利用超透镜对周期曲面进行反散射

Peijun Li [*1] 和 Yuliang Wang [†2,3]

[1]数学系，普渡大学，西拉斐特，印第安纳州 47907，美国[2]数学研究中心，北京师范大学，珠海 519087，中国[3]北京师范大学-香港浸会大学联合国际学院，珠海 519087，中国

2023年5月5日

arXiv:2305.03086v1 [math.NA] 4 May 2023

摘要

我们提出了一种利用超透镜对周期曲面成像的方案。通过采用反散射模型和变换场展开法，我们推导出一个适用于小振幅情形的表面轮廓近似重建公式。该公式表明，对于具有完美匹配参数的线性化反问题，可以实现无限分辨率。我们的方法只需要在固定频率下使用单个入射波，并且可以通过快速傅里叶变换高效实现。通过数值实验，我们证明，对于具有完美或略微非理想参数的光滑和非光滑表面轮廓，该方法所达到的分辨率均显著超过分辨率极限。

1 引言

分辨率是任何波成像系统中的关键因素。在传统成像系统中，例如光学显微镜，分辨率受限于约半个波长，这一规律称为瑞利判据或阿贝衍射极限。降低波长并非总是可行，尤其是在源成像问题中，而高频入射波可能会造成样品损伤等副作用。因此，理想的做法是突破衍射极限，使低频波也能实现高分辨率。

通常，衍射极限源于无法捕获传递成像物体精细细节的倏逝波。然而，这些波局限在物体表面附近，且其振幅会随着与物体距离的增加而迅速衰减。因此，突破衍射极限的一种可行策略是通过在物体近旁进行测量来恢复倏逝波。这种方法已应用于近场光学显微技术，例如扫描近场光学显微镜 [1, 2, 3, 4]和光子扫描隧道显微镜 [5]。

光学显微技术直接在测量设备上生成样品图像，往往会导致深度信息丢失，或只能以较低分辨率恢复这些信息。为了重建样品的完整轮廓，理想的做法是基于底层波动方程求解反散射问题。对于无限表面，反散射问题涉及利用在某一表面上测得的散射波重建表面轮廓。一种常见方法是根据给定表面轮廓下测量数据与计算数据之间的差异构造目标泛函。随后，通过优化算法将使目标泛函达到最小值的表面轮廓确定为重建结果 [6, 7, 8, 9]。尽管这些方法在目标泛函和优化算法方面具有灵活性，但

*lipeijun@math.purdue.edu
†通讯作者：yuliangwang@bnu.edu.cn

它们计算成本高，而且容易受到局部极小值问题的影响。

另一种称为采样方法的途径，是设计一种指示函数，使其在表面轮廓上呈现高对比度。随后，可在采样区域 [10, 11, 12, 13]内绘制该指示函数，从而直观地识别表面。采样方法的优点是速度快且对先验知识的依赖较少，但通常需要大量测量数据，而这些数据在实际场景中可能难以获取。此外，这些方法本质上是定性的，因此所得图像的定量精度可能受到限制。

在某些实际情形中，表面相对于周期和波长而言可能较为平缓。在这种情况下，可以采用基于变换场展开（TFE）的方法。变换场展开最初于 [14, 15]提出，用于处理粗糙表面的直接散射问题。该方法最初于 [16] 用于求解无限粗糙表面上的反散射问题，此后已拓展至多种情形，包括周期曲面 [17], 障碍物[18, 19], 内部空腔 [20], 可穿透表面 [21], 弹性波 [22, 23], 以及三维问题 [24, 25, 26]。这些方法利用变换场展开和线性化，推导出明确且易于使用的重建公式。它们不仅简单直接，而且有效、高效，仅需一个入射场。这些方法的另一项优势是，得益于明确且易于使用的重建公式，它们能够获得收敛结果和误差估计 [27, 28], 。

本文重新研究了周期曲面的近场逆散射问题，旨在通过将超透镜纳入模型进一步提升成像分辨率。理想的超透镜是一块具有相对介电常数 $\varepsilon = -1$ 和相对磁导率 $\mu = -1$的材料平板。Veselago 最初于 [29], 提出具有负介电常数和负磁导率的材料这一概念，并指出此类材料可能表现出不同寻常的光学特性，包括负折射率。随后，Pendry 提出将这种材料制成平板并用作成像透镜的概念，阐述了消除分辨率极限的可能性，并于 [30]创造了“超透镜”一词。

此后，文献中展示了大量针对电磁波超透镜的数值模拟和实验验证成果 [31, 32, 33]。在近期的发展中，这一概念已进一步扩展至声波和弹性波领域。然而，这些研究所采用的通用成像方法仍然类似于传统显微镜：光源发出的光穿过透镜，最终在像平面上形成被成像轮廓的二维投影。相比之下，我们的成像方案基于反散射，能够对整个轮廓进行全面重建。

本研究提出了一种成像模型，其中包括不可穿透周期表面、位于表面上方的负折射率材料平板、平板上方的测量表面，以及单个入射场。通过采用低轮廓假设和变换场展开（TFE）方法，我们推导出一个显式重建公式。我们说明，在理想情况下可以实现无限分辨率，而参数略微偏离理想值时仍能获得高分辨率。据我们所知，本研究首次将负折射率材料引入反散射问题，从而释放了超透镜所带来的全轮廓成像分辨率提升潜力。

本研究可视为我们先前研究的延伸 [34], ；在先前研究中，我们利用高折射率平板实现了分辨率提升。在 [34]中，提升因子大致与平板的折射率成正比；然而，在本文中，随着参数趋近理想值，该因子趋于无穷大。此外，本研究中我们以不同方式应用变换场展开（TFE），将整个区域视为一个单一的边值问题。因此，重建公式大为简化，有助于初步分析分辨率。此外，我们从平板材料参数最一般的设定出发，推导出一个综合公式，其中无平板、高折射率平板和负折射率平板均为其特殊情形。

本文其余部分安排如下。第 2 节建立物理模型，并利用界面条件和透明边界条件推导整个区域的边值问题。第 3 节介绍变换场展开（TFE），将该问题化简为一系列递归的一维边值问题。第 4 节给出首项和线性项的解析解。第 5 节通过求解线性化反问题推导重建公式，并进行初步的分辨率分析。第 6 节展示数值实验，以验证所提出成像方案的有效性。最后，第 7 节总结全文并讨论未来的研究方向。

2 模型问题

考虑由周期表面所产生的电磁散射，其定义为

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\},$$

其中 f 是一个周期为 Λ的周期函数。我们假设 f 可以表示为 as

$$f(x) = \delta g(x), \tag{1}$$

其中 $0 < \delta \ll 1$ 是一个小常数，称为表面形变参数。假设表面 Γ_f 为理想电导体（PEC），其上方的半空间为真空。

我们在散射表面上方引入一块双负折射率材料平板，其两个表面定义为 $\Gamma_a = \{(x,\ a)$: $x \in \mathbb{R}\}$ 和 $\Gamma_b = \{(x,\ b)$: $x \in \mathbb{R}\}$。Γ_f与 Γ_a之间的区域记为 $\Omega = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x) < y < a\}$，而 Γ_a与 Γ_b 之间的区域表示为 $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$: $a < y < b\}$。问题的几何构型如图 1 所示。

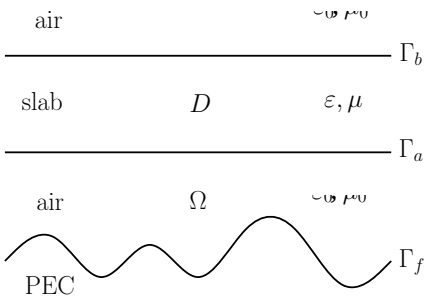


图 1：模型问题的几何构型。平板位于散射表面 Γ_f上方，其下边界为 Γ_h，上边界为 Γ_b，测量在 Γ_b上进行。

电磁波的传播由时谐麦克斯韦方程组描述:

$$\nabla \times \mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = 0, \tag{2}$$

其中，$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 分别为电场和磁场，ω 表示角频率，ε 和 μ 分别为介电常数和磁导率。在本研究中，我们考虑横电（TE）模式，并假设所有变量均与 z 坐标无关，且 $\mathbf{E} = [0, 0, u]^\top$、$\mathbf{H} = [H_1, H_2, 0]^\top$。于是，方程 (2) 化简为

$$(\Delta + \omega^2\varepsilon\mu)u = 0. \tag{3}$$

相对介电常数和磁导率分别记为 $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ 和 $\mu_r = \mu/\mu_0$，其中 ε_0 和 μ_0 分别为真空的介电常数和磁导率。定义自由空间波数 $\kappa = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$，则式 (3) 可改写为

$$(\Delta + \eta^2)u = 0,$$

其中 $\eta = \kappa\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$。本文将 x轴正向取作任意平方根的支割线。术语 $\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ 通常称为折射率。

入射角为 $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ 的平面波可表示为 $u_{\text{in}}(x,y) = e^{i(\alpha x - \beta y)}$，其中 $\alpha = \kappa\sin\theta$，且 $\beta = \kappa\cos\theta$。然而，我们将重点讨论法向入射，即 $\theta = 0$。在这种情况下，入射场简化为

$$u_{\text{in}}(x,y) = e^{-i\kappa y}, \tag{4}$$

其中 u_{in} 和 u 均关于 x 周期变化，周期为 Λ。

给定散射表面和入射场，正向散射问题旨在确定总场 $u(x,y)$。本文所讨论的近场成像问题是一个逆散射问题，旨在根据 Γ_b 处总场的测量数据，确定散射表面函数 $f(x)$。

式 (4) 给出的入射场显然满足亥姆霍兹方程:

$$(\Delta + \kappa^2)u_{\text{in}}(x,y) = 0, \quad y > b.$$

令 $u_{\text{sc}} = u - u_{\text{in}}$ 表示散射场，它满足相同的亥姆霍兹方程:

$$(\Delta + \kappa^2)u_{\text{sc}}(x,y) = 0, \quad y > b. \tag{5}$$

假设 u_{sc} 仅由向上传播波和倏逝波组成，则可由式 (5) 得到如下瑞利展开:

$$u_{\text{sc}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_{\text{sc}}^{(n)}(b) e^{i[\alpha_n x + \beta_n (y-b)]}, \quad y \geq b, \tag{6}$$

其中， $u_{\text{sc}}^{(n)}(b)$ 表示 $u_{\text{sc}}(x,\ b)$ 的傅里叶系数，并且

$$\alpha_n = \frac{2\pi n}{\Lambda}, \quad \beta_n = \sqrt{\kappa^2 - \alpha_n^2}. \tag{7}$$

在方程 (6) 中取 ∂_y，并在 Γ_b 处求值，我们得到

$$\partial_y^+ u_{\text{sc}} = \mathcal{T} u_{\text{sc}}^+ \quad \text{on } \Gamma_b, \tag{8}$$

其中边界算子 $\mathcal{T}$ 定义为

$$\mathcal{T} v = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i\beta_n v^{(n)},$$

且“+”符号表示取偏导数或从上方取极限。这一点很容易验证。

$$\partial_y^+ u_{\text{in}} = \mathcal{T} u_{\text{in}}^+ + \rho \quad \text{on } \Gamma_b, \tag{9}$$

其中

$$\rho = -2i\kappa e^{-i\kappa b}. \tag{10}$$

将式（9）与式（8）相加，得到透明边界条件:

$$\partial_y^+ u = \mathcal{T} u^+ + \rho \quad \text{on } \Gamma_b. \tag{11}$$

由界面条件 $\nu \times \mathbf{E}^+ = \nu \times \mathbf{E}^-$和 $\nu \times \mathbf{H}^+ = \nu \times \mathbf{H}^-$在 Γ_b上且满足 $\nu = [0,0,1]^\top$，可得

$$u^- = u^+, \quad \frac{1}{\mu_r}\partial_y^- u = \partial_y^+ u \quad \text{on } \Gamma_b, \tag{12}$$

其中，“–”符号表示取偏导数或从下方取极限。结合方程和式（12）可得 (11)

$$\frac{1}{\mu_r}\partial_y^- u = \mathcal{T} u + \rho \quad \text{on } \Gamma_b.$$

类似地，我们有

$$u^+ = u^-, \quad \frac{1}{\mu_r}\partial_y^+ u = \partial_y^- u \quad \text{on } \Gamma_a.$$

为简化记号，以下分别用 ϵ 和 μ 表示相对介电常数和磁导率。综上，我们得到总场 u 在 $D \cup \Omega$ 中满足的以下边界 — 界面值问题：

$$\begin{aligned}
&\partial_y^- u = \mu(\mathcal{T}u + \rho) && \text{on } \Gamma_b, && (13a)\\
&(\Delta + \eta^2)u = 0 && \text{in } D, && (13b)\\
&u^+ = u^-, \quad \partial_y^+ u = \mu \partial_y^- u && \text{on } \Gamma_a, && (13c)\\
&(\Delta + \kappa^2)u = 0 && \text{in } \Omega, && (13d)\\
&u = 0 && \text{on } \Gamma_f. && (13e)
\end{aligned}$$

3 变换场展开

我们采用 TFE 方法，并结合幂级数和傅里叶级数展开，将控制方程 (13) 化简为一个递归常微分方程组。此前， [16] 已采用这一方法对无限粗糙表面进行近场成像。

考虑如下变量变换

$$\begin{aligned}
&\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = a\left(\frac{y-f}{a-f}\right), \quad (x,y) \in \Omega,\\
&\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y, \quad (x,y) \in D,
\end{aligned}$$

该变换将区域 Ω 映射到矩形 $\Omega_0 = (0,\Lambda) \times (0,a)$，将表面 Γ_a 映射到其自身，将表面 Γ_f 映射到平面 $\Gamma_0 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$，并将区域 D 映射到其自身。值得注意的是，该变量变换定义在整个计算域内，而不像 [34] 那样仅关注区域 Ω。这样可以推导出形式显著更简单的解和重建公式。

应用链式法则可得 Ω 中的以下求导规则：

$$\begin{aligned}
\partial_x &= \partial_{\tilde{x}} - f'\left(\frac{a-\tilde{y}}{a-f}\right)\partial_{\tilde{y}},\\
\partial_y &= \left(\frac{a}{a-f}\right)\partial_{\tilde{y}},\\
\partial_{xx} &= \partial_{\tilde{x}\tilde{x}} + (f')^2\left(\frac{a-\tilde{y}}{a-f}\right)^2\partial_{\tilde{y}\tilde{y}} - 2f'\left(\frac{a-\tilde{y}}{a-f}\right)\partial_{\tilde{x}\tilde{y}}\\
&\quad - \left[f''\left(\frac{a-\tilde{y}}{a-f}\right) + 2(f')^2\frac{(a-\tilde{y})}{(a-f)^2}\right]\partial_{\tilde{y}},\\
\partial_{yy} &= \left(\frac{a}{a-f}\right)^2\partial_{\tilde{y}\tilde{y}}.
\end{aligned}$$

Let

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y}) = u(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \cup D.$$

将微分规则代入边界界面值问题方程（13），并为简化记号省略变量上的波浪号，我们得到变换后的

问题:

$$\partial_y^- u = \mu(\mathcal{T}u + \rho) \qquad \text{on } \Gamma_b, \tag{14a}$$
$$\left(\Delta + \eta^2\right) u = 0 \qquad \text{in } D, \tag{14b}$$
$$u^+ = u^-, \quad \left(1 - \frac{f}{a}\right) \partial_y^+ u = \mu \partial_y^- u \qquad \text{于 } \Gamma_a, \tag{14c}$$
$$\left(c_1\partial_{xx} + c_2\partial_{yy} + c_3\partial_{xy} + c_4\partial_y + c_1\kappa^2\right) u = 0 \quad \text{in } \Omega_0, \tag{14d}$$
$$u = 0 \qquad \text{on } \Gamma_0, \tag{14e}$$

其中

$$\begin{cases} c_1 = (a-f)^2, \quad c_2 = \left[(a-y)f'\right]^2 + a^2, \\ c_3 = -2(a-y)(a-f)f', \quad c_4 = -(a-y)\left[(a-f)f'' + 2\left(f'\right)^2\right]. \end{cases}$$

基于小量假设 (1)，我们考虑幂级数展开

$$u(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta^m u_m(x,y), \quad (x,y) \in \Omega_0 \cup D. \tag{15}$$

S将式（1）和式（15）代入式（14），得到递归方程组。

$$\partial_y^- u_m = \mu\left(T u_m + \rho_m\right) \qquad \text{on } \Gamma_b, \tag{16a}$$
$$\left(\Delta + \eta^2\right) u_m = 0 \qquad \text{in } D, \tag{16b}$$
$$u_m^+ = u_m^-, \quad \partial_y^+ u_m = \mu \partial_y^- u_m + \tau_m \qquad \text{on } \Gamma_a, \tag{16c}$$
$$\left(\Delta + \kappa^2\right) u_m = v_m \qquad \text{在 } \Omega_0\text{,中} \tag{16d}$$
$$u_m = 0 \qquad \text{on } \Gamma_0, \tag{16e}$$

其中

$$v_m = D_1 u_{m-1} + D_2 u_{m-2}, \quad \tau_m = T u_{m-1}^+, \quad \rho_m = \delta_{0,m}\rho, \tag{17}$$

其中 $\delta_{i,\ j}$ 为克罗内克δ。微分算子 D_1，D_2，T 定义如下:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{a}[2g\partial_{xx} + 2g'(a-y)\partial_{xy} + g''(a-y)\partial_y + 2\kappa^2 g], \\ D_2 &= -\frac{1}{a^2}\{g^2\partial_{xx} + (g')^2(a-y)^2\partial_{yy} + 2gg'(a-y)\partial_{xy} \\ &\quad - [2(g')^2 - gg''](a-y), \partial_y + \kappa^2 g^2\}, \\ T &= \frac{g}{a}\partial_y, \end{aligned}$$

且 ρ 由式（10）给出。

由于变量 u_m，v_m，τ_m 和 ρ_m 沿 x 方向以 Λ 为周期，因此可以将傅里叶级数展开应用于控制方程（16），得到一个递归的边界-界面值问题系统:

$$\partial_y^- u_m^{(n)} = \mu\left[i\beta_n u_m^{(n)} + \rho_m^{(n)}\right], \qquad y = b, \tag{18a}$$
$$\partial_{yy} u_m^{(n)} + \gamma_n^2 u_m^{(n)} = 0, \qquad a < y < b, \tag{18b}$$
$$\left(u_m^+\right)^{(n)} = \left(u_m^-\right)^{(n)}, \quad \partial_y^+ u_m^{(n)} = \mu\partial_y^- u_m^{(n)} + \tau_m^{(n)}, \qquad y = a, \tag{18c}$$
$$\partial_{yy} u_m^{(n)} + \beta_n^2 u_m^{(n)} = v_m^{(n)}, \qquad 0 < y < a, \tag{18d}$$
$$u_m^{(n)} = 0, \qquad y = 0. \tag{18e}$$

其中，β_n 由式（7）给出，且

$$\gamma_n = \sqrt{\eta^2 - \alpha_n^2}. \tag{19}$$

4 解析解

通过参数变易法求解方程（18），可得通解。

$$u_m^{(n)}(y)=\begin{cases} a_{m,n}e^{i\gamma_n y}+b_{m,n}e^{-i\gamma_n y}, & a<y<b,\\ c_{m,n}e^{i\beta_n y}+d_{m,n}e^{-i\beta_n y}+\int_0^y \Phi_n(y,z)v_m^{(n)}(z)dz, & 0<y<a, \end{cases} \tag{20}$$

其中，$a_{m、n}$、 $b_{m、n}$、$c_{m、n}$、$d_{m、n}$ 为待确定的系数，而积分核 el

$$\Phi_n(y,z)=\frac{\sin\beta_n(y-z)}{\beta_n}\quad \text{if } \beta_n\neq 0.$$

应用边界和界面条件 (18a)、(18c) 和 (18e)，得到线性系统。

$$\begin{pmatrix} i(\gamma_n-\mu\beta_n)e^{i\gamma_n b} & -i(\gamma_n+\mu\beta_n)e^{-i\gamma_n b} & 0 & 0\\ e^{i\gamma_n a} & e^{-i\gamma_n a} & -e^{i\beta_n a} & -e^{-i\beta_n a}\\ i\gamma_n e^{i\gamma_n a} & -i\gamma_n e^{-i\gamma_n a} & -i\mu\beta_n e^{i\beta_n a} & i\mu\beta_n e^{-i\beta_n a}\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{m,n}\\ b_{m,n}\\ c_{m,n}\\ d_{m,n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{m,n}\\ s_{m,n}\\ t_{m,n}\\ 0\end{pmatrix}, \tag{21}$$

其中

$$r_{m,n}=\mu\rho_m^{(n)},\quad s_{m,n}=\int_0^a \Phi_n(a,z)v_m^{(n)}(z)dz,\quad t_{m,n}=\mu\int_0^a \partial_y\Phi_n(a,z)v_m^{(n)}(z)dz+\tau_m^{(n)}. \tag{22}$$

直接计算可得，式（21）中矩阵的行列式为

$$\begin{aligned}\phi_n=&(\gamma_n-\mu\beta_n)e^{i\gamma_n(b-a)}[(\gamma_n+\mu\beta_n)e^{i\beta_n a}-(\gamma_n-\mu\beta_n)e^{-i\beta_n a}]\\ &+(\gamma_n+\mu\beta_n)e^{i\gamma_n(a-b)}[(\gamma_n+\mu\beta_n)e^{-i\beta_n a}-(\gamma_n-\mu\beta_n)e^{i\beta_n a}].\end{aligned} \tag{23}$$

4.1 零阶项

对于 $m=0$，由式 (17) 可得

$$v_0=0,\quad \tau_0=0,\quad \rho_0^{(n)}=\rho\delta_{0,n}.$$

傅里叶系数为

$$r_{0,n}=\mu\rho\delta_{0,n},\quad s_{0,n}=0,\quad t_{0,n}=0.$$

用克拉默法则求解式 (21)，得到系数

$$a_{0,n}=\frac{2\mu\rho}{i\phi_0}e^{-i\eta a}(\mu\kappa\cos\kappa a+i\eta\sin\kappa a)\delta_{0,n}, \tag{24a}$$

$$b_{0,n}=-\frac{2\mu\rho}{i\phi_0}e^{i\eta a}(\mu\kappa\cos\kappa a-i\eta\sin\kappa a)\delta_{0,n}, \tag{24b}$$

$$c_{0,n}=\frac{2\eta\mu\rho}{i\phi_0}\delta_{0,n},\quad d_{0,n}=-\frac{2\eta\mu\rho}{i\phi_0}\delta_{0,n}. \tag{24c}$$

将式 (24) 代入式 (20)，得到解的首项

$$u_0(x,y)=\begin{cases} a_{0,0}e^{i\eta y}+b_{0,0}e^{-i\eta y}, & a\le y\le b,\\ \dfrac{4\eta\mu\rho}{\phi_0}\sin\kappa y, & 0\le y\le a. \end{cases} \tag{25}$$

应注意， u_0 独立于 x ，对应于散射表面平坦时的总场，即表面高度偏差 δ 为零时。

4.2 一阶项

对于 $m=1$，我们有 $\rho_1=0$，因此 $r_{1,n}=0$。对 $a_{1,n}$,$b_{1,n}$，用克拉默法则求解方程（21），得到

$$a_{1,n}=\frac{2(\gamma_n+\mu\beta_n)}{\phi_n}e^{-i\gamma_n b}[\mu\beta_n\cos(\beta_n a)s_{1,n}-\sin(\beta_n a)t_{1,n}],$$
$$b_{1,n}=\frac{2(\gamma_n-\mu\beta_n)}{\phi_n}e^{i\gamma_n b}[\mu\beta_n\cos(\beta_n a)s_{1,n}-\sin(\beta_n a)t_{1,n}].$$

将式（22）与 $m=1$ 代入上述方程，并使用正弦函数的差角公式，我们得到

$$a_{1,n}=-\frac{2(\gamma_n+\mu\beta_n)}{\phi_n}e^{-i\gamma_n b}\psi_n,\quad b_{1,n}=-\frac{2(\gamma_n-\mu\beta_n)}{\phi_n}e^{i\gamma_n b}\psi_n, \tag{26}$$

其中

$$\psi_n=\mu\int_0^a\sin(\beta_n y)v_1^{(n)}(y)dy+\sin(\beta_n a)\tau_1^{(n)}. \tag{27}$$

将式 (25) 代入式 (17)，并进行傅里叶变换，我们得到 $v_1^{(n)}(y)$ 和 $\tau_1^{(n)}$ 的以下表达式：

$$v_1^{(n)}(y)=\frac{4\kappa\eta\mu\rho}{a\phi_0}[2\kappa\sin(\kappa y)-\alpha_n^2(a-y)\cos(\kappa y)]g^{(n)},\quad 0<y<a, \tag{28a}$$
$$\tau_1^{(n)}=\frac{4\kappa\eta\mu^2\rho}{a\phi_0}\cos(\kappa a)g^{(n)}. \tag{28b}$$

将式（28）代入式（27），并利用恒等式 $\kappa^2=\alpha_n^2+\beta_n^2$，经过冗长但直接的计算，我们推导出 ψ_n 的表达式：

$$\psi_n=\frac{4\kappa\eta\mu^2\rho\beta_n}{\phi_0}g^{(n)}. \tag{29}$$

将式（29）代入式（26），得到以下关于 $a_{1、n}$ 和 $b_{1、n}$ 的表达式：

$$a_{1,n}=-\frac{8\kappa\eta\mu^2\rho\beta_n}{\phi_0\phi_n}(\gamma_n+\mu\beta_n)e^{-i\gamma_n b}g^{(n)}, \tag{30a}$$
$$b_{1,n}=-\frac{8\kappa\eta\mu^2\rho\beta_n}{\phi_0\phi_n}(\gamma_n-\mu\beta_n)e^{i\gamma_n b}g^{(n)}. \tag{30b}$$

最后，将式（30）代入式（20），得到线性项的傅里叶系数：

$$u_1^{(n)}(y)=-\frac{8\kappa\eta\mu^2\rho\beta_n}{\phi_0\phi_n}[(\gamma_n+\mu\beta_n)e^{i\gamma_n(y-b)}+(\gamma_n-\mu\beta_n)e^{i\gamma_n(b-y)}]g^{(n)},\quad a<y<b. \tag{31}$$

在 $y=b$ 处计算式（31），得到本文的基本恒等式：

$$g^{(n)}=\Upsilon_n u_1^{(n)}(b), \tag{32}$$

其中，缩放因子为：

$$\Upsilon_n=-\frac{\phi_0\phi_n}{16\kappa\eta\mu^2\rho\beta_n\gamma_n}. \tag{33}$$

注 1 为简洁起见，本文省略了 $\beta_n=0$ 或 $\gamma_n=0$的具体情形。不过，需要指出的是，如有必要，可以单独处理这些情形。

5 重建公式

在式 (15) 给出的幂级数展开中仅保留零阶项和一阶项，可得到如下近似：

$$u(x,y) \approx u_0(x,y) + \delta u_1(x,y). \tag{34}$$

在 $y=b$ 处对公式（34）求值，并对 x 应用傅里叶变换，得到

$$u^{(n)}(b) \approx u_0^{(n)}(b) + \delta u_1^{(n)}(b). \tag{35}$$

将公式（32）和（1）代入公式（35），可得

$$f^{(n)} = \Upsilon_n[u^{(n)}(b) - u_0^{(n)}(b)]. \tag{36}$$

这意味着，散射表面函数 $f(x)$ 的傅里叶系数可以直接根据总场 $u(x,\ b)$ 的傅里叶系数计算。随后，散射表面函数可按如下方式重建：

$$f(x) = \sum_{|n|\le N} f^{(n)} e^{i\alpha_n x},$$

其中，$N \in \mathbb{Z}$ 表示截止频率。

通过考察公式（36），我们观察到，系数 Υ_n 在表征逆散射问题的稳定性和分辨率方面起着重要作用。这些系数通常具有复杂的形式。在下一节中，我们将探讨一些特殊情况。根据阿贝衍射极限，我们将 f 的第 n 个傅里叶模态的最小特征尺寸 d_n 定义为 $e^{i\alpha_n x}$ 周期的一半，表示为 $d_n = \Lambda/(2|n|)$。此外，我们将入射场在自由空间中的波长记为 $\lambda = 2\pi/\kappa$。

5.1 无板情形

首先，我们考虑不存在平板的情形，对应的参数值为$\epsilon = 1$ 和 $\mu = 1$。由此可得 $\eta = \kappa$ 和 $\gamma_n = \beta_n$。将这些参数代入公式（23），得到

$$\phi_n = -4\beta_n^2 e^{-i\beta_n b}. \tag{37}$$

将公式（37）代入公式（33），得到

$$|\Upsilon_n| = \frac{1}{2\kappa}|e^{-i\beta_n b}|,$$

这与 [17]中给出的结果一致。我们区分以下两种情形：

1. 若 $|\alpha_n| < \kappa$，即 $|n| < \Lambda/\lambda$，则 β_n 为实数，且 $|\Upsilon_n| = 1/(2\kappa)$保持不变。因此，我们能够稳定重建相应的傅里叶模态 $f^{(n)}$。此外，由于最小特征尺寸 $d_n > \lambda/2$，这些模式的分辨率处于阿贝衍射极限所规定的范围内。

2. 若 $|\alpha_n| > \kappa$，即 $|n| > \Lambda/\lambda$，则 $\mathrm{Re}\ \beta_n = 0$、$\mathrm{Im}\ \beta_n = \sqrt{\alpha_n^2 - \kappa^2}$，并且

$$|\Upsilon_n| = \frac{1}{2\kappa} e^{|\beta_n| b}$$

它近似于 $|n|$ 的指数函数。因此，随着 $|n|$ 的增大，相应傅里叶模态 $f^{(n)}$ 的重建会变得越来越不稳定。

关于此情形的全面而精确的误差分析可见于 [27].

5.2 普通介电材料

假设该平板由普通介电材料制成，其参数值为$\epsilon > 1$ 和 $\mu = 1$。 [34]此前已分析过这种情形。本文提出的新重建公式，即公式（36），建立了傅里叶系数之间的一一对应关系。这与 [34]中的卷积型不同。因此，该公式明显更简洁，也更便于分析。

5.3 双负超材料

本节聚焦于本文的主题，即研究具有负介电常数 ε （或实部为负）和负磁导率 μ 的平板。

完美匹配参数

我们首先假设 $\epsilon = \mu = -1$，并将其称为完美匹配参数，这与 [30] 提出的超透镜原始概念一致。因此，我们有 $\eta = \kappa$ 和 $\gamma_n = \beta_n$。将这些参数代入公式（23），得到

$$\phi_n = 4\beta_n^2 e^{i\beta_n(b-2a)}. \tag{38}$$

将公式（38）代入公式（33），得到

$$|\Upsilon_n| = \frac{1}{2\kappa}|e^{i\beta_n(b-2a)}|.$$

(i) 如果 $b \geq 2a$，那么对于所有 $n \in \mathbb{Z}$， $|\Upsilon_n| \leq 1/(2\kappa)$。因此，我们可以稳定地重建所有频率模式，从而实现无限分辨率！

(ii) 如果 $b < 2a$，那么

$$|\Upsilon_n| = \frac{1}{2\kappa}e^{|\beta_n|(2a-b)}.$$

因此，该情形等效于没有平板但测量距离为 $2a-b$ 的情况。此外，由于 $2a-b < b$，我们可以预期这种情况下的分辨率会有所提高。

非理想参数

由于物理和工程限制，在实际应用中往往无法实现理想参数。具体而言，透镜组成材料通常具有损耗，这导致有效介电常数成为一个复数。为了解决这一问题，我们引入了这些参数

$$\epsilon = -1 + \epsilon', \quad \mu = -1 + \mu',$$

其中， ε' 和 μ' 是小振幅实数或复数。利用公式（19），我们得到 $\gamma_n^2 = \beta_n^2 + \iota$，其中 $\iota = \kappa^2$（$\epsilon'\mu' - \epsilon' - \mu'$）。令 n 为来自 $\mathbb{Z}$ 的固定整数。当 $\iota \to 0$ 时，我们可以很容易地确认 $|\Upsilon_n| \to \frac{1}{2\kappa}|e^{i\beta_n(b-2a)}|$，这就是完美匹配参数的缩放因子。这意味着，当 $\varepsilon' \to 0$ 和 $\mu' \to 0$ 时，分辨率极限趋近于完美匹配参数的分辨率极限。

6 数值实验

在以下数值实验中，我们将周期固定为 $\Lambda = 1$，将波长固定为$\lambda = 1.1$。为了获得给定散射表面 f的总场 u，我们使用有限元方法，并结合完美匹配层

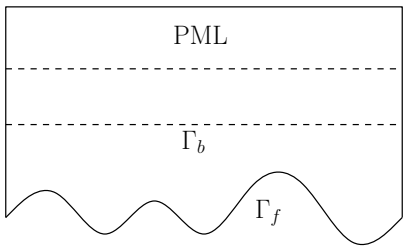


图2：有限元方法计算域示意图。在 Γ_b 上方设置一个完美匹配层，以吸收散射场，从而允许将 $u=0$ 用作完美匹配层外边界上的边界条件。在左右边界上施加周期性边界条件，同时在 Γ_f上施加常规PEC边界条件 $u=0$ 。

（PML）技术，将无限计算域截断为有限计算域。图2展示了计算域的示意图。

随后，在 Γ_b 上均匀分布的点处对场数据进行采样，并向样本添加随机值以模拟测量噪声。具体而言，测量数据为

$$U=\left\{u(x_m,b)(1+r_m):x_m=\frac{m}{M},0\le m\le M\right\},$$

其中， $M=100$ 和 r_m 是从 $[-0.05,0.05]$ 中的均匀分布抽取的独立随机数，即相对噪声水平为5%。在整个实验中，平板的下边界固定为 $a=0.1$ ，而上边界固定为 $b=0.2$。

6.1 光滑剖面函数

散射表面函数定义为 $f(x)=\delta g(x)$，其中 $\delta=0.01$，且该函数

$$g(x)=0.4\cos(2\pi x)+0.3\cos(6\pi x)+0.2\cos(20\pi x) \tag{39}$$

表示频率模式为 $|n|=1$、3、10。利用傅里叶模态的明确截断来测试所提出方法的性能。

要恢复表面轮廓的第一个、前两个或全部三个傅里叶模态，截止频率N 必须分别至少设置为 1、3 或 10。不含平板情况下的重建结果如图 3 第 1 行所示。当 $N=1$ 时，仅能恢复第一个傅里叶模态，即 $0.4\cos(2\pi t)$。若要恢复截至第 3 个傅里叶模态的表面轮廓， N 应至少设置为 3。然而，使用 $N=3$ 会导致解出现显著误差。尝试使用 $N=10$ 恢复第 10 个模态未能成功。通过减小测量距离 b可以获得更高的分辨率，但 b存在一个下限，至少在表面上方是如此，而且误差并非 b的单调函数。关于这种情况下的详细误差估计，可参见 [27]。

我们可以通过引入高折射率的介电薄层来提高分辨率。令 $\varepsilon=16$ 和 $\mu=1$，其对应的折射率为 4。根据 [34], 中给出的分析，分辨率可提高约 4 倍。因此，轮廓可稳定地重建至第 3 个傅里叶模态，但无法重建至第 10 个模式，这一点也得到了图 3（第 2 行）所示数值结果的验证。

现在，我们将介电薄层替换为具有完美匹配参数的双负超材料，即 $\varepsilon=\mu=-1$。根据第5.3节中的分析，我们应该能够恢复轮廓的所有频率模式。图 3（第 3 行）所示的数值结果验证了这一结论：即使在 $N=10$时，重建轮廓仍未受到干扰。

最后，我们考虑非理想参数的情况，以 $\varepsilon=-1+0.05i$ 和 $\mu=-0.97$为例。相应的重建结果如图 3（第 4 行）所示。不出所料，结果会随着与理想情况的偏差增大而变差，尤其是对于 $N=10$而言，但仍与理想情况比较接近。重建精度自然会

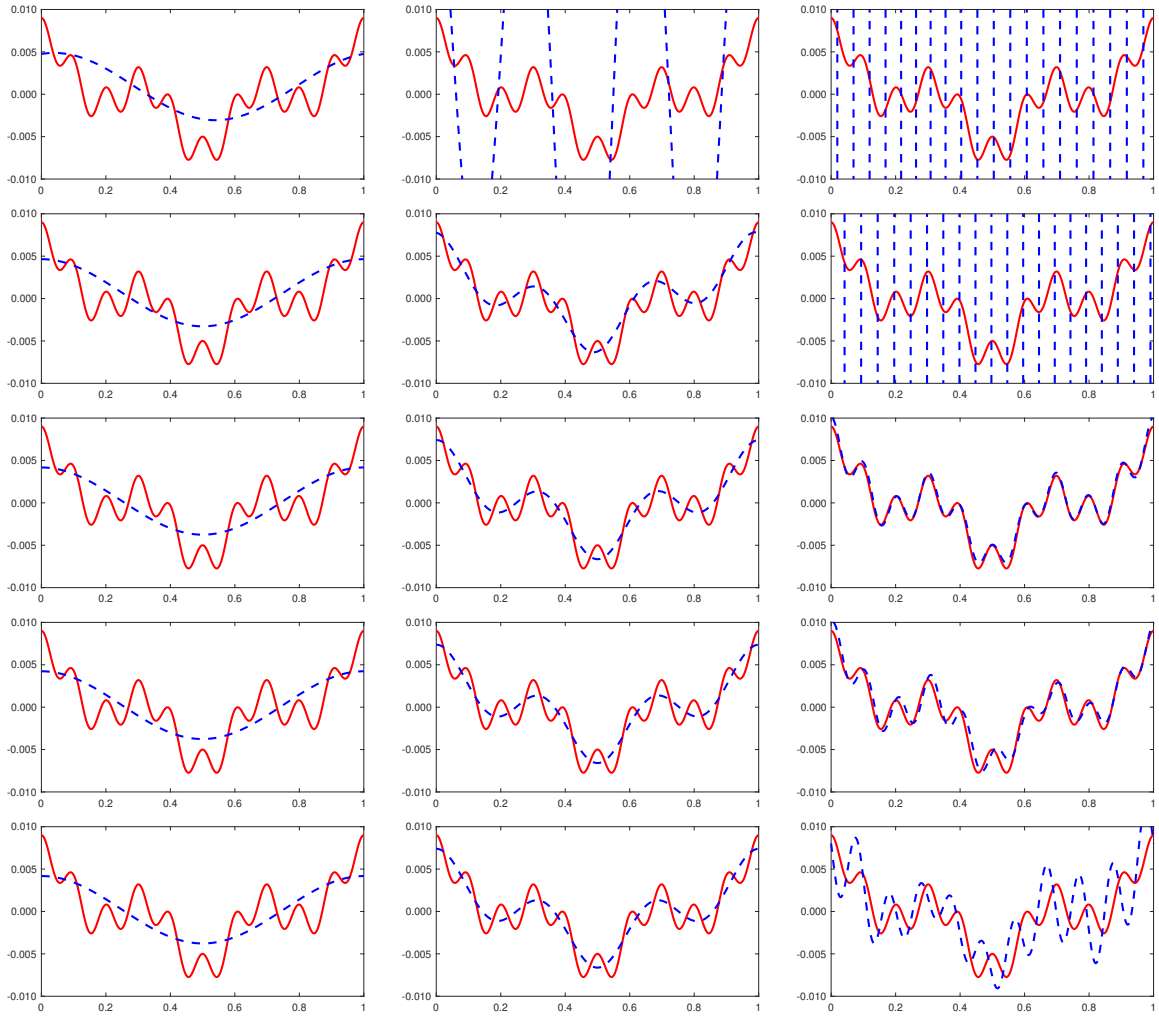


图 3：式（39）所示光滑剖面函数的数值实验。红色实线表示真实剖面，蓝色虚线表示重建轮廓。平板的相对介电常数和磁导率指定如下：第 1 行：$\varepsilon = 1.0$ 和 $\mu = 1.0$；第 2 行：$\varepsilon = 16.0$ 和 $\mu = 1.0$；第 3 行：$\varepsilon = -1.0$ 和 $\mu = -1.0$；第 4 行：$\varepsilon = -1 + 0.05i$ 和 $\mu = -0.97$；第 5 行：$\varepsilon = -1 + 0.1i$ 和 $\mu = -1.06$。截止频率指定如下：第 1 列：$N = 1$；第 2 列：$N = 3$；第 3 列：$N = 10$。

随着 ε 和 μ 进一步偏离 -1而降低。图 3（第 5 行）展示了采用$\varepsilon = -1 + 0.1i$ 和 $\mu = -1.06$时的重建结果。请注意，第一和第三模式仍能很好地重建，而第 10 模式则不能。

在图 4 中，我们给出了式 33 中定义的缩放因子 $|\Upsilon_n|$ 的绝对值，并将其绘制为模式编号 n 的函数，其中采用了前述数值实验中使用的 ε 和 μ 的不同取值。我们作出以下观察：

(i) 无平板（$\varepsilon = 1,\ \mu = 1$）：$|\Upsilon_n|$ 从 $n = 0$ 开始呈指数增长。

(ii) 高折射率（$\varepsilon = 16, \mu = 1$）：$|\Upsilon_n|$ 在 n 的少数几个较小取值下仍保持较小，随后随着 n的增加而呈指数增长，与情况 (i) 相比，分辨率得到提升。

(iii) 完美匹配参数（$\varepsilon = \mu = -1$）：对于所有 n，$|\Upsilon_n|$ 保持较小，从而实现无限分辨率。

(iv) 非理想参数（$\varepsilon = -1 + 0.05i,\ \mu = -0.97$ 和 $\varepsilon = -1 + 0.1i,\ \mu = -1.06$）：与情形 (ii) 类似，$|\Upsilon_n|$ 在若干个较小的 n 取值下仍然较小，之后呈指数增长。因此，分辨率得到提升，并且随着 $\varepsilon \to -1$ 和 $\mu \to -1$，分辨率还会继续提高。

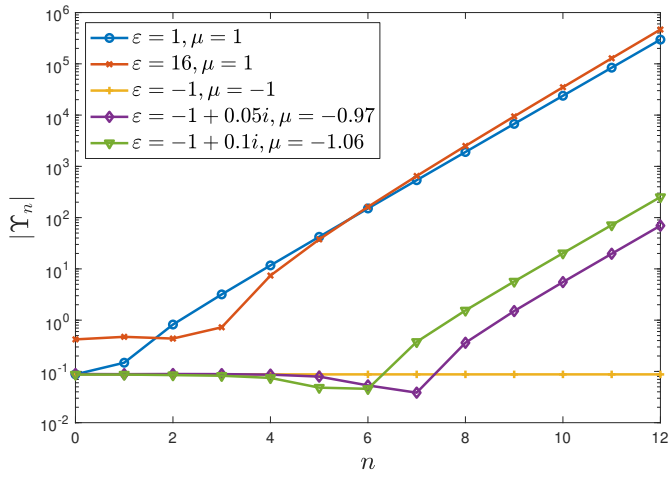


图4：数值实验中，公式（33）中的缩放因子 $|\Upsilon_n|$ 在对数刻度上绘制，参数 ε 和 μ 取不同值；相关数值实验见图3。

6.2 非光滑轮廓

尽管重建公式的推导要求 g' 和 g''存在，但由于傅里叶级数具有逼近性质，我们的方法仍可应用于非光滑轮廓。我们首先考虑由 $f(x) = \delta g(x)$ 定义的非光滑轮廓，其中 $\delta = 0.01$ 和

$$g(x) = (1 - 10|x - 0.3|)\chi_{[0.2,0.4]}(x) + (1 - 10|x - 0.7|)\chi_{[0.6,0.8]}(x). \tag{40}$$

注意，该轮廓包含无穷多个非零傅里叶模态。实验结果见图5。对于不含平板的情况（$\varepsilon = 1.0, \mu = 1.0$），我们从截止频率 $N = 1$开始。重建轮廓是光滑的，但两个隆起无法区分。取值为 $N = 2$时，重建开始捕捉到这些隆起，但精度仍然较低。当我们尝试将 N 提高到 4 以提升精度时，重建结果受到噪声的严重干扰。

接下来，我们加入一块折射率较高的平板（$\varepsilon = 16.0, \mu = 1.0$）。此时，采用 $N = 4$时重建变得稳定且更加精确。然而，将 N 提高到 5 又会导致结果不稳定。

最后，我们用超透镜替换平板（$\varepsilon = -1.0, \mu = -1.0$）。现在，重建至少在 $N = 8$ 以内保持稳定且准确。

N接下来，我们考虑由 $f(x) = \delta g(x)$ 给出的不连续轮廓，其中 $\delta = 0.001$ an d

$$g(x) = \chi_{[0.2,0.4]}(x) + \chi_{[0.6,0.8]}(x). \tag{41}$$

我们使用与上一个实验类似的装置进行了另一项实验，并在图 6 中展示结果。在没有平板的情况下，对于 $\varepsilon = 1.0$ 和 $\mu = 1.0$，无论截止频率 N 取何值，我们都未能获得令人满意的结果。对于折射率较高、由 $\varepsilon = 16.0$ 和 $\mu = 1.0$ 表征的平板，当 $N = 2$ 时可获得最佳重建效果；而当 $N \geqslant 3$ 时，重建质量会下降。在超透镜情形下，对于 $\varepsilon = -1.0$ 和 $\mu = -1.0$，重建至少在 $N = 20$ 以内保持稳定。然而，随着 N 增大，吉布斯现象会更加明显。

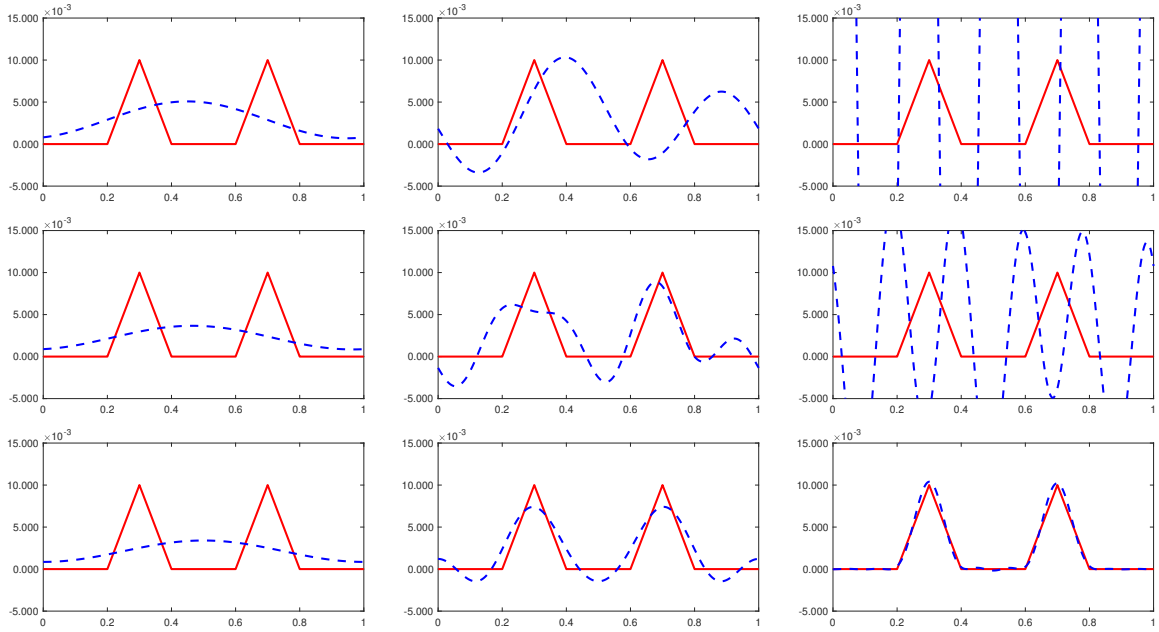


图5：非光滑轮廓函数（40）的数值实验。红色实线表示真实剖面，而蓝色虚线表示重建轮廓。第1行： $\varepsilon = 1.0, \mu = 1.0, N = 1, 2, 4$；第2行： $\varepsilon = 16.0, \mu = 1.0, N = 1, 4, 5$；第3行： $\varepsilon = -1.0, \mu = -1.0, N = 1, 4, 8$。

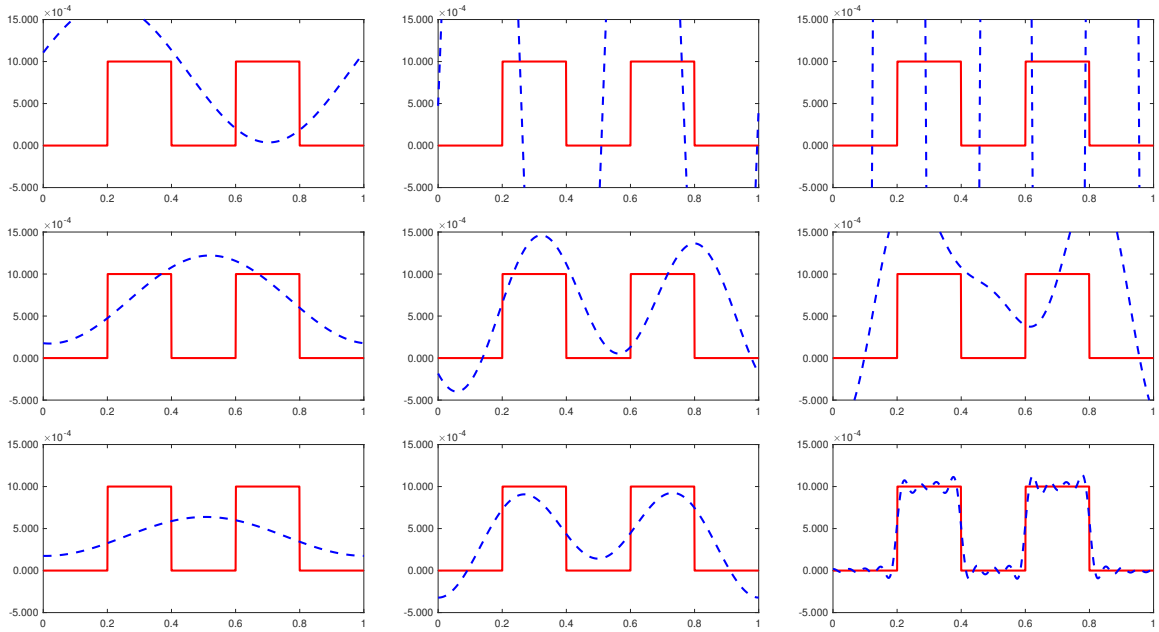


图 6：非光滑轮廓函数 (41) 的数值实验。红色实线表示真实剖面，蓝色虚线表示重建轮廓。第 1 行： $\varepsilon = 1.0, \mu = 1.0, N = 1, 2, 3$；第 2 行： $\varepsilon = 16.0, \mu = 1.0, N = 1, 2, 3$；第 3 行： $\varepsilon = -1.0, \mu = -1.0, N = 1, 2, 20$。

7 结论

本文针对具有低振幅轮廓的衍射光栅，采用逆散射问题方法研究了双负折射率材料的超分辨率效应。通过应用变换场展开法，我们推导出了散射问题线性近似的简单重建公式。研究结果表明，当介电常数和磁导率的取值完全匹配时，有望实现无限分辨率。为展示重建方法的有效性，我们针对具有理想或非理想参数的光滑和非光滑轮廓进行了数值实验。

关于这一主题，未来研究可从多个方向展开。首先，需要进一步研究具有变号系数的周期结构的正向散射问题，以建立其适定性。还可以研究逆问题的唯一性，并分析所提出方法的收敛性和误差估计。此外，还可以将我们的方法扩展到其他形式的波以及三维情形。对于更一般的轮廓或逆介质散射问题，优化方法或采样方法可能会发挥作用。最后，为了将我们的方法应用于现实场景，必须将超材料的构成和测量设备纳入模型。

致谢

PL 的研究部分得到了美国国家科学基金会（NSF）项目 DMS-2208256 的资助。

参考文献

[1] E Betzig、M Isaacson 和 A Lewis。采集模式的近场扫描光学显微镜。应用物理快报，51(25):2088–2090，1987。[2] Xinzhong Chen、Debo Hu、Ryan Mescall、Guanjun You、DN Basov、Qing Dai 和 Mengkun Liu。用于先进材料研究的现代散射型扫描近场光学显微镜。先进材料，31(24):1804774，2019。[3] Bert Hecht、Beate Sick、Urs P Wild、Volker Deckert、Renato Zenobi、Olivier JF Martin 和 Dieter W Pohl。采用孔径探针的扫描近场光学显微镜：基础与应用。化学物理学杂志，112(18):7761–7774，2000。[4] H Heinzelmann 和 DW Pohl。扫描近场光学显微镜。应用物理 *A*，59(2):89–101，1994。[5] Robin Christian Reddick、RJ Warmack、DW Chilcott、SL Sharp 和 TL Ferrell。光子扫描隧道显微镜。科学仪器评论，61(12):3669–3677，1990。[6] Gang Bao 和 Junshan Lin。无限地平面上的表面位移近场成像。《逆问题与成像》，7(2):377，2013。[7] Gang Bao 和 Lei Zhang。基于多频无相位数据的多尺度粗糙表面形状重建。《逆问题》，32(8):85002，2016。[8] Bo Zhang 和 Haiwen Zhang。基于仅强度远场或近场数据的局部粗糙表面成像。《逆问题》，33(5):55001，2017。[9] Jianliang Li、Guanying Sun 和 Bo Zhang。用于无限局部粗糙界面反散射的 Kirsch-Kress 方法。应用分析，96(1):85–107，2017。[10] Meng Ding、Jianliang Li、Keji Liu 和 Jiaqing Yang。利用近场数据的线性采样法对局部粗糙表面进行成像。《*SIAM*成像科学杂志》，10(3):1579–1602，2017。

[11] Jianliang Li、Jiaqing Yang 和 Bo Zhang。局部粗糙界面声学逆散射的线性采样法。《逆问题与成像》，15(5):1247，2021。[12] Guanghui Hu、Xiaoli Liu、Bo Zhang 和 Haiwen Zhang。无界刚性粗糙表面弹性波逆散射的一种非迭代方法。《逆问题》，35(2):25007，2019。[13] Xiaoli Liu、Bo Zhang 和 Haiwen Zhang。无界粗糙表面散射的直接成像法。《*SIAM*成像科学杂志》，11(2):1629–1650，2018。[14] David P Nicholls 和 Fernando Reitich。粗糙表面散射中的形状变形：抵消、条件性与收敛。《*JOSA A*》，21(4):590–605，2004。[15] David P Nicholls 和 Fernando Reitich。粗糙表面散射中的形状变形：改进算法。《*JOSA A*》，21(4):606–621，2004。[16] Gang Bao 和 Peijun Li。无限粗糙表面的近场成像。《*SIAM*应用数学杂志》，73(6):2162–2187，2013。[17] Ting Cheng、Peijun Li 和 Yuliang Wang。理想导电光栅表面的近场成像。《*JOSA A*》，30(12):2473–2481，2013。[18] Peijun Li 和 Yuliang Wang。障碍物的近场成像。《逆问题与成像》，9(1):189，2015。[19] Peijun Li 和 Yuliang Wang。利用近场数据求解障碍物逆散射问题的数值解。《计算物理学杂志》，290:157–168，2015。[20] Peijun Li 和 Yuliang Wang。内部空腔的近场成像。《计算物理通讯》，17(2):542–563，2015。[21] Gang Bao 和 Peijun Li。介质中无限粗糙表面的近场成像。《*SIAM*成像科学杂志》，7(2):867–899，2014。[22] Peijun Li、Yuliang Wang 和 Yue Zhao。利用近场数据进行弹性波表面逆散射。《逆问题》，31(3):35009，2015。[23] Peijun Li 和 Yuliang Wang。弹性波小型扰动障碍物的近场成像。《逆问题》，31(8):85010，2015。[24] Peijun Li、Yuliang Wang 和 Yue Zhao。弹性波双周期表面的近场成像。《计算物理学杂志》，324:1–23，2016。[25] Gang Bao、Tao Cui 和 Peijun Li。双周期结构中麦克斯韦方程组的逆衍射光栅问题。《光学快报》，22(4):4799–4816，2014。[26] Xue Jiang 和 Peijun Li。双周期介质光栅的电磁逆衍射。《逆问题》，33(8):85004，2017。[27] Gang Bao 和 Peijun Li。近场成像的收敛性分析。《逆问题》，30(8):85008，2014。[28] Peijun Li、Yuliang Wang 和 Yue Zhao。弹性波近场成像的收敛性分析。*Applicable Analysis*，95(11):2339–2360，2016。[29] Viktor G Veselago。介电常数和磁导率同时为负的物质的电动力学。《物理科学进展》，92(7):517，1967。[30] John Brian Pendry。负折射造就完美透镜。《物理评论快报》，85(18):3966，2000。

[31] Nicholas Fang、Hyesog Lee、Cheng Sun 和 Xiang Zhang。利用银超透镜实现亚衍射极限光学成像。科学，308(5721):534–537，2005。[32] R Moussa、S Foteinopoulou、Lei Zhang、G Tuttle、K Guven、E Ozbay 和 CM Soukoulis。二维光子晶体中的负折射与超透镜效应。物理评论 *B*，71(8):85106，2005。[33] Koray Aydin、Irfan Bulu 和 Ekmel Ozbay。利用负折射率超材料超透镜实现亚波长分辨率。应用物理快报，90(25):254102，2007。[34] Gang Bao、Peijun Li 和 Yuliang Wang。利用远场数据进行近场成像。应用数学快报，60:36–42，2016。