldsymbol{\Lambda}_i,\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}\right) \tag{5}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{n=0}^{3}\beta_n\left(\boldsymbol{\Lambda}_i\cdot\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}\right)^n. \tag{6}$$

此处 $\boldsymbol{\Lambda}_i=(\Lambda_i^a)$，$a=1,\ldots\ldots,14$，是作用于 G_2 号晶格点的生成元 i，而 $\boldsymbol{\Lambda}_i\cdot\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}=\sum_a\Lambda_i^a\Lambda_{i+1}^a$。$F_{\boldsymbol{\lambda}}$ 和β_n 控制可能的哈密顿量的参数空间；一些具体的转换方式见附录A。我们选择 G_2 的生成元，使其满足归一化条件 $\mathrm{Tr}\left((\Lambda^a)^{\dagger}\Lambda^b\right)=2\delta_{ab}$。

这种嵌入具有双重优势：首先，它使这一类 G_2 哈密顿量在物理上更具吸引力，并且可以在更为传统的磁性体系中实现，尽管这需要较高自旋——自旋为 3。其次，这种嵌入能够利用成熟的 $SU(2)$ 对称性相关方法，实现高效的数值分析。

从现在起，我们只采用 G_2 语言，因为它成为了这个问题中最自然的语言。哈密顿量（6）的相空间是三维的，因为 β_0 只是重新定义了基态能量。通过地图投影，可以将参数空间描述在一个二维平面上。图1(a) 展示了采用莫尔威德投影表示的相空间[1]。颜色表示一个双站点问题的基态。空间主要由蓝色单态区域占据，其次是红色“铁磁”区域（意即最大不可约表示具有最低能量）。穿过参数空间的黑线对应于

[1] 从$\{\beta_i\}$ 到映射坐标 (x,y) 的标准变换为 $x=(2\sqrt{2}/\pi)\lambda\cos\theta$，$y=\sqrt{2}\sin\theta$，其中 λ和 θ由 $\bar{\beta}_1=\beta\cos\phi\cos\lambda$，$\bar{\beta}_2=\beta\cos\phi\sin\lambda$，$\beta_3=\beta\sin\phi$，$\beta=\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}$，$2\theta+\sin 2\theta=\pi\sin\phi$定义。

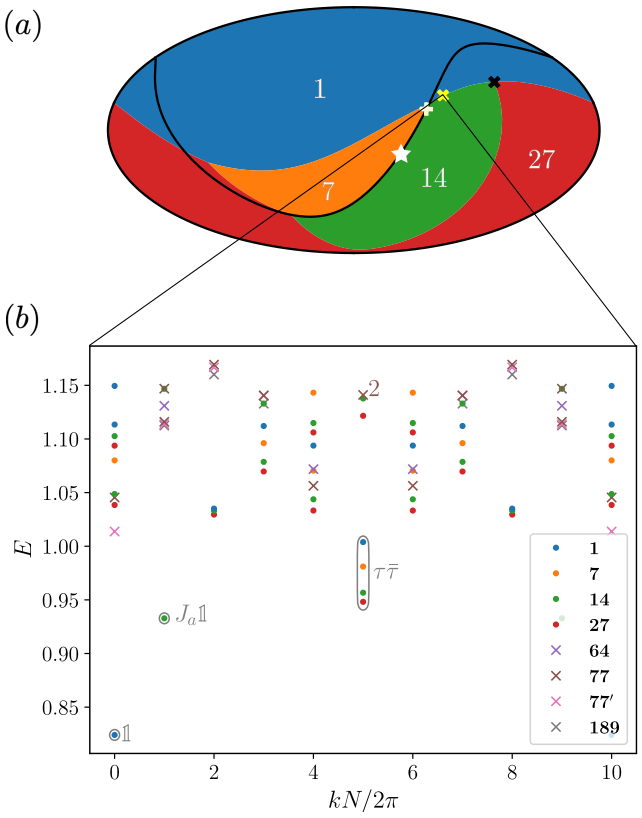

图 1. (a) G_2对称链在莫尔威德投影下的相空间。数字表示二格点问题的基态表示。黑色曲线表示 $SO(7)$对称哈密顿量的子空间，白色星号和叉号分别标记 Reshetikhin $SO(7)_1$ 和广义 ULS $SU(7)_1$ 临界点——二者均可积。黑色叉号标记参考文献 G_2中找到的 [6], 对称哈密顿量，黄色叉号则表示本文关注的 G_2对称可积点。(b) 对具有 G_2 个晶格点的可积 $N = 10$ 点的动量分辨精确对角化能谱。不可约表示用颜色标示（最低能级用圆点表示，较高能级用叉号表示）。多重态集合及其对应的假设性 $(G_2)_1$ 初级场对应关系以灰色标记。

$SO(7)$ 对称哈密顿量所在的线；沿此线的一般多体物理性质已广为人知，其中包括铁磁相、 $SU(7)$ 对称的涌现相、有能隙的类海森堡相以及二聚化相 [19]。相图中标出了具有共形对称性的已知临界点，包括 Reshetikhin $SO(7)_1$ 点（★） [20, 21], 以及广义 ULS $SU(7)_1$ 点（+） [10–12, 19]。通过研究可能具有涌现对称性的相，我们中的一些人此前探索了相空间中的一个点，以黑色叉号（×） [6]标示。

本文的分析重点对应于参数空间中由黄色十字标记的点，如图1(a) 所示。该点对应一个可积模型 [7–9]我们在附录B中重新推导了该模型，

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2} \mathbf{\Lambda}_i \cdot \mathbf{\Lambda}_{i+1} + \frac{5}{8} \left(\mathbf{\Lambda}_i \cdot \mathbf{\Lambda}_{i+1} \right)^2 + \frac{75}{592} \left(\mathbf{\Lambda}_i \cdot \mathbf{\Lambda}_{i+1} \right)^3 \right], \tag{7}$$

我们将其写成 G_2不变量双线性项的幂次形式。值得注意的是，即使只是稍微改变 (7) 式中的前因子$1/2$， $5/8$ 或 $75/592$ ，也会立即破坏模型的可积性。

我们也可以用更常见的自旋 3 语言重写模型 (7)。此时，以式 (1) 的哈密顿量表示，耦合为 α_0 =1122/925, α_1 = 303/1850, α_2 = −3787/33300, α_3 =−712/24975, α_4 = −1/29970, α_5 = 49/149850, α_6 =1/59940；以式 (2) 的投影算符表示，则为K_0 = −4/37, K_1 = K_5 = 0, K_2 = K_4 = K_6 =24/37, K_3 = 18/37。对于 F [式 (5)], , 只需使用如下恒等关系：一般而言， $F_1 = K_0$, $F_7 = K_3$, $F_{14} = K_1$和 $F_{27} = K_2$。同样，关于如何转换耦合的完整对照表见附录 A。

刻画该模型的物理特性十分重要：除了如引言中所提及的其在费波纳契任意子系统建模或生成方面的相关性之外，孤立的可积哈密顿量也是自然的临界点候选对象。微观哈密顿量 Eq. (7) 所具有的大型连续对称性表明，如果该模型确实对应一个临界点并表现出共形不变性，那么此处的临界物理很可能由$(G_2)_k$ 类 WZW理论所控制。如果 $k = 1$，那么只允许存在一个非平凡的主场，这将极大地限制该临界点上允许的微扰。这表明参数空间中可能存在一个更大的区域，在该区域内，一种涌现的$(G_2)_1$ 液体态主导着长波长物理。这与自旋-1双线性–双二次哈密顿量在接近显式具有 $SU(3)_1$ 对称性且可积的 Uimin–Lai–Sutherland点时的低能行为直接类似 $SU(3)$ [10–12]。

多年来，数学物理文献中的结果表明 $(G_2)_1$ WZW 共形场论描述了可积模型（7）的低能行为 [8]。然而，最近提出了另一种分析，认为应以两个具有不同速度的 $c = 1$ 共形场论的乘积来描述 [17]。为通过数值方法探究哪种结果更准确，我们对系统尺寸为$N = 10$且采用周期性边界条件（本文始终采用此条件）的哈密顿量（7）进行精确对角化，考察动量分辨谱。图1（b）展示了结果；利用 G_2 在 $SU(2)$中的嵌入，我们采用总 S_z 守恒来实现更大的系统尺寸，并利用分支规则 [22]以多重态的形式重构各个扇区 G_2 ；标记为“2”的符号表示 G_2 多重态之间存在简并度。

一些值得注意的观察如下：(i) 零动量基态是单态；(ii) 具有有限动量的第一激发态是一个 14 维多重态；(iii) 动量为 π 的最低四个多重态构成

一个49维多重态。虽然这并非证明，但这些结果暗示存在一个$(G_2)_1$共形场论：正如附录D中详细讨论的，全纯（G_2）$_1$呈现出两个共形塔$\mathbb{1}$和τ；在晶格层面，全纯部分和反全纯部分预计会以张量积的形式混合。与数值结果比较后发现，基态单重态和第一个有限动量14维多重态都满足恒等共形塔及其第一个 Kac–Moody 后裔态的预期简并度；该后裔态由14个流算符生成，这些算符在共形场论层面生成 G_2 （图中标记为 J_a）。49维多重态满足全纯和非全纯 $\tau\bar{\tau}$ 共形塔乘积的预期简并度。自然地，晶格物理会引入能够解除简并度的边缘算符。[2]

这些观察为我们的假设提供了出发点：该可积 G_2 链是一个由（G_2）$_1$ WZW 共形场论描述的临界点。在本文其余部分，我们将分析态和可观测量的标度性质，以判断这一假设是否成立。

III. 共形数据表征

本节将基于（G_2）$_1$假设，对可积点的关键参数进行表征。我们需要从模型中确定的关键共形参数是中心荷 c 和唯一非平凡初级算符 τ的标度维数 Δ_τ。为求完整起见，我们列出预期值：

$$c = \frac{14}{5} = 2.8, \quad \Delta_\tau = \frac{4}{5} = 0.8. \tag{8}$$

关于这些共形数据及其他共形数据的详细信息，请参阅（G_2）$_1$ WZW 共形场论，见附录 D。

A. 能量标度

图谱1(b) 可作为非动量分辨但更精细数值分析的基准。通过$SU(2)$ 非阿贝尔密度矩阵重整化群，我们将有限尺寸标度的能力扩展至 $N = 20$ (我们全程使用键维数 1000 ，对应于 ~ 11000 采用非保持对称性的密度矩阵重整化群方案)并分析

[2] 自旋-1链的 $SU(3)_1$ Uimin–Lai–Sutherland点也会出现相同情况 [13]。众所周知，经过精细调谐加入次近邻项，可以抵消边缘微扰的影响（例如，参见文献 [23]的补充材料）。然而，对于自旋-1问题，只允许存在一个边缘算符，而对于 G_2则可能存在三个。我们未能以与系统尺寸无关的方式调除能隙。

标准共形场论能谱公式：

$$\frac{E_{0,0}(N)}{N} = \epsilon_\infty - \frac{\pi}{6N^2}cv, \tag{9}$$

$$\frac{E_{i,n}(N) - E_{0,0}(N)}{N} = \frac{2\pi v}{N^2}(\Delta_i + n). \tag{10}$$

这里， i 表示一个共形塔， n 是一个对应于后裔多重态的整数。高阶后代态的分支可能使 n的计算变得棘手，但此处我们只关心 $n = 1$ 。至于其他量， Δ_i 是（全纯与反全纯标度维数之和）， c 是中心荷， v 是非普适速度。能量的进一步（对数）修正已有所研究，但对于我们能够达到的小系统尺寸，我们不予考虑。

为了获得共形场论数据，我们首先需要计算非普适自旋波速度 v。为求得该速度，我们使用图1（b）中的谱，并按照参考文献 [23] 的方法进行类似分析，具体如下：根据我们的假设，最低能量的**14** 多重态对应于恒等共形塔的第一个Kac-Moody后代态$J_a\mathbb{1}$， $a = 1, \ldots, 14$ [参见图1（b）]。我们用量子数 n、 $i = 0$、1来标记该态；根据式（10），其能量标度为

$$\frac{E_{0,1}(N) - E_{0,0}(N)}{N} = \frac{2\pi v}{N^2} \tag{11}$$

并使我们能够获得 v。图2(a)中的绿色圆点展示了我们关于能量有限尺寸标度的结果，图2(b)则展示了提取出的速度。通常，速度拟合为 $v(N) = v + a/N^2 + b/N^4$ [23]。我们在此发现一种不同寻常的模式：对于我们考察的系统尺寸，[3] $v(N) \approx 0.1729(2)$似乎几乎没有变化 N。将这一速度与E_0,0(N)的标度相结合，由此可以提取 $cv \approx 1.212(2)$ [（参见图2(c)）]，，我们得到了对中心荷的首次估计[4] $c \approx 7.01(1)$。这与$(G_2)_1$的预期相差甚远。

通过研究其他 SU（2）扇区，我们还可以利用非阿贝尔密度矩阵重整化群代码研究更多相关态的有限尺寸标度。图 2（a）中的橙色和红色圆点包含多重态**7** 和**27**中的态。这些态应当在 $N \to \infty$时合并为一个 49维多重态 $\tau \times \bar{\tau}$。在不抵消边缘算符贡献的情况下，我们可以得到标度维数介于以下范围内的各种可能值：

[3]我们注意到，Martins 与我们采用的归一化相差一个 [17] 因子 37/12，见式（B6）。将提取出的速度乘以这一因子，可得 $37v/12 = 0.53 \approx \pi/6$，这与 Martins 得到的较小速度非常接近。[4] 令人惊讶的是，这与$(G_2)_4$, 的中心荷数值相符，这可由附录中的式（D1）验证。不过，精确对角化得到的态结构，以及此前关于该问题的 Bethe 拟设解的文献，都表明$(G_2)_4$ 这种情况极不可能。

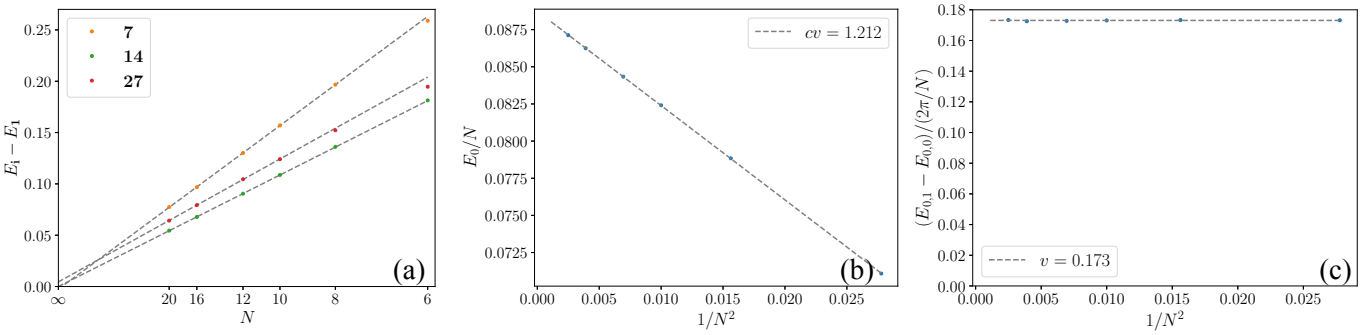

图 2. (a) 7、14 和 27 维多重态中最低能态的有限尺寸标度；能隙趋于零的现象显而易见，但尚不能据此下定论。(b) 基态能量的有限尺寸标度，其中因子 cv 根据方程（9）提取。(c) 在假设 14 维扇区的基态对应于 $(G_2)_1$ 的恒等塔的第一个 Kac 后代的前提下提取速度（参见图 $J_a\mathbb{I}$ 中的图1）

$\Delta_\tau \sim 1.1$ 和 $\Delta_\tau \sim 1.6$。鉴于上述 c 的偏离行为，我们同样得到一个偏离的标度维数估计也就不足为奇了。

总体而言，本节的结果令人困惑。共形数据与 $(G_2)_1$ 的预期相去甚远。

这些数值高度依赖于我们估算速度的能力 v，而且我们明确观察到，v 随系统尺寸变化的行为异常平缓。然而，已知本文所提出的方法在其他情况下能够获得可靠的结果。例如，我们成功地将其应用于自旋-1 双线性–双二次链的 $SU(2)_2$ Takhtajan–Babujian（TB）点（参见附录E），以提取中心荷 $c_{\mathrm{TB}} = 3/2$ [24]。此外，该方法此前也曾用于分析自旋-1 双线性–双二次链中的 $SU(3)_1$行为，以及在条件稍欠确定的情况下分析自旋-2 链中的相关行为 [6, 23]。

接下来，我们将通过另外两种完全独立的方法确定共形参数，以交叉检验这些结果。

B. 纠缠熵

另一种广为人知的求取共形场论中心荷的方法，是考察纠缠谱的有限尺寸行为 [25]

$$S(j,N) = \frac{c}{3}\ln\left[\frac{N}{\pi}\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)\right] + S_0, \qquad (12)$$

其中，S_0 是一个常数渐近非普适贡献，j 是晶格二分划分的大小。尽管这种方法无需计算速度 v，具有一定优势，但当所研究的问题包含彼此接近、且基态相互竞争的相时 [23, 26]，密度矩阵重整化群的收敛性可能使这种方法不可靠。

我们的计算结果如图3（a）和（b）所示。尽管对纠缠熵的预期函数形式拟合良好，该模型的中心荷

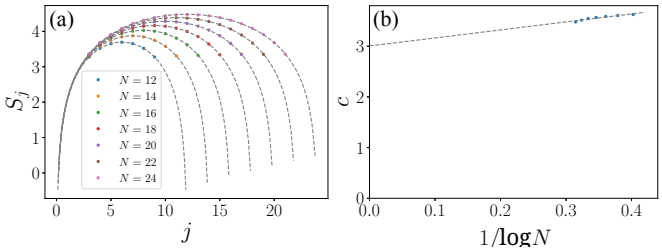

图 3. (a) 纠缠熵的有限尺寸标度及根据公式（12）进行的拟合。(b) 提取出的中心荷 c 的有限尺寸标度。

却表现出对系统尺寸的强烈依赖。由于缺乏对此现象的系统模型或理论，我们研究了不同的拟合函数，包括线性和非线性拟合，得到的外推中心荷数值范围为 $c \sim 2.8$ 至 $c \sim 3.4$。与上一节的结果相比，这些数值更接近预期的 $c = 2.8$ $(G_2)_1$。

这种方法得到的结果与上一节的能量有限尺寸标度结果明显不符。已知的中心荷小于 3.4 的 G_2 对称共形场论中，确实只有我们假设的一级共形场论。然而，我们很难判断观察到的拟合困难究竟仅仅是有限尺寸效应所致，还是因为该系统并不能很好地由纯共形场论描述。要明确判定该系统的性质，还需要进一步分析。

C. 波函数重叠

最近提出了一种新方法，用于从临界理论 [18] 的数值实现中提取共形场论数据。该过程涉及考虑感兴趣系统的两个相同的周期副本，其尺寸为 N，由具有（非手征）主场 ϕ^1_α和 ϕ^2_β 的共形场论描述；此外，还要考虑一个尺寸为 $2N$、主

场为 ϕ^3_γ 的第三个周期副本。然后，考虑其重叠

$$A_{\alpha\beta\gamma} \equiv \left\langle \phi^3_\gamma | \phi^1_\alpha \phi^2_\beta \right\rangle . \tag{13}$$

利用对感兴趣的原始共形场论进行循环轨形化的过程，可以证明，共形场论的有限尺寸实现会对上述重叠施加由共形场论的共形数据决定的标度定律。详情见原始文献 [18] ，并总结于附录D。最简单的重叠涉及恒等主态，

$$A_{\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}} \propto N^{-c/8} + ... \tag{14}$$

这里$\mathbb{1}$ 表示恒等共形塔，省略号对应于后代态的次主导贡献。通过有限尺寸标度，这一重叠提供了直接获取中心荷 c 的途径。在这种情况下，共形场论态与晶格态之间的对应关系十分简单，只需遵循

$$\left\langle \mathbb{1}^3 | \mathbb{1}^1 \mathbb{1}^2 \right\rangle \leftrightarrow \langle 3 : S = 0, 0 | 1 : S = 0, 0; 2 : S = 0, 0 \rangle , \tag{15}$$

其中，记号 $|n:\ S, i\rangle$ 表示自旋链 n 中总角动量为 S 的第 i个态（长度为N ，对应 $n = 1$,2；长度为 $2N$ ，对应 $n = 3$）。 $i = 0$ 表示基态。换言之，我们将 $|\mathbb{1}^n\rangle \leftrightarrow |n:\ S = 0,0\rangle$识别为。

图 4（蓝色）展示了数值分析结果。全恒等共形塔重叠估算得到的中心荷为 $c \approx 3.37(1)$，更接近预期值 $(G_2)_1$ ，而非第 IIIA 节中发现的意外值，但与2.8——我们最初的预期——仍相差甚远。鉴于我们能够达到的系统尺寸较小，椭圆拟合中的修正可能很重要，也可能是与预期结果存在差异的原因。为了说明我们的方法仍然可靠，我们在附录E中重复了这项分析。

有趣的是，波函数重叠法也提供了一种简单的方法来估算初级算符的标度维数，前提是能够通过数值计算准确获得激发态。有两个值得注意的结果是

$$\frac{A_{\mathbb{1}\mathbb{1}\gamma}}{A_{\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}}} \propto N^{-\Delta_\gamma/2} + ..., \tag{16}$$

$$\frac{A_{\gamma\mathbb{1}\mathbb{1}}}{A_{\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}}} \propto N^{-\Delta_\gamma/2} \left(1 + \frac{a}{N} + ...\right) . \tag{17}$$

对于上面最后一个比值， a 是常数，而首个次主导幂律由 $(\gamma,\ \hat{}1)$ 控制，它是原始共形场论的循环轨形的扭曲扇区中的一个主场。这些重叠需要计算尺寸为 N 的链副本 $n = 1$, 2 上的激发态（对应于主场 γ），或尺寸为 $2N$ 的 $n = 3$。

实际上，从晶格数值计算中得到式（17）还会带来一些额外的微妙之处。尽管 G_2 简并度在晶格层面上是显式的，但图 1（b）表明存在分裂

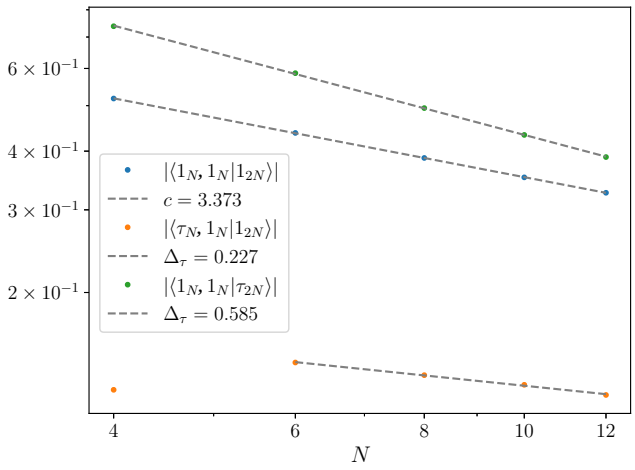

图 4. （蓝色）根据式（14）中的基态波函数重叠提取中心荷。（绿色）和（橙色）分别对应根据式（16）和（17）提取斐波那契初级场标度维数的重叠。用于计算波函数重叠的态 τ 对应于图 1 中灰色标示的多重态集合所指示的单态 $\tau\bar{\tau}$ 。

这与预期的共形塔有所不同，其原因在于边缘微扰。当寻找对应于例如τ 共形塔的态时，必须手动选定一个多重态。此外，由于我们的自旋链和 DMRG 程序依赖于 $SU(2)$ 对称性来提升计算能力，我们的对角化针对的是总角动量固定的扇区。由于不同总角动量的态按构造彼此正交，因此必须始终在同一个多重态内考察重叠。例如，对于 $A_{\mathbb{1}\mathbb{1}\gamma}$，可以确定

$$\left\langle \mathbb{1}^3 | \mathbb{1}^1 \tau^2 \right\rangle \leftrightarrow \langle 3 : S = 0, 0 | 1 : S = 0, 0; 2 : S = 0, 1 \rangle . \tag{18}$$

这里，我们看到 $\left|\tau^2\right\rangle \leftrightarrow |2:\ \ S = 0,\ 1\rangle$，即，晶格上 $i = 1$扇区的第一个激发态（ $S = 0$）与图 π 1(b) 中动量为 {v?}处的第一个蓝点相吻合。由于系统尺寸较小、密度矩阵重整化群难以收敛到激发态，以及边缘微扰带来的问题，涉及 τ 态的重叠可信度要低得多，因此在尝试估算 Δ_τ 时，预计会出现更大的偏差。

重叠 $A_{\mathbb{1}\mathbb{1}\tau}/A_{\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}}$ 和 $A_{\tau\mathbb{1}\mathbb{1}}/A_{\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}}$ 分别以绿色和橙色显示在图4 中。对标度维数的相应估计得到 $\Delta_\tau \approx 0.227$ 和 $\Delta_\tau \approx 0.585$。事实上，这些结果与预期值相去甚远，彼此之间也存在明显差异。

IV. 讨论与结论

我们报告了对一个可积的G_2对称一维链的数值分析。通过将该模型嵌入 $SU(2)$对称自旋-3系统的空间中，我们使

G_2 模型更具物理相关性，并能够通过非阿贝尔密度矩阵重整化群进行高效数值分析。

简洁性以及通过精确对角化得到的动量分辨谱均表明，该可积系统或可由一个 $(G2)_1$ WZW 共形场论描述。然而，使用不同方法从系统中提取共形信息（中心荷和共形维数）时，得到的结果却大相径庭。本文探讨的方法均基于对不同物理量进行有限尺寸标度分析，具体包括自旋链的能谱、其纠缠熵，以及那些应当与共形场论中主场相对应的态的波函数重叠。最后一种方法是近期才提出的一种从数值研究中提取共形数据的方法。

由于我们发现的结果差异极其出乎意料，我们采用另一个共形场论描述已得到充分确立的可积系统来检验所用方法。在附录 E 中，我们对自旋-1双线性-双二次自旋链的 Takhtajan–Babujian点使用完全相同的方法；众所周知，该点对应于一个 $SU(2)_2$ WZW 共形场论 [27–29]。我们所有的数值数据都指向相同的中心荷 $c \approx 3/2$，与预期值一致，这表明我们的方法实现可靠。尽管如此，对于该系统，数值上并不容易得到标度维数 [29]，，而且动量 π 处的最低能态属于 $S = 1$ 扇区，这使得波函数重叠方法难以应用。鉴于所用方法的可靠性已得到验证，我们眼下仍面临一个谜团。

我们可以留下一些最后的观察和假设，以解释我们的发现。首先，能量标度分析依赖于对自旋波速度的估计，而该速度在这个系统中表现出出乎意料的平坦特征。第二，纠缠熵和波函数重叠对中心荷的估计都更接近 2。8，这或许表明我们能够探测的系统尺寸还不够大，无法显现 WZW 行为。边缘算符的存在也可能会污染我们的数值结果。最后一种可能是，所有数值分析实际上都是可靠的，而这个可积系统事实上并不是共形场论。尽管这可能出乎意料（对于相空间中的孤立点而言更是如此），但或许可以解释为什么不同的共形数据分析方法会得出不一致的结果，也与 Martins [17] 最近进行的分析相符。还需要进一步研究，以揭示这个 G_2 可积系统及其相空间邻域的真实物理性质。

致谢

感谢 Frank Göhmann、Hosho Katsura、Shinsei Ryu 和 Rodrigo Pereira 提供的有益讨论。The 本项目得到中国博士后科学基金（批准号：2022M711868）的资助。C. L. 还获得了国际博士后交流奖学金计划和清华大学水木学者计划的资助。

附录 A： G_2 字典

在本附录中，我们写出自旋-3模型到 G_2 不变语言的映射（以及逆映射）。为此，只需考虑一个双格点问题。

1. 耦合字典

我们首先确定耦合参数的约束条件α_n ，使得哈密顿量具有 G_2 对称性（参见用 α_n 表示的哈密顿量，见公式 1）。令α_0、 α_1、 α_2 和 α_3 作为自由参数。耦合参数α_4、 α_5 和 α_6 为

$$\alpha_4 = \frac{35350}{65144169}\alpha_1 - \frac{198}{9929}\alpha_2 + \frac{67426}{804249}\alpha_3, \tag{A1}$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{6561}\alpha_1 - \frac{1}{81}\alpha_3, \tag{A2}$$

$$\alpha_6 = -\frac{680}{65144169}\alpha_1 + \frac{1}{9929}\alpha_2 - \frac{842}{804249}\alpha_3. \tag{A3}$$

耦合参数的约束条件 K_S （公式 2）要使哈密顿量具有G_2对称性，必须满足

$$K_5 = K_1, \; K_6 = K_4 = K_2. \tag{A4}$$

剩下的 K_0、 K_1、 K_2 和 K_3 是任意参数。

我们列出了不同耦合常数之间的转换关系。我们分别将耦合常数表示为 β （见表 I，见方程 6）、 F （见表 II，方程 5）、 K （方程 2）列于表III 中，最后表示为 α （方程 1）列于表 IV中。

2. G_2投影算符

为关联该模型的不同表示，我们还将投影算符 $\mathcal{P}_\mathbf{n}$ 写成卡西米尔算符的形式

	β
K	$K_0 = \beta_0 - 4\beta_1 + 16\beta_2 - 64\beta_3$ $K_1 = \beta_0$ $K_2 = \beta_0 + \frac{2}{3}\beta_1 + \frac{4}{9}\beta_2 + \frac{8}{27}\beta_3$ $K_3 = \beta_0 - 2\beta_1 + 4\beta_2 - 8\beta_3$
α	$\alpha_0 = \beta_0 + \frac{176}{75}\beta_1 + \frac{1144}{225}\beta_1 - \frac{3344}{135}\beta_3$ $\alpha_1 = \frac{9}{25}\beta_1 + \frac{58}{25}\beta_2 - \frac{868}{75}\beta_3$ $\alpha_2 = -\frac{433}{1350}\beta_1 - \frac{989}{2025}\beta_1 + \frac{16874}{6075}\beta_3$ $\alpha_3 = -\frac{31}{900}\beta_1 - \frac{1133}{4050}\beta_2 + \frac{7843}{6075}\beta_3$
F	$F_1 = \beta_0 - 4\beta_1 + 16\beta_2 - 64\beta_3$ $F_7 = \beta_0 - 2\beta_1 + 4\beta_2 - 8\beta_3$ $F_{14} = \beta_0$ $F_{27} = \beta_0 + \frac{2}{3}\beta_1 + \frac{4}{9}\beta_2 + \frac{8}{27}\beta_3$

表 I. 以 β 表示的耦合常数换算。

	F
K	$K_0 = F_1$ $K_1 = F_{14}$ $K_2 = F_{27}$ $K_3 = F_7$
α	$\alpha_0 = \frac{99F_1}{175} - \frac{6F_{14}}{5} + \frac{517F_{27}}{175} - \frac{33F_7}{25}$ $\alpha_1 = \frac{6F_1}{25} - \frac{21F_{14}}{50} + \frac{63F_{27}}{100} - \frac{9F_7}{20}$ $\alpha_2 = -\frac{431F_1}{6300} + \frac{281F_{14}}{1350} - \frac{4129F_{27}}{12600} + \frac{203F_7}{1080}$ $\alpha_3 = -\frac{122F_1}{4725} + \frac{343F_{14}}{5400} - \frac{1007F_{27}}{12600} + \frac{19F_7}{450}$
β	$\beta_0 = F_{14}$ $\beta_1 = \frac{1}{28}F_1 - \frac{1}{4}F_7 - \frac{3}{4}F_{14} + \frac{27}{28}F_{27}$ $\beta_2 = -\frac{F_1}{28} + \frac{5}{16}F_7 - F_{14} + \frac{81}{112}F_{27},$ $\beta_3 = -\frac{3}{112}F_1 + \frac{3}{32}F_7 - \frac{3}{16}F_{14} + \frac{27}{224}F_{27}$

表 II. 以 F 表示的耦合常数换算。

	K
α	$\alpha_0 = \frac{99K_0}{175} - \frac{6K_1}{5} + \frac{517K_2}{175} - \frac{33K_3}{25}$ $\alpha_1 = \frac{6K_0}{25} - \frac{21K_1}{50} + \frac{63K_2}{100} - \frac{9K_3}{20}$ $\alpha_2 = -\frac{431K_0}{6300} + \frac{281K_1}{1350} - \frac{4129K_2}{12600} + \frac{203K_3}{1080}$ $\alpha_3 = -\frac{122K_0}{4725} + \frac{343K_1}{5400} - \frac{1007K_2}{12600} + \frac{19K_3}{450}$
F	$F_1 = K_0$ $F_7 = K_3$ $F_{14} = K_1$ $F_{27} = K_2$
β	$\beta_0 = K_1$ $\beta_1 = \frac{1}{28}K_0 - \frac{3}{4}K_1 + \frac{27}{28}K_2 - \frac{1}{4}K_3$ $\beta_2 = -\frac{1}{28}K_0 - K_1 + \frac{81}{112}K_2 + \frac{5}{16}K_3$ $\beta_3 = -\frac{3}{112}K_0 - \frac{3}{16}K_1 + \frac{27}{224}K_2 + \frac{3}{32}K_3$

表 III。以 K 表示的耦合常数转换。

	α
K	$K_1 = \alpha_0 + \frac{2412190}{804249}\alpha_1 + \frac{74052}{9929}\alpha_2 + \frac{298144}{9929}\alpha_3$ $K_0 = \alpha_0 + \frac{4832980}{804249}\alpha_1 + \frac{310032}{9929}\alpha_2 - \frac{433856}{9929}\alpha_3$ $K_2 = \alpha_0 - \frac{19730}{9929}\alpha_1 + \frac{36612}{9929}\alpha_2 - \frac{62856}{9929}\alpha_3$ $K_3 = \alpha_0 - \frac{3698390}{804249}\alpha_1 + \frac{147492}{9929}\alpha_2 - \frac{597656}{9929}\alpha_3$
F	$F_1 = \alpha_0 + \frac{4832980\alpha_1}{804249} + \frac{310032\alpha_2}{9929} - \frac{433856\alpha_3}{9929}$ $F_7 = \alpha_0 - \frac{3698390\alpha_1}{804249} + \frac{147492\alpha_2}{9929} - \frac{597656\alpha_3}{9929}$ $F_{14} = \alpha_0 + \frac{2412190\alpha_1}{804249} + \frac{74052\alpha_2}{9929} + \frac{298144\alpha_3}{9929}$ $F_{27} = \alpha_0 - \frac{19730\alpha_1}{9929} + \frac{36612\alpha_2}{9929} - \frac{62856\alpha_3}{9929}$
β	$\beta_0 = \alpha_0 + \frac{2412190}{804249}\alpha_1 + \frac{74052}{9929}\alpha_2 + \frac{298144}{9929}\alpha_3$ $\beta_1 = -\frac{500665}{178722}\alpha_1 - \frac{46035}{9929}\alpha_2 - \frac{150300}{9929}\alpha_3$ $\beta_2 = -\frac{6528445}{1072332}\alpha_1 - \frac{12555}{9929}\alpha_2 - \frac{514875}{9929}\alpha_3$ $\beta_3 = -\frac{498265}{357444}\alpha_1 - \frac{15795}{39716}\alpha_2 - \frac{215775}{19858}\alpha_3$

表 IV. 以 α表示的耦合常数转换。

$\mathcal{C}_2 \equiv (\mathbf{\Lambda}_i + \mathbf{\Lambda}_{i+1})^2$，并将其与两个 G_2 基本不可约表示的克莱布施–戈登级数中的投影算符联系起来。它们如下

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathbf{1}} &= -\frac{3}{896}\left[\mathcal{C}_2 - 4\right]\left[\mathcal{C}_2 - 8\right]\left[\mathcal{C}_2 - \frac{28}{3}\right] \\
\mathcal{P}_{\mathbf{7}} &= \frac{3}{256}\mathcal{C}_2\left[\mathcal{C}_2 - 8\right]\left[\mathcal{C}_2 - \frac{28}{3}\right] \\
\mathcal{P}_{\mathbf{14}} &= -\frac{3}{128}\mathcal{C}_2\left[\mathcal{C}_2 - 4\right]\left[\mathcal{C}_2 - \frac{28}{3}\right] \\
\mathcal{P}_{\mathbf{27}} &= \frac{27}{1792}\mathcal{C}_2\left[\mathcal{C}_2 - 4\right]\left[\mathcal{C}_2 - 8\right].
\end{aligned} \tag{A5}$$

回顾一下，我们按照 $\mathrm{Tr}\left(\Lambda_\alpha^\dagger \Lambda_\beta\right) = 2\delta_{\alpha\beta}$ 对 G_2 的生成元进行归一化。对于不可约表示 $\mathbf{1}$, $\mathbf{7}$, $\mathbf{14}$, $\mathbf{27}$，相应地有 $\mathcal{C}_2 = \{0, 4, 8, \frac{28}{3}\}$。

附录 B： G_2 可积点

在本 G_2 自旋链（7）附录中，我们首先采用 MacKay 给出的一般有理 R矩阵构造 [30]，，随后作为量子逆散射方法的出发点 [31, 32]。我们考虑一条链，其每个晶格点上都带有基本 G_2表示。两个相邻晶格点上的张量积可分解为式（3）所示，其中相应的二次卡西米尔算符特征值已在上一节给出。按照不可约表示中有理R矩阵的一般构造 [30]，我们可直接得到

$$\begin{aligned}
R(\lambda) = \mathcal{P}_{\mathbf{1}} &+ \frac{\lambda+\eta}{\lambda-\eta}\frac{\lambda+\frac{\eta}{6}}{\lambda-\frac{\eta}{6}}\frac{\lambda-\frac{2\eta}{3}}{\lambda+\frac{2\eta}{3}}\mathcal{P}_{\mathbf{7}} \\
&+ \frac{\lambda+\eta}{\lambda-\eta}\mathcal{P}_{\mathbf{14}} + \frac{\lambda+\eta}{\lambda-\eta}\frac{\lambda+\frac{\eta}{6}}{\lambda-\frac{\eta}{6}}\mathcal{P}_{\mathbf{27}},
\end{aligned} \tag{B1}$$

其中，投影算符可用式（A5）中的卡西米尔算符明确表示，λ 表示快度，而 η是一个自由参数。很容易证明，该R矩阵满足杨–巴克斯特方程

$$R_{12}(\lambda-\mu)R_{13}(\lambda)R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu)R_{13}(\lambda)R_{12}(\lambda-\mu), \tag{B2}$$

其中，下标表示 R矩阵在张量积的哪些因子上非平凡地作用。

R矩阵还满足以下归一化条件

$$R(\lambda=0)=\mathcal{P}_{\mathbf{1}}-\mathcal{P}_{\mathbf{7}}-\mathcal{P}_{\mathbf{14}}+\mathcal{P}_{\mathbf{27}}=P, \tag{B3}$$

以及置换算子 P，和 $R(\lambda)\big|_{\eta=0}=1$。我们注意到，Ogievetsky 先前已得到了 R矩阵 (B1) [33]，而 Kuniba 得到了它的 q变形 [34]。

现在可以将 R矩阵 (B1) 作为输入来构造可积哈密顿量。我们遵循参考文献32，并指出与我们所用约定之间的关系由$S^{cd}_{ab}\leftrightarrow R^{cd}_{ab}$给出。我们将传递矩阵定义为

$$\tau^{\sigma'_1\dots\sigma'_N}_{\sigma_1\dots\sigma_N}(\lambda)=R^{\sigma'_1\gamma_1}_{\sigma_1\gamma_2}(\lambda)R^{\sigma'_2\gamma_2}_{\sigma_2\gamma_3}(\lambda)\cdots R^{\sigma'_N\gamma_N}_{\sigma_N\gamma_1}(\lambda) \tag{B4}$$

作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}=\bigotimes_{i=1}^{N}V$，其中 $V=\mathbf{7}$。现在利用 $R^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(\lambda=0)=P^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}=\delta^{\delta}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta}$，得到

$$H=\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln[\tau(\lambda)]\Big|_{\lambda=0}=\sum_{i=1}^{N}H_i,\quad H_i=\frac{\partial}{\partial\lambda}R(\lambda)\Big|_{\lambda=0}P, \tag{B5}$$

其中因子 P 确保了与参考文献32相比，指标保持正确。施加周期性边界条件。将 (B1) 代入 (B5)，并利用 $\mathcal{C}_2=4+2\mathbf{\Lambda}_i\cdot\mathbf{\Lambda}_{i+1}$，再令 $\eta=37/2$，即可得到式 (7)，相差一个加性常数。尽管哈密顿量的表述不够明确，这一构造也已在 [7–9]中得到展示。与 Martins 所用约定之间的联系（相差一个加性常数）由下式给出（见参考文献 17中的式 (20)）

$$H_{\text{Martins}}=\frac{37}{12}H, \tag{B6}$$

其中 H 定义于 (B5)。

附录C：可积点附近

在本附录中，我们研究模型 (7) 附近的可积性。具体而言，我们考虑一般哈密顿量 $H(\alpha,\beta)=\sum_i H_i$，其中

$$H_i=\frac{1}{2}\mathbf{\Lambda}_i\cdot\mathbf{\Lambda}_{i+1}+\frac{\alpha}{4}(\mathbf{\Lambda}_i\cdot\mathbf{\Lambda}_{i+1})^2+\frac{\beta}{8}(\mathbf{\Lambda}_i\cdot\mathbf{\Lambda}_{i+1})^3 \tag{C1}$$

并施加周期性边界条件。Grabowski 和 Mathieu [35]（另见文献 36）提出了一种非常直接的方法，用于检验给定平移不变链的可积性。他们考虑了 boost 算符

$$B=\sum_{i=1}^{N}i\,H_i \tag{C2}$$

这给出了第一个守恒荷的一个候选表达式。

$$H_3=\big[B,H\big]=-\sum_{i=1}^{N}\big[H_i,H_{i+1}\big]. \tag{C3}$$

如果 H_3 确实是一个守恒荷，即 $[H_3,H]=0$，那么必须有

$$M_N\equiv\sum_{i=1}^{N}\Big[H_i+H_{i+1},\big[H_i,H_{i+1}\big]\Big]=0, \tag{C4}$$

通过直接计算即可验证这一点。对于所有链长$N\geq 3$，这一条件都必须成立；实际上，考察较短的链就足以形成初步认识。

将上述论证应用于模型 (C1)，我们首先计算 M_3 的特征值。由此可推得，算符 $H_3=[B,H]$ 与 (C1) 对易，条件是 $\beta=15\alpha/37$（其他解为 $\beta=-1+\alpha$或 $\beta=3(5\alpha-3)/31$，我们不再进一步讨论）。根据 α 还可对剩余参数施加约束，要求 $M_4=0$；数值计算发现，只有在 $\alpha=5/2$ 时这一条件才成立，这表明一般模型 (C1) 在此可积点之外不可积。

附录D：$(G_2)_1$ 及其轨道化

如正文所述，我们对 G_2可积链低能热力学极限性质的主要假设是：它对应于一个由 $(G_2)_1$ WZW 共形场论描述的临界点。此处我们简要总结描述该场论的共形数据，并构造其轨道化版本，以便通过波函数重叠分析共形数据。

1. $(G_2)_1$ 共形数据

G_2 例外代数包含 14 个生成元，且其对偶考克斯特数为 $g=4$，因此，处于等级 k 的 G_2 WZW 共形场论的共形反常（中心荷）为

$$c_k=\frac{14k}{k+g}\to c_1=\frac{14}{5}=2.8, \tag{D1}$$

具体化为我们感兴趣的 $(G_2)_1$ 情形。

全纯初级算符的共形维数为

$$h_\lambda=\frac{C_\lambda}{2(k+g)}\to h_\lambda=\frac{C_\lambda}{10}, \tag{D2}$$

再次具体化为 $(G_2)_1$。C_λ 是给定 G_2 不可约表示（irrep）的二次卡西米尔算符。对于层级 $k=1$，仅存在两个共形塔，其对应的初级算符分别记为 $\mathbb{1}$，（与恒等不可约表示相关）和 τ（与 G_2的基本 7 维不可约表示相关）。它们对应的卡西米尔算符为 $C_{\mathbb{1}}=0$ 和 $C_\tau=4$，因此其全纯共形维数为

$$h_{\mathbb{1}}=0,\quad h_\tau=2/5. \tag{D3}$$

非全纯主场的标度维数与上述结果之间的关系为 $h_\lambda = \Delta_\lambda/2$，因此

$$\Delta_{\mathbb{1}} = 0, \quad \Delta_\tau = 4/5. \tag{D4}$$

这些参数控制了下文计算的振幅的有限尺寸标度。

若没有融合与模内容，$(G_2)_1$ 的共形特征描述便不完整。主场的融合关系众所周知，且十分简单，

$$\mathbb{1} \times \mathbb{1} = \mathbb{1} \tag{D5}$$
$$\tau \times \mathbb{1} = \tau \tag{D6}$$
$$\tau \times \tau = \mathbb{1} + \tau, \tag{D7}$$

遵循斐波那契任意子所预期的相同模式。量子维数控制着多次融合后渐近希尔伯特空间的大小，是

$$d_{\mathbb{1}} = 1, \quad d_\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{D8}$$

现在我们可以重构模 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{S}$ 矩阵。对于$\mathcal{T}$,

$$\mathcal{T}_{\eta\eta'} \equiv \theta_\eta e^{-2\pi i(c/24)}\delta_{\eta\eta'}, \quad \theta_\eta \equiv e^{2\pi i h_\eta}, \tag{D9}$$
$$\Rightarrow \mathcal{T} = e^{-\pi i/45}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{4\pi i/5} \end{pmatrix}, \tag{D10}$$

其中，希腊字母指标标记主场。至于 $\mathcal{S}$，其定义如下。

$$\mathcal{S}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mathcal{D}}\sum_\eta d_\eta C_{\alpha\beta\eta}\frac{\theta_\eta}{\theta_\alpha\theta_\beta} \tag{D11}$$

其中，$C_{\alpha\beta\eta}$ 是三个主场的融合系数，$\mathcal{D} = \sqrt{\sum_\alpha d_\alpha^2}$ 是总量子维数。为便于构造该矩阵，只需注意矩阵必须是对称的；由于与$\mathbb{1}$ 融合是平凡的，第一行对应于主场的维数除以总量子维数。于是，由幺正性可知右下角元素必须为 -1，因此

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\mathcal{D}}\begin{pmatrix} 1 & d_\tau \\ d_\tau & -1 \end{pmatrix}. \tag{D12}$$

2. $(G_2)_1$轨道化

参考文献中以教学方式阐述了对共形场论进行循环轨形化的过程。 [18]沿用其中的过程，我们引用$(G_2)_1$ 轨形化理论的结果。对于母共形场论中的两个主场，无扭曲扇区预期有五个态——两个对称态，标记为“s”；两个反对称态，标记为“a”；以及一个混合态——而扭曲扇区中有四个态保留下来。扭曲扇区只是将母共形场论的主场数量加倍，形成带有额外指标 ˆ0 或 ˆ1 的新场。

总之，非扭曲扇区的主场内容及其对应的标度维数如下：

$$\begin{aligned}
\phi_{(\mathbb{1},\mathbb{1})_s} &\to \Delta_{(\mathbb{1},\mathbb{1})_s} = 2\Delta_{\mathbb{1}} = 0, \\
\phi_{(\tau,\tau)_s} &\to \Delta_{(\tau,\tau)_s} = 2\Delta_\tau = 8/5, \\
\phi_{(\mathbb{1},\mathbb{1})_a} &\to \Delta_{(\mathbb{1},\mathbb{1})_a} = 2\Delta_{\mathbb{1}} + 2 = 2, \\
\phi_{(\tau,\tau)_a} &\to \Delta_{(\tau,\tau)_a} = 2\Delta_\tau + 2 = 18/5, \\
\phi_{(\mathbb{1},\tau)} &\to \Delta_{(\mathbb{1},\tau)} = \Delta_{\mathbb{1}} + \Delta_\tau = 4/5.
\end{aligned} \tag{D13}$$

对于扭曲扇区，我们得到

$$\begin{aligned}
\phi_{(\mathbb{1},\hat{0})} &\to \Delta_{(\mathbb{1},\hat{0})} = c/8 = \frac{1}{30}, \\
\phi_{(\mathbb{1},\hat{1})} &\to \Delta_{(\mathbb{1},\hat{1})} = c/8 + 1 = \frac{31}{30}, \\
\phi_{(\tau,\hat{0})} &\to \Delta_{(\tau,\hat{0})} = c/8 + \frac{2}{5} = \frac{13}{30}, \\
\phi_{(\tau,\hat{1})} &\to \Delta_{(\tau,\hat{1})} = c/8 + \frac{2}{5} + 1 = \frac{43}{30}.
\end{aligned} \tag{D14}$$

就我们的目的而言，我们还需要了解轨道理论的部分融合内容。初级场 α， β， γ 的融合选择规则由整数 $\mathcal{N}_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}$决定，这些整数通常取值为 0 或 1。每当这些整数取值为零时，就可以舍弃完整的三点融合。轨道理论的相关系数可以通过使用.....获得。

$$\mathcal{N}_{(\alpha,\beta),(\gamma,\hat{\psi}),(\delta,\hat{\chi})} = \sum_\eta \frac{\mathcal{S}_{\alpha\eta}\mathcal{S}_{\beta\eta}\mathcal{S}_{\gamma\eta}\mathcal{S}^*_{\eta\delta}}{\mathcal{S}^2_{\mathbb{1}\eta}} \tag{D15}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{(\alpha,\alpha)_s,(\gamma,\hat{\psi}),(\delta,\hat{\chi})} = &\frac{1}{2}\sum_\eta \frac{\mathcal{S}^2_{\alpha\eta}\mathcal{S}_{\gamma\eta}\mathcal{S}^*_{\eta\delta}}{\mathcal{S}^2_{\mathbb{1}\eta}} \\
&+ \frac{e^{i\pi(\psi+\chi)}}{2}\sum_\eta \frac{\mathcal{S}_{\alpha\eta}\mathcal{P}_{\gamma\eta}\mathcal{P}^*_{\eta\delta}}{\mathcal{S}_{\mathbb{1}\eta}},
\end{aligned} \tag{D16}$$

其中 $\mathcal{P} = \mathcal{T}^{1/2}\mathcal{S}\mathcal{T}^{2}\mathcal{S}\mathcal{T}^{1/2}$ [18]。值得注意的是，所有必要的轨形融合规则都可以由母共形场论的模不变内容确定。具体而言，$(G_2)_1$ 的循环轨形中，所关注的融合规则为

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1},\mathbb{1})_s \times (\mathbb{1},\hat{0}) &= (\mathbb{1},\hat{0}) \\
(\mathbb{1},\mathbb{1})_s \times (\mathbb{1},\hat{1}) &= (\mathbb{1},\hat{1}) \\
(\mathbb{1},\mathbb{1})_s \times (\tau,\hat{0}) &= (\tau,\hat{0}) \\
(\mathbb{1},\mathbb{1})_s \times (\tau,\hat{1}) &= (\tau,\hat{1})
\end{aligned} \tag{D17}$$

从对称恒等扇区出发，

$$\begin{aligned}
(\tau,\tau)_s \times (\mathbb{1},\hat{0}) &= (\mathbb{1},\hat{0}) + (\tau,\hat{1}) \\
(\tau,\tau)_s \times (\mathbb{1},\hat{1}) &= (\mathbb{1},\hat{1}) + (\tau,\hat{0}) \\
(\tau,\tau)_s \times (\tau,\hat{0}) &= (\mathbb{1},\hat{1}) + (\tau,\hat{0}) + (\tau,\hat{1}) \\
(\tau,\tau)_s \times (\tau,\hat{1}) &= (\mathbb{1},\hat{0}) + (\tau,\hat{0}) + (\tau,\hat{1})
\end{aligned} \tag{D18}$$

从对称 τ 扇区出发，并且

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1},\tau)\times(\mathbb{1},\hat{0}) &= (\tau,\hat{0})+(\tau,\hat{1})\\
(\mathbb{1},\tau)\times(\mathbb{1},\hat{1}) &= (\tau,\hat{0})+(\tau,\hat{1})\\
(\mathbb{1},\tau)\times(\tau,\hat{0}) &= (\mathbb{1},\hat{0})+(\mathbb{1},\hat{1})+(\tau,\hat{0})+(\tau,\hat{1})\\
(\mathbb{1},\tau)\times(\tau,\hat{1}) &= (\mathbb{1},\hat{0})+(\mathbb{1},\hat{1})+(\tau,\hat{0})+(\tau,\hat{1})\,.
\end{aligned} \tag{D19}$$

对于混合恒等式-τ 一。

3. 有限尺寸标度和振幅

掌握给定共形场论的循环轨形版本的融合规则后，便可以通过波函数重叠提取共形数据。正文中所述的波函数重叠分析的一般公式为 [18]

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta\gamma} &= \langle \phi^3_\gamma | \phi^1_\alpha \phi^2_\beta \rangle \\
&= \sum_{\delta,\chi} a_{(\delta,\hat{\chi})} N^{-\Delta_{(\delta,\hat{\chi})}} C_{(\alpha,\beta),(\delta,\hat{\chi}),(\gamma,\hat{0})},
\end{aligned} \tag{D20}$$

其中，$a_{(\delta,\hat{\chi})}$ 是非普适常数，$C_{(\alpha,\beta),\ (\delta,\hat{\chi}),\ (\gamma,\ \hat{0})}$ 是循环轨形共形场论的算符乘积展开系数。显然，只有相应主场之间存在融合通道时，这些系数才是有限的。

通过所有初始重叠 $A_{\gamma\mathbb{1}\mathbb{1}}$ 对这一展开进行归一化会很方便。注意到$C_{(\alpha,\beta),(\mathbb{1},\hat{0}),(\gamma,\hat{0})} = 2^{-2\Delta_\alpha-2\Delta_\beta+\Delta_\gamma} C_{\alpha\beta\gamma}$ 与母共形场论算符乘积展开系数 $C_{\alpha,\beta,\gamma}$有关，我们可以写出 $(G_2)_1$ 共形场论中重叠的一般公式（事实上，该公式适用于任意 1 级 WZW 共形场论），

$$\begin{aligned}
\frac{\left\langle {\phi_\gamma}^3 | \phi^1_\alpha \phi^2_\beta \right\rangle}{\langle \mathbb{1}^3 | \mathbb{1}^1 \mathbb{1}^2 \rangle} &= 2^{-2\Delta_\alpha-2\Delta_\beta+\Delta_\gamma} C_{\alpha,\beta,\gamma} \\
&+ a'_{(\mathbb{1},\hat{1})} C_{(\alpha,\beta),(\mathbb{1},\hat{1}),(\gamma,\hat{0})} N^{-1} \\
&+ a'_{(\tau,\hat{0})} C_{(\alpha,\beta),(\tau,\hat{0}),(\gamma,\hat{0})} N^{-\Delta_\tau/2} \\
&+ a'_{(\tau,\hat{1})} C_{(\alpha,\beta),(\tau,\hat{1}),(\gamma,\hat{0})} N^{-(\Delta_\tau/2+1)} + \ldots.
\end{aligned} \tag{D21}$$

第一项是热力学极限结果，而修正项则来自有限尺寸系统。利用上一节中的融合通道，我们重新得到正文中的三个重要重叠，公式 (14)、(16) 和 (17)。

附录 E：Takhtajan–Babujian 参考

在本附录中，我们给出 TB 模型的数值结果，作为正文中用于 G_2 模型的三种方法的基准。通常认为，TB 模型由 $\mathrm{SU}(2)_2 \sim \mathrm{SO}(3)_1$ WZW 共形场论描述。这两个群的维数均为 3，其对偶考克斯特数分别为 $g=2$ 和 $g=1$。由此得到中心荷：

$$c_k = \frac{3k}{k+g} \to c_{\mathrm{TB}} = \frac{3}{2} = 1.5. \tag{E1}$$

我们将看到，这三种方法所得的结果都与这一论断一致。

按动量和总自旋分辨的能谱如图5（a）所示。双穹顶结构与$\mathrm{SU}(2)_2 \sim \mathrm{SO}(3)_1$ WZW 共形场论的结构一致。从能谱中提取中心荷，需要确定自旋波速度并对基态能量进行标度分析。前者给出$v = 6.445$ （图5（c）），后者给出 $cv = 10.166$（图5（b）），因此我们得到 $c = 1.58$，与所宣称的值相差约 5%。

不同系统尺寸下的纠缠熵和中心荷如图5（d）所示，其中将 c（N）对 $1/$（log N）^{3} 的拟合如图5（e）所示。可以看到，即使对于如此小的系统尺寸，中心荷也都相当接近 3/2，其热力学极限值为c（∞）$= 1.51$。

最后，波函数重叠数据如图所示。5(f)。由于难以将微观态与共形场论场对应起来，我们仅考虑基态之间的重叠，这可以直接给出中心荷。结果再次非常接近3/2。

在结束本附录之前，我们想指出，更仔细的分析表明，数值分析以及将 TB 模型与 $\mathrm{SU}(2)_2 \sim \mathrm{SO}(3)_1$ WZW 共形场论对应起来，仍存在一些微妙的问题。关于这一点，请读者参阅文献 [29, 37] 。

[1] A. B. Zamolodchikov, 《高阶运动积分》中的具有破缺的场论二维模型共形对称性, JETP Letters **46**, 160(1987)。

[2] R. Coldea、D. A. Tennant、E. M. Wheeler、E. Wawrzynska, D. Prabhakaran, M. Telling, K. Habicht, P. Smeibidl 和 K. Kiefer, 《伊辛链中的量子临界性：新兴 E_8 对称性的实验证据,

《科学》**327**, 177（2010）。[3] Y. Hu 和 C. L. Kane, 《斐波那契拓扑超导体》, 《物理评论快报》**120**, 066801（2018）。[4] P. L. S. Lopes、V. L. Quito、B. Han 和 J. C. Y. Teo, 《整数霍尔态的非阿贝尔扭转》, 《物理评论B》**100**, 085116（2019）。[5] C. Nayak、S. H. Simon、A. Stern、M. Freedman 和

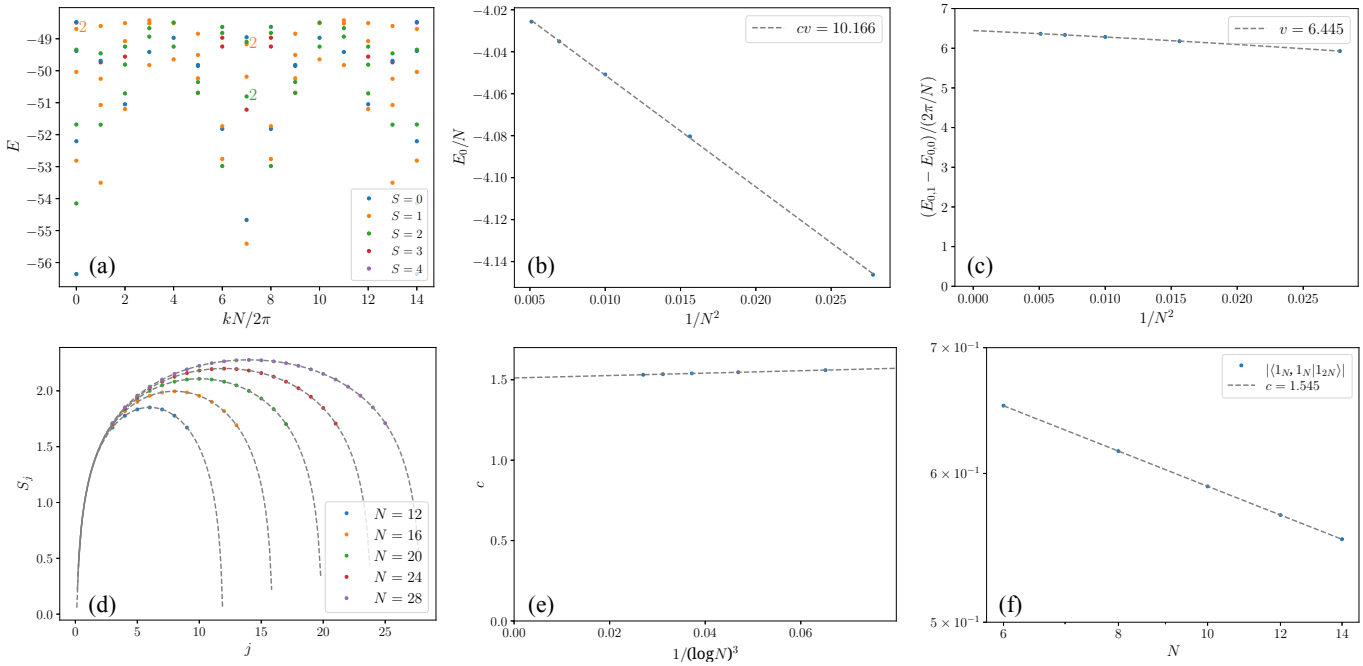

图5. 塔赫塔詹–巴布扬模型的基准测试结果。(a) 动量和总自旋分辨能谱。(b) 基态能量的标度关系。(c) 按照正文中的方法，利用 $k = 1$ 和 $k = 0$ 态拟合自旋波速度。(d) 不同系统尺寸下的纠缠熵和中心荷。(e) 将 $c(N)$ 拟合为 $1/(\log N)^3$。(f) 波函数重叠及由此得到的中心荷。提取出的中心荷数值与预期的 $c \approx 3/2$ 一致。

S. Das Sarma, 《非阿贝尔任意子与拓扑量子计算》, Rev. Mod. Phys. 80, 1083 (2008). [6] C. Li, V. L. Quito, E. Miranda, R. Pereira, I. Affleck, and P. L. S. Lopes, 《自旋-2链中 SU(3) 临界性的情形》, Phys. Rev. B 105, 085140 (2022). [7] E. Ogievetsky and P. Wiegmann, 《简单李群的因子化 S 矩阵与 Bethe Ansatz》, Phys. Lett. B 168, 360 (1986). [8] S. V. Pokrovskii and A. M. Tsvelik, 《磁体晶格可积模型的共形维数谱》, Sov. Phys. JETP 66, 1275 (1987). [9] S. Pokrovsky and A. Tsvelick, 《可积"磁性"链与玻色子-副费米子共形不变场论》, Nucl. Phys. B 320, 696 (1989). [10] G. V. Uimin, 《具有修正反铁磁哈密顿量的 $S = 1$ 的一维问题》, JETP Letters 12, 225 1970( ). [11] C. K. Lai, 《具有任意统计性质的一维最近邻相互作用晶格气体》, J. Math. Phys. 15, 1675 (1974). [12] B. Sutherland, 《多组分量子系统模型》, Phys. Rev. B 12, 3795 (1975). [13] C. Itoi and M.-H. Kato, 《自旋-1 各向同性反铁磁链中的扩展无质量相与 Haldane 相》, Phys. Rev. B 55, 8295 (1997). [14] S. Sahoo, Z. Zhang, and J. C. Y. Teo, 《拓扑超导体对称马约拉纳表面的耦合线模型》, Phys. Rev. B 94, 165142 (2016). [15] J. C. Y. Teo and C. L. Kane, 《从 Luttinger 液体到非阿贝尔量子霍尔态》, Phys. Rev. B 89, 085101 2014( ). [16] C. Li, H. Ebisu, S. Sahoo, Y. Oreg, and M. Franz, 《具有手性三临界 Ising 边缘模的拓扑相的耦合线构造》, Phys. Rev. B 102, 165123 (2020). [17] M. Martins, 《可积 G_2 不变顶点模型的谱性质》, Nucl. Phys. B 989, 116131 (2023). [18] Y. Liu, Y. Zou, and S. Ryu, 《从波函数重叠中得到的算符融合：普适有限尺寸修正及其在 Haagerup 模型中的应用》, arXiv 预印本 cond-mat/2203.14992 (2022). [19] H.-H. Tu, G.-M. Zhang, and T. Xiang, 《具有矩阵乘积基态的一类精确可解 $SO(n)$ 对称自旋链》, Phys. Rev. B 78, 094404 (2008). [20] N. Y. Reshetikhin, 《精确可解量子系统理论中的函数方程方法》, Lett. Math. Phys. 7, 205 (1983). [21] N. Y. Reshetikhin, 《具有 O(n) 和 Sp(2k) 对称性的量子一维磁体可积模型》, 理论数学物理学 63, 555 (1985)。[22] R. Feger 和 T. W. Kephart，LieART——一种用于李代数和表示论的 Mathematica 应用程序，Comput. Phys. Commun. 192, 166 (2015)。[23] P. Chen、Z.-L. Xue、I. P. McCulloch、M.-C. Chung、C.-C. Huang 和 S.-K. Yip，具有涌现 SU(3 114, 145301 2015) 对称性的量子临界自旋-2链，Phys. Rev. Lett. ( )。[24] P. D. Francesco、P. Mathieu 和 D. Sénéchal，《共形场论》（Springer New York，1997）。[25] P. Calabrese 和 J. Cardy，纠缠熵与量子场论，J. Stat. Mech.: Theory Exp. 2004 (06), P06002。[26] P. Chen、Z.-L. Xue、I. P. McCulloch、M.-C. Chung 和 S.-K. Yip，一维光学晶格中自旋-2玻色子的二聚化相和三聚化相，Phys. Rev. A 85, 011601 (2012)。[27] L. A. Takhtajan，任意自旋各向同性海森堡链中低能激发态的图像，Phys. Lett. A 87, 479 (1982)。[28] H. M. Babujian，任意自旋一维各向同性海森堡链的精确解 S，Phys. Lett. A 90, 479 (1982)。[29] I. Affleck、D. Gepner、H. J. Schulz 和 T. Ziman，自旋-s 海森堡反铁磁链的临界行为：解析与数值结果，J. Phys. A: Math. Gen. 22, 511 (1989)。[30] N. J. MacKay，不可约表示中的有理 R 矩阵，J. Phys. A: Math. Gen. 24, 4017 (1991)。[31] V. E. Korepin、N. M. Bogoliubov 和 A. G. Izergin，《量子逆散射方法与关联函数》（剑桥大学出版社，剑桥，1997）。[32] L. Šamaj 和 Z. Bajnok，《可积多体系统统计物理学导论》（剑桥大学出版社，剑桥，2013）。[33] E. I. Ogievetsky，具有 G_2 对称性的因子化 S 矩阵，J. Phys. G: Nucl. Phys. 12, L105 (1986)。[34] A. Kuniba， G_2 的量子 R 矩阵及一种可解的 175 顶点模型，J. Phys. A: Math. Gen. 23, 1349 (1990)。[35] M. P. Grabowski 和 P. Mathieu，自旋链的可积性检验，J. Phys. A: Math. Gen. 28, 4777 (1995)。[36] T. Gombor 和 B. Pozsgay，具有中程相互作用的可积自旋链与元胞自动机，Phys. Rev. E 104, 054123 (2021)。[37] F. C. Alcaraz 和 M. J. Martins，Takhtajan-Babujian 模型的共形不变性与临界指数，J. Phys. A: Math. Gen. 21, 4397 (1988)。