arXiv:2305.03096v1 [math.DS] 4 May 2023

低复杂度子移位的结构

Basti´an Espinoza[1,2]

[1]智利大学[2]皮卡第儒勒·凡尔纳大学

2023年5月8日

摘要

研究零熵符号动力学时，一个逐渐不可回避的想法是：系统的动力学性质会在其中诱导出一种组合结构。一个针对这一直觉的老问题，是如何利用 $\mathcal{S}$-adic 形式为线性增长复杂度子移位建立结构定理。这个问题被称为 $\mathcal{S}$-adic 猜想，并推动了该领域多项有影响力的成果。本文通过为这一类子移位给出 $\mathcal{S}$-adic 结构，彻底解决了该猜想。我们的方法还可推广至复杂度非超线性增长的子移位。主要结果的一个重要推论是，这些复杂度类现在也可以运用 $\mathcal{S}$-adic 工具。我们展示了这如何为若干已知结果提供统一框架并简化其证明，其中包括具有开创性的 1996 年 Cassaigne 定理。

1 引言

结构定理

研究零熵符号动力系统时，一个变得不可避免的思路是：系统的动力性质会在其中诱导出一种组合结构。这种方法最早见于 Morse 和 Hedlund 的著作 [MH38; MH40], ，他们根据作者所称的导出序列所给出的结构研究了 Sturmian 序列。随着理论的发展，出现了更多类似的例子。相关例子包括替代子移位和线性递归子移位 [DHS99], Toeplitz 系统 [GJ00], （区间交换变换的自然编码） [GJ02], 树状序列 [GL22] 以及一般的极小子移位 [HPS92]。

我们简要介绍一下陈述这些定理的现代标准形式。替换是一个映射 τ: $\mathcal{A}^+ \to \mathcal{B}^+$ 将词 $w = a_1 \dots a_\ell$ 的字母 a_i 替换为 $\tau(a_i)$。于是，形式为（τ_n: $\mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+$）$_{n\geq 0}$ 的一列替换 $\boldsymbol{\tau}$称为一个 $\mathcal{S}$-进序列，并生成一个子移位 $X_{\boldsymbol{\tau}} \subseteq \mathcal{A}_0^{\mathbb{Z}}$；该子移位 $x \in X_{\boldsymbol{\tau}}$ 的定义要求：当且仅当对所有 $\ell \geq 0$, $x_{[-\ell,\ell)}$

对某些 $n \geq 1$ 和 $a \in \mathcal{A}_n$ 而言，出现在 $\tau_0\tau_1 \dots \tau_{n-1}(a)$ 中。在这一背景下，上述各类的结构定理是一种 $\mathcal{S}$-进刻画，即其形式为：子移位 X 属于类 $\mathcal{C}$，当且仅当 X 由满足某些性质 $\mathcal{P}$的 $\mathcal{S}$-进序列生成。于是，对于 X中的点而言，这一结构表现为一个无限的反代换过程。

在结构定理的语境下，一个有趣的直觉是：复杂度足够低的子移位应该受到很大限制，因而隐藏着强大的结构。这里，低复杂度是一个模糊的术语，指复杂度函数 $p_X(n)$ 增长缓慢；该函数定义为在 X 的某个点中出现的长度为 n 的词的数量。这一直觉可以追溯到 20 世纪 70 年代，并在 80 年代和 90 年代逐渐成熟，最终被确立为以下更具体的问题：

问题 1. 考虑线性增长复杂度子移位的类 (L)，其定义要求对于某个 $d > 0$，$p_X(n) \leq dn$。类 (L) 是否存在 $\mathcal{S}$-进制刻画?

问题 1 被称为 $\mathcal{S}$-进制猜想。它首次被明确提出是在 [Fer96], 中，作者将这一想法归功于 B. Host，而后者又将其归功于整个马赛学派。

解决这一猜想的尝试揭示了两个主要难点。第一个难点是，与其他结构定理中的情况不同，复杂度并未诱导出清晰的结构。例如，在代换情形中，人们始终清楚，代换本身应当产生一种自相似结构；主要障碍在于技术层面，涉及反代换过程是否得到了适当定义 [Mos96]。类似地，在 Sturmian 和区间交换变换情形中，已知的结构来自几何对应物（更准确地说，来自 Rauzy 归纳）。第二个挑战是，我们在问题 1 中寻找的条件 $\mathcal{P}$ 定义不明确。为说明这一点，请注意， [Cas11] 的一个推论是 (L) 的如下 $\mathcal{S}$-进刻画：一个子移位属于 (L)，当且仅当存在一个生成它的 $\boldsymbol{\tau}$，且 $X_{\boldsymbol{\tau}}$ 属于 (L)。这个对问题 1 的同义反复式回答并未提供任何信息。有人提出了对问题 1 的一些限制，以避免这类平凡答案，但没有一种被认为令人满意；关于完整讨论，请参阅 [DLR13] 。

在本文中，我们通过证明以下定理，彻底解决了关于极小子移位的 $\mathcal{S}$-adic 猜想。

定理 1. 极小子移位 X 具有线性增长复杂度，即 X 满足

$$\limsup_{n\to+\infty} p_X(n)/n < +\infty,$$

当且仅当存在 $d > 0$ 和一个 $\mathcal{S}$-进序列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n\colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)_{n\geq 0}$ 生成 X，使得对每个 $n \geq 0$，以下条件成立：

$(\mathcal{P}_1)$ $\#(\mathsf{root}\,\sigma_{[0,n)}(\mathcal{A}_n)) \leq d$ [†].

[†]对于一个词 u，$\mathsf{root}\,u$ 表示 u 的最短前缀 v，使得对于某个 k，有 $u = v^k$；对于词集合 $\mathcal{W}$，$\mathsf{root}\,\mathcal{W} = \{\mathsf{root}\,w\colon\ w \in \mathcal{W}\}$。

$(\mathcal{P}_2)$ $|\sigma_{[0,n)}(a)| \le d \cdot |\sigma_{[0,n)}(b)|$ 对每个 $a, b \in \mathcal{A}_n$均成立。$(\mathcal{P}_3)$ $|\sigma_{n-1}(a)| \le d$ 对每个 $a \in \mathcal{A}_n$均成立。

我们的方法可推广至非超线性复杂度子移位（NSL）。

定理 2. 一个极小子移位 X 具有非超线性增长复杂度，即X 满足

$$\liminf_{n\to+\infty} p_X(n)/n < +\infty,$$

当且仅当存在 $d > 0$ 和一个 $\mathcal{S}$-adic 序列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n\colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)_{n\ge 0}$ 生成 X，使得对于每个 $n \ge 0$，以下内容成立：

$(\mathcal{P}_1)$ #(根$^{\sigma_{[0,n)}}(\mathcal{A}_n)) \le d$.

$(\mathcal{P}_2)$ $|\sigma_{[0,n)}(a)| \le d \cdot |\sigma_{[0,n)}(b)|$ 对每个 $a, b \in \mathcal{A}_n$。

非极小子移位的情形不会带来额外的内在困难，可以通过与本文所介绍的方法类似的方法加以处理。然而，为了避免使本已技术性较强的论述过于繁复，我们决定不将其纳入本文。

我们主要结果的一个重要推论是，(L) 和 (NSL) 类可以运用 $\mathcal{S}$-进方法。我们将在第 11 节展示，这如何为 (L) 和 (NSL) 上若干已知结果提供统一框架并简化其证明，其中包括开创性的 Cassaigne 定理 [Cas95]。我们主要结果的进一步应用将在未来的一篇论文中介绍，其中包括运用 [BKMS13 中定理 7 所用的技巧，为 (NSL) [Cre22] 的部分刚性给出一个新证明。2],

我们在更专门的定理 6 和定理 7 中证明，当 X 属于 (L) 或 (NSL) 时，可以假设 $\boldsymbol{\tau}$ 是可识别的。请注意，定理1和定理2中的条件 $(\mathcal{P}_i)$ 是最优的，因为如果去掉其中任何一个条件，相应的定理就不成立。条件 $(\mathcal{P}_2)$ 和 $(\mathcal{P}_3)$ 也出现在正替代情形 [‡] 和线性递归子移位中，但我们定理中的情况截然不同，因为我们不要求正性。

关于 $(\mathcal{P}_1)$ 和 $(\mathcal{P}_3)$，它们是基于两项条件设计的，这两项条件在大多数涉及 $\mathcal{S}$-进制序列的研究中都会出现。第一项是具有有界字母表（BA），要求 $\#\mathcal{A}_n$ 一致有界；第二项是有限性，即要求集合 $\{\tau_n : n \ge 0\}$ 是有限的。请注意，有限性蕴含 (BA) 以及条件 $(\mathcal{P}_1)$ 和 $(\mathcal{P}_3)$，(BA) 蕴含 $(\mathcal{P}_1)$，并且在 $(\mathcal{P}_3)$ 下，有限性与 (BA) 等价。有几篇论文研究了有限的 $\mathcal{S}$-进制序列是否存在 (L) 中的子移位（参见 [Ler14] 及其中的参考文献），而具有 (BA) 的 $\mathcal{S}$-进制序列已被证明与 (L) 和 (NSL)[Fer96; DDMP21] 密切相关。因此，很自然会问，我们能否在定理 1 中用有限性替换条件 $(\mathcal{P}_1)$ 和 $(\mathcal{P}_3)$。我们在定理 8 中证明，这是不可能的。更确切地说，我们构造了一个具有线性增长的极小子移位。

[‡]若对所有 $a \in \mathcal{A}$ 和 $b \in \mathcal{B}$，b 都出现在 $\sigma(a)$ 中，则称替换 $\sigma\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}^+$ 是 *positive*。

复杂度使得任何生成该子移位且满足 ($\mathcal{P}_1$)、($\mathcal{P}_2$) 和 ($\mathcal{P}_3$) 的 $\boldsymbol{\tau}$ 都不是有限因果的（等价地，(BA) 不成立）。不过，在定理 6 和定理 7 中，我们给出了 $\boldsymbol{\tau}$ 是有限因果的一个充分条件。满足这一充分条件的子移位包括代换子移位、区间交换变换的编码以及树状子移位。

主要证明的策略

定理1和定理2的证明中，困难之处在于根据复杂度假设构造一个满足性质（$\mathcal{P}_i$）的 $\mathcal{S}$-进制序列。我们以定理1的情形为例，详细说明我们的策略；定理2的证明类似。

引入以下术语很方便：子移位$X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$的一个编码是一个对（$Z, \sigma$），其中 $Z \subseteq \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$ 是一个子移位，且 $\sigma\colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}^+$ 是一个替换，使得 $X = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k\sigma\ (Z)$。一个标准结论是，若 $\boldsymbol{\tau}$ 是一个 $\mathcal{S}$-进制序列，则存在子移位 $X_{\boldsymbol{\tau}}^{(n)}$，满足 $X_{\boldsymbol{\tau}}^{(0)} = X$，使得对任意 $n < m$，$(X_{\boldsymbol{\tau}}^{(m)}, \tau_{[n,m)})$ 都是 $X_{\boldsymbol{\tau}}^{(n)}$ 的一个编码，其中 $\tau_{[n,m)} = \tau_n\tau_{n+1}\cdots\tau_{m-1}$。

设 X 是一个线性增长复杂度子移位，且 $d = \sup_{n\geq 1} p_X(n)/n$。为子移位 X 构造 $\mathcal{S}$-进序列的典型方法是一个归纳过程：首先，$X_0 := X$；然后，定义 X_i 的一个编码 (X_{i+1}, σ_{i+1})。这样，$\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_n)_{n\geq 0}$ 就是一个 $\mathcal{S}$-进序列，在温和条件下，它生成 X。而我们采取一种更直接的方法，类似于 DDMP21 中的定理 43] 和 Esp22 中的推论 14], ，但补充了更多技术细节。我们考虑一个具有适当增长速度的正整数递增序列 $(\ell_n)_{n\geq 0}$，并构造 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 的编码 ($X_n \subseteq \mathcal{C}_n^{\mathbb{Z}}, \sigma_n\colon \mathcal{C}_n \to \mathcal{A}^+$)，使其满足 $(\mathcal{P}_1)\ \frac{1}{d'}\ell_n \leq |\sigma(a)| \leq d'\ell_n$，对所有字母 a 均成立，且 d' 依赖于 d，并且满足某些技术性质。这些技术性质使我们能够以如下方式定义连接替换 $\tau_n\colon \mathcal{C}_{n+1} \to \mathcal{C}_n^+$：对所有 $x \in X_{n+1}$，$\sigma_n\tau_n(x)$ 与 $\sigma_{n+1}(x)$ 相差一个移位。然后，我们可以证明，$\boldsymbol{\tau} = (\sigma_0, \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots)$ 生成 X，并满足定理 1 中的所有性质。

构造编码（X_n、σ_n）的主要思路是：通过对 [Fer96 中技术的修改，借助命题 5], ，我们可以构造 X 的一种编码（X'_n、σ'_n）（命题 10 对此进行了描述），使得词 $\sigma'(a)$ 要么是强非周期的，要么是强周期的。非周期词对复杂度有很大贡献，因此我们可以利用 d 对其进行有效控制。对于周期词，我们依靠词组合学中的技巧进行控制。利用这两个思路，我们在第7至8节中得到了（X'_n、σ'_n）的两种变体，它们的性质逐渐变好，最后一种是（X_n、σ_n）。

关于论文的组织结构

本文分为三个部分。第一部分包括第2至4节，介绍预备理论以及处理周期词的若干引理。随后，在第5至9节中，我们给出定理1和定理2的证明。最后，在第10和11节中，我们证明定理 8，并介绍主要结果的应用。

2 预备知识

本文只使用离散区间，即 $[a,b) = \{k \in \mathbb{Z} : \ a \leq k < b\}$ 对于 a、$b \in \mathbb{R}$。

2.1 词与子移位

设 $\mathcal{A}$ 是一个字母表，即一个有限集合。$\mathcal{A}$ 中的元素称为字母，它们的串接 $w = a_1 \dots a_\ell$ 称为词。ℓ 的数量是 w 的长度，记为 $|w|$；$\mathcal{A}$ 中所有长度为 ℓ 的词构成的集合记为 $\mathcal{A}^\ell$，且 $\mathcal{A}^+ = \bigcup_{\ell \geq 1} \mathcal{A}^\ell$。引入空词 1 很方便，它的长度为零。我们令 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^+ \cup \{1\}$。给定 $w \in \mathcal{A}^+$ 和 $n \geq 1$，w^n 表示将 w 串接 n 次。如果 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}^+$，我们令

$$\langle \mathcal{W} \rangle = \min\{|w| : w \in \mathcal{W}\} \text{ and } |\mathcal{W}| = \max\{|w| : w \in \mathcal{W}\}. \tag{1}$$

词 $w \in \mathcal{A}^+$ 是 $|u|$-周期的，且 $u \in \mathcal{A}^+$，如果对于某个 $n \geq 1$，w 出现在 u^n 中。我们用 per(w) 表示使 w 成为 p-周期词的最小 p。如果对于某个 $r \in \mathcal{A}^*$，u、$v \in \mathcal{A}^+$ 满足 $ur = rv$，则称它们共轭。

为了更准确地描述 w 的周期性性质，我们使用根这一概念，它将在本文中发挥关键作用。

定义 1。$w \in \mathcal{A}^*$ 的最小根，简称根，是满足 $w = u^k$（其中某个 $k \geq 1$）的最短前缀 u，记作 root w。

我们指出，per(w) 是一个整数，而 root w 是一个词；通常，per(w) 与 $|\text{root}\, w|$ 不同。

我们赋予 $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$ 由 $\mathcal{A}$ 上的离散拓扑诱导的乘积拓扑。于是，$\mathcal{A}^\mathbb{Z}$ 是一个康托尔空间（即紧致且全不连通），我们称其为 $\mathcal{A}$ 上的全移位。x 中的元素有时用记号 $x = \dots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1\dots$ 表示，其中的圆点表示 x 的零坐标。移位映射 S: $\mathcal{A}^\mathbb{Z} \to \mathcal{A}^\mathbb{Z}$ 定义为 $S((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$，它是 $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$ 到自身的一个同胚。对于 $x \in \mathcal{A}^\mathbb{Z}$ 和整数 $i < j$，我们用 $x_{[i,j)}$ 表示词 $x_ix_{i+1}\dots x_{j-1}$。处理形如 $[i,\infty)$、(i,∞)、$(-\infty,i]$ 和 $(-\infty,i)$ 的区间时，也将使用类似记号。子移位是 $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$ 的闭子集 X，满足 $S(X) = X$。子移位 $X \subseteq \mathcal{A}^\mathbb{Z}$ 的语言是集合 $\mathcal{L}(X)$，由所有至少在一个 $x \in X$ 中出现的单词 $w \in \mathcal{A}^+$ 组成。

设 $X \subseteq \mathcal{A}^\mathbb{Z}$ 为一个子移位，且 $v \in \mathcal{A}^+$。我们将使用记号 $v^\infty = vvv\dots \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$ 和 $b^\mathbb{Z} = \dots vv.vv\dots \in \mathcal{A}^\mathbb{Z}$。我们用 $\text{Pow}_X(v)$ 表示词的集合 v^k，其中 $k \geq 1$，满足存在长度为 $|v|$ 的 u、$w \in \mathcal{A}^+ \setminus \{v\}$，使得 $uv^kw \in \mathcal{L}(X)$。X 的幂复杂度是数目 pow-com(X) $= \sup_{v\in\mathcal{A}^+} \#\text{Pow}_X(v)$。注意，pow-com($X$) 可能是无限的。具有有限幂复杂度的例子包括线性递归子移位，以及每个足够长的词的扩展图均为无环图的子移位（特别是 Sturmian 子移位和极小区间交换变换的编码）。

2.2 态射和编码

配备串接运算的集合 $\mathcal{A}^*$ 可以视为由 $\mathcal{A}$ 生成的自由幺半群。特别地， $\mathcal{A}^+$ 是由 $\mathcal{A}$ 生成的自由半群。

设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是有限字母表， $\tau\colon \mathcal{A}^+ \to \mathcal{B}^+$ 是它们所生成的自由半群之间的一个态射。那么， τ 通过串接自然地扩展为从 $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 到自身以及从 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 到自身的映射（对于双边序列，我们分别将 τ 应用于正坐标和负坐标，并在坐标零处串接结果）。如果对于每个 $a \in \mathcal{A}$，所有字母 $b \in \mathcal{B}$ 都出现在 $\tau(a)$ 中，我们就称 τ 为正的；如果存在字母 a、 $b \in \mathcal{B}$，使得对于任意 $c \in \mathcal{A}$， $\tau(c)$ 都以 a 开头并以 b 结尾，我们就称 τ 是适当的；如果对于所有 a、$b \in \mathcal{B}$， $\tau(a) = \tau(b)$ 蕴含 $a = b$，我们就称 τ 是字母上的单射。 τ 的最小长度和最大长度分别为数值 $\langle\tau\rangle := \langle\tau(\mathcal{A})\rangle = \min_{a\in\mathcal{A}} |\tau(a)|$ 和 $|\tau| := |\tau(\mathcal{A})| = \max_{a\in\mathcal{A}} |\tau(a)|$。

我们注意到，任意映射 $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}^+$ 都可以通过串接自然地扩展为一个从 $\mathcal{A}^+$ 到 $\mathcal{B}^+$ 的态射（我们也用 τ 表示），并且任意态射 $\tau\colon \mathcal{A}^+ \to \mathcal{B}^+$ 都由其在 $\mathcal{A}$ 上的限制唯一确定。从现在起，我们将用相同的记号表示映射 $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}^+$ 及其扩展得到的态射 $\tau\colon \mathcal{A}^+ \to \mathcal{B}^+$。

2.2.1 分解与可识别性

现在我们引入分解、可识别性性质及其相关记号。

定义 2. 设 $Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ 是一个子移位，且 $\tau\colon \mathcal{B}^+ \to \mathcal{A}^+$ 是一个态射。如果 $x = S^k\tau(y)$ 且 $0 \le k < |\tau(y_0)|$，我们称 $(k, y) \in \mathbb{Z} \times Y$ 是 Y 中 $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 的一个 τ-分解。

如果每个点 $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 在 Y 中至多有一种 τ 分解，则称对 (Y, τ) 可识别。我们称 (Y, τ) 是 d-可识别的，其中 $d \ge 1$，如果每当 (k, y) 和 $(\tilde{k}, \tilde{y})$ 分别是 x，$\tilde{x} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 在 Y 中的 τ 分解，且 $x_{[-d,d)} = \tilde{x}_{[-d,d)}$ 时，我们都有 $k = k$ 和 $y_0 = \tilde{y}_0$。

$c\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ Y中 x的 τ-分解（k, y）的切割函数定义为

$$c_j = \begin{cases} -k + |\tau(y_{[0,j)})| & \text{if } j \ge 0, \\ -k - |\tau(y_{[j,0)})| & \text{if } j < 0. \end{cases} \tag{2}$$

当（Y, τ）是可识别的时，我们记（c, y） $= \mathrm{F}^{(Y,\tau)}$（x）以及（c_0, y_0） $= \mathrm{F}^0_{(Y,\tau)}$（$x$）。

注 1。在前述定义的语境下：

(1) 点 $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 在 Y 中具有 τ-分解，当且仅当 x 属于子移位 $X := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} S^n\tau(Y)$。因此，$(Y, \tau)$ 可识别，当且仅当每个 $x \in X$ 在 Y 中恰有一个 τ-分解。(2) 若 (k, y) 是 Y 中 $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 的一个 τ-分解，且 c 是其切割函数，则对任意 $j \in \mathbb{Z}$，有 $x = S^{-c_j}\tau(S^j y)$。然而，只有当 $j = 0$ 时，我们才有 $0 \le -c_j < |\tau((S^j y)_0)|$。因此，$(-c_j, S^j y)$ 是 x 的一个 τ-分解，当且仅当 $j = 0$。

(3) 若 (Y,τ) 可识别，则由紧致性论证可知，对于某个 $d\geq 1$，它是 d-可识别的。(4) 假设 (Y,τ) 可识别。令 $x\in X$、$(c,y)=\mathrm{F}_{(Y,\tau)}(x)$ 且 $i\in\mathbb{Z}$。那么，存在唯一的 $j\in\mathbb{Z}$ 使得 $i\in[c_j,c_{j+1})$。注意，最后一个条件等价于 $\mathrm{F}^0_{(Y,\tau)}(S^i x)=(c_j-i,y_j)$。

态射复合时可识别性性质的表现由以下两个引理给出。

引理 1（[BSTY19], 引理 3.5）。设 $\sigma\colon \mathcal{C}\to\mathcal{B}^+$ 和 $\tau\colon \mathcal{B}\to\mathcal{C}^+$ 为态射，$Z\subseteq\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$ 为子移位，且 $Y=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}S^k\sigma(Z)$。那么，$(Z,\tau\sigma)$ 可识别，当且仅当 (Z,σ) 和 (Y,τ) 均可识别。

引理 2。设 $\sigma\colon \mathcal{C}\to\mathcal{B}^+$ 和 $\tau\colon \mathcal{B}\to\mathcal{C}^+$ 为态射，$Z\subseteq\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$ 为子移位。令 $Y=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}S^k\sigma(Z)$ 和 $X=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}S^k\tau(Y)$。假设 $(Z,\tau\sigma)$ 可识别。令 $x\in X$、(k,Y) 为 τ-分解（位于 Y 中的 x），并令 (ℓ,z) 为 $\tau\sigma$-分解（位于 Z 中的 x）。那么，存在 $m\in[0,|\sigma(z_0)|)$，使得 $y=S^m\sigma(z)$ 且 $k=|\sigma(z_{[-m,0)})|+\ell$。

证明。由于 (ℓ,z) 是 x 的一个 $\tau\sigma$-分解，我们有 $\ell\in[0,|\tau(\sigma(z_0))|)$。因此，存在 $m\in[0,|\sigma(z_0)|)$，使得

$$|\sigma(z)_{[0,m)}|\leq\ell<|\sigma(z)_{[0,m]}|. \tag{3}$$

因此，由于 (ℓ,z) 是 x 的一个 $\tau\sigma$-分解，我们可以写成

$$S^{\ell-|\tau(\sigma(z)_{[0,m)})|}\tau(S^m\sigma(z))=S^\ell\tau\sigma(z)=x.$$

由此以及 (3) 可知，$(\ell-|\tau(\sigma(z)_{[0,m)})|,S^m\sigma(z))$ 是 Y 中 x 的一个 τ-分解。利用引理 1 中 (Y,τ) 是可识别的这一点，我们得出 $\ell-|\tau(\sigma(z)_{[0,m)})|=k$ 和 $S^m\sigma(z)=y$。□

2.2.2 子移位的编码

固定一个子移位 $X\subseteq\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$。$X$ 的一个编码是一个对 (Y,τ)，其中 $Y\subseteq\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ 是一个子移位，且 $\tau\colon \mathcal{B}^+\to\mathcal{A}^+$ 是满足 $X=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}S^k\tau(Y)$ 的态射。我们在命题 1 中提出一种构造子移位 X 的可识别编码的一般方法。这一思想在文献中很常见，有多种不同的名称，适用的一般性程度也各不相同。我们的命题 1 受到基于回返词的编码的启发，该编码见于 [Dur98]。

设 $U\subseteq X$ 为一个既开又闭的集合（即 clopen 集合）。我们称 U 为

(1) ℓ-相对稠密的，如果对所有 $x\in X$，都存在 $k\in[0,\ell)$，使得 $S^kx\in U$;

（2）半径为 r，如果 U 是形如 $\{x\in X\colon x_{[-|u|,|v|)}=uv\}$ 的集合的并，其中 $u,\ v\in\mathcal{A}^r$。

注意，由于 X 是极小的，任意非空闭开集 U 都是 ℓ-综合的，其半径为 r，其中 ℓ 和 r满足条件。

命题 1. 设 $U \subseteq X$ 是一个非空闭开集。存在一个可识别的 X 编码 $(Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}, \sigma: \mathcal{B} \to \mathcal{A}^{+})$，其在字母上是单射，满足：如果 $x \in X$，$(c, y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$ 且 $i \in \mathbb{Z}$，那么 $S^i x \in U$ 当且仅当存在某个 $j \in \mathbb{Z}$。

如果 U 是 ℓ-稠密的且半径为 r，那么 (Y, σ) 还满足：

(1) 对所有 $a \in \mathcal{B}$，$|\sigma(a)| \leq \ell$。

(2) (Y, σ) 是 $(\ell + r)$-可识别的。

2.3 $\mathcal{S}$-进子移位

我们回顾 [BSTY19] 中给出的 $\mathcal{S}$-进子移位的定义。指令序列 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_n: \mathcal{A}_{n+1}^{+} \to \mathcal{A}_n^{+})_{n \geq 0}$ 是一列态射。对于 $0 \leq n < m$，我们用 $\tau_{[n,m)}$ 表示态射 $\tau_n \circ \tau_{n+1} \circ \cdots \circ \tau_{m-1}$。如果 $\boldsymbol{\tau}$ 处处增长，则称其为处处增长的；

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \tau_{[0,n)} \rangle = +\infty, \tag{4}$$

对于任意 $n \geq 0$，若存在 $m > n$ 使得 $\tau_{[n,m)}$ 为正的，则称其为本原。注意，如果 $\boldsymbol{\tau}$ 是本原的，那么 $\boldsymbol{\tau}$ 处处增长。我们指出，这个概念与替换动力系统中通常使用的概念略有不同。

对于 $n \geq 0$，我们定义

$$X_{\boldsymbol{\tau}}^{(n)} = \left\{ x \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{Z}} : \forall \ell \in \mathbb{N},\, x_{[-\ell,\ell]} \text{ occurs in } \tau_{[n,m)}(a) \text{ for some } m > n, a \in \mathcal{A}_m \right\}.$$

显然，这个集合定义了一个子移位。我们令 $X_{\boldsymbol{\tau}} = X_{\boldsymbol{\tau}}^{(0)}$，并称这个集合为由 $\boldsymbol{\tau}$生成的 $\mathcal{S}$-进子移位。如果 $\boldsymbol{\tau}$处处增长，那么每个 $X_{\boldsymbol{\tau}}^{(n)}$、 $n \geq 0$都非空；如果 $\boldsymbol{\tau}$ 是本原的，那么对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $X_{\boldsymbol{\tau}}^{(n)}$都是极小的。也存在非处处增长的指令序列生成极小子移位。

$X_{\boldsymbol{\tau}}^{(n)}$之间的关系由以下引理给出。

引理 3（[BSTY19], 引理 4.2）。设 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_n: \mathcal{A}_{n+1}^{+} \to \mathcal{A}_n^{+})_{n \in \mathbb{N}}$ 是一个态射指令序列。对于任意 $0 \leq n < m$，$(X_{\boldsymbol{\tau}}^{(m)}, \tau_{[n,m)})$ 是 $X_{\boldsymbol{\tau}}^{(n)}$ 的一种编码。

2.4 复杂度函数

子移位 X 的复杂度函数 $p_X: \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 定义为 $p_X(n) = \#\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{A}^n$。等价地， $p_X(n)$ 统计至少在一个 $x \in X$中出现的长度为 n 的单词数量。

定义 3. 我们称 X 具有

(1) 如果存在 $d > 0$，使得对于所有 $n \geq 1$， $p_X(n) \leq dn$，则称为线性增长复杂度；(2) 如果存在 $d > 0$，使得对于无限多个 $n \geq 1$， $p_X(n) \leq dn$，则称为非超线性增长复杂度。

注 2. 当 X 为无限时，Morse 和 Hedlund 的经典定理/MH*38]* 保证，对所有 $n \geq 0$，都有 $p_X(n) \geq n+1$。因此，具有线性增长复杂度的无限子移位满足 $n \leq p_X(n) \leq dn$，所以 p_X 呈线性增长。

下面的定理是经典结果。

定理 3（[Cas95]）。设 X 是一个传递线性增长复杂度子移位。那么，$p_X(n+1) - p_X(n)$ 一致有界。

为证明第 9 节中的定理 6 和定理 7，我们只需要 Cassaigne 定理的以下两个较弱版本。

引理 4. 设 X 是一个子移位，且 $d \geq 1$ 满足对所有 $n \geq 1$，$p_X(n) \leq dn$。那么，对于每个 $n \geq 1$，都存在 $m \in [n, 2n)$，使得 $p_X(m+1) - p_X(m) \leq 2d$。

证明。令 $n \geq 1$。我们观察到，利用 $p_X(2n) \leq 2dn$，$-p_X(m)$ for$m \in [n, 2n)$ 的 $p_X(m+1)$ 平均值可作如下界定：

$$\frac{1}{n}\sum_{m=n}^{2n-1} p_X(m+1) - p_X(m) = \frac{1}{n}(p_X(2n) - p(n)) \leq 2d.$$

因此，存在满足 $p_X(m+1) - p_X(m) \leq 2d$ 的 $m \in [n, 2n)$。 □

引理5. 设 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 是一个子移位，且 $d \geq 1$ 满足：对于无穷多个 $n \geq 1$，有 $p_X(n) \leq dn$。那么，存在无穷多个 m，使得 $p_X(m) \leq 3dm$，且 $p_X(m+1) - p_X(m) \leq 2d$。

证明. 任取 $n \geq 1$。该假设允许我们找到 $k \geq 2n$，使得$p_X(k) \leq dk$。现在我们注意到

$$\frac{1}{\lceil k/2 \rceil}\sum_{m=\lfloor k/2 \rfloor}^{k} p_X(m+1) - p_X(m) \leq \frac{1}{\lceil k/2 \rceil} p_X(k) \leq 2d.$$

因此，存在 m，使得 $\lfloor k/2 \rfloor \leq m \leq k$ 且 $p_X(m+1) - p_X(m) \leq 2d$。第一个条件确保 $m \geq n$，且 $p_X(m) \leq p_X(k) \leq dk \leq 3dm$。 □

3 一些组合引理

为了证明我们的主要结果，我们需要大量处理强周期词。本节的目的是提供所需的工具。

关于词的周期性的一个基本结果是 Fine 和 Wilf 定理，现陈述如下。

定理 4. 设 $u, v, w \in \mathcal{A}^+$，并假设 w 是 u^∞ 和 v^∞ 的前缀。若 $|w| \geq |u| + |v| - 1$，则存在 $t \in \mathcal{A}^+$，使得 u 和 v 是 t 的幂。

定理 4 的证明可见于 [RS97，第 6 章，定理 6。1]。

引理 6. 设 u 是一个词，满足 $|u| \geq 2|$根 $u|$。那么，$|$根$\,u| =$周期(u)。

证明。注意到 u 是 (根 $u)^{\mathbb{Z}}$ 的前缀，因此 per$(u) \leq |$根$\,u|$。接下来只需证明另一个不等式。

令 t 为 u 的长度为 per(u) 的前缀。则 u 同时是 t^{∞} 和 (根 $u)^{\infty}$ 的前缀。由于 $|u| \geq 2\,$per$(u) \geq |t| + |$根 $u|$，我们推得引理 4 的假设成立。因此，t 和根$\,u$ 是同一词 r 的幂。特别地，u 是 r 的幂，所以必有根$\,u = r$。因此，$|$根$\,u| = |r| \leq |t| =$per(u)。 □

注记 3。前一个引理保证，若 u 是一个词且 $k \geq 1$，则根$\,u^k =$ 根$\,u$。特别地，若 u 和 v 是同一词的幂，则它们有相同的根。这些基本关系将在全文中广泛使用。

下一个命题将使我们能够同步强周期词的出现。

命题 2. 设 $t, s \in \mathcal{A}^{+}$。

(1) 假设 $\ell \geq |s| + |t| - 1$ 和 i、$j \in \mathbb{Z}$ 满足 $t^{\mathbb{Z}}_{[i,i+\ell)} = s^{\mathbb{Z}}_{[j,j+\ell)}$，则 $S^i t = S^j s$。
(2) 整数 i 满足 $S^i t^{\mathbb{Z}} = t^{\mathbb{Z}}$ 当且仅当 $i = 0$ （模 $|$根 $t|$）。

证明。我们首先证明条目 (1)。设 $t_0 = t^{\mathbb{Z}}_{[i,i+|t|)}$，$s_0 = s^{\mathbb{Z}}_{[j,j+|s|)}$ 和 $w = t^{\mathbb{Z}}_{[i,i+\ell)} = s^{\mathbb{Z}}_{[j,j+\ell)}$。那么，$w$ 同时是 t_0^{∞}和 s_0^{∞}的一个前缀。由于 $|w| = \ell \geq |s| + |t| - 1 = |s_0| + |t_0| - 1$，我们可以利用定理 4 推导出 s_0和 t_0是同一词 r的幂。于是，我们得到 $S^i s^{\mathbb{Z}} = s_0^{\mathbb{Z}} = r^{\mathbb{Z}} = t_0^{\mathbb{Z}} = S^j t^{\mathbb{Z}}$。

我们现在证明条目（2）。显然，如果 $i = 0$（模 $|$根$\,t|$），那么 $S^i t^{\mathbb{Z}} = t^{\mathbb{Z}}$。设 $S^i t^{\mathbb{Z}} = t^{\mathbb{Z}}$。我们采用反证法，假设$i \neq 0$（模 $|$根 $t|$）。记根 $t = ss'$，其中 $|s| = i$（模 $|$根$\,t|$）。于是，$(s's)^{\mathbb{Z}} = S^i t^{\mathbb{Z}} = t^{\mathbb{Z}} = (ss')^{\mathbb{Z}}$，因此由定理 4 可知，$s's$ 和 ss' 是同一词 r 的幂。特别地，根$(s's) =$ 根$(ss') =$ 根$\,r$。这意味着

$$|\,\mathrm{root}(s's)| = |\,\mathrm{root}(ss')| = |\,\mathrm{root}\,\mathrm{root}\,t| = |\,\mathrm{root}\,t| = |ss'| = |s's|,$$

因此根$(s's) = s's$。所以，$s's = ss'$。现在，由于 $i \neq 0$（模 $|$根 $t|$），s和 s'都不是空词。由此以及条件 $s's = ss'$ 可知，$s's$ 是 s^{∞} 和 s'^{∞}的前缀。于是我们可以利用定理 4 推出，s 和 s' 是同一词 r' 的幂。因此，由于根 $= ss'$，$ss' =$根 $t =$根$\,s =$根 s'。这只有在 $s = 1$或 $s' = 1$时才可能。consequently，$|s| \in \{0, |$根 $t|\}$ 且$i = |s| = 0$（模 $|$根 $t|$），这与我们的假设矛盾。 □

本章节的其余部分旨在证明命题3和命题4。这些结果描述了这样一类情形：可以从一个词的较小子词中获取有关其全局周期的信息。我们指出，命题3和命题4可直接由临界因子分解定理推得；

临界因子分解定理是词组合学中的一个基本结果；为了使本文的论述尽可能自洽，我们在此给出仅依赖于定理 4 的证明。

引理 7. 设 u、v、w、s 和 t 是 $\mathcal{A}$ 中的单词。

(1) 假设 uv 出现在 t^∞ 中，且 vw 出现在 s^∞ 中。如果 $|v| \geq |t|+|s|-1$，那么 uvw 同时出现在 t^∞ 和 s^∞ 中。(2) 假设 uv 是 t^∞ 的前缀，且 vw 是 t^∞ 的后缀。如果 $|v| \geq 2|t|$，那么 uvw 是根 t 的幂。(3) 如果 $|v| \geq$ 周期(uv) +周期(vw)，那么周期(uvw) = 周期(uv) = 周期(vw)。

证明。假设条目 (1) 的假设成立。那么，对于某些 i、$j \in \mathbb{Z}$，有 $uv = t^{\mathbb{Z}}_{[i,i+|uv|)}$ 和 $vw = s^{\mathbb{Z}}_{[j,j+|vw|)}$。因此，$t^{\mathbb{Z}}_{[i+|u|,i+|uv|)} = s^{\mathbb{Z}}_{[j,j+|v|)}$。由此以及不等式 $|v| \geq |t| + |s| - 1$，我们可以在命题 2 中使用条目 (1)，得到 $S^{i+|u|}t^{\mathbb{Z}} = S^j s^{\mathbb{Z}}$。我们得出结论，

$$uvw = t^{\mathbb{Z}}_{[i,i+|uv|)}s^{\mathbb{Z}}_{[j+|v|,j+|vw|)} = t^{\mathbb{Z}}_{[i,i+|uv|)}t^{\mathbb{Z}}_{[i+|u|+|v|,i+|u|+|vw|)} = t^{\mathbb{Z}}_{[i,i+|uvw|)},$$

并且 uvw 出现在 t^∞ 中。同样，uvw 出现在 s^∞ 中。

现在我们假设条目（2）的假设成立。令 t_0 = 根 t则，$uv = (t_0^{\mathbb{Z}})_{[0,|uv|)}$ 且 $vw = (t_0^{\mathbb{Z}})_{[-|vw|,0)}$。这意味着 $(t_0^{\mathbb{Z}})_{[|u|,|uv|)} = (t_0^{\mathbb{Z}})_{[-|vw|,-|w|)}$，然后，由于 $|v| \geq 2|t| \geq 2|t_0|$，命题 2 中的条目 (1) 可确保 马会

$$S^{|u|}t_0^{\mathbb{Z}} = S^{-|vw|}t_0^{\mathbb{Z}} \text{ and } uvw = (t_0^{\mathbb{Z}})_{[0,|uvw|)}. \tag{5}$$

现在，由（5）中的第一个方程和命题 2 中的条目（2），我们得到$|u| = -|vw|$ （模 $|t_0|$），也就是说，$|uvw| = 0$ （模 $|t_0|$）。由此以及（5）中的第二个方程可得，$uvw = (t_0^{\mathbb{Z}})_{[0,|uvw|)}$ 是 t_0 = 根 t的幂。

最后我们证明条目（3）。显然，per(uv) $\leq$ per(uvw)，且 per(vw) $\leq$per(uvw)。令 t_0 为 uv 的长度为 per(uv) 的前缀，令 s_0 为 vw 的长度为 per(vw) 的前缀。于是，uv 在 t_0 中出现，且 vw 在 s_0中出现。由此以及不等式 $|v| \geq |u| + |v| \geq |t_0| + |s_0|$，我们可以使用本引理的条目 (1)，推得 uvw 在 $t_0^{\mathbb{Z}}$和 $s_0^{\mathbb{Z}}$中出现。由此可得，per(uvw) $\leq |t_0|$ = per(uv)，且 per(uvw) $\leq |s_0|$ =per(vw)。因此，per(uvw) = per(uv) = per(vw)。 □

命题 3. 设 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}^+$ 和 $u \in \mathcal{A}^+$ 满足 $|u| \geq 2|\mathcal{V}|$。假设对于 u 的任意长度为 $|v| = 2|\mathcal{V}|$的子词 v，都存在 $w_v \in \mathcal{V}$，使得 v在 $w_v^{\mathbb{Z}}$中出现。那么，对于任意这样的词 v，u都在 $w_v^{\mathbb{Z}}$中出现。特别地，per(u) $\leq |\mathcal{V}|$。

证明。情形 $|u| = 2|\mathcal{V}|$ 可直接由假设得出。假设该引理对长度为 $2|\mathcal{V}| \leq |u'| < |u|$的词 u' 成立。设 v 是 u 的一个长度为 $|v| = 2|\mathcal{V}|$的子词。我们需要证明 w 出现在 $w_v^{\mathbb{Z}}$中。记 $u = au' = u''b$为某些字母 a、b以及词 u'、u''。不失一般性，假设 v 出现在 u'中。由于 $|u| > 2|\mathcal{V}|$，我们可以取 u'' 的一个长度为 $|v'| = 2|\mathcal{V}|$的子词 v'。于是，可以运用归纳假设

得出 u' 出现在 $w_v^{\mathbb{Z}}$ 中，且 u'' 出现在 $w_{v'}^{\mathbb{Z}}$中。现在， u' 和u'' 有一个长度为 $|u|-2 \geq 2|\mathcal{W}|-1 \geq |w_v|+|w_{v'}|-1$ 的公共子词。因此，可以应用引理 7 的条目 (1)，从而得出 w 出现在$w_v^{\mathbb{Z}}$中。这就证明了归纳步骤，进而证明了该命题。 □

命题 4。设 u 是一个词。

(1) 若 t 是一个出现在 u 中的词，且 $|t| \geq 2$周期(u)，则 per(t) = per(u)。

(2) 设 $k \geq 1$。若 $|u| \geq 2k$ 且 per(u) $> k$，则存在一个出现在 u中的 t，满足 $|t| = 2k$ 且 per(t) $> k$。

证明。我们先证明条目 (1)。注意到 per(t) ≤per(u)，因此只需证明另一个不等式。设 s （分别为 s'）是 t 的前缀，其长度为 per(t)（分别为 per(u)）。于是， t 出现在 $s^{\mathbb{Z}}$ 中，且 $s'^{\mathbb{Z}}$。由于 $|t| \geq 2$per(u) $\geq |s|+|s'|$，我们可以利用命题 2 中的条目 (1) 推得，对于某个$\ell \in \mathbb{Z}$，有 $s^{\mathbb{Z}} = S^{\ell}s'^{\mathbb{Z}}$ 。这意味着，由于 u 出现在 $s'^{\mathbb{Z}}$中， u 出现在 $s^{\mathbb{Z}}$中。特别地，per(u) $\leq |s|$ = per(t)。

接下来，我们通过反证法证明条目（2）。假设 $k \geq 1$ 和 u 满足 $|u| \geq 2k$ 且 per(u) $> k$，但对于所有出现在 u 中且长度为$|t| = 2k$ 的词 t，都有 per(t) $\leq k$。对于所有这样的 t，我们定义 s_t 为 t 的长度为 per(t) 的前缀，并注意到 t 出现在 $s_t^{\mathbb{Z}}$ 中且 $|s_t| \leq k$。因此，由词 s_t 和词 u 组成的集合 $\mathcal{V}$ 满足命题 3 的假设。我们得出 per(u) $\leq |\mathcal{V}| \leq k$。 □

4 基于特殊词的经典编码

右特殊词的概念是研究线性增长复杂度子移位的重要概念。在本章节中，我们介绍关于右特殊词及其相关编码的基本结果。这些思想中的大多数对于许多关于 $\mathcal{S}$-进猜想及相关问题的研究都是共通的。本文的一个新要素是命题 7。

定义 4. 设 X 是一个子移位。如果存在两个不同的字母 a 和 b，使得 wa、$wb \in \mathcal{L}($$X$)，则称词 $w \in \mathcal{L}(X)$ 为右特殊词。我们用 RS$_n$(X) 表示 X 中长度为 n 的所有右特殊词的集合。

备注 4. 我们也可以定义左特殊词，它们与右特殊词共同构成 X 的特殊词集合。本文中，我们只使用右特殊词。

下一个命题总结了关于 RS$_n$(X) 及其与 X 的复杂度之间关系的事实，这些事实对我们很重要。闭开集 U 的一个回返词是满足以下条件的元素 $w \in \mathcal{A}^+$： 存在 $x \in X$ 使得，如果$k \in \{0, |w|\}$，则 $S^k x \in U$；如果 $k \in (0, |w|)$，则 $S^k x \notin U$。

命题 5. 设 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 为一个非周期子移位，且 U 为闭开集$U = \{x \in X :$ $x_{[0,n)} \in$ RS$_n$(X)$\}$。

(1) 关于右特殊词的数量，我们有以下界限：

$$\frac{1}{\#\mathcal{A}}(p_X(n+1)-p_X(n)) \le \#\,\mathsf{RS}_n(X) \le p_X(n+1)-p_X(n).$$

(2) 集合 U 在 X 中是 $(p_X(n)+n)$-复现的。

(3) U 的返回词数量至多为 $\#\mathcal{A}\cdot\#\,\mathsf{RS}_n(X)$。

证明。条目 (1)、(2) 和 (3) 的证明可以在 [LR13] 中找到，但使用了不同的记号。□

我们可以结合命题 5 和命题 1，得到以下命题。

命题 6. 假设 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 是一个非周期子移位，并令 d 为 $\lceil p_X(n)/n \rceil$、$p_X(n+1)-p_X(n)$ 和 $\#\mathcal{A}$ 中的最大值。令 $(Z \subseteq \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}, \tau\colon \mathcal{C}^+ \to \mathcal{A}^+)$ 为根据命题 1 通过 $U=\{x\in X\colon x_{[0,n)} \in \mathsf{RS}_n(X)\}$ 得到的编码。那么：

(1) $\#\mathcal{C} \le d^3$. (2) $|\tau(a)| \le (d+1)n$ 对所有 $a \in \mathcal{C}$成立。(3) (Z,τ) 是 $(d+2)n$-可识别的。(4) 若 $x \in X$、$(c,z) = \mathsf{F}^{(Z,\tau)}(x)$ 且 $i \in \mathbb{Z}$，则 $i = c_j$ 对某个 $j \in \mathbb{Z}$ 成立，当且仅当 $x_{[i,i+n)} \in \mathsf{RS}(X)$。

命题 6 是其他关于 $\mathcal{S}$-进猜想的研究的出发点；例如参见 [Fer96；Ler12]。

命题 7。设 (Z,τ) 是命题 6 中的编码。设 $x \in X$ and $(c,z) = \mathsf{F}^{(Z,\tau)}(x)$，并假设 i, $j \in \mathbb{Z}$ 满足 $i+d<j$ 和 $\ell := \max\{|\tau(z_k)|\colon k \in [i,j)\} \le n/6d$。那么，$\mathsf{per}(x_{[c_i-n/3,c_{j-d})}) \le d\ell$。

证明。我们首先注意到，由于对所有 $m \in \mathbb{Z}$，$x_{[c_m-n,c_m)} \in \mathsf{RS}_n(X)$，且 $\#\mathsf{RS}_n(X) \le d$，我们可以运用抽屉原理，对每个$k \in [i, j-d)$，得到整数 $p_k, q_k \in [k, k+d)$，使得 $p_k < q_k$ 且 $x_{[c_{p_k}-n,c_{p_k})} = x_{[c_{q_k}-n,c_{q_k})}$。这些条件意味着 $\mathsf{per}(x_{[c_{p_k}-n,c_{q_k})}) \le c_{q_k} - c_{p_k} \le d\ell$。因此，由于 $c_{p_k} - n \le c_k + d\ell - n \le c_k - 2n/3$ 和 $c_{q_k} \ge c_{k+1}$，

$$x_{[c_k-2n/3,c_{k+1})} \text{ for all } k \in [i, j-d). \tag{6}$$

我们将利用 (6) 通过反证法证明该引理。假设 $\mathsf{per}(x_{[c_i-n/3,c_{j-d})}) > d\ell$。那么，根据引理 4 中的条目（2），存在 $m \in [c_i - n/3 + 2d\ell, c_{j-d})$，使得 $\mathsf{per}(x_{[m-2d\ell,m)}) > d\ell$。现在，条件 $m \in [c_i - n/3 + 2d\ell, c_{j-d})$ 使我们能够找到 $k \in [i, j-d)$，使得 $m \in [c_k - n/3, c_{k+1})$。因此，由于 $2d\ell \le n/3$，$x_{[m-2d\ell,m)}$ 出现在 $x_{[c_k-2n/3,c_{k+1})}$ 中，从而得到 $\mathsf{per}(x_{[c_k-n/3,c_{k+1})}) \ge \mathsf{per}(x_{[m-2d\ell,m)}) > \varepsilon$。这与 (6) 矛盾，证明完毕。□

5 第一次编码

本节开始证明主要结果：定理 6 和定理 7。我们首先构造命题 8 中描述的编码。然后，在第 6、7 和 8 节中，我们将修改这些编码，得到它们的新版本，每个版本的性质都优于前一个版本。我们将在第 8.2 小节中证明，最终的编码可以通过态射连接起来；并将在第 9 节中利用这一事实完成主要结果的证明。

命题 8。设 X 是一个极小无限子移位，$n \geq 1$ 且令 d 为 $\lceil p_X(n)/n \rceil$、$p_X(n+1) - p_X(n)$、$\#\mathcal{A}$ 和 10^4 中的最大值。那么，存在一个 X 和 $\varepsilon \in [n/d^{2d^3+4}, n/d$ 的编码 $(Z \subseteq \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}, \tau\colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}^+)$，满足以下条件：

(1) $\mathcal{C}$ 至多有 d^3 个元素。(2) 对所有 $a \in \mathcal{C}$，$|\tau(a)| \leq 3dn$。(3) (Z, τ) 是 $3dn$-可识别的。(4) 命题 9 中的周期性性质均成立。

命题 9。考虑命题 12 中描述的编码。设 $z \in Z, x = \tau(z)$ 和 $(c, z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$。我们将 $\mathrm{Q_P}(z)$ 定义为满足以下条件的整数集合：$j \in \mathbb{Z}$，使得 $|\text{根 } \tau(z_j)| \leq \varepsilon$ 且 $x_{[c_j - 99\varepsilon, c_{j+1} + 99\varepsilon)} = (\text{根 } \tau(z_j))^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, |\tau(z_j)| + 99\varepsilon)}$。

(1) $0 \notin \mathrm{Q_P}(z)$ 和 $|\tau(z_0)| > 401\varepsilon$ 意味着 $\mathrm{per}(x_{[c_0+97\varepsilon, c_1-97\varepsilon)}) > \varepsilon$。(2) 假设 $0 \notin \mathrm{Q_P}(z)$ 和 $|\tau(z_0)| \leq 401\varepsilon$。如果 $-1 \in \mathrm{Q_P}(z)$ 或 $1 \in \mathrm{Q_P}(x)$，那么 $\mathrm{per}(x_{[c_0+97\varepsilon, c_1-97\varepsilon)}) > \varepsilon$。(3) 如果 $k > d$ 且对所有 $j \in [0, k)$ 都有 $|\tau(z_j)| \leq 401\varepsilon$，那么 $[0, k) \subseteq \mathrm{Q_P}(z)$。(4) 设 $z' \in Z$，并假设 $0 \in \mathrm{Q_P}(z)$、$0 \in \mathrm{Q_P}(z')$，且 $\mathrm{root}\ \tau(z_0)$ 共轭于 $\mathrm{root}\ \tau(z'_0)$。那么 $\mathrm{root}\ \tau(z_0) = \mathrm{root}\ \tau(z'_0)$。

在本章节的其余部分，我们固定使用以下记号。设 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 是一个极小无限子移位，$n \geq 0$ 和 d 分别为 $p_X(n)/n$、$p_X(n+1) - p_X(n)$、$\#\mathcal{A}$ 和 10^4 的最大值。当使用命题 6 并取 X 和 n 时，我们将其给出的编码记为 $(Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}, \sigma\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}^+)$。

5.1 第一个编码的构造

引理 8. 设 $\mathcal{W}$ 是一个有限词集合。那么，存在 $\varepsilon \in [|\mathcal{W}|/d^{2\#\mathcal{W}+4}, |\mathcal{W}|/d)$，使得对于所有 $w \in \mathcal{W}$，要么 $|w| > 10^4\varepsilon$，要么 $|w| \leq \varepsilon/d$。

证明。令 $d_0 = 10^4 d$ and，对于 $\ell \in [1, \#\mathcal{W}+1]$, $\mathcal{W}_\ell = \{w \in \mathcal{W}\colon |\mathcal{W}|/d_0^{\ell+1} < |w| \leq |\mathcal{W}|/d_0^{\ell}\}$。根据抽屉原理，存在某个 $\ell \in [1, \#\mathcal{W}+1]$，使得 $\mathcal{W}_\ell$ 为空。我们令 $\varepsilon = \lfloor d|\mathcal{W}|/d_0^{\ell+1} \rfloor$，并注意到对于任意 $w \in \mathcal{W}$，要么 $w \in \cup_{\ell' < \ell} \mathcal{W}_{\ell'}$ 且 $|w| > 10^4\varepsilon$，要么 $w \in \cup_{\ell' > \ell} \mathcal{W}_{\ell'}$ 且 $|w| \leq \varepsilon/d$。此外，由于 $\ell \in [1, \#\mathcal{W}+1]$，我们有 $\varepsilon \in [|\mathcal{W}|/d^{2\#\mathcal{W}+4}, |\mathcal{W}|/d)$。 □

我们利用集合 $\sigma(\mathcal{B})$ 应用引理 8，得到满足以下条件的 $\varepsilon \in [n/d^{2\#\mathcal{W}+4}, n/d)$

$$\text{for all } a \in \mathcal{B}, \text{ either } |\sigma(a)| > 10^4\varepsilon \text{ or } |\sigma(a)| \leq \varepsilon/d. \tag{7}$$

注意，由命题 6 中的条目 (1)， $\varepsilon \in [n/d^{2d^3+4}, n/d)$ as $d^3 \geq \#\sigma(\mathcal{B})$。

现在我们定义集合 $\mathcal{W}_\varepsilon \subseteq \mathcal{A}^+$ ，它对于控制命题 8 中的周期性性质很重要。我们先介绍与词的周期性相关的经典概念。回忆一下，若存在某个 $r \in \mathcal{A}^*$ 使得 $ur = rv$ ，则两个词 u、$v \in \mathcal{A}^+$ 互为共轭。关系 $u \sim_R v$ iff u and v 互为共轭是一种等价关系，而一个 $\sim_R$-等价类称为一个旋转类。若词 $u \in \mathcal{A}^+$ 不是 $u = 根\, u$ [§]，则称其为本原词。我们固定一个集合 $\mathcal{W}_\varepsilon \subseteq \mathcal{A}^+$ ，其中包含每个本原词 $w \in \mathcal{A}^+$ 的旋转类中的一个元素，使得$|w| \leq \varepsilon$。

引理 9. 设 $t \in \mathcal{A}^+$ 满足 $\mathsf{per}(t) \leq \varepsilon$ 且 $|t| \geq 198\varepsilon + \mathsf{per}(t)$。那么，对某个 $s \in \mathcal{W}_\varepsilon$， $s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, 99\varepsilon)}$ 出现在 t中。

证明。令 u 为 t 的长度为 $\mathsf{per}(t)$ 的前缀。注意到 u 是本原的，否则 $\mathsf{per}(t) \leq |根\, u| < |u| = \mathsf{per}(t)$，这就产生了矛盾。由 u 的本原性和不等式 $|u| = \mathsf{per}(t) \leq \varepsilon$ 可知，存在 $s \in \mathcal{W}_\varepsilon$ 以及 s 的一个后缀 u' ，使得 $|s| = |u|$ ，且 $u's$ 是 uu的前缀。由于 $\mathsf{per}(t) = |u| = |s|$，于是我们有

$$t \text{ is a prefix of } u's^\infty. \tag{8}$$

我们令 $k = \left\lceil \frac{99\varepsilon - |u'|}{|s|} \right\rceil$。注意，由于 $|s| \leq \varepsilon$。

$$|u's^k| = |u'| + k|s| \leq \mathsf{per}(t) + \left\lceil \frac{99\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil \varepsilon = 99\varepsilon + \mathsf{per}(t).$$

因此， $|u's^k| + 99\varepsilon \leq |t|$。由此以及方程 (8) 可推知，若 v是 s^∞ 的长度为 99ε 的前缀，则 $u's^kv$ 是 t的前缀。现在，我们有如下界

$$|u's^k| = |u'| + \left\lceil \frac{99\varepsilon - |u'|}{|s|} \right\rceil |s| \geq 99\varepsilon.$$

因此， $s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, 99\varepsilon)}$ 是 $u's^kv$的后缀。我们得出结论，$s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, 99\varepsilon)}$ 出现在t中。 □

引理 10. 设 w 是一个长度为 n的词。那么，存在一个分解$w = vuu'v'$ ，满足以下条件组之一。

(*a*) $|u| = |u'| = 99\varepsilon$、 $|v|$、 $|v'| \geq n/2 - 500\varepsilon$ 和 $uu' = s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, 99\varepsilon)}$ 对某个 $s \in \mathcal{W}_\varepsilon$ 成立。(*b*) $|u| = |u'| = 500\varepsilon$、 $|v| = \lfloor n/2 - 500\varepsilon \rfloor$、 $|v'| \geq n/2 - 500\varepsilon$ 和 $s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, 99\varepsilon)}$ 对所有 $s \in \mathcal{W}_\varepsilon$ 都不出现在 uu' 中。

[§]提醒读者，根 u 是 u 的最短前缀 v ，使得 $u = v^k$ ，其中$k \geq 1$

证明。由于 $|w| \geq 2 \cdot 500\varepsilon$，存在一个分解 $w = v_0 t v_0'$，其中 $|v_0| = \lfloor n/2 - 500\varepsilon \rfloor$、$|v_0'| \geq n/2 - 500\varepsilon$ 和 $|t| = 2 \cdot 500\varepsilon$。有两种情况：

(i) 对某个 $s \in \mathcal{W}_\varepsilon$，$s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, 99\varepsilon)}$ 出现在 t 中。

(ii) 对所有 $s \in \mathcal{W}_\varepsilon$，$s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, 99\varepsilon)}$ 均不出现在 t 中。

首先假设情形 (i) 发生。此时可以写作 $t = v_1 u u' v_1'$，其中 $uu' = s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, 99\varepsilon)}$ 和 $|u| = |u'| = 99\varepsilon$。我们令 $v = v_0 v_1$ 和 $v' = v_1' v_0'$，并注意到 $w = vuu'v'$ 满足条件 (a)。

我们现在假设 (ii) 成立。由于 t 的长度等于 $2 \cdot 500\varepsilon$，我们可以写成 $w_0 = uu'$，其中 $|u| = |u'| = 500\varepsilon$。然后，分解 $w = v_0 u u v_0'$满足条件 (b)。 □

我们现在可以定义 (Z, τ)。

定义 5. 对于 $w \in \mathrm{RS}_n(X)$，我们使用引理 10 固定一个分解$w = v_w u_w u_w' v_w'$，使其满足以下条件之一：

$(\mathcal{P}_a)$ $|u_w| = |u_w'| = 99\varepsilon$, $|v_w|, |v_w'| \geq n/2 - 500\varepsilon$，且对于某个 $s \in \mathcal{W}_\varepsilon$，$u_w u_w' = s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, 99\varepsilon)}$。

$(\mathcal{P}_b)$ $|u_w| = |u_w'| = 500\varepsilon$, $|v_w| = \lfloor n/2 - 500\varepsilon \rfloor$, $|v_w'| \geq n/2 - 500\varepsilon$，且对于所有 $s \in \mathcal{W}_\varepsilon$，$s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, 99\varepsilon)}$都不会出现在 $u_w u_w'$ 中。

此外，我们选择这个分解，使得 $|v_w u_w|$尽可能小。我们将由命题 1 得到的 X 的编码定义为 $(Z \subseteq \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}, \tau \colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}^+)$，并将闭开集定义为 $U = \{x \in X \colon \exists w \in \mathrm{RS}_n(X)$ $x_{[-|v_w u_w|, |u_w' v_w'|)} = w\}$。

5.2 第一个编码的基本性质

引理 11. 设 $x \in X$ 和 $i, j \in \mathbb{Z}$，其中 $i < j$。假设 $x_{[i-|v_w u_w|, i+|u_w' v_w'|)} = w$ $x_{[j-|v_{\tilde{w}} u_{\tilde{w}}|, j+|u_{\tilde{w}}' v_{\tilde{w}}'|} = \tilde{w}$ $w\ \tilde{w} \in {}_n X$ $i + |u_w' v_w'| <$ 且) 对某个 , RS ( )成立。那么，$j + |u_{\tilde{w}}' v_{\tilde{w}}'|$。

证明。我们假设 $i + |u_w' v_w'| \geq j + |u_{\tilde{w}}' v_{\tilde{w}}'|$，以期导出矛盾。

首先，我们考虑情形 $i + |u_w' v_w'| = j + |u_{\tilde{w}}' v_{\tilde{w}}'|$。那么，

$$w = x_{[i+|u_w' v_w'|-n, i+|u_w' v_w'|)} = x_{[j+|u_{\tilde{w}}' v_{\tilde{w}}'|-n, j+|u_{\tilde{w}}' v_{\tilde{w}}'|)} = \tilde{w}.$$

因此，$u_w' v_w' = u_{\tilde{w}}' v_{\tilde{w}}'$，于是

$$i = (i + |u_w' v_w'|) - |u_w' v_w'| = (j + |u_{\tilde{w}}' v_{\tilde{w}}'|) - |u_{\tilde{w}}' v_{\tilde{w}}'| = j.$$

这与 $i < j$ 矛盾。

接下来，我们假设

$$i + |u_w' v_w'| > j + |u_{\tilde{w}}' v_{\tilde{w}}'|. \tag{9}$$

注意，这等价于 $i - |v_w u_w| > j - |v_{\tilde{w}} u_{\tilde{w}}|$。在证明过程中将会直接使用这一事实。

我们考虑以下两种情形：

(i) $i+|u'_w| < j+|u'_{\tilde{w}}|$.

(ii) $i+|u'_w| \geq j+|u'_{\tilde{w}}|$.

首先假设情形 (i) 成立。我们将定义一个分解$\tilde{w} = vuu'v'$，其定义方式与定义 5 中相同，并且满足 $|vu_w| < |v_{\tilde{w}}u_{\tilde{w}}|$。这将与 $|v_{\tilde{w}}u_{\tilde{w}}|$的极小性矛盾。

首先注意到，由于 (9)，若令 $v = x_{[j-|v_{\tilde{w}}u_{\tilde{w}}|, i-|u_w|)}$和$v' = x_{[i+|u'_w|, j+|u'_{\tilde{w}}v'_{\tilde{w}}|)}$，则 $\tilde{w} = vu_wu'_wv'$。注意，根据 (9)，我们有

$$|v| = |x_{[j-|v_{\tilde{w}}u_{\tilde{w}}|, i-|v_wu_w|)}| + |v_w| \geq n/2 - 500\varepsilon.$$

此外，(i) 意味着

$$|v'| = |x_{[i+|u'_w|, j+|u'_{\tilde{w}}v'_{\tilde{w}}|)}| \geq |x_{[j+|u'_{\tilde{w}}|, j+|u'_{\tilde{w}}v'_{\tilde{w}}|)}| = |v'_{\tilde{w}}| \geq n/2 - 500\varepsilon.$$

我们得出结论：由于 $w = v_wu_wu'_wv'_w$ 满足定义 5 中的条件 ($\mathcal{P}_a$) 或 ($\mathcal{P}_b$)，因此 $w = vu_wu'_wv'$ 满足 ($\mathcal{P}_a$) 或 ($\mathcal{P}_b$)。此外，由于$|vu_w| = |x_{[j-|u_{\tilde{w}}v_{\tilde{w}}|, i)}|$和 $|v_{\tilde{w}}u_{\tilde{w}}| = |x_{[j-|v_{\tilde{w}}u_{\tilde{w}}|, j)}|$，我们有

$$|v_{\tilde{w}}u_{\tilde{w}}| = |vu_w| + j - i > |vu_w|.$$

因此，$w = vu_wu'_wv'$ 满足 ($\mathcal{P}_a$) 或 ($\mathcal{P}_b$)，且 $|vu_w|$ 严格小于$|v_{\tilde{w}}u_{\tilde{w}}|$。这与 $|v_{\tilde{w}}u_{\tilde{w}}|$的极小性矛盾。

接下来，假设 $i+|u'_w| \geq j+|u'_{\tilde{w}}|$。那么，由于 $i < j$，我们有$[j, j+|u'_{\tilde{w}}|)$ $\subsetneq [i, i+|u'_w|)$。这意味着两件事。首先，由于 $|u_{\tilde{w}}| = |u'_{\tilde{w}}|$ 和$|u_w| = |u'_w|$，

$$[j-|u_{\tilde{w}}|, j+|u'_{\tilde{w}}|) \subsetneq [i-|u_w|, i+|u'_w|). \tag{10}$$

其次，$|u'_{\tilde{w}}| < |u'_w|$。由于是 $|u'_w|$，$|u'_{\tilde{w}}| \in \{99\varepsilon, 500\varepsilon\}$，最后一个关系只有在以下情况下才可能成立：

$$|u'_{\tilde{w}}| = 99\varepsilon \text{ and } |u'_w| = 500\varepsilon. \tag{11}$$

因此，条件（$\mathcal{P}_a$）对 $\tilde{w} = v_{\tilde{w}}u_{\tilde{w}}u'_{\tilde{w}}v'_{\tilde{w}}$ 成立，而条件（$\mathcal{P}_b$）对 $w = v_wu_wu'_wv'_w$ 成立。特别地，我们可以找到 $s \in \mathcal{V}_\varepsilon$，使得 $u_{\tilde{w}}u'_{\tilde{w}} = s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, 99\varepsilon)^\circ}$ 由此根据（10）可知，$s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, 99\varepsilon)} = u_{\tilde{w}}u'_{\tilde{w}}$ 出现在 $u_wu'_w$ 中。但这样一来，条件（$\mathcal{P}_b$）就不可能对 $w = v_wu_wu'_wv'_w$ 成立，这与我们的假设矛盾。 □

引入一些记号会很方便。令 $x \in X$、$(c, y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$ 以及 $(f, z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$。对于 $j \in \mathbb{Z}$，我们定义 $w_j(x) = x_{[c_j-n, c_j)} \in \mathrm{RS}_n(X)$、$v_j(x) = v_{w_j}(x)$、$u_j(x) = u_{w_j}(x)$、$u'_j(x) = u'_{w_j}(x)$ 以及 $v'_j(x) = v'_{w_j}(x)$。于是，

$$x_{[c_j-n, c_j)} = w_j(x) = v_j(x)u_j(x)u'_j(x)v'_j(x).$$

注意，若 $j \in \mathbb{Z}$ 则 $x_{[f_j-|v_wu_w|, f_j+|u'_wv'_w|)} = w$ 对于某个 $w \in \mathrm{RS}_n(X)$，因此存在 $i \in \mathbb{Z}$ 使得 $f_j + |u'_i(x)v'_i(x)| = c_i$。我们将 $\phi_x(j)$ 定义为满足以下条件的最小整数

$$f_j + |u'_{\phi_x(j)}(x)v'_{\phi_x(j)}(x)| = c_{\phi_x(j)}. \tag{12}$$

于是，根据引理 11，

$$\phi_x(i) < \phi_x(j) \text{ for all } x \in X \text{ and } i < j. \tag{13}$$

引理 12. 设 $x \in X$，$(c, y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$，且 $(f, z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$。若 $i \in \mathbb{Z}$ 且 $k \in [\phi_x(i)\ \phi_x(i+1))$，则 $f_i + |u'_k(x)v'_k(x)| = c_k$。

证明。注意到，由于 $x_{[c_k-n,c_k)} = w_k(x)$，存在 $j \in \mathbb{Z}$ 使得$f_j = c_k - |u'_k(x)v'_k(x)|$。我们将证明 $j = i$。

首先，我们注意到，由于 $k \in [\phi_x(i)\ \phi_x(i+1))$ 且 $c_k = f_j + |u'_k(x)v'_k(x)|$，

$$\begin{aligned} f_i + |u'_{\phi_x(i)}(x)v'_{\phi_x(i)}(x)| = c_{\phi_x(i)} &\le f_j + |u'_k(x)v'_k(x)| \\ &< c_{\phi_x(i+1)} = f_{i+1} + |u'_{\phi_x(i+1)}(x)v'_{\phi_x(i+1)}(x)|. \end{aligned} \tag{14}$$

由引理 11 可知，这意味着 $i \le j \le i+1$。现在，若 $j = i+1$，则方程（14）保证 $f_{i+1} + |u'_k(x)v'_k(x)|$ 严格小于 $f_{i+1} + |u'_{\phi_x(i+1)}(x)v'_{\phi_x(i+1)}(x)|$，这与 $\phi_x(i+1)$ 的极小性矛盾。由此得出 $j = i$。 □

引理 13. 集合 $\mathcal{C}$ 至多有 d^3 个元素。

证明. 设 $x \in X$、$(c, y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$，以及 $(f, z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$。我们省略 ϕ_x 中对 x 的依赖，直接记作 ϕ。该引理由下面的断言得出。

(•) For $j \in \mathbb{Z}$, let $\zeta(j) = (w_{\phi(j+1)-1}, x_{c_{\phi(j+1)-1}}) \in \mathsf{RS}_n(X) \times \mathcal{A}$. Then, $\zeta(i) = \zeta(j)$ implies that $x_{[f_i,f_{i+1})} = x_{[f_j,f_{j+1})}$.

事实上，由于其为极小的（因为 X 是极小的，且 (Z, τ) 是可识别的），(•) 意味着

$$\#\tau(\mathcal{C}) = \#\{x_{[f_j,f_{j+1})} : j \in \mathbb{Z}\} \le \#\,\mathsf{RS}_n(X) \cdot \#\mathcal{A} \le d^3,$$

这里我们用到了：根据命题 5 中的条目 (1)，$\#\,\mathsf{RS}_n(X) \le \#\mathcal{A} \cdot (p_X(n+1) - p_X(n))$。这意味着，由于根据命题 1，$\tau$ 是字母上的单射，因此 $\#\mathcal{C} = \#\tau(\mathcal{C}) \le d^3$。

我们来证明该断言。假设 $i, j \in \mathbb{Z}$ 满足 $\zeta(i) = \zeta(j) = (w, a)$。先做一些观察。首先，条件 $\zeta(i) = \zeta(j) = (w, a)$ 意味着

(*i*) $w = x_{[c_{\phi(j+1)-1}-n,c_{\phi(j+1)-1})} = x_{[c_{\phi(i+1)-1}-n,c_{\phi(i+1)-1})}$; and

(*ii*) $a = x_{c_{\phi(j+1)-1}} = x_{c_{\phi(i+1)-1}}$.

此外，方程 (13) 确保 $\phi(i) < \phi(i+1)$ 且 $\phi(j) < \phi(j+1)$，因此

$$\phi(i) \le \phi(i+1) - 1 < \phi(i+1) \text{ and } \phi(j) \le \phi(j+1) - 1 < \phi(j+1). \tag{15}$$

我们现在证明这一断言（•）。$c_{\phi(j+1)-1}$ 和$c_{\phi(j+1)}$ 的定义保证词$x_{[k-n,k)}$、$k \in$ （$c_{\phi(j+1)-1}$、$c_{\phi(j+1)}$）不是右特殊的。因此，$x_{[c_{\phi(j+1)-1},c_{\phi(j+1)})}$ 由 $x_{[c_{\phi(j+1)-1}-n,c_{\phi(j+1)-1})}$ 和$x_{c_{\phi(j+1)-1}}$确定。

对$x_{[c_{\phi(i+1)-1},c_{\phi(i+1)})}$也有类似的观察。将这两点与 (i) 和 (ii) 结合，可得

$$x_{[c_{\phi(j+1)-1},c_{\phi(j+1)})} = x_{[c_{\phi(i+1)-1},c_{\phi(i+1)})}. \tag{16}$$

于是，由 (i),

$$w_{\phi(j+1)}(x) = x_{[c_{\phi(j+1)}-n,c_{\phi(j+1)})} = x_{[c_{\phi(i+1)}-n,c_{\phi(i+1)})} = w_{\phi(i+1)}(x).$$

记 $\tilde{w} = w_{\phi(j+1)}(x) = w_{\phi(i+1)}(x)$。采用这一记号，由 (12) 可得,

$$x_{[f_{j+1},c_{\phi(j+1)})} = x_{[f_{i+1},c_{\phi(i+1)})} = u'_{\tilde{w}}v'_{\tilde{w}}. \tag{17}$$

现在，方程 (15) 使我们可以将引理 12 应用于 $\phi(i+1)-1$ and $\phi(j+1)-1$；由 $w = w_{\phi(j+1)-1} = w_{\phi(i+1)-1}$，我们推得,

$$f_j + |u'_w v'_w| = c_{\phi(j+1)-1} \text{ and } f_i + |u'_w v'_w| = c_{\phi(i+1)-1}.$$

特别地,

$$x_{[f_j,c_{\phi(j+1)-1})} = x_{[f_i,c_{\phi(i+1)-1})} = u'_w v'_w.$$

由此以及方程 (16) 可得,

$$x_{[f_j,c_{\phi(j+1)})} = x_{[f_i,c_{\phi(i+1)})}.$$

利用 (17)，我们得出 $x_{[f_j,f_{j+1})} = x_{[f_i,f_{i+1})}$。至此，该断言的证明以及引理的证明均告完成。 □

引理 14. 设 $x \in X$、$(c,y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$ 且 $(f,z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$。则:

(1) 对任意 $k \in [\phi_x(0)\ \phi_x(1)$, $|\sigma(y_k)| \le |\tau(z_0)| + 2\cdot 401\varepsilon$。
(2) $|\tau(z_0)| \le |\sigma(y_{\phi(1)-1})| + 2\cdot 401\varepsilon$。

证明。为简便起见，我们写作 $\phi = \phi_x$。令 $k \in [\phi(0)\ \phi(1))$。那么，由引理 12, $f_0 + |u'_k(x)v'_k(x)| = c_k$。因此,

$$\begin{aligned}\tau(z_0)\cdot u'_{\phi(1)}(x)v'_{\phi(1)}(x) &= x_{[f_0,f_1)}\cdot x_{[f_1,c_{\phi(1)})}\\ &= x_{[f_0,c_k)}\cdot x_{[c_k,c_{\phi(1)})} = u'_k(x)v'_k(x)\cdot\sigma(y_{[k,\phi(1))}).\end{aligned}$$

尤其是,

$$\big||\tau(z_0)| - |\sigma(y_{[k,\phi(1))})|\big| = \big||u'_{\phi(1)}(x)v'_{\phi(1)}(x)| - |u'_k(x)v'_k(x)|\big|. \tag{18}$$

现在，定义 5 中的条件 $(\mathcal{P}_a)$ 和 $(\mathcal{P}_b)$ 确保对于任意 $w \in \mathrm{RS}_n(X)$，不等式 $n/2 - 401\varepsilon \le |u'_w v'_w| \le n/2 + 401\varepsilon$ 成立。将此代入 (18) 得出

$$\big||\tau(z_0)| - |\sigma(y_{[k,\phi(1))})|\big| \le 2\cdot 401\varepsilon \text{ for all } k \in [\phi(0),\phi(1)). \tag{19}$$

该引理的条目 (1) 得证。此外，由于 $y_{\phi(1)-1} = y_{[\phi(1)-1,\phi(1))}$，条目（2）也是式 (19) 的推论。 □

5.3 命题 8 和 9 的证明

我们现在证明命题 8。

命题 8 的证明。条目 (1) 直接由引理 13 得出。

下面证明条目（2）和（3）。我们定义 $U' = \{x \in X\colon x_{[0,n)} \in \mathrm{RS}_n(X)\}$和 $U = \{x \in X\colon \exists w \in \mathrm{RS}_n(X) x_{[-|u_w v_w|,|u'_w v'_w|)} = w\}$。首先，回顾一下，$(Z,\tau)$ 定义为按照命题 1 中的方式从 U 得到的 X 的编码。注意，由于 $|v_w u_w| \le |w| = n$ 并且对于所有 $w \in \mathrm{RS}_n(X)$ 都有 $|u'_w v'_w| \le |w| = n$，U 的半径为 n。此外，命题 5 中的条目（2）保证 U' 是 $(d+1)n$-相对稠密的，因此 U 是 $(d+3)n$-相对稠密的。因此，命题 1 保证对于所有 $a \in \mathcal{C}$，$|\tau(a)| \le (d+3)n$，并且 (Z,τ) 是 $(d+4)n$-可识别的。由于 $d \ge \#\mathcal{A} \ge 2$，条目（2）和（3）得证。 □

本章节的其余部分将用于证明命题 9。

引理 15. 设 $x \in X$ 和 $(c,z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$。我们使用记号 $w = w_{\phi_x(0)}$ 和 $\tilde{w} = w_{\phi_x(1)}$。那么，以下条件等价：

(1) $|\text{根 } \tau(z_0)| \le \varepsilon$ 和 $x_{[c_0-99\varepsilon,c_1+99\varepsilon)} = (\text{根 } \tau(z_0))^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,|\tau(z_0)|+99\varepsilon)}$。(2) 分解 $w = v_w u_w u'_w v'_w$ 和 $\tilde{w} = v_{\tilde{w}} u_{\tilde{w}} u'_{\tilde{w}} v'_{\tilde{w}}$ 满足定义 5 中的条件 $(\mathcal{P}_a)$，并且周期$(x_{[c_0+97\varepsilon,c_1-97\varepsilon)}) \le \varepsilon$。

此外，如果前述任一条件成立，则根 $\tau(z_0) \in \mathcal{W}_\varepsilon$。

证明。我们假设条目 (1) 成立。令 $s = \text{根 } \tau(z_0)$，并注意到条目 (1) 确保了

$$|s| \le \varepsilon \text{ and } x_{[c_0-99\varepsilon,c_1+99\varepsilon)} = s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,|\tau(z_0)|+99\varepsilon)}. \tag{20}$$

这使我们能够将引理 9 与 $x_{[c_0-99\varepsilon,c_0+|s|+99\varepsilon)}$ 结合使用，并找到 $t \in \mathcal{W}_\varepsilon$，使得 $t^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,99\varepsilon)}$ 出现在 $x_{[c_0-99\varepsilon,c_0+|s|+99\varepsilon)}$中。由于 $|s| \le \varepsilon$，我们尤其有 $t^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,99\varepsilon)}$ 出现在 $x_{[c_0-500\varepsilon,c_0+9\varepsilon)}$中。这与满足定义 5 中条件（$\mathcal{P}_b$）的分解 $w = v_w u_w u'_w v'_w$ 不相容；因此，$w = v_w u_w u'_w v'_w$ 满足条件（$\mathcal{P}_a$）。类似的论证表明，$\tilde{w} = v_{\tilde{w}} u_{\tilde{w}} u'_{\tilde{w}} v'_{\tilde{w}}$ 也满足条件（$\mathcal{P}_a$）。最后，由（20）可知，$\mathrm{per}(x_{[c_0+97\varepsilon,c_1-97\varepsilon)}) \le |s| \le \varepsilon$。

我们假设条目（2）成立。那么，根据定义 5，存在 s、$\tilde{s} \in \mathcal{W}_\varepsilon$，使得

$$s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,99\varepsilon)} = u_w u'_w = x_{[c_0-99\varepsilon,c_0+99\varepsilon)} \text{ and } \tilde{s}^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,99\varepsilon)} = u_{\tilde{w}} u'_{\tilde{w}} = x_{[c_1-99\varepsilon,c_1+99\varepsilon)}. \tag{21}$$

我们断言

$$\mathrm{per}(x_{[c_0-99\varepsilon,c_1+99\varepsilon)}) \le \varepsilon. \tag{22}$$

假设 (22) 不成立，以期得到矛盾。于是，命题 4 中的条目（2）给出 $i \in [c_0 - 98\varepsilon, c_1 + 98\varepsilon)$，使得 $\mathrm{per}(x_{[i-\varepsilon,i+\varepsilon)}) > \varepsilon$。我们考虑三种情形。如果 $i \in [c_0 - 98\varepsilon, c_0 + 98\varepsilon)$，

然后 $x_{[i-\varepsilon,i+\varepsilon)}$ 发生在 $u_w u'_w$ 中。因此，根据 (21)，并且由于 $s \in \mathcal{W}_\varepsilon$ 意味着$|s| \le \varepsilon$，周期($x_{[i-\varepsilon,i+\varepsilon)}$) $\le |s| \le \varepsilon$。这与我们的假设相矛盾。在情形$i \in [c_1 - 98\varepsilon, c_1 + 98\varepsilon)$ 中，类似的论证会导致矛盾。最后，如果$i \in [c_0 + 98\varepsilon, c_1 - 98\varepsilon)$，那么 $x_{[i-\varepsilon,i+\varepsilon)}$ 发生在 $x_{[c_0+97\varepsilon,c_1-97\varepsilon)}$ 中，因此，根据该假设，周期($x_{[i-\varepsilon,i+\varepsilon)}$) $\le \varepsilon$。这证明了 (22)。

我们的下一个目标是利用这一论断来证明.....

$$|s| = |\tilde{s}| = \mathsf{per}(x_{[c_0-99\varepsilon,c_1+99\varepsilon)}). \tag{23}$$

我们注意到 $|s| \le \varepsilon$ 如 $s \in \mathcal{W}_\varepsilon$。因此，方程 (21) 和 (22) 允许我们使用命题 4 的条目 (1)，并推导出周期($x_{[c_0-99\varepsilon,c_1+99\varepsilon)}$) 等于周期($x_{[c_0-99\varepsilon,c_0+99\varepsilon)}$)。此外，(22) 确保周期($x_{[c_0-99\varepsilon,c_0+99\varepsilon)}$) $\le |s|$，因此根据命题 4 中的条目 (1)，我们有周期($x_{[c_0-99\varepsilon,c_0+99\varepsilon)}$) 等于周期($s^2$)。此外，根据引理 6，周期($s^2$) $=$ | 根 s^2| $= |s|$。综合所有这些关系得到

$$\mathsf{per}(x_{[c_0-99\varepsilon,c_1+99\varepsilon)}) = \mathsf{per}(x_{[c_0-99\varepsilon,c_0+99\varepsilon)}) = \mathsf{per}(s^2) = |s|.$$

类似地，周期($x_{[c_0-99\varepsilon,c_1+99\varepsilon)}$) $= |\tilde{s}|$。方程 (23) 得证。

我们将 (23) 与 (21) 结合，得到

$$s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,|\tau(z_0)|+99\varepsilon)} = \tilde{s}^{\mathbb{Z}}_{[-|\tau(z_0)|-99\varepsilon,99\varepsilon)} = x_{[c_0-99\varepsilon,c_1+99\varepsilon)}. \tag{24}$$

由于 $|s|$ 等于 $|\tilde{s}|$，我们得到 s 和 $\tilde{s}$ 共轭。此外，由于s，$\tilde{s} \in \mathcal{W}_\varepsilon$，且由于 $\mathcal{W}_\varepsilon$ 至多包含给定旋转类中的一个元素，我们有

$$s = \tilde{s}. \tag{25}$$

我们利用 (25) 证明引理的条目 (1) 成立。注意，方程 (21) 和 (25) 蕴含 $s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,99\varepsilon)} = (S^{|\tau(z_0)|}s)_{[-99\varepsilon,99\varepsilon)}$。由此以及$|s| \le \varepsilon$ 这一事实（因为 $s \in \mathcal{W}_\varepsilon$），我们可以使用命题 2 的条目 (1)，并推出$s^{\mathbb{Z}} = S^{|\tau(z_0)|}s^{\mathbb{Z}}$。接着，命题 2 的条目（2）给出 $|\tau(z_0)| = 0$ (模 $|s|$)。由此可得，$x_{[c_0,c_1)}$ 是 s 的一个幂，并且根 $\tau(z_0)$ $=$ 根 $s = s$。由最后一个关系和 (24) 可知，引理的条目 (1) 成立。这也表明，若引理的条目（2）成立，则根 $\tau(z_0) \in \mathcal{W}_\varepsilon$。 □

引理 16. 设 $x \in X$、$(f, z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$ 和 $i, j \in \mathbb{Z}$ 满足 $j > i + d$。假设对所有 $k \in [i, j)$，均有 $|\tau(z_k)| \le 401\varepsilon$。则：

(1) 对所有 $k \in [i, j)$，root $\tau(z_k)$ $=$root $\tau(z_i)$，且 $|$root $\tau(z_i)| \le \varepsilon$。

(2) $x_{[f_i-99\varepsilon,f_j+99\varepsilon)} = (\mathsf{root}\,\tau(z_i))^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,|\tau(z_{[i,j)})|+99\varepsilon)}$.

证明. 设 $(c, y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$。我们将使用引理 7，结合 y 和 $[\phi_x(i)\ \phi_x(j))$ 来证明以下结论：

$$\mathsf{per}(x_{[f_i-500\varepsilon,f_j+500\varepsilon)}) \text{ is at most } \varepsilon. \tag{26}$$

我们来检验引理 7 的假设。任取 $k \in [\phi_x(i)\ \phi_x(j))$。存在 $\ell \in [i, j)$，使得 $k \in [\phi_x(\ell)\ \phi_x(\ell + 1))$. 将假设

$|\tau(z_k)| \le 401\varepsilon$ 代入引理 14 的不等式，得到界 $|\sigma(y_k)| \le |\tau(z_\ell)| + 2\cdot 401\varepsilon \le 10^4\varepsilon$。因此，由 (7)，

$$|\sigma(y_k)| < \varepsilon/d \text{ for all } k \in [\phi_x(i), \phi_x(j)). \tag{27}$$

由于 $\varepsilon \le n/10^4$，方程 (27) 以及不等式 $\phi_x(j) \ge (j-i) + \phi_x(i) > d + \phi_x(i)$ 使我们能够应用引理 7，并推得周期$(x_{[c_{\phi_x(i)}-n/3, c_{\phi_x(j)-d})}) \le \varepsilon$。现在注意，对任意 $k \in \mathbb{Z}$，

$$c_{\phi_x(k)} - f_k = |u'_{\phi_x(k)} v'_{\phi_x(k)}| \in [n/2 - 401\varepsilon, n/2 + 401\varepsilon)$$

因此，由于（27）确保 $c_{\phi_x(j)} - d \ge c_{\phi(j)} - \varepsilon$，且由于 $\varepsilon \le n/10^4$，我们有 $x_{[f_i-500\varepsilon, f_j+500\varepsilon)}$ 出现在 $x_{[c_{\phi_x(i)}-n/3, c_{\phi_x(j)-d})}$ 中。因此，（26）成立。

接下来，我们使用 (26) 来证明以下结论：

$$\forall k \in [i,j], \text{ the decomposition } w_{\phi_x(k)} = v_{\phi_x(k)} u_{\phi_x(k)} u'_{\phi_x(k)} v'_{\phi_x(k)} \text{ satisfies } (\mathcal{P}_a) \text{ in Definition 5.} \tag{28}$$

令 $k \in [i,j]$。我们注意到，(26) 意味着 per$(x_{[c_k-500\varepsilon, c_k+500\varepsilon)}) \le \varepsilon$。因此，根据引理 9，存在 $s \in \mathcal{W}_\varepsilon$，使得 $s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, 99\varepsilon)}$ 出现在 $x_{[c_k-500\varepsilon, c_k+500\varepsilon)}$ 中。这意味着，如果定义 5 中的 $(\mathcal{P}_b)$ 对分解 $w_{\phi_x(k)} = v_{\phi_x(k)} u_{\phi_x(k)} u'_{\phi_x(k)} v'_{\phi_x(k)}$ 成立，那么 $s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, 99\varepsilon)}$ 就会出现在 $u_{\phi_x(k)} u'_{\phi_x(k)} = x_{[c_k-500\varepsilon, c_k+500\varepsilon)}$ 中，这与 $(\mathcal{P}_b)$ 矛盾。因此，$w_{\phi_x(k)} = v_{\phi_x(k)} u_{\phi_x(k)} u'_{\phi_x(k)} v'_{\phi_x(k)}$ 满足 $(\mathcal{P}_a)$，(28) 得证。

现在我们证明引理陈述中的性质。令 $k \in [i,j)$。于是，方程 (26) 和 (28) 表明，引理 15 中的条目 (1) 得以满足。因此，对所有 $k \in [i,j)$，

$$|\operatorname{root} \tau(z_k)| \le \varepsilon \text{ and } x_{[c_k-99\varepsilon, c_{k+1}+99\varepsilon)} = (\operatorname{root} \tau(z_k))^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, |\tau(z_k)|+99\varepsilon)}. \tag{29}$$

特别地，对于每个 $k \in [i, j-1)$，我们有

$$(\operatorname{root} \tau(z_k))^{\mathbb{Z}}_{[0,99\varepsilon)} = x_{[c_k, c_k+99\varepsilon)} = x_{[c_{k+1}, c_{k+1}+99\varepsilon)} = (\operatorname{root} \tau(z_{k+1}))^{\mathbb{Z}}_{[0,99\varepsilon)}.$$

这一点以及不等式 $|\operatorname{root} \tau(z_k)| \le \varepsilon$ 和 $|\operatorname{root} \tau(z_{k+1})| \le \varepsilon$ 使我们能够应用定理 4，推得 $\operatorname{root} \tau(z_k)$ 和 $\operatorname{root} \tau(z_{k+1})$ 是同一公共词的幂，从而 $\operatorname{root} \tau(z_k) = \operatorname{root} \tau(z_{k+1})$。然后通过归纳论证可得本引理的条目 (1)，进而由 (29) 可知条目（2）也成立。 □

我们已具备证明命题 9 所需的一切要素。

命题 9 的证明。我们用矛盾法证明条目 (1)。假设 $0 \notin \mathrm{Q_P}(z)$，$|\tau(z_0)| > 401\varepsilon$，并且 per$(x_{[c_0+97\varepsilon, c_1-97\varepsilon)})$ 至多为 ε。记作 $w = w_{\phi_x(0)}$ 和 $\tilde{w} = w_{\phi_x(1)}$。于是，条件 $0 \notin \mathrm{Q_P}(z)$ 保证引理 15 中的条目 (1) 不成立。因此，条目（2）也不成立。

这意味着，由于 $\mathrm{per}(x_{[c_0+97\varepsilon,c_1-97\varepsilon)})$ 至多为 ε，分解 $w = v_w u_w u'_w v'_w$ 或 $\tilde{w} = v_{\tilde{w}} u_{\tilde{w}} u'_{\tilde{w}} v'_{\tilde{w}}$ 中有一个满足定义 5 中的 $(\mathcal{P}_b)$。不失一般性，假设 $w = v_w u_w u'_w v'_w$ 满足 $(\mathcal{P}_b)$。那么，对于任意 $s \in \mathcal{W}_\varepsilon$，$s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,99\varepsilon)}$ 不会出现在 $u_w u'_w = x_{[c_0-401\varepsilon,c_0+401\varepsilon)}$ 中。特别地，$s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,99\varepsilon)}$ 不会出现在 $x_{[c_0+97\varepsilon,c_0+304\varepsilon)}$ 中。由于这对所有 $s \in \mathcal{W}_\varepsilon$ 都成立，且 $x_{[c_0+97\varepsilon,c_0+304\varepsilon)}$ 的长度至少为 2ε，由引理 9 可得 $\mathrm{per}(x_{[c_0+97\varepsilon,c_0+304\varepsilon)}) > \varepsilon$。但是 $c_1 - c_0 = |\tau(z_0)| > 401\varepsilon$，因此 $x_{[c_0+97\varepsilon,c_0+304\varepsilon)}$ 出现在 $x_{[c_0+97\varepsilon,c_1-97\varepsilon)}$ 中，从而 $\mathrm{per}(x_{[c_0+97\varepsilon,c_1-97\varepsilon)}) > \varepsilon$。这与我们的假设矛盾，由此证明了条目 (1)。

我们继续讨论条目（2）。证明采用反证法。假设条目（2）的假设成立，且周期$(x_{[c_0+97\varepsilon,c_1-97\varepsilon)}) \le \varepsilon$。进一步假设，不失一般性，$1 \in \mathrm{Qp}(z)$。我们将使用记号 $w = w_{\phi_x(0)}$ 和 $\tilde{w} = w_{\phi_x(1)}$。那么，条件 $1 \in \mathrm{Qp}(z)$ 等价于引理 15 的条目 (1) 对 Sz成立；因此，该引理的条目（2）对 Sz 成立。特别地，$\tilde{w} = v_{\tilde{w}} u_{\tilde{w}} u'_{\tilde{w}} v'_{\tilde{w}}$ 满足定义 5 中的 $(\mathcal{P}_a)$，也就是说，

$$x_{[c_1-99\varepsilon,c_1+99\varepsilon)} = u_{\tilde{w}} u'_{\tilde{w}} = s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,99\varepsilon)} \text{ for some } s \in \mathcal{W}_\varepsilon.$$

现在，条件 $0 \notin \mathrm{Qp}(z)$ 根据引理 15 意味着，该引理的条目（2）不满足 z。这意味着，由于 $\tilde{w} = v_{\tilde{w}} u_{\tilde{w}} u'_{\tilde{w}} v'_{\tilde{w}}$ 满足 $(\mathcal{P}_a)$，且我们假设周期$(x_{[c_0+97\varepsilon,c_1-97\varepsilon)}) \le \varepsilon$，因此 $w = v_w u_w u'_w v'_w$ 满足 $(\mathcal{P}_b)$。因此，

$$x_{[c_1-99\varepsilon,c_1+99\varepsilon)} = s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,99\varepsilon)} \text{ does not occur in } x_{[c_0-500\varepsilon,c_0+500\varepsilon)}. \tag{30}$$

但是，由于 $c_1 - c_0 = |\tau(z_0)| \le 401\varepsilon$，我们有 $[c_1 - 99\varepsilon, c_1 + 99\varepsilon)$ 包含于 $[c_0-500\varepsilon, c_1+500\varepsilon)$，因此 $x_{[c_1-99\varepsilon,c_1+99\varepsilon)}$ 出现在 $x_{[c_0-500\varepsilon,c_1+500\varepsilon)}$ 中。这与 (30) 矛盾，从而完成条目（2）的证明。

接下来，我们考虑条目（3）。假设 $k > d$，并且对于所有 $j \in [0,k)$，都有 $|\tau(z_j)| \le 401\varepsilon$。那么，我们可以利用引理 16 推得

(1) $\mathrm{root}\,\tau(z_j) = \mathrm{root}\,\tau(z_0)$ for all $j \in [0,k)$ and $|\mathrm{root}\,\tau(z_0)| \le \varepsilon$;

(2) $x_{[f_0-99\varepsilon,f_k+99\varepsilon)} = (\mathrm{root}\,\tau(z_0))^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,|\tau(z_{[0,k)})|+99\varepsilon)}$.

特别地，$x_{[c_j-99\varepsilon,c_{j+1}+99\varepsilon)} =$(根 $\tau(z_j)$)$^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon,|\tau(z_j)|+99\varepsilon)}$，并且对于所有 $j \in [0,k)$，都有 |根 $\tau(z_j)| \le \varepsilon$。我们得出结论：$[0,k) \subseteq \mathrm{Qp}(z)$。

最后，我们证明条目 (4)。设 $z' \in Z$，并假设 $0 \in \mathrm{Qp}(z) \cap \mathrm{Qp}(z')$，且根 $\tau(z_0)$ 与根 $\tau(z'_0)$ 共轭。条件 $0 \in \mathrm{Qp}(z) \cap \mathrm{Qp}(z')$ 使我们可以应用引理 15，推得根 $\tau(z_0)$ 和根 $\tau(z'_0)$ 属于 $\mathcal{W}_\varepsilon$。由于根 $\tau(z_0)$ 与根 $\tau(z'_0)$ 共轭，根据 $\mathcal{W}_\varepsilon$ 的定义可知，根 $\tau(z_0)$ =根 $\tau(z'_0)$。 □

6 第二种编码

我们继续证明主要定理。本章节的主要结果是命题 10，它描述了对命题

5 中编码的一种修改。命题 10 中的主要新内容是关于词 $\tau(a)$ 的周期二分性。第 7 节和第 8 节构造的编码也具有这一性质，因此我们将其作为定义引入。

定义 6. 设 $(Z \subseteq \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}, \tau\colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}^{+})$ 是子移位的可识别编码 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$，$\mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \cup \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个划分，且 $\varepsilon \geq 1$。我们称 (Z, τ) 关于 $(\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}, \mathcal{C}_{\mathsf{p}})$ 和 ε 具有二分周期，若对于 $x \in X$ 和 $(c, z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$，以下条件成立：

(1) $z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ 意味着 $\mathrm{per}(x_{[c_0+\varepsilon, c_1-\varepsilon)}) > \varepsilon$。 (2) $z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$ 意味着 $|\text{根 } \tau(z_0)| \leq \varepsilon$，并且 $x_{[c_0-\varepsilon, c_1+\varepsilon)}$ 等于 $(\text{根 } \tau(z_0))^{\mathbb{Z}}_{[-\varepsilon, |\tau(z_0)|+\varepsilon)}$。 (3) 如果 $a \in \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$ 且根 $\tau(z_0)$ 共轭于根 $\tau(a)$，则根 $\tau(z_0) =$ 根 $\tau(a)$。

命题 10. 设 X 是一个极小无限子移位，$n \geq 0$，并且令 d 为 $\lceil p_X(n)/n \rceil$、$p_X(n+1) - p_X(n)$、$\#\mathcal{A}$ 和 10^4 中的最大值。存在 X 的一个可识别编码 $(Z \subseteq \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}, \tau\colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}^{+})$、一个划分 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \cup \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$，以及 $\varepsilon \in [n/d^{2d^3+4}, n/d)$，使得：

(1) $\#\mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \leq 2d^{3d+6}$、$\#\mathcal{C}_{\mathsf{p}} \leq 2d^{3d+9}$ 的幂复杂度(X) 和 # 根 $\tau(\mathcal{C}) \leq 3d^{3d+9}$。
(2) $|\tau(a)| \leq 10d^2 n$ 适用于 $a \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，且 $|\tau(a)| \geq 80\varepsilon$ 适用于 $a \in \mathcal{C}$。(3) (Z, τ) 满足命题 11 中的可识别性。(4) (Z, τ) 关于 $(\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}, \mathcal{C}_{\mathsf{p}})$ 和 8ε 具有二分周期。
(5) 集合 $\mathcal{C}_{\mathsf{p}}$ 满足以下条件：若 $z \in Z$，则 z_0 和 z_1 不会同时属于 $\mathcal{C}_{\mathsf{p}}$。

命题 11。考虑命题 12 中描述的编码。设 x、$\tilde{x} \in X$ 满足 $\mathrm{per}(x_{[-\varepsilon,\varepsilon)}) > \varepsilon$ 且 $x_{[-7d^2n, 7d^2n)} = \tilde{x}_{[-7d^2n, 7d^2n)}$。那么，$\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(x)$ 等于 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(\tilde{x})$。

证明命题 10 的策略如下。我们考虑命题 8 给出的编码 (Y, σ)，对于一个点 $y \in Y$，将字母 y_i 拼接起来形成词 y_I，其中 I 是一个区间，使得 y_I 要么对应于 $\sigma(y)$ 的最大周期部分，要么对应于 $\sigma(y)$ 中长度受控的非周期部分。这样便会产生一种新的编码，其中字母与词 y_I 相对应，并满足命题 10 中除条目（2）里与周期部分 y_I 相关的字母下界之外的所有性质。我们通过略微移动词 $\sigma(y_I)$ 的边缘来解决这个问题。

我们在第 6.1 小节中首先定义稳定区间，它们对应于上一段中描述的区间 I。命题 10 的编码定义将在第 6.2 小节中给出，同时还将证明其基本性质。在最后一个小节中，我们将证明命题 10 和命题 11。

在本章节余下部分，我们固定使用以下记号。设 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 是一个极小无限子移位，$n \geq 0$ 并设 d 为 $\lceil p_X(n)/n \rceil$的最大值，

$p_X(n+1) - p_X(n)$、$\#\mathcal{A}$ 和 10^4。那么，将命题 8 应用于 X 和 n，可得到一个针对 X 的可识别编码 $(Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}, \sigma\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}^+)$，以及一个整数 $\varepsilon \in [n/d^{2d^3+4}, n/d)$。

6.1 稳定区间

设 $y \in Y$，$x = \sigma(y)$ 和 $(c, y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$。我们定义

$$\mathrm{Q}_{\mathsf{short}}(y) = \{i \in \mathbb{Z} : |\sigma(y_i)| \le 401\varepsilon\} \text{ and } \mathrm{Q}_{\mathsf{long}}(y) = \mathbb{Z} \setminus \mathrm{Q}_{\mathsf{long}}.$$

设 $\mathrm{Q_p}(y)$ 为满足以下条件的整数集合 $i \in \mathbb{Z}$

$$|\operatorname{root}\sigma(y_i)| \le \varepsilon \text{ and } x_{[c_i - 99\varepsilon, c_{i+1}+99\varepsilon)} = (\operatorname{root}\sigma(y_i)^{\mathbb{Z}})_{[-99\varepsilon, |\tau(y_i)|+99\varepsilon)}. \quad (31)$$

我们令 $\mathrm{Q_{ap}}(y) = \mathbb{Z} \setminus \mathrm{Q_p}(y)$。注意，$\mathrm{Q_p}(y)$ 的定义与命题 9 中的定义一致。

定义 7。对于 y，稳定区间是有限区间 $I = [i, j) \subseteq \mathbb{Z}$，满足以下条件之一。

(1) $I \subseteq \mathrm{Q_p}$。(2) $I \subseteq \mathrm{Q_{ap}}$，$\#(I \cap \mathrm{Q_{long}}) \le 1$，且若 $i \in \mathrm{Q}_{\mathsf{short}}$，则 $i - 1 \in \mathrm{Q_p}$。

如果区间 I 满足此定义中的条目（1），则其为周期类型；如果满足条目（2），则其为非周期类型。若对于所有稳定区间 $I' \supseteq I$，都有 $I' = I$，则称 I 为极大稳定区间。

注 5. 我们强调，前面的定义不仅取决于 y，还取决于 σ 和 ε。

引理 17. 设 $I = [i, j)$ 是 y 的一个稳定区间集，且其为周期类型。那么：

(1) 对所有 $k \in [i, j)$ 和 $x_{[c_i - 99\varepsilon, c_j + 99\varepsilon)}$，根 $\sigma(y_{[i,j)})$ = 根 $\sigma(y_k)$ 等于 (根 $\sigma(y_i)$)$^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, |\sigma(y_{[i,j)})|+99\varepsilon)}$。(2) 如果 I 是极大的，$I' = [i', j')$ 是一个稳定区间，且 $i' = j$ 或 $j' = i$成立，那么 I' 为非周期类型。(3) 如果 $y' \in Y$，$0 \in \mathrm{Q_p}(y')$，且根 $\sigma(y_i)$ 与根 $\sigma(y'_0)$ 共轭，那么根 $\sigma(y_i)$ = 根 $\sigma(y'_0)$。

证明。我们首先证明条目 (1)。令 $s_k =$ 根 $\sigma(y_k)$。由于是周期类型，根据定义 7，我们有 that

$$|s_k| \le \varepsilon \text{ and } x_{[c_k - 99\varepsilon, c_{k+1}+99\varepsilon)} = (s_k^{\mathbb{Z}})_{[-99\varepsilon, |\sigma(y_k)|+99\varepsilon)} \text{ for all } k \in [i, j). \quad (32)$$

然后，对于任意 $k \in [i, j-1)$,

$$(s_k^{\mathbb{Z}})_{[0,99\varepsilon)} = x_{[c_k, c_k+99\varepsilon)} = x_{[c_{k+1}, c_{k+1}+99\varepsilon)} = (s_{k+1}^{\mathbb{Z}})_{[0,99\varepsilon)}.$$

结合不等式 $|s_k|$、$|s_{k+1}| \le \varepsilon$ 和定理 4，可得到一个词 t，使得 s_k 和 s_{k+1} 是 t 的幂。因此，由于 s_k 和 s_{k+1} 是一个词的根，$s_k = s_{k+1} = t$ 对任意 $k \in [i, j-1)$ 都成立。引理的条目 (1) 由此及 (32) 得出。

对于条目（2），注意到如果 I' 是周期类型，那么 $I \cup I'$ 是包含于 $\mathrm{Q_P}(y)$ 中的一个区间，因此 $I \cup I'$ 是 y 的稳定区间。这与 I 的极大性矛盾；因此，I' 是非周期类型。

现在假设条目（3）的假设成立。那么，由于 $i \in I \subseteq \mathrm{Q_P}(y)$、$0 \in \mathrm{Q_P}(y')$，且 $\mathrm{root}\,\sigma(y_i)$ 与 $\mathrm{root}\,\sigma(y'_0)$ 共轭，点 $S^i y$ 和 y' 符合命题 9 的条目 (4) 的假设。由此得出，$\mathrm{root}\,\sigma(y_i) = \mathrm{root}\ \sigma(y'_0)$。 □

引理 18. 设 $y \in Y$ 和 $I = [i, j)$ 是 y 的一个非周期类型稳定区间。那么，

(1) $\mathrm{per}(x_{[c_i+97\varepsilon, c_j-97\varepsilon)}) > \varepsilon$；
(2) I 的长度至多为 $2d+1$；
(3) $195\varepsilon \le |\sigma(y_I)| \le 9d^2 n$。

证明。我们分两种情况来证明条目 (1)。设 $i \in \mathrm{Q_{long}}(y)$。那么，$i \in \mathrm{Q_{long}}(y) \cap \mathrm{Q_{ap}}(y)$，并且我们可以使用命题 9 的条目 (1)，得出 $\mathrm{per}(x_{[c_i+97\varepsilon, c_{i+1}-97\varepsilon)}) > \varepsilon$。现在假设 $i \in \mathrm{Q_{short}}(y)$。那么，定义 7 保证 $i-1 \in \mathrm{Q_P}(y)$。因此，命题 9 的条目（2）适用，从而 $\mathrm{per}(x_{[c_i+97\varepsilon, c_{i+1}-97\varepsilon)}) > \varepsilon$。特别地，条目 (1) 成立。

我们用反证法证明条目（2）。假设 $\#I > 2d+1$。那么，由定义 7 可知，存在 $I' \subseteq I$，使得 $\#I' > d$ 且 $I' \subseteq \mathrm{Q_{short}}$。这些条件使我们可以使用命题 9 的条目 (3)，推得 $I' \subseteq \mathrm{Q_P}(y)$，这与 I 是非周期类型这一事实矛盾。

最后，我们考虑条目（3）。该引理的条目（2）和条目（2）得出 $|\sigma(y_I)| \le (2d+1) \cdot 3dn$，由此可得条目（3）中的上界。为证明下界，我们考虑两种情况。若存在 $k \in I \cap \mathrm{Q_{long}}(y)$，则 $|\sigma(y_I)| \ge |\sigma(y_k)| \ge 401\varepsilon$。现在假设 $I \cap \mathrm{Q_{long}}(y)$ 为空。那么，$i \in \mathrm{Q_{short}}(y)$，因此定义 7 表明 $i-1 \in \mathrm{Q_P}(y)$。这使我们能够使用命题 9 的条目（2），得到 $\mathrm{per}(x_{[c_i+97\varepsilon, c_{i+1}-97\varepsilon)}) > \varepsilon$。特别地，$|x_{[c_i+97\varepsilon, c_{i+1}-97\varepsilon)}| > \varepsilon$；因此，

$$|\sigma(y_I)| \ge |\sigma(y_i)| = |x_{[c_i+97\varepsilon, c_{i+1}-97\varepsilon)}| + 2 \cdot 97\varepsilon > 195\varepsilon.$$

□

引理 19. 存在一个常数 C，其仅取决于 X，使得对于任意 $y \in Y$ 和对 Y 的稳定区间 I，都有 $\#I \le C$。特别地，任意稳定区间都包含于某个极大稳定区间中。

证明。令 C_0 为在某个满足 $\mathrm{per}(w) \le \varepsilon$ 的 $x \in X$ 中出现的最长词 w 的长度。我们注意到，由于假设 X 是极小且无限的，因此 C_0 是有限的。令 $C = \max\{C_0, 2d+1\}$。我们声称，对任意 $y \in Y$，

任意稳定区间 I 的 y 长度至多为 C。事实上，若 I 为非周期类型，则引理 18 的条目（3）意味着 $\#I \leq 2d+1 \leq C$；若 I 为周期类型，则引理 17 的条目 (1) 保证 $\mathrm{per}(\sigma(y_I)) \leq \varepsilon$，因此 $\#I \leq |\sigma(y_I)| \leq C_0 \leq C$。 □

引理 20. 设 $y \in Y$。那么， y 的所有极大稳定区间的集合是 $\mathbb{Z}$的一个划分。

证明。我们首先证明，任意 $k \in \mathbb{Z}$ 都包含在某个稳定区间中。根据引理 19，这意味着任意 k 都包含在某个极大稳定区间中。

设 $k \in \mathbb{Z}$ 为任意值。我们考虑两种情况。如果 $k \in Q_{\mathrm{p}}(y)$ 或 $k \in Q_{\mathrm{ap}}(y) \cap Q_{\mathrm{long}}(y)$，那么 $\{k\}$ 是稳定区间，证明完毕。现在假设 $k \in Q_{\mathrm{ap}}(y) \cap Q_{\mathrm{short}}(y)$。令 $i < k$ 为满足 $i \notin Q_{\mathrm{ap}}(y) \cap Q_{\mathrm{short}}(y)$ 的最大整数。注意到 $[i+1,k] \subseteq Q_{\mathrm{ap}}(y) \cap Q_{\mathrm{short}}(y)$。因此，如果 $i \in Q_{\mathrm{ap}}(y) \cap Q_{\mathrm{long}}(y)$，那么 $[i,k]$ 是非周期类型的稳定区间；如果 $i \in Q_{\mathrm{p}}$，那么 $[i+1,k]$ 是非周期类型的稳定区间。这是仅有的两种情况，因为 $i \notin Q_{\mathrm{ap}}(y) \cap Q_{\mathrm{short}}(y)$，因此我们得出结论： i 属于一个稳定区间。

接下来，我们证明对于任意两个极大稳定区间 I、I'，必有 $I = I'$ 或 $I \cap I' = \emptyset$。引理由此以及任意 k 都包含在某个极大稳定区间这一事实即可得出。

设 $I = [i,j)$ 和 $I' = [i',j')$ 是交集非空的极大稳定区间。不妨设 $i \leq i' < j \leq j'$。注意，如果 $i = i'$ 或 $j = j'$，那么 $I \cup I' \in \{I, I'\}$，因此由极大性可知 $I = I' = I \cup I'$。于是，我们可以假设 $i < i' < j < j'$。值得注意的是，这意味着 $j-1 \in I \cap I'$。

为了继续论证，我们分三种情形讨论。

(1) 若 $j-1 \in Q_{\mathrm{p}}(y)$，则由于 $j-1 \in I \cap I'$，定义 7 表明 I和 I'属于周期类型。由定义 7 可知， $I \cup I'$ 是周期类型的稳定区间，因此根据极大性有 $I = I' = I \cup I'$。(2) 若 $j-1 \in Q_{\mathrm{ap}}(y) \cap Q_{\mathrm{long}}$。那么，由于 $j-1 \in I \cap I'$，定义 7 确保 $[i,j-1) \cup [j+1,j') \subseteq Q_{\mathrm{ap}}(y) \cap Q_{\mathrm{short}}(y)$。因此， $[i,j') = I \cup I'$是非周期类型的稳定区间，这意味着根据极大性有 $I = I' = I \cup I'$。(3) 若 $j-1 \in Q_{\mathrm{ap}}(y) \cap Q_{\mathrm{short}}(y)$。那么，由于 $j-1 \in I \cap I'$，定义 7 保证 I 和 I' 属于非周期类型。特别地，由于 $i'-1 \in I$， $i'-1 \in Q_{\mathrm{ap}}(y)$，因此根据定义 7， $i' \in Q_{\mathrm{long}}(y)$。根据定义 7，我们得出结论： $[i,i') \subseteq Q_{\mathrm{ap}}(y) \cap Q_{\mathrm{short}}(y)$， $i' \in Q_{\mathrm{ap}}(y) \cap Q_{\mathrm{long}}(y)$，且 $[i'+1,j') \subseteq Q_{\mathrm{ap}}(y) \cap Q_{\mathrm{short}}(y)$。因此， $[i,j') = I \cup I'$是非周期类型的稳定区间，并且根据极大性有 $I = I' = I \cup I'$。

□

6.2 第二种编码的构造

编码 (Z,τ) 是通过修改点 $x\in X$ 在 $\mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$ 中的切割函数 c 得到的。我们将在以下引理的证明中给出修改后的切割函数的构造，并在其后定义 (Z,τ)。

引理 21. 设 $x\in X$，并令 $(c,y)=\mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$。存在唯一的递增整数序列，使得 $(k_x(j))_{j\in\mathbb{Z}}$，且 $(r_x(j))_{j\in\mathbb{Z}}$ 满足以下条件。

(1) $\{[k_x(j),k_x(j+1)):j\in\mathbb{Z}\}$ *is the set of all maximal stable intervals of* y.

(2) 对任意 $j\in\mathbb{Z}$,

(1) if $[k_x(j),k_x(j+1))$ *is of aperiodic type, then* $r_x(j)=c_{k_x(j)}$.

(2) if $[k_x(j),k_x(j+1))$ *is of periodic type, then* $r_x(j)=c_{k_x(j)}-|s^\ell|$, *where* $s=\mathsf{root}\,\sigma(y_{[k_x(j),k_x(j+1))})$ *and* $\ell=\lceil 80\varepsilon/|s|\rceil$

(3) 0 属于 $[r_x(0)\ r_x(1))$。

此外，在这种情形下，对所有 $j\in\mathbb{Z}$，都有 $r_x(j+1)\geq r_x(j)+80\varepsilon$。

证明. 引理 20 保证，y 的所有极大稳定区间的集合可表示为 $\{[k(j)\ k(j+1)):j\in\mathbb{Z}\}$，其中 $(k_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ 是某个递增整数序列。序列 $(k_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ 在指标平移意义下唯一。

我们将 $r(j)$ 定义如下:

(i) 若 $[k(j)\ k(j+1))$ 属于非周期类型，则 $r(j)=c_{k(j)}$。

(ii) 若 $[k(j)\ k(j+1))$ 属于周期类型，则 $r(j)=c_{k(j)}-|s^\ell|$，其中 $s=$根 $\sigma(y_{[k(j),k(j+1))})$ 且 $\ell=\lceil 80\varepsilon/|s|\rceil$

需要指出的是，在情形 (ii) 中，引理 17 保证了 $|s|\leq\varepsilon$。我们断言

$$r(j+1)\geq r(j)+80\varepsilon\ \text{ for all } j\in\mathbb{Z}. \tag{33}$$

首先，我们注意到 $r(j)$ 和 $r(j+1)$ 的定义保证了

$$k(j)-81\varepsilon<r(j)\leq k(j)\ \text{ and }\ k(j+1)-81\varepsilon<r(j+1)\leq k(j+1). \tag{34}$$

现在我们考虑两种情况。若 $[k(j)\ k(j+1))$ 属于非周期类型，则根据引理 18，$|\sigma(y_{[k(j),k(j+1))})|$ 至少为 195ε。结合 (34) 得

$$|x_{[r(j),r(j+1))}|\geq|x_{[c_{k(j)},c_{k(j+1)})}|-81\varepsilon=|\sigma(y_{[k(j),k(j+1))})|-81\varepsilon\geq 80\varepsilon$$

假设现在 $[k(j)\ k(j+1))$ 是周期类型。那么，根据引理 17，$[k(j+1)\ k(j+2))$ 是非周期类型。特别地，根据 (i)，$r(j+1)=c_{k(j+1)}$。此外，由于 $[k(j)\ k(j+1))$ 是周期类型，(ii) 确保 $r(j)\leq k(j)-80\varepsilon$。这两点意味着 $|x_{[r(j),r(j+1))}|\geq|x_{[c_{k(j)}-80\varepsilon,c_{k(j+1)})}|\geq 80\varepsilon$，从而完成该断言的证明。

方程（33）表明，$(r(j))_{j\in\mathbb{Z}}$ 是递增的。因此，存在唯一的 $\ell \in \mathbb{Z}$，使得 $0 \in [r(\ell)\ r(\ell+1))$。我们定义 $k_x(j) = k(j+\ell)$，以及$r_x(j) = r(j+\ell)$。于是，$(k_x(j))_{j\in\mathbb{Z}}$ 和 $(r_x(j))_{j\in\mathbb{Z}}$ 满足引理的条目 (1)、(2) 和 (3)。此外，由于 $(r(j))_{j\in\mathbb{Z}}$ 是递增的，显然 ℓ （因而 $(k_x(j))_{j\in\mathbb{Z}}$ 和 $(r_x(j))_{j\in\mathbb{Z}}$也）是唯一的。 □

现在定义 (Z,τ)。由 (Y,σ) 的可识别性以及引理 19 可知，映射 $x \mapsto r_x(0)$ 是连续的。特别地，$U = \{x \in X :\ r_x(0) = 0\}$ 是既开又闭的（且非空）。我们将 $(Z \subseteq \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}, \tau : \mathcal{C} \to \mathcal{A}^+)$ 定义为从 X 得到的可识别编码，具体构造如命题 1 中从 U 得到的编码。

6.3 第二种编码的基本性质

在本章节余下部分中，我们固定使用以下记号。令 x 表示 X 的一个元素，$(c,y) = \mathrm{F}_{(Y,\sigma)}(x)$，且 $(f,z) = \mathrm{F}_{(Z,\tau)}(x)$。我们还将引理 21 给出的序列定义为 $(k_x(j))_{j\in\mathbb{Z}}$ 和 $(r_x(j))_{j\in\mathbb{Z}}$。

引理22。对于所有 $j \in \mathbb{Z}$，都有 $r_x(j) = f_j$。

证明。注意到 $\{k \in \mathbb{Z} :\ S^k x \in U\}$ 等于 $\{r_x(j) :\ j \in \mathbb{Z}\}$。然后，根据命题 1 中的条目 (1)，存在一个双射 $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，使得对所有 $j \in \mathbb{Z}$，$r_j(x) = f_{g(j)}$。现在，由于引理 21 指出，对所有 $j \in \mathbb{Z}$，$r_x(j) < r_x(j+1)$，映射 g 是递增的。又因其也是双射，我们得出存在 $\ell \in \mathbb{Z}$，满足对所有 $j \in \mathbb{Z}$，$g(j) = j + \ell$。最后，根据引理 21 中的条目（3）以及 f 的定义，我们有 $0 \in [f_0, f_1)$ 且$0 \in [r_x(0)\ r_x(1)) = [f_{g^{-1}(0)}\ f_{g^{-1}(0)+1})$。因此，$g^{-1}(0) = 0$，$\ell = 0$，引理得证。 □

最后一个引理允许我们省略记号 $r_x(j)$，只使用 f_j。特别地，引理 21 的条目 (2) 和 (3) 对 f_j 仍然成立。

我们将 $\mathcal{C}$ 的划分 $\mathcal{C}_{\mathsf{a}} \cup \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ 定义如下：

$$\mathcal{C}_{\mathsf{ap}} = \{a \in \mathcal{C} : \mathsf{per}(\tau(a)) > \varepsilon\} \text{ and } \mathcal{C}_{\mathsf{p}} = \{a \in \mathcal{C} : \mathsf{per}(\tau(a)) \le \varepsilon\}.$$

引理 23。设 $j \in \mathbb{Z}$。以下条件等价：

(1.a) $z_j \in \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$。(1.b) $[k_x(j)\ k_x(j+1))$ 对 y 属于周期类型。(1.c) 设 $s =$ 根 $\tau(z_j)$。那么，$|s| \le \varepsilon$，$x_{[f_j-8\varepsilon, f_{j+1}+8\varepsilon)} = s^{\mathbb{Z}}_{[-8\varepsilon, |\tau(z_j)|+8\varepsilon)}$ 以及$s =$ 根 $\sigma(y_{[k_x(j)\ k_x(j+1))})$。

以下条件也等价：

(2.a) $z_j \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。(2.b) $[k_x(j)\ k_x(j+1))$ 对 y 属于非周期类型。(2.c) 周期$(x_{[f_j+8\varepsilon, f_{j+1}-8\varepsilon)}) > \varepsilon$。

证明。我们先给出一个一般性的观察。记 $k(j) = k_x(j)$。那么，引理 21 中的条目（2）保证

$$c_{k(j)} - 81\varepsilon < f_j \le c_{k(j)} \text{ and } c_{k(j+1)} - 81\varepsilon < f_{j+1} \le c_{k(j+1)}.$$

因此，

$$\emptyset \neq [c_{k(j)}, c_{k(j+1)} - 81\varepsilon) \subseteq [f_j, f_{j+1}) \subseteq [c_{k(j)} - 81\varepsilon, c_{k(j+1)} + 81\varepsilon) \tag{35}$$

现在证明该引理。假设 (1.a) 成立。那么，(35) 意味着 $\mathsf{per}(x_{[c_{k(j)}+97\varepsilon, c_{k(j+1)}-97\varepsilon)}) \le \mathsf{per}(x_{[f_j, f_{j-1})}) \le \varepsilon$。因此，根据引理 18，$[k(j)\ k(j+1))$ 不是非周期类型，即，$[k(j)\ k(j+1))$ 是周期类型。

接下来假设 (1.b)。那么，引理 17 指出，对于所有 $k \in [k(j)\ k(j+1))$，$s = \text{根}\, \sigma(y_{[k(j),k(j+1))})$ 满足 $|s| \le \varepsilon$, $s = \text{根}\ \sigma(y_k)$，并且

$$x_{[c_{k(j)}-99\varepsilon, c_{k(j+1)}+99\varepsilon)} = s^{\mathbb{Z}}_{[-99\varepsilon, c_{k(j+1)}-c_{k(j)}+99\varepsilon)}. \tag{36}$$

此外，引理 17 中的条目（2）保证 $[k(j+1)\ k(j+2))$ 属于非周期类型。因此，根据引理 21 中的条目（2），$f_j = c_{k(j)} - |s^\ell|$ 和 $f_{j+1} = c_{k(j+1)}$，其中 $\ell = \lceil 80\varepsilon/|s| \rceil$。接着，借助（36）和（35），我们可以计算得出，

$$\begin{aligned} x_{[f_j-8\varepsilon, f_{j+1}+8\varepsilon)} &= s^{\mathbb{Z}}_{[-|s^\ell|-8\varepsilon, c_{k(j+1)}-c_{k(j+1)}+8\varepsilon)} \\ &= s^{\mathbb{Z}}_{[-8\varepsilon, |s^\ell|+c_{k(j+1)}-c_{k(j+1)}+8\varepsilon)} = s^{\mathbb{Z}}_{[-8\varepsilon, f_{j+1}-f_j+8\varepsilon)}. \end{aligned}$$

注意，最后一次计算还表明 $\tau(z_j) = x_{[f_j, f_{j+1})}$ 等于 $s^{\mathbb{Z}}_{[-|s^\ell|, c_{k(j+1)}-c_{k(j+1)})} = s^{\mathbb{Z}}_{[-|s^\ell|, 0)}\sigma(y_{[k(j),k(j+1))})$。因此，根 $\tau(z_j) = \text{根}\ s = s$，我们证明了 (1.c)。

注意，若 (1.c) 成立，则根据 $\mathcal{C}_{\mathsf{p}}$的定义，$\mathsf{per}(\tau(z_j)) \le |s| \le \varepsilon$ 且 $z_j \in \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$。

现在假设 (2.a)。那么，方程 (35) 推出 $\mathsf{per}(x_{[f_j, f_{j+1})}) \ge \mathsf{per}(x_{[c_{k(j)}, c_{k(j+1)}-81\varepsilon)}) > \varepsilon$。因此，根据引理 17，$[k(j)\ k(j+1))$ 不是周期类型，也就是说，$[k(j)\ k(j+1))$ 是非周期类型。

假设 (2.b) 成立。在这种情形下，引理 18 和 (35) 使我们能够计算

$$\mathsf{per}\big(x_{[f_j+8\varepsilon, f_{j+1}-8\varepsilon)}\big) \ge \mathsf{per}\big(x_{[c_{k(j)}+97\varepsilon, c_{k(j+1)}-97\varepsilon)}\big) > \varepsilon.$$

最后，如果 (2.c) 成立，则 $\mathsf{per}(\tau(z_j)) \ge \mathsf{per}(x_{[f_j+8\varepsilon, f_{j+1}-8\varepsilon)}) > \varepsilon$。 □

引理 24. 假设 $z_{-1}z_0z_1 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}\mathcal{C}_{\mathsf{p}}\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。那么，存在一个分解 $\tau(z_{-1}z_0z_1) = us^m u'$ 使得：

(1) $\varepsilon \le |u| \le |\tau(z_{-1})| - 2\varepsilon$ *and* $\varepsilon \le |u'| \le |\tau(z_1)| - 2\varepsilon$.

(2) $s \in \text{根}\, \sigma(\mathcal{B})$。

(3) s 不是 u 的后缀，也不是 u'的前缀。

证明。记 $k(j) = k_x(j)$。我们定义 $s =$根 $\tau(z_0)$。于是，根据$z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$，引理 23 保证 $|s| \le \varepsilon$，$x_{[f_0-8\varepsilon, f_1+8\varepsilon)} = s^{\mathbb{Z}}_{[-8\varepsilon, f_1-f_0+8\varepsilon)}$，$s =$根 $\sigma(y_{[k(0),k(1))})$，并且 $[k(0)\ k(1))$ 在 y 中属于周期类型。因此，根据引理 17，$s =$ 根 $\sigma(y_{k(0)}) \in \sigma(\mathcal{B})$。特别地，$s$ 满足本引理的条目（2）。

现在，我们可以找到一个区间 $I = [i, j)$，它包含 $[f_0 - 8\varepsilon, f_1 + 8\varepsilon)$，并且 $x_I = s^{\mathbb{Z}}_{[i-f_0, j-f_0)}$，且不存在其他严格包含 I 并满足相同性质的区间。我们注意到 $i \ge f_{-1}+8\varepsilon$，否则，周期$(x_{[f_{-1}+8\varepsilon, f_0-8\varepsilon)}) \le \varepsilon$，这与以下事实矛盾：由于 $z_{-1} \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，第（2.c）项引理 23 成立。类似地，$j \le f_2 - 8\varepsilon$。根据这两点以及 I 包含$[f_0 - 8\varepsilon, f_1 + 8\varepsilon)$这一事实，我们得到

$$f_{-1} + 8\varepsilon \le i \le f_0 - 8\varepsilon \text{ and } f_1 + 8\varepsilon \le j \le f_2 - 8\varepsilon. \tag{37}$$

这使我们可以写成 $x_{[f_{-1}, f_1)} = us^m v$，其中 $|u| \in [i - f_{-1}, i - f_{-1} + |s|)$、$m \ge 0$ 和 $|v| \in [f_2 - j, f_2 - j + |s|)$。

由 (37) 可得 $|u| \ge i - f_{-1} \ge 8\varepsilon$ 和 $|v| \ge f_2 - j \ge 8\varepsilon$。此外，由于 $|s| \le \varepsilon$，$|u| \le f_0 - f_{-1} - 7\varepsilon = |\tau(a)| - 7\varepsilon$ 且 $|v| \le f_2 - f_1 - 7\varepsilon = |\tau(a')| - 7\varepsilon$。这证明了引理的条目 (1) 成立。条目（3）由以下事实得出：$|s| \le \varepsilon$、(37) 以及 I 的极大性。 □

6.4 命题 10 和命题 11 的证明

我们现在可以证明本章节的主要结果了。

命题 11 的证明。设 x、$\tilde{x} \in X$ 满足 $\mathrm{per}(x_{[-\varepsilon,\varepsilon)}) > \varepsilon$ 且 $x_{[-7d^2n, 7d^2n)} = \tilde{x}_{[-7d^2n, 7d^2n)}$。我们定义 $(c, y) = \mathrm{F}_{(Y,\sigma)}(x)$、$(\tilde{c}, \tilde{y}) = \mathrm{F}_{(Y,\sigma)}(\tilde{x})$、$(f, z) = \mathrm{F}_{(Z,\tau)}(x)$ 和 $(f, \tilde{z}) = \mathrm{F}_{(Z,\tau)}(\tilde{x})$。令 $k(j) = k_x(j)$ 和 $k(j) = k_{\tilde{x}}(j)$ 为引理 21 中的序列。采用这一记号，我们需要证明 $f_0 = f_0$ 和 $z_0 = \tilde{z}_0$。

注意到 $\mathrm{per}(x_{[f_0-8\varepsilon, f_1+8\varepsilon)}) \ge \mathrm{per}(x_{[-\varepsilon,\varepsilon)}) > \varepsilon$。因此，根据引理 23，$[k(0)\ k(1))$ 在 y 中属于非周期类型。

我们断言

$$[c_{k(0)-1} - 3dn, c_{k(1)+1} + 3dn) \text{ is contained in } [-7d^2n, 7d^2n) \tag{38}$$

注意，根据引理 21 中的条目（2）和条目（3），$c_{k(0)} \le f_0 + 81\varepsilon \le 81\varepsilon$ 且 $c_{k(1)} \ge f_1 \ge 0$。因此，$c_{k(1)+1} \le c_{k(0)} + (k(1) - k(0) + 1)|\sigma| \le 81\varepsilon + (k(1) - k(0) + 1)|\sigma|$以及 $c_{k(0)-1} \ge c_{k(1)} - (k(1) - k(0) + 1)|\sigma| \ge -(k(1) - k(0) + 1)|\sigma|$。由于根据引理 18，$[k(0)\ k(1))$ 至多有 $2d + 1$ 个元素，并且根据命题 8 中的条目（2），$|\sigma| \le 3dn$，我们得到 $c_{k(1)+1} + 3dn \le 7d^2n$ 且 $c_{k(0)-1} - 3dn \ge -7d^2n$。这证明了（38）。

由（38），我们可以利用 (Y, σ) 是 $3dn$-可识别的这一事实（命题 8 的条目（3）），推得

$$c_k = \tilde{c}_k \text{ and } y_k = \tilde{y}_k \text{ for all } k \in [k(0) - 1, k(1) + 1). \tag{39}$$

现在我们注意到，(38) 和该假设保证

$$x_{[c_k - 99\varepsilon, c_{k+1} + 99\varepsilon)} = \tilde{x}_{[\tilde{c}_k - 99\varepsilon, \tilde{c}_{k+1} + 99\varepsilon)} \text{ for every } k \in [k(0) - 1, k(1) + 1). \tag{40}$$

因此，对于任意这样的 $k, k \in$Qp(y)，当且仅当 Qp($\tilde{y}$)。接着，利用稳定区间的定义不难验证，如果 $i \in \{0,1\}$，那么

(I) $k(i) = k(i)$;

(II) $[k(i)\ k(i+1))$ 在 y 中的类型与 $[k(i)\ k(i+1))$ 在 $\tilde{y}$ 中的类型相同。

于是，由 (I) 和 (40) 可得

$$x_{[k(0)-99\varepsilon,k(1)+99\varepsilon)} = \tilde{x}_{[\tilde{k}(0)-99\varepsilon,\tilde{k}(1)+99\varepsilon)}. \tag{41}$$

我们断言

$$f_0 = \tilde{f}_0 \text{ and } f_1 = \tilde{f}_1. \tag{42}$$

设 $i \in \{0,1\}$。我们分两种情况讨论。首先，假设 $[k(i)\ k(i+1))$ 在 y 中属于非周期类型的。那么，根据 (II)，$[k(i)\ k(i+1))$ 在 $\tilde{y}$ 中属于非周期类型。因此，由引理 21 中的条目（2），$f_i = c_{k(i)}$ 和 $f_i = \tilde{c}_{\tilde{k}(i)}$。由此，根据 (I) 和 (39) 可得 $f_i = f_i$。

接下来，假设 $[k(i)\ k(i+1))$ 在 y 中属于周期类型。那么，$[k(i), k(i+1))$ 根据 (II)，在 $\tilde{y}$ 中属于周期类型。因此，根据引理 17，$s =$ 根$\sigma(y_{[k(i),k(i+1))})$ 和 $\tilde{s} =$ 根$\sigma(\tilde{y}_{[\tilde{k}(i),\tilde{k}(i+1))})$ 满足 $|s|, |\tilde{s}| \le \varepsilon$，$x_{[c_{k(i)},c_{k(i)}+2\varepsilon)}$ 等于 $s^{\mathbb{Z}}_{[0,2\varepsilon)}$，且 $\tilde{x}_{[\tilde{c}_{\tilde{k}(i)},\tilde{c}_{\tilde{k}(i)}+2\varepsilon)}$ 等于 $\tilde{s}^{\mathbb{Z}}_{[0,2\varepsilon)}$。在这种情况下，(I) 和 (40) 确保了

$$s^{\mathbb{Z}}_{[0,2\varepsilon)} = x_{[c_{k(i)},c_{k(i)}+2\varepsilon)} = \tilde{x}_{[\tilde{c}_{\tilde{k}(i)},\tilde{c}_{\tilde{k}(i)}+2\varepsilon)} = \tilde{s}^{\mathbb{Z}}_{[0,2\varepsilon)}.$$

由于 $|s|, |\tilde{s}| \le \varepsilon$，这使我们可以使用定理 4 并推得 $s = \tilde{s}$。将此结果与以下事实结合起来：$[k(i)\ k(i+1))$ 和 $[k(i)\ k(i+1))$ 在引理 21 的条目（2）中属于周期类型，可得 $f_i = c_{k(i)} - |s^{\ell}|$ 和 $\tilde{f}_i = \tilde{c}_{\tilde{k}(i)} - |s^{\ell}|$，其中 $\ell = \lceil 80\varepsilon/|s| \rceil$。因此，由 (I) 和 (39)，$c_{k(i)} = \tilde{c}_{\tilde{k}(i)}$，$f_i = f_i$。这就完成了 (42) 的证明。

最后，我们证明 $z_0 = \tilde{z}_0$。引理 21 中的条目（2）给出 $|f_i - c_{k(i)}| \le 81\varepsilon$。因此，由（41）和（42），$x_{[f_0,f_1)} = \tilde{x}_{[f_0,f_1)} = \tilde{x}_{[\tilde{f}_0,\tilde{f}_1)}$。我们得出 $\tau(z_0) = \tau(\tilde{z}_0)$，从而由命题 1 可知，$z_0 = \tilde{z}_0$ as τ在字母上是单射。 □

我们以命题 10 的证明结束本章节。

命题 10 的证明。设 $x \in X$，$(c, y) =$F$(Y,\sigma)(x)$ 且 $(f, z) =$F$(Z,\tau)(x)$。设 $k(j) = k_x(j)$ 是引理 21 中的序列。

我们从条目 (ii) 开始。设 $a \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。由极小性，存在 $j \in \mathbb{Z}$ 使得 $z_j = a$。我们如下计算：

$$|\tau(z_j)| = |f_{j+1} - f_j| \le |f_{j+1} - c_{k(j+1)}| + (k(j+1) - k(j))|\sigma| + |f_j - c_{k(j)}|. \tag{43}$$

一方面，根据引理 21 中的条目（2），$|f_{j+1} - c_{k(j+1)}|$ 和$|f_j - c_{k(j)}|$ 至多为 81ε。另一方面，由于 $z_j \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，引理 23 保证 $[k(j)\ k(j+1))$在 y中属于非周期类型。因此，根据引理 18,

#[k(j) k(j + 1)) ≤ 2d + 1。将这两点代入（43），得到 |τ(z_j)| ≤2 · 81ε + (2d + 1)
|σ| ≤ 10d²n。

现在令 a ∈ C 和 j ∈ ℤ 满足 z_j = a。那么，根据引理 21，|τ(a)
| = f_{j+1} − f_j ≥ 80ε。

接下来，我们考虑条目 (i) 和不等式 #C_ap ≤ 2d^{3d+6}。注意，引理 17 和引理 18 保证了

$$|\sigma(y_{[k(j),k(j+1))})| \geq p\varepsilon \text{ for all } j \in \mathbb{Z}. \tag{44}$$

这使我们能够将 u_j 定义为 σ(y_{[k(j),k(j+1))}) 的长度为 2ε的前缀。

我们断言

$$\text{if } [k(j),k(j+1)) \text{ is of periodic type, then}$$
$$\mathsf{root}\,\sigma(y_{[k(j),k(j+1))}) \text{ is the prefix of } u_j \text{ of length } \mathsf{per}(u_j). \tag{45}$$

假设 [k(j) k(j + 1)) 是周期类型。于是，引理 17 指出， s = 根 σ(y_{[k(j),k(j+1))}) 满足 |s| ≤ ε 和 x_{[c_{k(j)}−99ε,c_{k(j+1)}+99ε)} =s^ℤ_{[−99ε,|σ(y_{[k(j),k(j+1))})|+99ε)}。特别地，由于 u_j = x_{[c_{k(j)},c_{k(j)}+2ε)}， s^ℤ_{[0,2ε)} = u_j。由于 |s| ≤ ε，我们得到 s² 是 u_j 的前缀，且 per(u_j) ≤ |s|。这使得我们可以在命题 4 中使用条目 (1)，从而得到 per(s²) = per(u_j)。此外，根据引理 6， |s| = per(s²)；因此， |s| = per(s²) =per(u_j)。由于s^ℤ_{[0,2ε)} = u_j，这表明 s 是 u_j 的长度为 per(u_j) 的前缀，从而完成该断言的证明。

现在我们用 (45) 来证明以下结论：

$$\text{若 } z_j \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}, \text{ 则 } \tau(z_j) \text{ 可由}$$
$$\sigma(y_{[k(j),k(j+1))}) \text{ 以及 } z_{j+1} \text{ 是否属于 } \mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \text{ 唯一确定。} \tag{46}$$

假设 z_j ∈ C_ap。我们分两种情况讨论。若 z_{j+1} ∈ C_ap，则引理 23 保证 [k(j) k(
j + 1)) 和 [k(j + 1) k(j + 2)) 在 y 中属于非周期类型，因此根据引理 21 中的条目（2）， τ(z_j) = σ(y_{[k(j),k(j+1))})。若 z_{j+1} ∈C_ap，则引理 23 保证 [k(j) k(j + 1)) 属于非周期类型，而 [k(j + 1) k(j + 2)) 属于周期类型。因此，根据引理 21 中的 (2)， τ(z_j) =x_{[c_{k(j)},c_{k(j+1)}−|s^ℓ|)}，其中 s = 是 σ(y_{[k(j+1),k(j+2))}) 的根，且 ℓ = ⌈80ε/|s|⌉。现在，(45) 表明 s 由 σ(y_{[k(j),k(j+1))}) 确定，而 ℓ 的定义仅取决于 s。因此， τ(z_j) = x_{[c_{k(j)},c_{k(j+1)}−|s^ℓ|)} 由 σ(y_{[k(j),k(j+1))}) 确定。(46) 的证明完成。

最后，我们对 C_ap 进行界定。条件（46）意味着 #τ(C_ap) 至多为形式为 σ
(y_{[k(j),k(j+1))}) 的词的数量的 2 倍，其中 j ∈ ℤ 满足z_j ∈ C_ap。注意，如果 z_j ∈ C_ap，那么由引理 23 可知， [k(j) k(j + 1)) 是非周期类型，因此，根据引理 18， [k(j) k(j+1)) 的长度至多为 2d + 1。因此，至多有 #B^{d+2} 个词 σ(
y_{[k(j),k(j+1))}) 满足 z_j ∈ C_ap。由此得出 #τ(C_ap) ≤ 2 · #B^{d+2}，因此，根据命题 8 中的条目（2）以及 τ 是字母上的单射这一事实，#C_ap ≤ 2d^{3d+6}

接下来，我们证明 # 根 $\tau(\mathcal{C}) \le 3d^{3d+6}$。由于根据我们刚刚证明的结果，# 根 $\tau(\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}) \le \#\mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \le 2d^{3d+6}$，且根据命题 8 中的条目（2），# 根 $\sigma(\mathcal{B}) \le \#\mathcal{B} \le d^3$，因此只需证明的是

$$\mathsf{root}\,\tau(\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}) \subseteq \{\mathsf{root}\,\sigma(y_0) : y \in Y, 0 \in \mathrm{Q}_{\mathsf{p}}(y)\}. \tag{47}$$

设 $a \in \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$ 和 $j \in \mathbb{Z}$ 满足 $z_j = a$。由引理 23 可知，根 $\tau(z_j)$ =根 $\sigma(y_{[k(j),k(j+1))})$，且 $[k(j)\ k(j+1))$ 在 y 中具有周期类型。因此，由引理 17 可知，根 $\tau(z_j)$ =根 $\sigma(y_{k(j)})$。这证明了 (47)，从而也证明了 # 根 $\tau(\mathcal{C}) \le 3d^{3d+6}$。

我们现在利用引理 24 证明 $\#\mathcal{C}_{\mathsf{p}} \le 2d^{3d+9}$ 幂复杂度(X)。令 $\mathcal{U} = \{z_{j-1}z_jz_{j+1} : j \in \mathbb{Z}, z_j \in \mathcal{C}_{\mathsf{p}}\}$。我们定义映射 $\pi : \mathcal{U} \to \cup_{s\in\mathsf{root}\,\sigma(\mathcal{B})}\mathrm{Pow}_X(s)$ 如下。对于 $aba' \in \mathcal{U}$，引理 24 给出了一个分解 $\tau(aba') = us^mu'$。我们设定$\pi(aba') = s^m$。注意，引理 24 中的条目（3）保证了 $s^m \in \mathrm{Pow}_X(s)$，并且根据同一引理中的条目（2），$s \in$ 根 $\sigma(\mathcal{B})$。

我们断言

$$\text{if } aba', a\tilde{b}a' \in \mathcal{U} \text{ and } \pi(aba') = \pi(a\tilde{b}a'), \text{ then } b = \tilde{b}. \tag{48}$$

设 $\tau(aba') = us^mu'$和 $\tau(a\tilde{b}a') = \tilde{u}\tilde{s}^{\tilde{m}}\tilde{u}'$是由 π 的定义给出的分解。采用这一记号，假设 $\pi(aba') = \pi(aba')$ 等价于$\tilde{} \ s^m = \tilde{s}^m$。于是，由于 $s =$ 根 s 和 $\tilde{s} =$ 根 $\tilde{s}$，$s = \tilde{s}$ 和 $m = \tilde{m}$。

现在我们证明 $u = \tilde{u}$。首先，不失一般性地假设$|\tilde{u}| \le |u|$。于是，由引理 24 可知

$$\tau(a) \text{ is prefix of both } us^m \text{ and } \tilde{u}s^m \text{ and that } |\tilde{u}| \le |u| \le |\tau(a)| - 2\varepsilon. \tag{49}$$

这意味着 $s^{\mathbb{Z}}_{[0,|\tau(a)|-|u|)} = (S^{|u|-|\tilde{u}|}s^{\mathbb{Z}})_{[0,|\tau(a)|-|u|)}$。将此结果与由 (49) 给出的界 $|\tau(a)| - |u| \ge 2\varepsilon \ge 2|s|$ 结合，可应用命题 2 中的条目 (1)，从而得出 $s^{\mathbb{Z}} = S^{|u|-|\tilde{u}|}s^{\mathbb{Z}}$。接着，根据同一命题中的条目（2），$|u| = |\tilde{u}|$（模 $|s|$）。由此以及 (49)，我们推得，对于某个 $\ell \ge 0$，有 $u = \tilde{u}s^\ell$。但是，由于根据引理 24 中的条目（3），s 不是 u 的后缀，因此必有 $\ell = 0$。所以，$u = \tilde{u}$。

我们可以用类似的方法证明，$u' = \tilde{u}'$。由此可以得出

$\tilde{}$ $\tilde{}$，$\tau(aba') = \tau(aba') = us^mu'$，从而 $\tau(b) = \tau(b)$。根据命题 1，τ在字母上是单射，$b = b'$，于是命题得证。

条件（48）意味着 $\#\mathcal{C}_{\mathsf{p}} \le \#\mathcal{C}^2_{\mathsf{ap}} \cdot \#(\cup_{s\in\mathsf{root}\,\sigma\,(\mathcal{B})}\ \mathrm{Pow}_X(s))$. 因此，$\#\mathcal{C}_{\mathsf{p}} \le \#\mathcal{C}^2_{\mathsf{ap}}$ # $\mathcal{B}$ · 幂复杂度(X)。由于 $\#\mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \le 2d^{3d+6}$，且根据命题 8 中的条目（2），$\#\mathcal{B} \le d^3$，可得 $\mathcal{C}_{\mathsf{p}} \le 2d^{3d+9}$幂复杂度$(X)$。

条目（3）是命题 11 的直接推论。

让我们证明条目 (4)。引理 23 保证 (Z, τ) 满足定义 6 的条目（1）和（2）。现在设 $x \in X$、$(c, z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$ 和 $a \in \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$ 满足：根 $\tau(z_0)$ 与根 $\tau(a)$ 共轭。注意，根据引理 23，|根 $\tau(z_0)$| = |根 $\tau(a)$| $\le \varepsilon$。因此，周期$(x_{[c_0+8\varepsilon,c_1-8\varepsilon)}) \le$ |根 $\tau(z_0)$| $\le \varepsilon$。由此可知，根据引理 23，$z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。接着，我们可以利用 (47) 得到，对于某些 y、$y' \in Y$，有根 $\tau(z_0)$ =根 $\sigma(y_0)$，且根 $\tau(a)$ =根 $\sigma(y'_0)$，使得

$0 \in \mathrm{Qp}(y) \cap \mathrm{Qp}(y')$。我们注意到，由于根 $\tau(z_0)$ 与根 $\tau(a)$ 共轭，因此词根 $\sigma(y_0)$ 与根 $\sigma(y_0')$ 共轭。因此， y 和 y' 满足引理 17 的条目（ 3 ）中的假设。由此可得，根 $\tau(z_0) =$根 $\sigma(y_0) =$根 $\sigma(y_0')$ 根 $\tau(a)$。

只需证明第（5）项。设 $j \in \mathbb{Z}$。由引理 17 可知，$[k(j)\ k(j+1))$ 或 $[k(j+1)\ k(j+2))$ 属于非周期类型。因此，由引理 23，z_j 或 z_{j+1} 属于 $\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。 □

7 第三个编码

我们继续改进这些编码。此版本的主要新增内容是，词 $\tau(a)$ 的长度受控。新编码的性质总结于命题 12。

命题 12. 设 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 是一个极小无限子移位， $n \geq 1$ ，并设 d为 $\lceil p_X(n)/n \rceil$、$p_X(n+1) - p_X(n)$、$\#\mathcal{A}$和 10^4中的最大值。存在 X的一个可识别编码 $(Z \subseteq \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}, \tau: \mathcal{C} \to \mathcal{A}^+)$ 、 $\mathcal{C}$ 的一个划分 $\mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \cup \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \cup \mathcal{C}_{\mathsf{wp}}$ 以及 $\varepsilon \in [n/d^{2d^3+4}, n/d)$，使得：

(1) $\#\mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \leq 2d^{3d+6}$，$\#\mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \leq 3d^{3d+6}$，$\#\mathcal{C}_{\mathsf{wp}} \leq 2d^{3d+9}$ 幂复杂度$(X)^4$ 以及 # 根 $\tau(\mathcal{C}) \leq 5d^{3d+6}$。(2) 对所有 $a \in \mathcal{C}$， $20\varepsilon \leq |\tau(a)| \leq 10d^2 n$ 。(3) (Z, τ) 满足命题 13 中描述的可识别性性质。(4) (Z, τ) 相对于 $(\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}, \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \cup \mathcal{C}_{\mathsf{wp}})$ 和 8ε 具有二分周期。(5) 集合 $\mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$ 满足命题 14 中描述的性质。

注 6. 假设采用命题 12 中的记号。则， $a \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ 意味着 |根 $\tau(a)| =$周期$(\tau(a))$。事实上，条目 (4) 确保了 |根 $\tau(a)| \leq \varepsilon$，而条目（2）确保了 $|\tau(a)| \geq 2\varepsilon$，因此，根据引理 6， |根 $\tau(a)| =$周期$(\tau(a))$。

命题 13. 考虑命题 12 中描述的编码。对于任意x、 $\tilde{x} \in X$，有：

(1) 若 $\mathrm{per}(x_{[-\varepsilon,\varepsilon)}) > \varepsilon$ and $x_{[-7d^2n,7d^2n)} = \tilde{x}_{[-7d^2n,7d^2n)}$，则 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(x)$ 等于 $\mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tilde{x})$。(2) 若 $k \geq 0$、 $x_{[-50d^2n,k+50d^2n)} = \tilde{x}_{[-50d^2n,k+50d^2n)}$ 且 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(x)$ 等于 $\mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tilde{x})$，则 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^k x)$ 等于 $\mathrm{F}^{(Z,\tau)}(S^k \tilde{x})$。

命题 14. 命题 12 中的编码满足以下性质。

(1) 如果 $z \in Z$ 和 $i < j$ 是满足以下条件的整数：对所有 $k \in [i, j+1$ 均有 $z_k \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，那么对所有 $k \in [i, j$ 均有 $z_k = z_i \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$，且 $\tau(z_k)$ 的根 $=$ 是 $\tau(z_i)$ 的根。(2) 如果 $a \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$，那么 $\tau(a) =$(根 $\tau(a))^{2^r}$，其中 r 是满足以下条件的唯一整数： $2^r |$ 根 $\tau(a)|$ 属于 $[20\varepsilon, 40\varepsilon$。

现在我们介绍本章节中将使用的记号。设 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 是一个极小无限子移位，$n \geq 1$，并设 d 为 $\lceil p_X(n)/n \rceil$、$p_X(n+1) - p_X(n)$、$\#\mathcal{A}$ 和 10^4 中的最大值。于是，将命题 10 应用于 X 和 n，得到 X 的一个可识别编码 $(Y \subseteq \mathcal{C}_Y^{\mathbb{Z}}, \sigma\colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}^+)$、一个划分 $\mathcal{C}_Y = \mathcal{C}_{\mathsf{p}} \cup \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ 以及一个满足命题 10 中所述性质的整数 $\varepsilon \in [n/d^{2d^3+4}, n/d)$。

证明本章节主要命题的策略如下。编码 (Z, τ) 将通过把 $\sigma(\mathcal{C}_{\mathsf{p}})$ 中的词分割成长度经过仔细选择的子词，从 (Y, σ) 得到。这样既能保留 (Y, σ) 的大部分性质，又能控制 $\tau(a)$ 中所有词的长度。一个棘手之处在于，如何定义 $\sigma(\mathcal{C}_{\mathsf{p}})$ 中各词的分割方式，使得 (Z, τ) 具有命题 13 中的可识别性性质。

7.1 第三种编码的构造

对于 $s \in \operatorname{root}\sigma(\mathcal{C}_{\mathsf{p}})$，我们将 $\zeta(s)$ 定义为满足 $\zeta(s) \cdot |s| \text{lies in } [20\varepsilon, 40\varepsilon)$ 的唯一 2 的幂。注意，根据命题 10 的条目 (4)，我们有 $\zeta(s) \geq 1$。于是，对于 $a \in \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$，我们可以将 p_a 和 q_a 定义为满足以下条件的唯一整数

$$p_a \cdot \zeta(\operatorname{root}\sigma(a)) + q_a = \frac{|\sigma(a)|}{|\operatorname{root}\sigma(a)|} \text{ and } 0 < q_a \leq \zeta(\operatorname{root}\sigma(a)). \tag{50}$$

需要特别指出的是，命题 10 中的条目（2）确保了 $p_a \geq 2$。对于 $a \in \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$，令

$$\psi_{\mathsf{sp}}(a) = (\operatorname{root}\sigma(a))^{\zeta(\operatorname{root}\sigma(a))} \text{ and } \psi_{\mathsf{wp}}(a) = (\operatorname{root}\sigma(a))^{\zeta(\operatorname{root}\sigma(a))+q_a}.$$

注意

$$\sigma(a) = \psi_{\mathsf{sp}}(a)^{p_a-1}\psi_{\mathsf{wp}}(a) \text{ for all } a \in \mathcal{C}_{\mathsf{p}}.$$

我们还选择双射

$$\phi_{\mathsf{sp}}\colon \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \to \psi_{\mathsf{sp}}(\mathcal{C}_{\mathsf{p}}) \text{ and } \phi_{\mathsf{wp}}\colon \mathcal{C}_{\mathsf{wp}} \to \psi_{\mathsf{wp}}(\mathcal{C}_{\mathsf{p}}),$$

其中 $\mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$、$\mathcal{C}_{\mathsf{wp}}$ 和 $\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ 两两不交。于是，对于 $a \in \mathcal{C}_Y$，我们定义

$$\eta(a) = \begin{cases} a & \text{if } a \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \\ \phi_{\mathsf{sp}}^{-1}(\psi_{\mathsf{sp}}(a))^{p_a-1}\phi_{\mathsf{wp}}^{-1}(\psi_{\mathsf{wp}}(a)) & \text{if } a \in \mathcal{C}_{\mathsf{wp}} \end{cases} \tag{51}$$

令 $\mathcal{C}_Z = \mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \cup \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \cup \mathcal{C}_{\mathsf{wp}}$，并且对于 $a \in \mathcal{C}_Z$，置

$$\tau(a) = \begin{cases} \sigma(a) & \text{if } a \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \\ \phi_{\mathsf{sp}}(a) & \text{if } a \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \\ \phi_{\mathsf{wp}}(a) & \text{if } a \in \mathcal{C}_{\mathsf{wp}} \end{cases} \tag{52}$$

由此可得，

$$\sigma = \tau\eta. \tag{53}$$

最后，我们设定 $Z = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k\eta(Y)$。

我们来评论一下$\sigma\tau\alpha$的定义。方程 (53) 表明，如果 $a \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，则 $\sigma(a) = \tau(a)$；如果 $a \in \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$，则 $\phi_{\mathsf{wp}}^{-1}\ \psi_{\mathsf{wp}}\ c \qquad \tau \qquad \sigma \qquad \sigma\ a \qquad (\,)\,(b)^{p_a-1}\tau(\,)$、 $b = \phi_{\mathsf{sp}}^{-1}($ $\psi_{\mathsf{sp}}(\,))$ 和 $(\,(\,))$。换言之，是通过对单词 $(\,)$ 进行切分而得到的。

7.2 命题 12、13 和 14 的证明

命题 12 的证明。我们从条目 (1) 开始。命题 10 中的条目 (1) 给出了界 $\#\mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \le 2d^{3d+6}$。此外，由定义和命题 10 中的条目 (1) 可得

$$\#\mathcal{C}_{\mathsf{sp}} = \#\psi_{\mathsf{sp}}(\mathcal{C}_{\mathsf{p}}) = \#\,\mathsf{root}\,\sigma(\mathcal{C}_{\mathsf{p}}) \le 3d^{3d+6} \text{ and}$$
$$\#\mathcal{C}_{\mathsf{wp}} = \#\psi_{\mathsf{wp}}(\mathcal{C}_{\mathsf{p}}) \le \#\mathcal{C}_{\mathsf{p}} \le 2d^{3d+9}\cdot \mathsf{pow\text{-}com}(X).$$

现在，利用 52 得到根 $\tau(\mathcal{C}_Z \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}) =$根 $\sigma(\mathcal{C}_{\mathsf{p}})$。因此，# 根 $\tau(\mathcal{C}_Z) \le \#\mathcal{C}_{\mathsf{ap}} +$# 根 $\sigma(\mathcal{C}_{\mathsf{p}})$，从而得到 # 根 $\tau(\mathcal{C}_Z) \le 4d^{3d+6}$，这里使用了界 $\#\mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \le 2d^{3d+6}$ 和 # 根 $\sigma(\mathcal{C}_Y) \le 3d^{3d+6}$；最后一个界由命题 10 中的条目 (1) 给出。

现在我们考虑条目（2）。令 $a \in \mathcal{C}_Z$。如果 $a \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，那么根据命题 10 中的条目（2），我们有 $20\varepsilon \le |\tau(a)| = |\sigma(a)| \le 10d^2n$。如果 $a \in \mathcal{C}_Z \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ 且$s =$根 $\tau(a)$，那么（52）意味着

$$|\tau(a)| = \begin{cases} \zeta(s)|s| & \text{if } a \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \\ (\zeta(s)+q_a)|s| & \text{if } a \in \mathcal{C}_{\mathsf{wp}} \end{cases}$$

由于 $20\varepsilon \le \zeta(s)|s| < 40\varepsilon$ 且 $0 < q_a \le |\zeta(s)|$，我们得到 $20\varepsilon \le |\tau(a)| \le 80\varepsilon \le 10d^2n$。

接下来，我们证明条目（3）。令 $x \in X$、$(c,y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}$ and $(f,z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$。我们使用引理 2 得到 $m \in [0, |\eta(y_0)|)$，使得

$$\eta(y_0) = z_{[-m,-m+|\eta(z_0)|)} \text{ and } c_0 = f_0 - |\tau(z_{[-m,0)})|. \tag{54}$$

我们首先假设 $z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。那么，方程 (54) 表明 z_0 出现在 $\eta(y_0)$ 中，因此，由于 $z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，方程 (51) 保证 $\eta(y_0) = y_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。因此，$m = 0$、$z_0 = y_0$、$c_0 = f_0$ 和 $c_1 = c_0 + |\sigma(y_0)| = f_0 + |\tau(z_0)| = f_1$。利用这一点，并将命题 10 的条目 (4) 与 x 和 (c,y) 一起使用，可得以】【。

$$\mathsf{per}(x_{[f_0+8\varepsilon, f_1-8\varepsilon)}) = \mathsf{per}(x_{[c_0+8\varepsilon, c_1-8\varepsilon)}) > \varepsilon.$$

现在假设 $z_0 \in \mathcal{C}_Z \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。这一条件和方程 (51) 蕴含 $y_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$。因此，我们可以在命题 10 中使用条目 (4)，得到 $\mathsf{per}(x_{[c_0-8\varepsilon, c_1+8\varepsilon)}) \le \varepsilon$。我们得出结论：由于 (51) 保证 $[f_0, f_1)$ 包含于 $[c_0, c_1)$，因此 $\mathsf{per}(x_{[f_0-8\varepsilon, f_1+8\varepsilon)}) \le \mathsf{per}(x_{[c_0-8\varepsilon, c_1+8\varepsilon)}) \le \varepsilon$。

剩下要证明的是 (Z,τ) 满足定义 6 的条目（3）。设 $a \in \mathcal{C}_Z \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ 使得根 $\tau(z_0)$ 与根 $\tau(a)$ 共轭。由 (54) 可知，z_0 出现在 $\eta(y_0)$ 中，因此根据 (51)，根 $\tau(z_0) =$根 $\sigma(y_0)$。类似地，对于某个 $b \in \mathcal{C}_Y$，a 出现在 $\eta(b)$ 中，且根 $\tau(a) =$根 $\sigma(b)$。第一项条件和 (51) 推出，如

$a \in \mathcal{C}_Z \backslash \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，因此 $b \in \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$。现在，假设保证根 $\sigma(y_0)$ 与根 $\sigma(b)$ 共轭。因此，由于 (Y, σ) 关于 $(\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}, \mathcal{C}_{\mathsf{p}})$ 具有二分周期，我们可以使用定义 6 的条目（3），得到根 $\sigma(y_0)$ = 根 $\sigma(b)$。由此可得根 $\tau(z_0)$ = 根 $\tau(a)$，从而完成条目（3）的证明。

最后，对于第（4）项和第（5）项，我们将在下文给出命题 13 和 14 的证明。 □

引理 25. 设 $\mathcal{C}_{\mathsf{block}}$ 为词集合 $a^\ell b$，其中 $a \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$、$b \in \mathcal{C}_{\mathsf{wp}}$、$\ell \geq 1$，且根 $\tau(a)$ = 根 $\tau(b)$。那么，任意 $z \in Z$ 都可以写成 $z = \ldots w_{-1} w_0 w_1 \ldots$，其中 $w_j \in \mathcal{C}_{\mathsf{block}}$ 或 $w_j \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，且 $w_j w_{j+1} \notin \mathcal{C}_{\mathsf{block}}^2$。

证明. 设 $z \in Z$ 且 $(c, y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(\tau(z))$。我们令 $w_j = \eta(y_j)$。(51) 中 η 的定义保证了 $w_j \in \mathcal{C}_{\mathsf{block}} \cup \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。此外，命题 10 中的第（5）项在此情形下表明，对于所有 $j \in \mathbb{Z}$，都有 $w_j w_{j+1} \notin \mathcal{C}_{\mathsf{block}}^2$。最后，根据引理 2，我们有 $z = S^\ell \eta(y)$，其中某个 $\ell \in \mathbb{Z}$，因此 $z = \ldots w_{-1} w_0 w_1 \ldots$ □

现在我们可以给出命题 14 的证明。

命题 14 的证明。条目（2）直接由 τ 在（52）中的定义得出。我们来证明条目 (1)。设 $z \in Z$ 满足 $z_{[i,j+1)} \subseteq (\mathcal{C}_Z \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}})^+$。按照引理 25 的记号写 $z = \ldots w_{-1} w_0 w_1 \ldots$，并令 $\mathcal{C}_{\mathsf{block}}$ 为引理 25 中定义的集合。于是，假设 $z_{[i,j+1)} \in (\mathcal{C}_Z \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}})^+$ 和条件$w_k w_{k+1} \notin \mathcal{C}_{\mathsf{block}}$ 意味着，对于满足$w_k \in \mathcal{C}_{\mathsf{block}}$的某个 $k \in \mathbb{Z}$，$z_{[i,j+1)}$ 出现在 w_k 中。因此，对于所有 $\ell \in [i, j)$，有 $z_\ell = z_i \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$，并且对于所有 $k \in [i, j+1)$，根 $\tau(z_k)$ = 根 $\tau(z_i)$。 □

引理 26。设 z、$\tilde{z} \in Z$ 和 $\ell \geq 1$ 满足：$\tau(\tilde{z}_{[0,\ell)})$ 是 $\tau(z_0)$ 的前缀。则，$z_0 \in \mathcal{C}_Z \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ 意味着 $\tilde{z}_i \in \mathcal{C}_Z \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，并且对于所有$i \in [0, \ell)$，根 $\tau(\tilde{z}_i)$ = 根 $\tau(z_0)$。

证明。首先，我们注意到，根据命题 12 中的条目 (4)，对所有 $i \in [0, \ell)$，$\mathrm{per}(\tau(\tilde{z}_i)) \leq \mathrm{per}(\tau(z_0)) \leq \varepsilon$。因此，根据命题 12 中的条目 (4)，对所有$i \in [0, \ell)$，$\tilde{z}_i \in \mathcal{C}_Z \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。

令 $s = \mathrm{root}\ \tau(z_0)$。为了继续，我们断言

$$\text{if } a \in \mathcal{C}_Z \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \text{ and } \tau(a) \text{ is a prefix of } s^\infty, \text{ then } \mathrm{root}\, \tau(a) = s.$$

首先，我们注意到 $\tau(a)$ 是 $(\mathrm{root}\ \tau(a))^\infty$ 的前缀。此外，命题 12 中的条目 (4) 保证 $|\mathrm{root}\ \tau(a)| \leq \varepsilon$，并且 $|s| \leq \varepsilon$。因此，由于根据命题 12 中的条目（2），$|\tau(a)| \geq 2\varepsilon$，我们可以使用定理 4 推出，$\mathrm{root}\ \tau(a)$ 和 s 是同一词的幂 r。这意味着 $s = \mathrm{root}\ \tau(a) = \mathrm{root}\ r$。

现在我们通过对 i 进行归纳法，证明对于 $i \in [0, \ell)$，$\mathrm{root}\ \tau(\tilde{z}_i) = s$。若 $i = 0$，则根据假设，我们有 $\tau(\tilde{z}_0)$ 是 $\tau(z_0)$ 的前缀，且 $\tilde{z}_0 \in \mathcal{C}_Z \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。因此，根据该断言，$\mathrm{root}\ \tau(\tilde{z}_0) = s$。现在假设 $0 < i < \ell$，且对于 $j \in [0, i)$，$\mathrm{root}\ \tau(\tilde{z}_j) = s$。那么，$\tau(\tilde{z}_{[0,i)})$ 是 s 的幂。由于 $\tau(\tilde{z}_{[0,i)})$ 是 $\tau(z_0)^\infty = s^\infty$ 的前缀，我们推得 $\tau(\tilde{z}_i)$ 是 s^∞ 的前缀。由此可应用该断言，得到 $\mathrm{root}\ \tau(\tilde{z}_i) = s$。至此，归纳步骤和引理的证明均告完成。 □

最后，我们证明命题 13

命题 13 的证明。我们为本证明固定如下记号。令 $x, \tilde{x} \in X$, $(f, z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$, $(f, \tilde{z}) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tilde{x})$, $(c, y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$ 以及 $(\tilde{c}, \tilde{y}) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(\tilde{x})$。

我们先证明条目 (1)。假设 $\mathsf{per}(x_{[-\varepsilon,\varepsilon)}) > \varepsilon$ 并且 $x_{[-7d^2n,7d^2n)} = x'_{[-7d^2n,7d^2n)}$。我们需要证明 $f_0 = f_0$ 和 $z_0 = \tilde{z}_0$。

我们断言

(i) $c_0 = \tilde{c}_0$ and $y_0 = \tilde{y}_0$;

(ii) $y_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ and $\tilde{y}_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$;

(iii) $z_0 = y_0$, $f_0 = c_0$, $\tilde{z}_0 = \tilde{y}_0$ and $\tilde{f}_0 = \tilde{c}_0$.

条目 (i) 由以下事实可得：当前假设允许我们使用命题 10 的条目（3），从而得到 $\mathrm{F}^0_{(Y,\sigma)}(x) = \mathrm{F}^0_{(Y,\sigma)}(\tilde{x})$，这与 (i) 等价。对于条目 (ii)，注意到如果 $y_0 \in \mathcal{C}_Y \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}} = \mathcal{C}_{\mathsf{p}}$，那么命题 10 中的条目 (4) 意味着 $\mathsf{per}(x_{[c_0-8\varepsilon,c_1+8\varepsilon)}) \leq \varepsilon$。因此，由于 $[-\varepsilon, \varepsilon)$ 包含于 $[c_0 - 8\varepsilon, c_1 + 8\varepsilon)$，$\mathsf{per}(x_{[-\varepsilon,\varepsilon)}) \leq \varepsilon$，这与我们的假设矛盾。因此，$y_0 = \tilde{y}_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。

为证明条目 (iii)，我们首先注意到，引理 2 给出了一个整数 $m \in [0, |\tau(z_0)|)$，使得

$$y_{[-m,-m+|\eta(z_0)|)} = \eta(z_0) \text{ and } -c_0 = -f_0 + |\eta(z)_{[0,m)}|. \tag{55}$$

特别地，y_0 出现在 $\eta(z_0)$ 中。由于条目 (ii) 确保了 $y_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，根据 (51) 中 η 的定义可知，$\eta(y_0) = y_0 = z_0$。将其代入 (55) 得到 $m = 0$ 以及 $c_0 = f_0$。类似的论证还表明，$\tilde{z}_0 = \tilde{y}_0$ 和 $f_0 = \tilde{c}_0$ 也成立。至此，该断言得证。

该断言的条目 (i) 和 (ii) 意味着 $(f_0, z_0) = (\tilde{f}_0, \tilde{z}_0)$。

在证明条目 (2) 之前，我们先断言

$$\text{if } z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \text{ and } x_{[-17d^2n,17d^2n)} = \tilde{x}_{[-17d^2n,17d^2n)}, \text{ then } \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(\tilde{x}). \tag{56}$$

为证明 (56)，我们首先使用命题 12 的条目 (4)，得到 $\mathsf{per}(x_{[f_0+8\varepsilon,f_1-8\varepsilon)}) > \varepsilon$。因此，根据命题 4 的条目 (2)，存在满足以下条件的 $j \in [f_0 + 8\varepsilon, f_1 - 8\varepsilon)$：

$$\mathsf{per}(x_{[j-\varepsilon,j+\varepsilon)}) > \varepsilon. \tag{57}$$

现在，由于 $j \in [f_0+8\varepsilon, f_1-8\varepsilon)$ 和 $|\tau| \leq 10d^2n$，我们有 $j \in [-10d^2n, 10d^2n)$。因此，根据假设 $x_{[-17d^2n,17d^2n)} = \tilde{x}_{[-17d^2n,17d^2n)}$，$\tilde{x}_{[j-7d^2n,j+7d^2n)} = x_{[j-7d^2n,j+7d^2n)}$。将其与 (57) 结合，我们可以使用本命题的条目 (1)，从而得到

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^j x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^j \tilde{x}). \tag{58}$$

注意，条件 $j \in [f_0+8\varepsilon, f_1-8\varepsilon)$ 意味着 $\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^j x) = (f_0-j, z_0)$。令 i 为满足 $\tilde{f}_i \le j < \tilde{f}_{i+1}$ 的整数，并注意 $\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^j \tilde{x}) =$ ~ ~ ~($f_i-j\ \tilde{z}_i$ 58 $f_0 = f_i$ $z_0 = \tilde{z}_i$ $f_i = f_0 \le 0 < f_1 =$,)。于是，根 $\tilde{f}_{i+1}$ $i = 0$ $^0_{(Z,\tau)}\ x = f_0\ z_0 = \tilde{f}_0\ \tilde{z}_0 = {}^0_{(Z,\tau)}\ \tilde{x}$ 据 ( )，以及 。特别地，，因此 。我们得出 F ( ) (,) (,) F ( )。

现在证明条目（2）。假设 $\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(\tilde{x})$。这等价于 $z_0 = \tilde{z}_0$ 和 $f_0 = f_0$，因此 $f_1 = f_1$ 也成立。于是，

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^i x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^i \tilde{x}) \text{ for all } i \in [f_0, f_1). \tag{59}$$

我们将证明

$$\text{if } x_{[-50d^2n, 50d^2n)} = \tilde{x}_{[-50d^2n, 50d^2n)}, \text{ then } \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{f_1} x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{f_1} \tilde{x}). \tag{60}$$

由利用方程（59）和（60）对 k 进行归纳论证，即可得到该引理。

设 $x_{[-50d^2n, 50d^2n)} = \tilde{x}_{[-50d^2n, 50d^2n)}$。我们分两种情况讨论。首先，假设 z_1 或 $\tilde{z}_1$ 属于 $\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。不失一般性，设 z_1 属于 $\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。注意，假设以及 $|\tau| \le 10d^2n$ 确保了 $x_{[f_1-7d^2n, f_1+7d^2n)} = \tilde{x}_{[f_1-7d^2n, f_1+7d^2n)}$。因此可以使用（56），推出 $\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{f_1} x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{f_1} \tilde{x})$。

现在考虑 z_1 和 $\tilde{z}_1$ 属于 $\mathcal{C}_Z \backslash \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$的情形。注意，由于 $f_1 = \tilde{f}_1$，我们有 F $^0_{(Z,\tau)}(S^{f_1} x) = (0, z_1)$，且 $\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{f_1} \tilde{x}) = (0, \tilde{z}_1)$。因此，只需证明 $z_1 = \tilde{z}_1$。

不失一般性，假设 $|\tau(z_1)| \ge |\tau(\tilde{z}_1)|$。令 ℓ 为满足 $f_\ell \le f_2 < f_{\ell+1}$的 ~ z_1 ~ ~ ~ 整数。注意，由于 ( ) f_1 τ(= $\tilde{x}_{[-50d^2n, 50d^2n}$ $|\tau| \le 7d^2n$ $\tau\ \tilde{z}_{[1,\ell)}$ $\tau\ z_1$)| = f_2，所以 ~ $\ell \ge 2$ $f_2 = f_1 + |\tau\ \tilde{z}_1| \le$。由于 $f_1 = f_1$ 且 $f_\ell \le f_2$，假设)) 以及该界保证 ~ ( ) 是 ( ) 的前缀。因此，既然我们假设 $z_1 \in \mathcal{C}_Z \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$，引理 26 得出

$$\tilde{z}_i \in \mathcal{C}_Z \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \text{ and } \mathsf{root}\,\tau(\tilde{z}_i) = \mathsf{root}\,\tau(z_1) \text{ for all } i \in [1, \ell). \tag{61}$$

我们设定 $s =$ 根 $\tau(z_1)$。由此，根据 61 和 52 可知，对于任意 $i \in [1, \ell)$

$$z_1 = \begin{cases} s^{\zeta(s)} & \text{if } z_1 \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \\ s^{\zeta(s)+q_{z_1}} & \text{if } z_1 \in \mathcal{C}_{\mathsf{wp}} \end{cases} \qquad \tilde{z}_i = \begin{cases} s^{\zeta(s)} & \text{if } \tilde{z}_i \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \\ s^{\zeta(s)+q_{\tilde{z}_i}} & \text{if } \tilde{z}_i \in \mathcal{C}_{\mathsf{wp}} \end{cases} \tag{62}$$

我们可以利用这一点证明，$|\tau(z_1)| = |\tau(\tilde{z}_1)|$ 蕴含 $z_1 = \tilde{z}_1$。事实上，在情形 $z_1 \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$下，由(62)以及对所有$a \in \mathcal{C}_{\mathsf{wp}}$ 均有 $q_a > 0$ 这一事实可得 $\tau(\tilde{z}_1) = \tau(z_1) = s^{\zeta(s)}$，从而得到 $\tilde{z}_1 = z_1 = \psi^{-1}_{\mathsf{sp}}(s^{\zeta(s)})$。类似地，若 $z_1 \in \mathcal{C}_{\mathsf{wp}}$，则(50)以及方程根$\tau(z_1)$ =根$\tau(\tilde{z}_1)$保证 $q_{z_1} = q_{\tilde{z}_1}$，因此由(62)可得 $\tau(\tilde{z}_1) = \tau(z_1) = s^{\zeta(s)+q_{z_1}}$。特别地，$\tilde{z}_1 = z_1 = \psi^{-1}_{\mathsf{wp}}(s^{\zeta(s)+q_{z_1}})$。

剩下要考虑的情形是 $|\tau(z_1)| > |\tau(\tilde{z}_1)|$，因此我们假设这一条件成立。于是，由(62) 以及对所有 $a \in \mathcal{C}_{\mathsf{wp}}$ 都有 $q_a > 0$，得出：

$$z_1 \in \mathcal{C}_{\mathsf{wp}} \text{ and } \tilde{z}_1 \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}}. \tag{63}$$

在这种情况下，命题 14 中的条目 (1) 确保了 $z_2 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。现在，注意到 $f_3 \le 3|\tau| \le 30d^2n$ 和 $f_2 \ge 0$；因此，假设 $x_{[-50d^2n,50d^2n)} = \tilde{x}_{[-50d^2n,50d^2n)}$ 可得 $x_{[f_2-7d^2n,f_3+7d^2n)} = \tilde{x}_{[f_2-7d^2n,f_3+7d^2n)}$。因此，我们可以利用 (56) 得到 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{f_2}x)$ 等于 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{f_2}\tilde{x})$。更确切地说，$\tilde{}$ $\tilde{}$ 由于 $f_\ell \le f_2 < f_{\ell+1}$，我们可以写出

$$(\tilde{f}_\ell - f_2, \tilde{z}_\ell) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{f_2}\tilde{x}) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{f_2}x) = (0, z_2).$$

因此，方程 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{f_2}x) = \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{f_2}\tilde{x})$ 等价于

$$\tilde{f}_\ell = f_2 \text{ and } \tilde{z}_\ell = z_2. \tag{64}$$

特别地，$\tau(\tilde{z}_{[1,\ell)}) = \tau(z_1)$。

现在，由于 $z_1 \in \mathcal{C}_{\mathsf{wp}}$，根据命题 14 中的条目 (1)，我们有 $\tilde{z}_\ell = z_2 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。因此，命题 14 中的条目 (1) 保证 $\tilde{z}_i \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$ 对所有 $i \in [0, \ell-1)$ 以及 $\tilde{z}_{\ell-1} \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$。将其与 (62) 以及等式 $\tau(\tilde{z}_{[1,\ell)}) = \tau(z_1)$ 结合可得

$$(\zeta(s) + q_{z_1})|s| = |\tau(z_1)| = |\tau(\tilde{z}_{[0,\ell)})| = (\ell\zeta(s) + q_{\tilde{z}_{\ell-1}})|s|.$$

由于 $q_{z_1} \le \zeta(s)$ 且 $q_{\tilde{z}_{\ell-1}} > 0$，我们得出 $\ell \le 1$。但这样一来，$\tau(z_1) = \tau(\tilde{z}_{[1,\ell)})$ 就是空词，这与 τ 的定义矛盾。因此，情形 $|\tau(z_1)| > |\tau(\tilde{z}_1)|$ 不会发生，证明完毕。□

8 第四种编码

在本章节中，我们给出证明主要定理所需编码的最终版本。这些编码的新特点是可以通过态射将它们连接起来。

本章节分为两部分。在第一部分中，我们使用命题 12 和经修改的高阶块构造来构造新的编码，并介绍它们的基本性质。然后，在第二部分中，我们展示如何使用第 8.2.2 小节中描述的态射连接其中两个编码。

8.1 第四种编码的构造

设 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 是一个无限极小子移位，$n \ge 0$，并令 d 为 $\lceil p_X(n)/n \rceil$、$p_X(n+1) - p_X(n)$、$\#\mathcal{A}$ 和 10^4 中的最大值。我们使用命题 12，结合 X 和 n，得到 X 的一个可识别编码 $(Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}, \sigma\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}^+)$、一个划分 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathsf{ap}} \cup \mathcal{B}_{\mathsf{sp}} \cup \mathcal{B}_{\mathsf{wp}}$ 以及一个整数 $\varepsilon \in [n/d^{2d^3+4}, n/d)$，它们满足命题 12 的条件 (1) 至 (5)。

我们从以下观察出发。由于 (Y, σ) 是极小子移位的可识别编码，Y 是极小的；因此，对于所有 $y \in Y$，存在 $k < 0$ 使得 $y_k \in \mathcal{B}_{\mathsf{ap}}$。这一观察使我们能够定义映射 $\mathfrak{L}(y) = \max\{k < 0 : y_k \in \mathcal{B}_{\mathsf{ap}}\}$，它返回 $\mathcal{B}_{\mathsf{ap}}$ 中左侧第一个符号的索引。

设 ψ_0: $Y \to \mathcal{B}^4$ 为映射 $y \mapsto y_{\mathfrak{L}(y)}y_{-1}y_0y_1$，且 $\psi(y) = (\psi_0(S^j y))_{j\in\mathbb{Z}}$。我们将 $\psi(y)$ 视为字母表 $\mathcal{B}^4$ 上的一个序列，并定义 $Z = \psi(Y) \subseteq (\mathcal{B}^4)^{\mathbb{Z}}$。令

$$\mathcal{C} = \{z_0 : z \in Z\} \subseteq \mathcal{B}^4. \tag{65}$$

令 $\theta(aa_{-1}a_0a_1) = a_0$，其中 $aa_{-1}a_0a_1 \in \mathcal{C}$ 和 $\tau = \sigma\theta$。注意，

$$\theta\psi(y) = y \text{ for any } y \in Y. \tag{66}$$

我们稍微滥用一下记号，并定义 $\mathfrak{L}(z) = \max\{k < 0 : z_k \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}\}$ for$z \in Z$。注意，对于 $y \in Y$，$\mathfrak{L}(\psi(y)) = \mathfrak{L}(y)$。

8.1.1 第四种编码的基本性质

我们在此介绍(Z,τ)的基本性质。

引理 27. (Z,τ) 是 X 的可识别编码。

证明。根据定义可知，ψ 与移位可交换且连续；因此，$Z = \psi(Y)$ 是一个子移位。此外，由 (66) 可得，对于任意 $y \in Y$，$\theta\psi(y) = y$，所以 $Y = \theta\psi(Y) = \theta(Z)$。因此，$(Z,\theta)$ 是 Y 的编码。由 Z 的定义易知，(Z,θ) 是可识别的。因此，由于 (Y,σ) 也是可识别的，引理 1 告诉我们 $(Z,\sigma\theta)$ 是可识别的。由于是 $\tau = \sigma\theta$，我们得出 (Z,τ) 是可识别的。 □

根据上一个引理，对于每个$x \in X$，$\mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$ 和 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(x)$ 都有定义。

引理 28. 设 $x \in X$，$(c,y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$，且$(f,z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$。那么，$c_k = f_k$ 且 $\psi_0(S^k y) = z_k$ 对所有 $k \in \mathbb{Z}$都成立。

证明. 一方面，(66) 蕴含 $\tau\psi(y) = \sigma\theta\psi(y) = \sigma(y)$，因此$S^{-c_0}\tau(\psi(y))$ 等于 $S^{-c_0}\sigma(y) = x$。另一方面，$\sigma(y_0)$ 等于 $\tau(\psi_0(y)) = \tau(\psi(y)_0)$；因此，由于$(-c_0, y)$是一个 σ-分解，$[0, |\sigma(y_0)|) = [0, |\tau(\psi(y)_0)|)$包含 $-c_0$。由这两点可得，$(-c_0, \psi(y))$是 x的一个 τ-分解。接着，由于根据引理 27，(Z,τ)是可识别的，$(-c_0, \psi(y))$和$(-f_0, z)$是同一个 τ-分解，也就是说，$c_0 = f_0$ 且$\psi(y) = z$。利用这一点，我们对 $j \geq 0$进行计算:

$$f_j = -f_0 + |\tau(z_{[0,j)})| = -c_0 + |\tau(\psi(y)_{[0,j)})| = -c_0 + |\sigma(y_{[0,j)})| = c_j,$$

其中，在最后一步中，我们利用了 $\tau(\psi(y)) = \sigma(y)$。类似的计算表明，对于 $j < 0$，$f_j = c_j$ 也成立。 □

最后一个引理有以下重要推论。对于任意 $x \in X$，它在 Y中的 σ-分解以及在 Z中的 τ-分解的切函数相同。因此，我们可以直接写作 $(c,y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$ 和 $(c,z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$。本小节中将不再特别说明这一点。

引理 29. 设 $x, \tilde{x} \in X$, $(c, z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(X)$ 和 $(\tilde{c}, \tilde{z}) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tilde{x})$。若 $z_0 = \tilde{z}_0$，则 $x_{[c_{\mathfrak{L}(z)}, c_{\mathfrak{L}(z)+1})} = \tilde{x}_{[\tilde{c}_{\mathfrak{L}(\tilde{z})}, \tilde{c}_{\mathfrak{L}(\tilde{z})+1})}$ 且 $x_{[c_j, c_{j+1})} = \tilde{x}_{[\tilde{c}_j, \tilde{c}_{j+1})}$，对 $j \in [-1, 1]$成立。

证明。设 $(c, y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$ 且 $(\tilde{c}, \tilde{y}) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(\tilde{x})$。那么，根据引理 28 和假设

$$y_{\mathfrak{L}(y)} y_{-1} y_0 y_1 = \psi_0(y) = z_0 = \tilde{z}_0 = \psi_0(\tilde{y}) = \tilde{y}_{\mathfrak{L}(\tilde{y})} \tilde{y}_{-1} \tilde{y}_0 \tilde{y}_1.$$

因此，

$$x_{[c_{\mathfrak{L}(z)}, c_{\mathfrak{L}(z)+1})} = \sigma(y_{\mathfrak{L}(y)}) = \sigma(\tilde{y}_{\mathfrak{L}(\tilde{y})}) = \tilde{x}_{[\tilde{c}_{\mathfrak{L}(\tilde{z})}, \tilde{c}_{\mathfrak{L}(\tilde{z})+1})}.$$

类似地，$x_{[c_{-1}, c_2)} = \sigma(y_{-1} y_0 y_1)$ 等于 $\tilde{x}_{[\tilde{c}_{-1}, \tilde{c}_2)} = \sigma(\tilde{y}_{-1} \tilde{y}_0 \tilde{y}_1)$。 □

Let

$$\mathcal{C}_{\mathsf{ap}} = \theta^{-1}(\mathcal{B}_{\mathsf{ap}}),\ \mathcal{C}_{\mathsf{wp}} = \theta^{-1}(\mathcal{B}_{\mathsf{wp}}) \text{ and } \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} = \theta^{-1}(\mathcal{B}_{\mathsf{sp}}). \tag{67}$$

注意，由于 $\mathcal{B}_{\mathsf{ap}} \cup \mathcal{B}_{\mathsf{wp}} \cup \mathcal{B}_{\mathsf{sp}}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个划分，集合 $\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$、$\mathcal{C}_{\mathsf{wp}}$ 和 $\mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$ 构成 $\mathcal{C} = \theta^{-1}(\mathcal{B})$ 的一个划分。

命题 15. 以下条件成立：

(1) 对所有 $a \in \mathcal{C}$，$20\varepsilon \le |\tau(a)| \le 10d^2 n$。(2) $\#\tau(\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}) \le 2d^{3d+6}$，#(根 $\tau(\mathcal{C})$) $\le 5d^{3d+6}$ 且 $\#\mathcal{C} \le 7^4 d^{12d+36}$ 幂复杂度$(X)^4$。(3) (Z, τ) 关于 $(\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}, \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \cup \mathcal{C}_{\mathsf{wp}})$ 和 8ε 具有二分周期。

证明。我们先证明条目（2）和条目 (1)。由方程$\tau = \sigma\theta$ 和 (67)，可得

$$\tau(\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}) = \sigma(\mathcal{B}_{\mathsf{ap}}) \text{ and } \tau(\mathcal{C}) = \mathcal{B}.$$

因此，根据命题 12 中的条目 (1)，$\#\tau(\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}) = \#\sigma(\mathcal{B}_{\mathsf{ap}}) \le 2d^{3d+6}$，且 #(根 $\tau(\mathcal{C})$) =#(根 $\sigma(\mathcal{B})$) $\le 5d^{3d+6}$。此外，根据 $\mathcal{C}$ 的定义，我们得到 $\#\mathcal{C} \le \#\mathcal{B}^4$。将命题 12 的条目 (1) 中的界代入此不等式，可得 $\#\mathcal{C} \le 7^4 d^{12d+36}$ 幂复杂度$(X)^4$。由方程 $\tau(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$和命题 12 的条目（2），可得条目 (1)。

现在证明条目（3）。任取 $x \in X$，并定义 $(c, z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$ 以及 $(c, y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$。方程 (67) 保证，$y_0 \in \mathcal{B}_{\mathsf{ap}}$ 当且仅当$z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。我们还注意到，根据引理 28，根 $\tau(z_0)$ =根 $\sigma(y_0)$。因此，本命题的条目（3）由命题 12 中的条目 (4) 推出。 □

注7. 正如注 6 中类似观察到的，命题 15 中条目 (3) 和 (1) 的一个推论是，对于所有 $a \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ | 根 $\tau(a)|$ = 周期$(\tau(a))$。

命题 16. 设 $z \in \mathbb{Z}$.

(1) 若 $i < j$ 为整数，且对所有 $k \in [i, j)$ 都有 $z_k \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，那么当 $k \in [i, j)$ 时，根 $\tau(z_k)$ =根 $\tau(z_i)$；当 $k \in [i, j-1)$ 时，$z_k \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$；并且对所有 $i \in [i+1, j-1)$ 都有 $z_k = z_{i+1}$。

(2) 若 $z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$，则 $\tau(a) = (\text{根 } \tau(a))^{2^r}$，其中 r 是满足以下条件的唯一整数：$2^r|$ 根 $\tau(a)|$ 属于 $[20\varepsilon, 40\varepsilon)$。

证明。假设对于所有 $k \in [i, j+1)$，$i < j$ 满足 $z_k \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。记 $\mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(\tau(z))$ 为 (c, y)。那么，根据引理 28，对于所有 $k \in [i, j+1)$，$y_k = \theta(z_k) \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{\mathsf{ap}}$。在此情形下，命题 14 的条目 (1) 确保：若 $k \in [i, j+1)$，则 $\mathrm{root}\,\sigma(y_k) = \mathrm{root}\ \sigma(y_i)$；若 $k \in [i, j)$，则 $y_k = y_i \in \mathcal{B}_{\mathsf{sp}}$。由 $\tau(z_k) = \sigma(y_k)$，我们推得，对于所有 $k \in [i, j+1)$，$\mathrm{root}\ \tau(z_k) = \mathrm{root}\ \tau(z_i)$。此外，对于任意 $k \in [i, j)$，有 $z_k \in \theta^{-1}(y_k) \in \mathcal{B}_{\mathsf{sp}}$。现在，由于若 $[i, j+1)$，则 $y_k \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，因此对于所有 $k \in [i, j+1)$，有 $y_{\mathfrak{L}(S^k y)} = y_{\mathfrak{L}(S^i y)}$。结合若 $k \in [i, j)$ 则 $y_k = y_i$ 这一事实，得到

$$\psi_0(S^k y) = y_{\mathfrak{L}(S^k y)} y_{k-1} y_k y_{k+1} = y_{\mathfrak{L}(S^i y)} y_i y_i y_i \text{ for all } k \in [i+1, j-1).$$

我们利用引理 28 得出：$z_k = z_{i+1}$ 对于 $k \in [i+1, j-1)$。 □

引理 30、32 和 31 将使用以下记号：

$$E = 50d^2 n.$$

注意到 $|\sigma| \le E$、$|\tau| \le E$，并且 E 大于或等于命题 13 中出现的常数 $7d^2$ 和 $50d^2 n$。

引理 30。设 x、$\tilde{x} \in X$ 满足 $x_{[-3E,3E)} = \tilde{x}_{[-3E,3E)}$，且周期$(x_{[-\varepsilon,\varepsilon)}) > \varepsilon$。设 $(c, z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$，且 $(\tilde{c}, \tilde{z}) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tilde{x})$。那么，$\tau(z_0) = \tau(\tilde{z}_0)$，并且 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_1} x) = \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_1}\tilde{x})$。特别地，$c_0 = \tilde{c}_0$ 和 $c_1 = \tilde{c}_1$。

证明。我们使用记号 $(c, y) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(x)$ 和 $(\tilde{c}, \tilde{y}) = \mathrm{F}^{(Y,\sigma)}(\tilde{x})$。注意，假设 $x_{[-3E,3E)} = \tilde{x}_{[-3E,3E)}$ 使我们能够在命题 12 中使用条目（3），从而得到的是

$$\mathbf{F}^0_{(Y,\sigma)}(S^i x) = \mathbf{F}^0_{(Y,\sigma)}(S^i \tilde{x}) \text{ for all } i \in [0, 2E]. \tag{68}$$

特别地，$c_0 = \tilde{c}_0$ 和 $y_0 = \tilde{y}_0$。因此，由引理 28，$\tau(z_0) = \sigma(y_0) = \sigma(\tilde{y}_0) = \tau(\tilde{z}_0)$。此外，对于 $j \in \{1, 2\}$，我们有 $0 \le c_j \le c_2 \le 2E$，因此可以应用 (68) 推得 $\mathrm{F}^0_{(Y,\sigma)}(S^{c_j} x) = \mathrm{F}^0_{(Y,\sigma)}(S^{c_j}\tilde{x})$。接下来，

$$y_{[0,3)} = \tilde{y}_{[0,3)} \text{ and } c_j = \tilde{c}_j \text{ for all } j \in [0, 3). \tag{69}$$

在继续之前，我们先证明

$$y_0, \tilde{y}_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}. \tag{70}$$

我们注意到，若 $y_0 \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，则命题 15 的第 (3) 项给出 $\mathrm{per}(x_{[c_0 - 8\varepsilon, c_1 + 9\varepsilon)}) \le \varepsilon$，这不可能，因为我们假设 $\mathrm{per}(x_{[-\varepsilon,\varepsilon)}) > \varepsilon$。因此，$y_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。类似地，$\tilde{y}_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ as $\tilde{x}_{[-\varepsilon,\varepsilon)} = x_{[-\varepsilon,\varepsilon)}$。

现在我们可以完成证明了。条件 $c_1 = \tilde{c}_1$ 由（69）得出。此外，根据引理 28，我们有 $z_1 = \psi_0(Sy) = \mathfrak{L}(Sy) y_0 y_1 y_2$ 且 $\tilde{z}_1 = \psi_0(S\tilde{y}) = \mathfrak{L}(S\tilde{y}) \tilde{y}_0 \tilde{y}_1 \tilde{y}_2$。现在，方程（70）保证 $\mathfrak{L}(Sy) = y_0$ 且 $\mathfrak{L}(S\tilde{y}) = \tilde{y}_0$。因此，由方程（69），$z_1 = \tilde{z}_1$。利用 $c_1 = \tilde{c}_1$，我们得出

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_1} x) = (0, z_1) = (0, \tilde{z}_1) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_1}\tilde{x}). \tag{71}$$

□

引理 31. 设 $x, \tilde{x} \in X, (c, z) = \mathrm{F}_{(Z,\tau)}(x)$，且 $(\tilde{c}, \tilde{z}) = \mathrm{F}_{(Z,\tau)}(\tilde{x})$。假设 $x_{[-4E,4E)} = \tilde{x}_{[-4E,4E)}$ 且 $z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。那么，$\tau(z_0) = \tau(\tilde{z}_0)$，并且 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_1}x) = \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_1}\tilde{x})$。特别地，$c_0 = \tilde{c}_0$ 且 $c_1 = \tilde{c}_1$。

证明。条件 $z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ 根据命题 15 的第 (3) 项可推出，$\mathrm{per}(x_{[c_0,c_1)}) > \varepsilon$。因此，根据引理 4 的第 (2) 项，存在 $i \in [c_0, c_1)$，使得 $\mathrm{per}(x_{[i-\varepsilon,i+\varepsilon)}) > \varepsilon$。现在，由于 $|\tau| \le E$，假设保证 $(S^i x)_{[i-\varepsilon,i+\varepsilon)}$ 等于 $(S^i\tilde{x})_{[i-\varepsilon,i+\varepsilon)}$。因此，我们可以使用引理 30 得出，$\tau(z_0) = \tau(\tilde{z}_0)$ 且 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_1}x) = \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_1}\tilde{x})$。 □

引理 32。设 x、$\tilde{x} \in X$ 和 $k \ge 0$ 是整数。假设 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(x) = \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(\tilde{x})$ 且 $x_{[-3E,k+3E)} = \tilde{x}_{[-3E,k+3E)}$。那么，对所有 $i \in [0, k]$，$\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^i x) = \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^i\tilde{x})$。

证明。我们只证明：若 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(x) = \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(\tilde{x})$ 且 $x_{[-3E,1+3E)} = \tilde{x}_{[-3E,1+3E)}$，则 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(Sx) = \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S\tilde{x})$；因为随后对 i 进行归纳论证即可得到引理。

记 $(c, y) = \mathrm{F}_{(Y,\sigma)}(x)$，并记 $(\tilde{c}, \tilde{y}) = \mathrm{F}_{(Y,\sigma)}(x)$。那么，根据引理 28，$z = \psi(y)$ 和 $\tilde{z} = \psi(\tilde{y})$ 满足 $(c, z) = \mathrm{F}_{(Z,\tau)}(x)$ 以及 $(\tilde{c}, \tilde{z}) = \mathrm{F}_{(Z,\tau)}(x)$。因此，假设 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(x) = \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(\tilde{x})$ 等价于 $z_0 = \tilde{z}_0$ 和 $c_0 = \tilde{c}_0$。这意味着两点：

(i) $y_{\mathfrak{L}(y)}y_{-1}y_0y_1 = \psi_0(y) = z_0 = \tilde{z}_0 = \psi_0(\tilde{y}) = \tilde{y}_{\mathfrak{L}(\tilde{y})}\tilde{y}_0\tilde{y}_1\tilde{y}_2$.

(ii) $c_1 = c_0 + |\sigma(y_0)| = \tilde{c}_1 + |\sigma(\tilde{y}_0)| = \tilde{c}_1$ 并且类似地，$c_2 = \tilde{c}_2$。

我们推得，对任意 $i \in [0, c_1)$，

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^i x) = (c_0 - i, z_0) = (\tilde{c}_0 - i, \tilde{z}_0) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^i\tilde{x}).$$

特别地，若 $c_1 > 0$，则 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(Sx) = (c_0 - 1, z_0)$ 等于 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S\tilde{x}) = (\tilde{c}_0 - 1, \tilde{z}_0)$，证明即告完成。

现在假设 $c_1 = 1$（因此由 (ii) 也有 $\tilde{c}_1 = 1$）。在这种情形下，$\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(Sx) = (0, z_1)$ 且 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S\tilde{x}) = (0, \tilde{z}_1)$；因此，只需证明 $z_1 = z_1$。

我们注意到，由于 $z_1 = \psi_0(Sy)$ 且 $\tilde{z}_1 = \psi_0(S\tilde{y})$，

(1) 若 $y_0 \in \mathcal{B}_{\mathsf{ap}}$，则 $z_1 = y_0y_0y_1y_2$；若 $y_0 \notin \mathcal{B}_{\mathsf{ap}}$，则 $z_1 = y_{\mathfrak{L}(y)}y_0y_1y_2$；并且

(2) 若 $\tilde{y}_0 \in \mathcal{B}_{\mathsf{ap}}$，则 $\tilde{z}_1 = \tilde{y}_0\tilde{y}_0\tilde{y}_1\tilde{y}_2$；若 $\tilde{y}_0 \notin \mathcal{B}_{\mathsf{ap}}$，则 $\tilde{z}_1 = \tilde{y}_{\mathfrak{L}(\tilde{y})}\tilde{y}_0\tilde{y}_1\tilde{y}_2$。

由这些关系和 (i) 可推得

$$z_1 = \tilde{z}_1 \text{ if and only if } y_2 = \tilde{y}_2.$$

现在，由于 $\mathrm{F}^0_{(Y,\sigma)}(x) = (c_0, y_0) = (\tilde{c}_0, \tilde{y}_0) = \mathrm{F}^0_{(Y,\sigma)}(\tilde{x})$，并且我们假设 $x_{[-3E,1+3E)} = \tilde{x}_{[-3E,1+3E)}$，因此可以利用命题 12 中的条目（3），得到对于任意 $i \in [0, 2E]$，$\mathrm{F}^0_{(Y,\sigma)}(S^i x)$ 等于 $\mathrm{F}^0_{(Y,\sigma)}(S^i\tilde{x})$。特别地，由于 c_2 满足 $0 \le c_2 \le c_0 + 2|\sigma| \le 2E$，我们有

$$(0, y_2) = \mathbf{F}^0_{(Y,\sigma)}(S^{c_2}x) = \mathbf{F}^0_{(Y,\sigma)}(S^{c_2}\tilde{x}) = \mathbf{F}^0_{(Y,\sigma)}(S^{\tilde{c}_2}\tilde{x}) = (0, \tilde{y}_2),$$

其中我们利用了 (ii) 得到 $c_2 = \tilde{c}_2$。由此可得 $y_2 = \tilde{y}_2$，因此 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(Sx)$ 等于 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S\tilde{x})$。 □

8.2 连接两个层级

在本小节中，我们考察第 8.1 小节中构造的两种编码，并证明若干联系它们的引理。首先固定所需的记号。

设 X 是一个极小无限子移位，n、$n' \geq 1$ 是整数，并令 d 为 $\lceil p_X(n)/n \rceil$、$\lceil p_X(n')/n' \rceil$、$p_X(n+1) - p_X(n)$、$p_X(n'+1) - p_X(n')$、$\#\mathcal{A}$ 和 10^4 中的最大值。令 $E = 50d^2n$ 和 $E' = 50d^2n'$。在整个小节中，我们假设

$$n' \geq d^{2d^3+4} \cdot 500d^2n. \tag{72}$$

我们分别考虑根据第 8.1 小节中的 n 和 n' 得到的 X 的可识别编码 $(Z \subseteq \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}, \tau\colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}^+)$ 和 $(Z' \subseteq \mathcal{C}'^{\mathbb{Z}}, \tau'\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{A}^+)$。另令 $\varepsilon' \in [n'/d^{2d^3+4}, n'/d)$ 和 $\varepsilon \in [n/d^{2d^3+4}, n/d)$ 为第 8.1 小节中定义的常数，并用 $\mathcal{C}_{\mathsf{ap}} \cup \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \cup \mathcal{C}_{\mathsf{wp}}$ 和 $\mathcal{C}'_{\mathsf{ap}} \cup \mathcal{C}'_{\mathsf{sp}} \cup \mathcal{C}'_{\mathsf{wp}}$ 表示那里定义的 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 的划分。令 $\mathfrak{L}(z) = \max\{k < 0 : z_k \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}\}$ 和 $\mathfrak{L}'(z') = \{k < 0 : z'_k \in \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}\}$，其中 $z \in Z$ 和 $z' \in Z'$。

(Z', τ') 与 (Z, τ) 之间的关键关系是下面这个不等式，它是 (72) 的推论：

$$\varepsilon' \geq 10E. \tag{73}$$

8.2.1 预备引理

在第 8.2.1 小节的余下部分中，我们固定一个点 $x \in X$，以及记号 $(c, z) = \mathrm{F}_{(Z,\tau)}(x)$ 和 $(c', z') = \mathrm{F}_{(Z',\tau')}(x)$。

引理 33. 假设 $\mathsf{per}(\tau'(z'_0)) \leq \varepsilon$。令 $i \in [c'_0 - 7\varepsilon', c'_1 + 7\varepsilon')$ 和 j 为满足 $i \in [c_j, c_{j+1})$ 的整数。那么，$z_j = z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$，$|\text{根 } \tau(z_j)| = |\text{根 } \tau'(z'_0)|$ 和 $c_j = c_0 (\text{模 } |\text{根 } \tau'(z'_0)|)$。

证明。条件 $\mathsf{per}(\tau'(z'_0)) \leq \varepsilon \leq \varepsilon'$ 意味着 $z'_0 \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$。因此，根据命题 15 的第 (3) 项，

$$x_{[c'_0 - 8\varepsilon', c'_1 + 8\varepsilon')} = (\mathsf{root}\, \tau'(z'_0))^{\mathbb{Z}}_{[-8\varepsilon', |\tau'(z'_0)| + 8\varepsilon')} \tag{74}$$

and

$$|\,\mathsf{root}\, \tau'(z'_0)| = \mathsf{per}(\tau'(z'_0)) \leq \varepsilon. \tag{75}$$

公式（74）意味着以下结论：如果 k 是满足 $c'_0 - 7\varepsilon' \in [c_k, c_{k+1})$ 的整数，且 ℓ 是满足 $c'_0 - 7\varepsilon' \in [c_\ell, c_{\ell+1})$ 的整数，那么对于所有 $j \in [k, \ell)$，都有 $\tau(z_j) \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。事实上，对于任意这样的 j，我们有 $\tau(z_j) = x_{[c_j, c_{j+1})}$ 出现在 $x_{[c'_0 - 7\varepsilon' - 3E, c'_1 + 7\varepsilon' + 3E)}$ 中，因此 $\mathsf{per}(\tau(z_j)) \leq \varepsilon$。由此，根据命题 15 的第 (3) 项可得 $z_j \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。接着，我们可以利用命题 16 的条目 (1) 得到：

$$z_j = z_{k+1} \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \text{ and } c_j = c_{k+1} \pmod{|\,\mathsf{root}\, \tau(z_{k+1})|} \text{ for all } j \in [k+1, \ell-1).$$

由于 $\varepsilon' \geq |\tau|$, $c_{k+1} \leq c_0 \leq c_{\ell-1}$，因此我们特别有：

$$z_j = z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \text{ and } c_j = c_0 \pmod{|\operatorname{root}\tau(z_0)|}. \tag{76}$$

我们现在将证明 $|$根 $\tau(z_0)|$等于 $|$根 $\tau'(z_0')|$。由此以及 (76) 即可推出该引理。

注意， $\tau'(z_0')$ 和 $\tau(z_0)$ 出现在 $x_{[c_0'-8\varepsilon', c_1'+8\varepsilon')}$ 中。此外，命题 15 的第 (1) 项保证 $\tau'(z_0')$ 和 $\tau(z_0)$ 的长度至少为 2ε。于是，依据 $x_{[c_0'-8\varepsilon', c_1'+8\varepsilon')}$，由 (74) 和 (75)，我们可以使用命题 4 的第 (1) 项推得

$$\mathsf{per}(\tau(z_0)) = \mathsf{per}(x_{[c_0'-8\varepsilon', c_1'+8\varepsilon')}) = \mathsf{per}(\tau'(z_0')) \leq \varepsilon.$$

在这种情况下，命题 15 的第 (3) 项保证 $z_0 \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ 和$|$根 $\tau(z_0)| =$周期$(\tau(z_0))$ $=$ 周期 $(\tau'(z_0'))$。于是，等式 (75) 给出 $|$ 根 $\tau(z_0)| \neq |$ 根 $\tau'(z_0')|$。 □

引理 34. 假设 $z_0' \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$ 且 $\mathsf{per}(\tau'(z_0')) > \varepsilon$。令 $\tilde{x} \in X$，并假设 $x_{[-3\varepsilon', 3\varepsilon')}$ $= \tilde{x}_{[-3\varepsilon', 3\varepsilon')}$。那么，$\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(x) = \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(\tilde{x})$。

证明。假设给出 $\mathsf{per}(x_{[c_0', c_1')}) = \mathsf{per}(\tau'(z_0')) > \varepsilon$，而命题 15 中的第（1）项表明 $|x_{[c_0', c_1')}| \geq 2\varepsilon$。因此，我们可以使用命题 4 的条目（2）得到 $i_0 \in [c_0', c_1')$，使得

$$\mathsf{per}(x_{[i_0-\varepsilon, i_0+\varepsilon)}) > \varepsilon.$$

现在，由于 $z_0' \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$，命题 15 的条目（3）适用，因此

$$\mathsf{per}(x_{[c_0'-8\varepsilon', c_1'+8\varepsilon')}) \leq \varepsilon'.$$

这意味着，根据 $\varepsilon \leq \varepsilon'$，存在 $i \in [-2\varepsilon', -\varepsilon')$ 使得 $x_{[i-\varepsilon, i+\varepsilon)} = x_{[i_0-\varepsilon, i_0+\varepsilon)}$。

我们的思路是利用 $S^i x$ and $S^i \tilde{x}$，通过引理 30 推导出该引理。首先，我们注意到

$$\mathsf{per}((S^i x)_{[-\varepsilon, \varepsilon)}) = \mathsf{per}(x_{[i-\varepsilon, i+\varepsilon)}) = \mathsf{per}(x_{[i_0-\varepsilon, i_0+\varepsilon)}) > \varepsilon. \tag{77}$$

此外，由于 $4E \leq \varepsilon'$ and $i \in [-2\varepsilon', -\varepsilon')$，我们有 $[i - 4E, i + 3\varepsilon' + 4E)$ 包含于 $[-3\varepsilon', 3\varepsilon')$。因此，根据假设 $x_{[-3\varepsilon', 3\varepsilon')} = \tilde{x}_{[-3\varepsilon', 3\varepsilon')}$,

$$\begin{aligned}(S^{i+E}x)_{[-4E, 3\varepsilon'+3E)} &= x_{[i-3E, i+3\varepsilon'+4E)} \\ &= \tilde{x}_{[i-3E, i+3\varepsilon'+4E)} = (S^{i+E}\tilde{x})_{[-4E, 3\varepsilon'+3E)}.\end{aligned} \tag{78}$$

特别是,

$$(S^i x)_{[-3E, 3E)} = (S^i \tilde{x})_{[-3E, 3E)}. \tag{79}$$

方程 (77) 和 (79) 使我们能够运用引理 30，并推导出以下结论。

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{i+E}x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{i+E}\tilde{x}).$$

此外，最后一个方程和式 (78) 是引理 32 的假设；因此，

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{i+E+k}x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{i+E+k}\tilde{x}) \text{ for any } k \in [0, 3\varepsilon'). \tag{80}$$

由于 $i \in [-2\varepsilon', -\varepsilon')$ 且 $E \le \varepsilon'$, $k := -(i+E)$ 属于 $[0, 3\varepsilon')$，因此由 (80) 可得 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(x) = \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(\tilde{x})$。 □

引理 35. 假设 $z'_0 \in \mathcal{C}'_{\mathsf{sp}}$。那么，

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c'_0+i}x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c'_1+i}x) \text{ for any } i \in [-5\varepsilon', 5\varepsilon').$$

证明. 我们考虑两种情况。首先，假设 $\mathsf{per}(\tau'(z'_0)) \le \varepsilon$。由此可用引理 33 得到：若 $i \in [c'_0 - 7\varepsilon, c'_1 + 7\varepsilon)$ 且 j 是满足 $i \in [c_j, c_{j+1})$ 的整数，那么

$$c_j = c_0 \pmod{|\,\mathsf{root}\,\tau'(z'_0)|},\ z_j = z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}} \text{ and } |\,\mathsf{root}\,\tau(z_j)| = |\,\mathsf{root}\,\tau'(z'_0)|. \tag{81}$$

任取 $i \in [-5\varepsilon', 5\varepsilon')$，并记满足 $c'_0 + i \in [c_k, c_{k+1})$ 和 $c'_1 + i \in [c_\ell, c_{\ell+1})$ 的整数为 k 和 ℓ。采用这一记号，$\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c'_0+i}x) = (c_k - c'_0 - i, z_p)$ 且 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c'_1+i}x) = (c_\ell - c'_1 - i, z_q)$，因此我们需要证明 $z_k = z_\ell$ 和 $c_k - c'_0 - i = c_\ell - c'_1 - i$。

由 (81) 可知 $z_k = z_\ell$。因此，只需证明 $c_k - c'_0 - i = c_\ell - c'_1 - i$。

注意， k 和 ℓ 的定义保证了

(i) $c_k \le c'_0 + i < c_{k+1} = c_k + |\tau(z_k)|$; and

(ii) $c_\ell \le c'_1 + i < c_{\ell+1} = c_\ell + |\tau(z_\ell)|$.

若利用等式 $c_\ell = c_k + (\ell - k)|\tau(z_0)|$（它是 (81) 的推论），并利用 $c'_1 = c'_0 + |\tau'(z'_0)|$ 替换 (ii) 中的 c_ℓ 和 c'_1，则可得

$$c_k \le c'_0 + i + (|\tau'(z'_0)| - (\ell - k)|\tau(z_0)|) < c_k + |\tau(z_0)|.$$

由此及 (i) 可得

$$||\tau'(z'_0)| - (\ell - k)|\tau(z_0)|| < |\tau(z_0)|. \tag{82}$$

现在，由 (81) 可知， $z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$ 和 $|$ 是 $\tau(z_k)| = |$ 的根，也是 $\tau'(z'_0)|$ 的根；又由假设可知 $z'_0 \in \mathcal{C}'_{\mathsf{sp}}$，命题 15 中 $\mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$ 和 $\mathcal{C}'_{\mathsf{sp}}$ 的定义保证了 $|\tau(z_0)|$ 整除 $|\tau'(z'_0)|$。因此，(82) 中的不等式只有在 $|\tau'(z'_0)| = (\ell - k)|\tau(z_0)|$ 时才成立。由 (81) 可知 $c_\ell = c_k + (\ell - k)|\tau(z_0)|$，故我们得出

$$c_\ell = c_k + (\ell - k)|\tau(z_0)| = c_k + |\tau'(z'_0)| = c_k + c'_1 - c'_0.$$

因此， $c_k - c'_0 - i = c_\ell - c'_1 - i$ 第一种情形的证明完成。

接下来，我们假设 $\text{周期}(\tau'(z'_0)) > \varepsilon$。注意，条件 $z'_0 \in \mathcal{C}'_{\mathsf{sp}}$ 意味着 $z'_0 \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$。因此，根据命题 15 的第 (3) 项， $x_{[c'_0 - 8\varepsilon', c'_1 + 8\varepsilon')} =$

(根 $\tau'(z_0')$)$^{\mathbb{Z}}_{[-8\varepsilon',|\tau'(z_0')|+8\varepsilon')}$ 以及 $|$根 $\tau'(z_0')|$ =周期($\tau'(z_0')$) $\leq \varepsilon$。特别地，如果 $i \in [-5\varepsilon', 5\varepsilon')$，那么 $x_{[c_0'+i-3\varepsilon', c_0'+3\varepsilon')}$ 等于 $x_{[c_1'+i-3\varepsilon', c_1'+3\varepsilon')}$。然后，对于 $S^{c_0'+i}x$ 和 $S^{c_1'+i}x$，引理 34 的假设成立，因此我们得到，对于任意 $i \in [-5\varepsilon', 5\varepsilon')$，$\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}$ ($S^{c_0'+i}x$) $= \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_1'+i}x)$。 □

引理 36. 设 $\tilde{x} \in X$ 和 $(\tilde{c}, \tilde{z})$ $= \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tilde{x})$。假设 $z_0' \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$, $k \geq 1$，且 $x_{[c_0, c_1+k+8\varepsilon')} = \tilde{x}_{[\tilde{c}_0, \tilde{c}_1+k+8\varepsilon')}$。那么，

$$\mathbf{F}_{(Z,\tau)}(S^{c_1'+i}x) = \mathbf{F}_{(Z,\tau)}(S^{\tilde{c}_1'+i}\tilde{x}) \ \textit{for all}\ i \in [-7\varepsilon', k+7\varepsilon'). \tag{83}$$

证明。首先，命题 15 的第 (3) 项确保 $\mathsf{per}(x_{[c_0'+8\varepsilon', c_1'-8\varepsilon')}) > \varepsilon' \geq \varepsilon$。因此，命题 4 的条目（2）确保存在一个整数 m 使得

$$m \in [c_0'+8\varepsilon', c_1'-8\varepsilon') \ \text{ and } \ \mathsf{per}(x_{[m-\varepsilon, m+\varepsilon)}) > \varepsilon. \tag{84}$$

利用 $4E \leq \varepsilon'$ 和 $m \in [c_0'+8\varepsilon', c_1'-8\varepsilon')$，可以验证 $[m-3E, c_1'+7\varepsilon'+3E)$ 包含于 $[c_0', c_1'+8\varepsilon')$ 中。因此，根据假设 $x_{[c_0', c_1'+8\varepsilon')} = x_{[\tilde{c}_0', \tilde{c}_1'+8\varepsilon')}$，

$$\begin{aligned}(S^{m+E}x)_{[-4E, c_1'+7\varepsilon'-m+3E)} &= x_{[m-3E, c_1'+7\varepsilon'+4E)} \\ &= \tilde{x}_{[m-3E+\tilde{c}_0'-c_0', c_1'+7\varepsilon'+4E+\tilde{c}_0'-c_0')} \\ &= (S^{m+\tilde{c}_0'-c_0'+E}\tilde{x})_{[-4E, c_1'+7\varepsilon'-m+3E)}.\end{aligned} \tag{85}$$

特别地，由 (84) 可得 $c_1' - m \geq 0$,

$$(S^m x)_{[-3E, 3E)} = (S^{m+\tilde{c}_0'-c_0'}\tilde{x})_{[-3E, 3E)}.$$

由此以及 (84)，我们可以使用引理 30 并推出

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{m+E}x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{m+\tilde{c}_0'-c_0'+E}\tilde{x}).$$

最后一个方程和 (85) 表明，引理 32 的假设成立；因此，对每个 $j \in [0, c_1'+7\varepsilon'-m)$，$\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{m+E+j}x)$ $= \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{m-c_0'+\tilde{c}_0'+E+j}\tilde{x})$。等价地，

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^j x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{-c_0'+\tilde{c}_0'+j}\tilde{x}) \ \text{ for all } j \in [m+E, c_1'+(r-1)\varepsilon'). \tag{86}$$

我们将由此推导出 (83)。

任取 $i \in [-7\varepsilon', 7\varepsilon')$。那么，(84) 和不等式 $E \leq \varepsilon'$ 推出 j: $= c_1' + i \in [m+E, c_1'+7\varepsilon')$。因此，方程 (86) 给出

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_1'+i}x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{i+c_1'-c_0'+\tilde{c}_0'}\tilde{x}). \tag{87}$$

现在，我们观察到

$$c_1' - c_0' = |\tau(z_0')| = |\tau(\tilde{z}_0')| = \tilde{c}_1' - \tilde{c}_0',$$

所以 $i + c_1' - c_0' + \tilde{c}_0' = i + \tilde{c}_1$。因此，引理由 (87) 得出。 □

命题 17. 设 $x, \tilde{x} \in X$，并假设 $\mathrm{F}^0_{(Z',\tau')}(x) = \mathrm{F}^0_{(Z',\tau')}(\tilde{x})$。那么，

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^i x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^i \tilde{x}) \text{ for all } i \in [c'_0 - 4\varepsilon', c'_2 - \varepsilon'). \tag{88}$$

证明。假设意味着 $c'_0 = \tilde{c}'_0$ 且 $z'_0 = \tilde{z}'_0$。结合引理 29 可得

$$x_{[c'_{\mathfrak{L}'(z')}, c'_{\mathfrak{L}'(z')+1})} = \tilde{x}_{[\tilde{c}'_{\mathfrak{L}'(\tilde{z}')}, c_{\mathfrak{L}'(\tilde{z}')+1})}, \quad x_{[c'_j, c'_{j+1})} = \tilde{x}_{[c'_j, c'_{j+1})} \text{ and } c'_j = \tilde{c}'_j \text{ for } j \in [-1, 1]. \tag{89}$$

这与命题 15 的第 (1) 项中的下界共同保证了

$$x_{[c'_0 - 8\varepsilon', c'_1 + 8\varepsilon')} = \tilde{x}_{[\tilde{c}'_0 - 8\varepsilon', \tilde{c}'_1 + 8\varepsilon')}. \tag{90}$$

接下来，我们证明以下事实成立。

(i) $(S^{c_k} x)_{[-8\varepsilon', 8\varepsilon')} = (S^{c_l} x)_{[-8\varepsilon', 8\varepsilon')}$ for all $\mathfrak{L}'(y') < k, l \le 0$.

(ii) $(S^{\tilde{c}_k} \tilde{x})_{[-8\varepsilon', 8\varepsilon')} = (S^{\tilde{c}_l} \tilde{x})_{[-8\varepsilon', 8\varepsilon')}$ for all $\mathfrak{L}'(\tilde{y}') < k, l \le 0$.

(iii) $x_{[c'_{\mathfrak{L}'(y')}, c'_{\mathfrak{L}'(y')+1} + 8\varepsilon')} = \tilde{x}_{[\tilde{c}'_{\mathfrak{L}'(\tilde{y}')}, \tilde{c}'_{\mathfrak{L}'(\tilde{y}')+1} + 8\varepsilon')}$.

我们从条目 (i) 开始。如果 $\mathfrak{L}'(y') = -1$，那么 (i) 显然成立。我们假设 $\mathfrak{L}'(y') < -1$。令 k 满足 $\mathfrak{L}'(y') < k < 0$。$\mathfrak{L}'$ 的定义确保了 $z'_k \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$。因此，根据命题 15 的第 (3) 项，$s :=$ 根 $\tau'(z'_k)$ 满足 $x_{[c_k - 8\varepsilon', c_{k+1} + 8\varepsilon')} = s^{\mathbb{Z}}_{[-8\varepsilon', |\tau'(z'_k)| + 8\varepsilon')}$。特别地，由于 $|\tau'(z'_0)| = 0$ (模 $|s|$)，

$$x_{[c_k - 8\varepsilon', c_k + 8\varepsilon')} = s^{\mathbb{Z}}_{[-8\varepsilon', 8\varepsilon')} = (S^{|\tau'(z'_k)|} s^{\mathbb{Z}})_{[-8\varepsilon', 8\varepsilon')} = x_{[c_{k+1} - 8\varepsilon', c_{k+1} + 8\varepsilon')}.$$

由于这对所有 $k \in [\mathfrak{L}'(z') + 1, 0)$ 都成立，归纳论证给出 (i)。事实 (ii) 类似地得出。对于 (iii)，我们使用 (90)、(i) 和 (ii) 推导出

$$x_{[c'_{\mathfrak{L}'(z')+1}, c'_{\mathfrak{L}'(z')+1} + 8\varepsilon')} = x_{[c_0 - 8\varepsilon', c_0 + 8\varepsilon')} = \tilde{x}_{[\tilde{c}_0 - 8\varepsilon', \tilde{c}_0 + 8\varepsilon')} = \tilde{x}_{[\tilde{c}'_{\mathfrak{L}'(\tilde{z}')+1}, \tilde{c}'_{\mathfrak{L}'(\tilde{z}')+1} + 8\varepsilon')}.$$

事实 (iii)由此以及（89）中的第一个等式得出。

现在，由于 $z'_{\mathfrak{L}'(z')} \in \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$，且 (iii) 成立，因此满足引理 36 的假设。因此，

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c'_{\mathfrak{L}'(z')+1}+i} x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{\tilde{c}'_{\mathfrak{L}'(\tilde{z}')+1}+i} \tilde{x}) \text{ for all } i \in [-7\varepsilon', 7\varepsilon'). \tag{91}$$

为了继续，我们需要考虑两种情况。我们首先假设 $\mathfrak{L}'(z') = -1$。那么，$z'_{-1} \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，因此 (89) 和命题 15 的第 (3) 项给出

$$\mathsf{per}(\tilde{x}_{[\tilde{c}'_{-1} + 8\varepsilon', \tilde{c}'_0 - 8\varepsilon')}) = \mathsf{per}(x_{[c'_{-1} + 8\varepsilon', c'_0 - 8\varepsilon')}) > \varepsilon'.$$

这意味着，根据命题 15 的第 (3) 项，$\tilde{z}_{-1} \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。因此，$\mathfrak{L}'(\tilde{z}) = -1$，进而由 (91) 得到 (88)。

接下来，我们假设 $\mathfrak{L}'(z') \le -2$。在这种情形下，我们先证明以下结论。

(a) $\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c'_{\mathfrak{L}'(y')+1}+i}x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c'_{-1}+i}x)$ for all $i \in [-5\varepsilon', 5\varepsilon')$.

(b) $\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{\tilde{c}'_{\mathfrak{L}'(\tilde{y}')+1}+i}\tilde{x}) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{\tilde{c}'_{-1}+i}\tilde{x})$ for all $i \in [-5\varepsilon', 5\varepsilon')$.

我们只证明 (a)，因为 (b) 可由类似的论证得出。若 $\mathfrak{L}'(z') = -2$，则 (a) 显然成立。于是，假设 $\mathfrak{L}'(z') \le -3$。$\mathfrak{L}'$ 的定义保证，对于所有 $\mathfrak{L}'(z') + 1 \le j \le -1$，都有 $z'_j \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。因此，根据命题 16 中的条目 (1)，对于所有 $\mathfrak{L}'(z')+1 \le j \le -2$，都有 $z'_j \in \mathcal{C}_{\mathsf{sp}}$。由此，我们可以归纳地应用引理 35，并推得，对于任意 $i \in [-5\varepsilon', 5\varepsilon')$，

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c'_{\mathfrak{L}'(z')+1}+i}x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c'_{\mathfrak{L}'(z')+2}+i}x) = \cdots = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c'_{-1}+i}x).$$

这表明 (a)。

现在，结合方程 (91)、(a) 和 (b)，得到

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c'_{-1}+i}x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{\tilde{c}'_{-1}+i}\tilde{x}) \text{ for all } i \in [-5\varepsilon', 5\varepsilon'). \tag{92}$$

我们将由此以及 (89) 推导出 (88)。

任取 $i \in [c'_0 - 4\varepsilon', c'_2 - \varepsilon')$。注意到 (92) 特别给出 $x_{[c_{-1}-5\varepsilon', c_{-1}+5\varepsilon')} = \tilde{x}_{[\tilde{c}_{-1}-5\varepsilon', \tilde{c}_{-1}+5\varepsilon')}$。由此，结合 (89)，可得

$$x_{[c_{-1}-5\varepsilon', c_2)} = \tilde{x}_{[\tilde{c}_{-1}-5\varepsilon', \tilde{c}_2)}. \tag{93}$$

鉴于方程 (92) 和 (93) 以及 $3E \le \varepsilon'$，引理 32 的假设成立；因此，

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c'_{-1}+j}x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{\tilde{c}'_{-1}+j}\tilde{x}) \text{ for all } j \in [-4\varepsilon', c'_2 - c'_{-1} - \varepsilon').$$

令 $j = i - c'_{-1}$，并注意到 $j \in [-4\varepsilon', c'_2 - c'_{-1} - \varepsilon')$。因此，可以利用最后一个方程得到

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^i x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c'_{-1}+j}x) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{\tilde{c}'_{-1}+j}\tilde{x}) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{i+\tilde{c}'_{-1}-c'_{-1}}\tilde{x}).$$

由 $\tilde{c}'_{-1} = c'_{-1}$ （89），我们可推出（88）成立。 □

8.2.2 连接态射

在本小节中，我们构造一个态射 γ，将（Z'，τ'）与（Z，τ）连接起来。我们首先介绍辅助映射 $r\colon\ Z' \to \mathbb{Z}$，并证明它的一些性质。关键的命题 18 将使我们能够定义连接态射γ。最后，我们以命题 19、20 和 21 结束本小节；这些命题对于在定理 6 和定理 7 中证明（$\mathcal{P}_1$）至关重要。

对于 $z' \in Z'$ 和（c，z）$= \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tau'(z'))$，令

$$r(z') = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathsf{per}(\tau'(z'_0)) \le \varepsilon \\ \min\{i \ge 0 : z_i \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}\} & \text{if } \mathsf{per}(\tau'(z'_0)) > \varepsilon \end{cases} \tag{94}$$

引理 37. 设 $z' \in Z'$ and $(c, z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tau'(z'))$.

(1) 若 $z'_0 \in \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$，则 $c_{r(z')} \in [-\varepsilon', |\tau'(z'_0)| - 8\varepsilon')$。(2) 若 $\varepsilon < |$根 $\tau'(z'_0)| \le \varepsilon'$ 且 i 是满足 $|\tau'(z'_0)| \in [c_i, c_{i+1})$ 的整数，则 $c_{r(z')} \in [-\varepsilon', \varepsilon')$ 且 $c_{i+r(Sz')} \in [|\tau'(z'_0)| - \varepsilon', |\tau'(z'_0)| + \varepsilon')$。(3) 若 $|$根 $\tau'(z'_0)| \le \varepsilon$，则 $c_{r(z')} \in [-\varepsilon', \varepsilon')$。

证明。我们从条目（1）开始。根据r的定义，$r(z')$为非负数，因此有 $c_{r(z')} \ge c_0$。于是，$c_{r(z')} \ge -|\tau| \ge -\varepsilon'$。为证明另一个不等式，我们注意到，条件 $z'_0 \in \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$ 根据命题 15 的第 (3) 项蕴含 $\mathsf{per}(\tau'(z')_{[8\varepsilon', |\tau'(z'_0)| - 8\varepsilon')}) > \varepsilon$。利用引理 4 的条目（2），我们得到 $k \in [8\varepsilon', |\tau'(z'_0)| - 8\varepsilon')$，满足 $\mathsf{per}(\tau'(z')_{[k-\varepsilon', k+\varepsilon')}) > \varepsilon$。令 j为满足 $k \in [c_j, c_{j+1})$ 的整数。则，$\mathsf{per}(\tau'(z')_{[c_j - 8\varepsilon, c_{j+1}+8\varepsilon)}) \ge \mathsf{per}(\tau'(z')_{[k-\varepsilon, k+\varepsilon)}) > \varepsilon$，所以根据命题 15 的第 (3) 项有 $z_j \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。此外，由于 $c_{j+1} \ge k \ge 0$，我们有 $j \ge 0$。根据 r定义中的极小性条件，我们得出 $r(z') \le j$。因此，$c_{r(z')} \le c_j \le k \le |\tau'(z'_0)| - 8\varepsilon'$。

现在考虑条目（2）。令 $s =$根 $\tau'(z'_0)$。由于 $|s| \le \varepsilon'$，命题 15 的第 (3) 项保证 $\mathsf{per}(\tau'(z'_0)) = |s| \in (\varepsilon, \varepsilon']$。因此，根据引理 4 的条目（2），存在 $k \in [0, |\tau'(z'_0)|)$，使得 $\mathsf{per}(\tau'(z')_{[k-\varepsilon', k+\varepsilon')}) > \varepsilon$。此外，条件 $|s| \le \varepsilon'$ 根据命题 15 的第 (3) 项意味着，$\mathsf{per}(\tau'(z')_{[-8\varepsilon', |\tau'(z'_0)| + 8\varepsilon')})$ 至多为 ε'。因此，我们可以找到满足 $\tau'(z')_{[k-\varepsilon, k+\varepsilon)} = \tau'(z')_{[k_0-\varepsilon, k_0+\varepsilon)} = \tau'(z')_{[k_1-\varepsilon, k_1+\varepsilon)}$ 的 $k_0 \in [0, \varepsilon')$ 和 $k_1 \in [|\tau'(z'_0)|, |\tau'(z'_0)| + \varepsilon')$。特别地，

$$\mathsf{per}(\tau'(z')_{[k-\varepsilon, k+\varepsilon)}) = \mathsf{per}(\tau'(z')_{[k_0-\varepsilon, k_0+\varepsilon)}) = \mathsf{per}(\tau'(z')_{[k_1-\varepsilon, k_1+\varepsilon)}) > \varepsilon. \quad (95)$$

令 $j_0, j_1 \in \mathbb{Z}$ 为满足 $k_0 \in [c_{j_0}, c_{j_0+1})$ 和 $k_1 \in [c_{j_1}, c_{j_1+1})$ 的整数。注意，由 (95) 和命题 15 的第 (3) 项可知，z_{j_0} 和 z_{j_1} 属于 $\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。此外，由于 $c_{j_0+1} \ge k_0 \ge 0$ 和 $c_{j_1+1} \ge k_1 \ge |\tau'(z'_0)|$（其中 i 是引理陈述中定义的元素），我们有 $j_0 \ge 0$ 和 $j_1 \ge i$。根据 r 的定义，我们得出 $r(z') \le j_0$ 和 $i + r(Sz') \le j_1$。因此，$c_{r(z')} \le c_{j_0} \le k_0 \le \varepsilon'$ 和 $c_{i+r(Sz')} \le c_{j_1} \le |\tau'(z'_0)| + \varepsilon'$。最后，(94) 确保 $r(z') \ge 0$ 和 $i + r(Sz') \ge i$，因此 $c_{r(z')} \ge -|\tau| \ge -\varepsilon'$ 且 $c_{i+r(Sz')} \ge |\tau'(z'_0)| \ge |\tau'(z'_0)| - \varepsilon'$。至此，条目（(2)）的证明完成。

对于条目 ((3))，我们注意到条件 $|s| \le \varepsilon$ 意味着 $\mathsf{per}(\tau'(z'_0))$。因此，$r(z') = 0$ 和 $c_{r(z')} \in [-|\tau|, 0] \subseteq [-\varepsilon', \varepsilon')$。 □

命题 18. 设 $z', \tilde{z}' \in Z'$, $(c, z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tau'(z'))$ 且 $(\tilde{c}, \tilde{z}) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tau'(\tilde{z}'))$。我们定义 i 和 j 为满足 $|\tau'(z'_0)| \in [c_i, c_{i+1})$ 和 $|\tau'(\tilde{z}'_0)| \in [\tilde{c}_j, \tilde{c}_{j+1})$ 的整数。若 $z'_0 = \tilde{z}'_0$，则 $c_{r(z')} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')}$，$c_{i+r(Sz')} = \tilde{c}_{j+r(S\tilde{z}')}$，且 $z_{[r(z')\ i+r(Sz'))}$ 等于 $\tilde{z}_{[r(\tilde{z}')\ j+r(S\tilde{z}'))}$。

证明。我们从一些将在整个证明过程中使用的观察开始。由于 $z'_0 = \tilde{z}'_0$，引理 29 表明，

$$\tau'(z'_{-1}) = \tau'(\tilde{z}'_{-1}), \tau'(z'_0) = \tau'(\tilde{z}'_0) \text{ and } \tau'(z'_1) = \tau'(\tilde{z}'_1).$$

特别是,

$$\tau'(z'_0)_{[-|\tau'(z'_{-1})|,|\tau'(z'_0z'_1)|)} = \tau'(\tilde{z}'_0)_{[-|\tau'(z'_{-1})|,|\tau'(z'_0z'_1)|)}. \tag{96}$$

此外，由于 $z'_0 = \tilde{z}'_0$，根据命题 17，我们有

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^k\tau'(z')) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^k\tau'(\tilde{z}')) \text{ for all } k \in [-4\varepsilon', |\tau'(z'_0)| + 4\varepsilon'). \tag{97}$$

我们现在证明:

$$c_{r(z')} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')} \text{ and } z_{r(z')} = \tilde{z}_{r(\tilde{z}')}. \tag{98}$$

注意，引理 37 确保了

$$c_{r(z')}, \tilde{c}_{r(\tilde{z}')} \in [-\varepsilon', |\tau'(z'_0)| - 8\varepsilon'). \tag{99}$$

因此，由（97）可得，$\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_{r(z')}}\tau'(z')) = \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_{r(z')}}\tau'(\tilde{z}'))$。这意味着：如果 ℓ 是满足 $c_{r(z')} \in [\tilde{c}_\ell, \tilde{c}_{\ell+1}$ 的整数，那么

$$c_{r(z')} = \tilde{c}_\ell \text{ and } z_{r(z')} = \tilde{z}_\ell. \tag{100}$$

注意，$\ell \geq 0$（作为$\tilde{c}_{\ell+1} = c_{r(z')+1} \geq 0$）。由于是 $\tau'(z'_0) = \tau'(\tilde{z}'_0)$，由（94）可得，$r(\tilde{z}') \leq \ell$。特别地，$\tilde{c}_{r(\tilde{z}')} \leq \tilde{c}_\ell = c_{r(z')}$。通过对称的论证可得，$c_{r(z')} \leq \tilde{c}_{r(\tilde{z}')}$，由此我们可以得出结论：$\tilde{c}_{r(\tilde{z})} = c_{r(z')}$。接着，由（100）可得 $\tilde{c}_{r(\tilde{z})} = \tilde{c}_\ell$。因此，$r(\tilde{z}) = \ell$，从而根据（100），$z_{r(z')} = \tilde{z}_\ell = \tilde{z}_{r(\tilde{z})}$。这就证明了（98）。

注意到 (98) 意味着 $\mathrm{F}_{(Z,\tau)}(S^{c_{r(z')}}\tau'(z'))$ 等于 $\mathrm{F}_{(Z,\tau)}(S^{c_{r(z')}}\tau'(\tilde{z}'))$。由此，结合 (96) 和 (99)，可以应用引理 32，得到

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^k\tau'(z')) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^k\tau'(\tilde{z}')) \text{ for all } k \in [c_{r(z')}, |\tau'(z'_0z'_1)| - \varepsilon'). \tag{101}$$

于是，由于 $c_{r(z')} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')}$，对于任意满足 $c_k \in [c_{r(z')}\ |\tau'(z'_0z'_1)|-\varepsilon')$ 的 $k \in \mathbb{Z}$，我们有

$$c_k = \tilde{c}_{k-r(z')+r(\tilde{z}')} \text{ and } z_k = \tilde{z}_{k-r(z')+r(\tilde{z}')}. \tag{102}$$

接下来，我们分两种情况讨论。假设 $\mathrm{per}(\tau'(z'_1)) \leq \varepsilon$。注意到，由于 $\tau'(z'_1) = \tau'(\tilde{z}'_1)$，$\mathrm{per}(\tau'(\tilde{z}'_1)) \leq \varepsilon$。因此，由 (94) 可得，$r(Sz') = r(S\tilde{z}') = 0$。现在，$i$ 和 j 的定义以及 (102) 意味着 $c_i = \tilde{c}_j$ 和 $z_i = \tilde{z}_j$。因此，$c_{i+r(Sz')} = \tilde{c}_{j+r(S\tilde{z}')}$，且$z_{i+r(Sz')} = \tilde{z}_{j+r(S\tilde{z}')}$。这就完成了这一情形的证明。

现在假设 $\mathrm{per}(\tau'(z'_1)) > \varepsilon$。我们将按照 (98) 的证明进行论证。由于 $\tau'(z'_1) = \tau'(\tilde{z}'_1)$，我们有 $\mathrm{per}(\tau'(\tilde{z}'_1)) > \varepsilon$。因此，根据 r 的定义，$z_{i+r(Sz')}$ 和 $\tilde{z}_{j+r(S\tilde{z}')}$ 属于 $\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。接着，由于 $c_{i+r(Sz')} \in [|\tau'(z'_0) - \varepsilon'$，根据引理 37 可得 $|\tau'(z'_0z'_1)| - 8\varepsilon')$，由 (101) 可知

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_{i+r(Sz')}}\tau'(z')) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_{i+r(Sz')}}\tau'(\tilde{z}')).$$

因此，如果 k 是满足 $c_{i+r(Sz')} \in [\tilde{c}_k, \tilde{c}_{k+1})$ 的整数，那么 $c_{i+r(Sz')} = \tilde{c}_k$且 $z_{i+r(Sz')} = \tilde{z}_k$。根据 $(\tau'(z'_1)) > \varepsilon$，我们有 $\tilde{z}_k = z_{i+r(Sz')} \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。此外，由于 $|\tau'(z'_0)| = |\tau'(\tilde{z}'_0)|$，$\tilde{c}_{k+1} = c_{i+r(Sz')+1} \geq |\tau'(\tilde{z}'_0)|$，因此 $k \geq j$。由 $r(S\tilde{z}')$的定义，最后两点意味着 $\tilde{c}_{j+r(S\tilde{z}')} \leq \tilde{c}_k = c_{i+r(Sz')}$。类似地，$c_{i+r(Sz')} \leq \tilde{c}_{j+r(S\tilde{z}')}$。我们得出结论，$k = j + r(S\tilde{z}')$，$\tilde{c}_{j+r(S\tilde{z}')} = c_{i+r(Sz')}$，且 $\tilde{z}_{j+r(S\tilde{z}')} = z_{i+r(Sz')}$。 □

定义 8. 最后的命题使我们能够以如下方式定义 $\gamma\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}^+$，如果 $z' \in Z'$，$(c,z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tau'(z'))$，且 i 是满足$|\tau'(z'_0)| \in [c_i, c_{i+1})$的整数，那么

$$\gamma(z'_0) = z_{[r(z'),i+r(Sz'))}. \tag{103}$$

我们称 γ为从 (Z',τ') 到 (Z,τ) 的连接态射。

注 8. 设 $z' \in Z'$ 和 $(c,z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tau'(z'))$。那么，由 (103) 可知，$r(z') + |\gamma(z'_0)| = i + r(Sz')$，其中 i 是满足 $|\tau'(z'_0)| \in [c_i, c_{i+1})$ 的整数。整个小节中将频繁使用这一关系。

本章节余下部分将用于证明 γ 的主要性质。我们先引入一些记号。若 $a' \in \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$，则令 $\rho(a') = \tau'(a')$；若$a' \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$，则令 $\rho(a') = (\tau'(a'))$ 为根。若 $z' \in Z'$，我们定义 $\psi(z') = (\rho(z'_{-1})\ \tau'(z'_0)\ \rho(z'_1))$。类似地定义 $\rho(a)$ 和$\psi(z)$，分别对应于 $a \in \mathcal{C}$ 和 $z \in Z$。

在本章节余下部分中，我们固定点 $z', \tilde{z}' \in Z'$，并采用记号 $(c,z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tau'(z'))$ 和 $(\tilde{c},\tilde{z}) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tau'(\tilde{z}'))$。

引理 38. 设 $x, \tilde{x} \in X$，$(c,z) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(x)$ 和 $(\tilde{c},\tilde{z}) = \mathrm{F}^{(Z,\tau)}(\tilde{x})$。若$x_{[-\varepsilon',\varepsilon')} = \tilde{x}_{[-\varepsilon',\varepsilon')}$ 且 $z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，则 $\psi(z) = \psi(\tilde{z})$。

证明。该假设意味着 $(S^{c_0}x)_{[-E,E)} = (S^{c_0}\tilde{x})_{[-E,E)}$。接着，由于 $z_0 \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，我们可以利用引理 31 推得 $c_0 = \tilde{c}_0$ 和 $\tau(z_0) = \tau(\tilde{z}_0)$。只需证明 $\rho(z_{-1}) = \rho(\tilde{z}_{-1})$ 和 $\rho(z_1) = \rho(\tilde{z}_1)$。我们只证明第一个等式，另一个可用类似论证推出。

共有三种情形。首先假设 $z_{-1} \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。那么，假设保证了 $(S^{c_0-1}x)_{[-E,E)} = (S^{c_0-1}\tilde{x})_{[-E,E)}$。由于 $z_{-1} \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，因此可以用 $S^{c_0-1}x$和 $S^{c_0-1}\tilde{x}$应用引理 31，从而推出 $\tau(z_{-1}) = \tau(\tilde{z}_{-1})$。情形 $\tilde{z}_{-1} \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ 类似。

现在假设 $z_{-1}, \tilde{z}_{-1} \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。我们定义 $s =$根 $\tau(z_{-1})$ 和$\tilde{s} =$根 $\tau(\tilde{z}_{-1})$。我们需要证明 $s = \tilde{s}$。注意，根据命题 15 的第 (3) 项，$s^{\mathbb{Z}}_{[-8\varepsilon,0)} = x_{[c_0-8\varepsilon,c_0)}$ 且 $\tilde{s}^{\mathbb{Z}}_{[-8\varepsilon,0)} = \tilde{x}_{[\tilde{c}_0-8\varepsilon,\tilde{c}_0)}$。由于 c_0 等于 $\tilde{c}_0$，且 $x_{[-\varepsilon',\varepsilon')} = \tilde{x}_{[-\varepsilon',\varepsilon')}$，我们推出 $s^{\mathbb{Z}}_{[-8\varepsilon',0)} = \tilde{s}^{\mathbb{Z}}_{[-8\varepsilon',0)}$。于是，根据定理 4，$s$ 和 $\tilde{s}$ 是某个公共词的幂，这意味着 $s = \tilde{s}$。 □

引理39。假设 $\rho(z'_0) = \rho(\tilde{z}'_0)$ 且 $\mathrm{per}(\tau'(z'_0)) > \varepsilon$。再假设 $\rho(z'_{-1}) = \rho(\tilde{z}'_{-1})$，或者 $\mathrm{per}(\tau'(z'_0)) \le \varepsilon'$。那么，$c_{r(z')} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')}$ 且 $\psi(S^{r(z')}z) = \psi(S^{r(\tilde{z}')}\tilde{z})$。

证明。我们先在 $\mathrm{per}(\tau'(z'_0)) \le \varepsilon'$ 的情形下证明该引理。注意，条件 $\rho(z'_0) = \rho(\tilde{z}'_0)$ 以及命题 15 中的条目 (1) 和 (3) 保证 $\mathrm{per}(\tau'(\tilde{z}'_0)) = \mathrm{per}(\tau'(z'_0)) \le \varepsilon'$ 且 $z'_0, \tilde{z}'_0 \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$。由前述事实和引理 37 可得

$$c_{r(z')}, \tilde{c}_{r(\tilde{z})} \in [-\varepsilon', \varepsilon'). \tag{104}$$

第二点和假设 $\rho(z'_0) = \rho(\tilde{z}'_0)$ 意味着

$$\tau'(z')_{[-8\varepsilon',8\varepsilon')} = \tau'(\tilde{z}')_{[-8\varepsilon',8\varepsilon')}. \tag{105}$$

现在，根据 r 的定义以及条件 $\mathrm{per}(\tau'(z'_0)) = \mathrm{per}(\tau'(\tilde{z}'_0)) > \varepsilon$ ，我们知道 $z_{r(z')}\ \tilde{z}_{r(\tilde{z}')} \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。因此，根据方程（104）和（105），我们可以应用引理 31，推导出以下结论：如果 i 和 j 是满足$c_{r(z')} \in [\tilde{c}_i, \tilde{c}_{i+1})$ 和 $\tilde{c}_{r(\tilde{z}')} \in [c_j, c_{j+1})$ 的整数，那么 $c_{r(z')} = \tilde{c}_i$，且 $\tilde{c}_{r(\tilde{z}')} = c_j$。因此，根据 r 的定义，$\tilde{c}_{r(\tilde{z}')} \leq \tilde{c}_i = c_{r(z')}$ 且 $c_{r(z')} \leq c_j = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')}$。由此我们得出 $c_{r(z')} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')}$。这与方程（104）和（105）使我们能够应用引理 38，从而得到 $\psi(S^{r(z')}z) = \psi(S^{r(\tilde{z}')}\tilde{z})$。

现在假设 $\rho(z'_{-1}) = \rho(\tilde{z}'_{-1})$，且 $\mathrm{per}(\tau'(z'_0)) > \varepsilon'$。那么，$z'_0 \in \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$；因此，由于 $\rho(z'_0) = \rho(\tilde{z}'_0)$，我们有 $\tau'(z'_0) = \tau'(\tilde{z}'_0)$。将其与方程 $\rho(z'_{-1}) = \rho(\tilde{z}'_{-1})$ 以及命题 15 的条目（3）结合，可得

$$\tau'(z')_{[-8\varepsilon', |\tau'(z'_0)|+8\varepsilon')} = \tau'(\tilde{z}')_{[-8\varepsilon', |\tau'(z'_0)|+8\varepsilon')}. \tag{106}$$

现在，根据引理 37，

$$c_{r(z')}, \tilde{c}_{r(\tilde{z}')} \in [-\varepsilon', |\tau'(z'_0)| - 8\varepsilon'). \tag{107}$$

方程（106）和（107）意味着

$$\begin{aligned}(S^{c_{r(z')}}\tau'(z'))_{[-\varepsilon',\varepsilon')} &= (S^{c_{r(z')}}\tau'(\tilde{z}'))_{[-\varepsilon',\varepsilon')} \\ \text{and } (S^{\tilde{c}_{r(\tilde{z}')}}\tau'(z'))_{[-\varepsilon',\varepsilon')} &= (S^{\tilde{c}_{r(\tilde{z}')}}\tau'(\tilde{z}'))_{[-\varepsilon',\varepsilon')}.\end{aligned} \tag{108}$$

由于根据（94），$z_{r(z')}\ \tilde{z}_{r(\tilde{z}')} \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$，我们可以使用引理 31 得出以下结论：如果 i 和 j 是满足 $c_{r(z')} \in [\tilde{c}_i, \tilde{c}_{i+1})$ 及 $\tilde{c}_{r(\tilde{z})} \in [c_j, c_{j+1})$ 的整数，那么 $c_{r(z')} = \tilde{c}_i$ 且 $\tilde{c}_{r(\tilde{z})} = c_j$。随后，我们可以像在第一种情形中那样论证，从而得出 $c_{r(z')} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')}$ 以及 $\psi(S^{r(z')}z) = \psi(S^{r(\tilde{z}')}\tilde{z})$。 □

命题19. 假设 $z'_0, \tilde{z}'_0 \in \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$ 和 $\psi(z') = \psi(\tilde{z}')$。那么：

(1) $c_{r(z')} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')}$ *and* $c_{r(z')+|\gamma(z'_0)|} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')+|\gamma(\tilde{z}'_0)|}$.

(2) $\psi(S^{r(z')}z) = \psi(S^{r(\tilde{z}')}\tilde{z})$ *and* $\psi(S^{r(z')+|\gamma(z'_0)|}z) = \psi(S^{r(\tilde{z}')+|\gamma(\tilde{z}'_0)|}\tilde{z})$.

证明. 根据条件 $\psi(z') = \psi(\tilde{z}')$，我们有 $\rho(z'_{-1}) = \rho(\tilde{z}'_{-1})$ 和$\rho(z'_0) = \rho(\tilde{z}'_0)$。此外，由于 $z'_0 \in \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$，我们有 $\mathrm{per}(\tau'(z'_0)) > \varepsilon$。因此，我们可以利用引理39推得

$$c_{r(z')} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')} \text{ and } \psi(S^{r(z')}z) = \psi(S^{r(\tilde{z}')}\tilde{z}). \tag{109}$$

现在，由引理 37 可得 $c_{r(z')} \in [-\varepsilon', |\tau'(z'_0)| - 8\varepsilon')$。此外，假设和命题 15 中的第（1）项给出

$$\tau'(z')_{[-8\varepsilon', |\tau'(z'_0)|+8\varepsilon')} = \tau'(\tilde{z}')_{[-8\varepsilon', |\tau'(z'_0)|+8\varepsilon')} \tag{110}$$

这两点，再加上 $z_{r(z')} \in \mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$ 这一事实，使我们能够应用引理 31 并推得

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_{r(z')+1}}\tau'(z')) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_{r(z')+1}}\tau'(z')). \tag{111}$$

特别地，$c_{r(z')+1} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')+1}$。

为了继续，我们必须考虑两种情况。首先假设 $z'_1 \in \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$。那么，由于 $\psi(z') = \psi(\tilde{z}')$，我们可以利用引理39得到 $c_{r(z')+|\gamma(z'_0)|} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')+|\gamma(\tilde{z}'_0)|}$ 以及 $\psi(S^{r(z')+|\gamma(z'_0)|}z) = \psi(S^{r(\tilde{z}')+|\gamma(\tilde{z}'_0)|}\tilde{z})$。

还需考虑情形 $z'_1 \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$。方程 (110) 和 (111) 使我们能够应用引理 32，并推导出对于所有 $k \in [c_{r(z')+1}, |\tau'(z'_0)| + 7\varepsilon')$，$\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^k\tau'(z'))$ 等于 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^k\tau'(\tilde{z}'))$。由于 $c_{r(z')+1} \leq |\tau'(z'_0)| - 7\varepsilon'$，我们特别有：

$$\mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^k\tau'(z')) = \mathbf{F}^0_{(Z,\tau)}(S^k\tau'(\tilde{z}')) \text{ for all } k \in [|\tau'(z'_0)| - 7\varepsilon', |\tau'(z'_0)| + 7\varepsilon'). \tag{112}$$

现在，条件 $\psi(z') = \psi(\tilde{z}')$ 蕴含 $\tilde{z}_1 \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$。因此，由引理 37，

$$c_{r(z')+|\gamma(z'_0)|}, \tilde{c}_{r(\tilde{z}')+|\gamma(\tilde{z}'_0)|} \in [|\tau'(z'_0)| - \varepsilon', |\tau'(z'_0)| + \varepsilon').$$

我们利用（112）得出，$c_{r(z')+|\gamma(z'_0)|} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')+|\gamma(\tilde{z}'_0)|}$ 且 $z_{r(z')+|\gamma(z'_0)|} = \tilde{z}_{r(\tilde{z}')+|\gamma(\tilde{z}'_0)|}$。引理得证。 □

命题 20. 假设 $\rho(z_0^n) = \rho(\tilde{z}_0^n)$ 且 $\varepsilon < |\text{根 } \tau'(z'_0)| \leq \varepsilon'$。那么：

(1) $c_{r(z')} = c_{r_1(z')+|\gamma(z'_0)|} - |\tau'(z'_0)| = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')+|\gamma(\tilde{z}'_0)|} - |\tau'(\tilde{z}'_0)|$.

(2) $z_{r(z')} = z_{r(z')+|\gamma(z'_0)|} = \tilde{z}_{r(\tilde{z}')} = \tilde{z}_{r(\tilde{z}')+|\gamma(\tilde{z}'_0)|}$.

证明。注意，根据命题 15 的第 (3) 项，$\mathrm{per}(\tau'(z'_0)) = |\text{根 } \tau'(z'_0)| \in (\varepsilon, \varepsilon']$. 这一点以及条件 $\rho(z_0^n) = \rho(\tilde{z}_0^n)$ 使我们可以使用引理39，得到 $c_{r(z')} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')}$。然后，由于 $z'_0 \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}'_{\mathsf{ap}}$，根据引理 37，我们有。

$$c_{r(z')} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')} \in [-\varepsilon', \varepsilon').$$

现在，假设允许我们使用引理 34，并推得 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_{r(z')}}\tau'(z')) = \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{c_{r(z')}}\tau'(\tilde{z}'))$。由于 $c_{r(z')} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')}$，我们得到

$$z_{r(z')} = \tilde{z}_{r(\tilde{z}')}.$$

我们再次使用引理 34，得到对于所有 $k \in [-4\varepsilon', 4\varepsilon')$，均有 $\mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^k\tau'(z')) = \mathrm{F}^0_{(Z,\tau)}(S^{k+|\tau'(z'_0)|}\tau'(\tilde{z}'))$。由于 $c_{r(z')} \in [-\varepsilon', \varepsilon')$，这意味着

$$c_{r(z')+|\gamma(z'_0)|} = c_{r(z')} + |\tau'(z'_0)|.$$

类似地，$\tilde{c}_{r(\tilde{z}')+|\gamma(\tilde{z}'_0)|} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')} + |\tau'(z'_0)|$。 □

命题21。设 k、$\ell \geq 1$ 和 s 满足：对于所有 $i \in [0, k)$ 和 $j \in [0, \ell)$，$|s| \leq \varepsilon$ 和 $s =$ 分别为 $\tau'(z'_i)$ 和 $\tau'(\tilde{z}'_j)$ 的根。则：

(1) 存在 t，使得 $|t| = |s|$ 和 $t =$ 是 $\tau(z_i)$ 的根，$=$ 是 $\tau(\tilde{z}_j)$ 的根，对所有 $i \in [r(z')\ r(z') + |\gamma(z'_{[0,k)})|)$ 和 $j \in [r(\tilde{z}')\ r(\tilde{z}') + |\gamma(\tilde{z}'_{[0,\ell)})|)$ 均成立。

(2) $c_{r(z')} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')} = c_{r(z')+|\gamma(z'_{[0,k)})|} = \tilde{c}_{r(\tilde{z}')+|\gamma(\tilde{z}'_{[0,\ell)})|} \pmod{|s|}$.

(3) $\psi(S^{r(z')}z)=\psi(S^{r(\tilde{z}')}\tilde{z})$ *and, if* $\rho(z'_k)=\rho(\tilde{z}'_\ell)$*, then* $\psi(S^{r(z')+|\gamma(z'_{[0,k)})|}z)=\psi(S^{r(\tilde{z}')+|\gamma(\tilde{z}'_{[0,\ell)})|}\tilde{z})$.

证明。注意到，由于 $|s|\le\varepsilon$，引理 37 推出

$$c_{r(z')},\tilde{c}_{r(\tilde{z}')}\in[-\varepsilon',\varepsilon'). \tag{113}$$

因此，根据引理 33，每个满足 $i\in\mathbb{Z}$ such that $c_i\in[-4\varepsilon',|\tau'(z'_{[0,k)})|+4\varepsilon')$ 的对象都满足

$$t:==\operatorname{root}\tau(z_{r(z')})=\operatorname{root}\tau(z_i),|t|=|s|\ \text{ and }\ c_i=c_{r(z')}\pmod{|s|} \tag{114}$$

同理，对于所有满足 $j\in\mathbb{Z}$ such that $\tilde{c}_j\in[-4\varepsilon',|\tau'(\tilde{z}'_{[0,\ell)})|+4\varepsilon')$ 的对象，

$$\tilde{t}:==\operatorname{root}\tau(\tilde{z}_{r(\tilde{z}')})=\operatorname{root}\tau(\tilde{z}_j),|\tilde{t}|=|s|\ \text{ and }\ \tilde{c}_j=\tilde{c}_{r(\tilde{z}')}\pmod{|s|} \tag{115}$$

我们将利用这些关系证明以下结论：

$$c_{r(z')}=\tilde{c}_{r(\tilde{z}')}\pmod{|s|}\ \text{ and }\ t=\tilde{t}. \tag{116}$$

由于 $|s|\le\varepsilon\le\varepsilon'$，我们可以利用命题 15 的第 (3) 项和 (113) 得到$s^{\mathbb{Z}}_{[c_{r(z')},c_{r(z')}+8\varepsilon)}=\tau'(z')_{[c_{r(z')},c_{r(z')}+8\varepsilon)}=t^{\mathbb{Z}}_{[0,8\varepsilon)}$。由于 $|s|=|t|\le\varepsilon$，引理 2 的第 (1) 项给出 $S^{c_{r(z')}}s^{\mathbb{Z}}=t^{\mathbb{Z}}$。同理，$S^{\tilde{c}_{r(\tilde{z}')}}s^{\mathbb{Z}}=\tilde{t}^{\mathbb{Z}}$。由此可得

$$S^{-c_{r(z')}}t^{\mathbb{Z}}=S^{-\tilde{c}_{r(\tilde{z}')}}\tilde{t}^{\mathbb{Z}}. \tag{117}$$

由于 $|$根 $\tau(z_{r(z')})|=|$根 $\tau(\tilde{z}_{r(\tilde{z}')})|=|s|$，我们推得 t和 $\tilde{t}$共轭。因此，由命题 15 的第 (3) 项可得，$t=\tilde{t}$。将其代入 (117)，再利用引理 2 的第 (2) 项，得到 $c_{r(z')}=\tilde{c}_{r(\tilde{z}')}$ (模 $|s|$)。这就完成了 (116) 的证明。

令 α 为满足 $|\tau'(z'_{[0,k)})|\in[c_\alpha,c_{\alpha+1})$ 的整数。由 (114) 可知，对于所有 $i\in[r(z')\ \alpha)$，都有 $z_i\in\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。此外，根据 r 的定义，对于所有 $i\in[\alpha,\alpha+r(S^kz'))$，都有 $z_i\in\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_{\mathsf{ap}}$。因此，由命题 16 中的 (1)，对于每个 $i\in[r(z')\ \alpha+r(S^kz'))$，都有根 $\tau(z_i)=$根 $\tau(z_{r(z')})=t$。特别地，$c_{\alpha+r(S^kz')}=c_{r(z')}\pmod{|s|}$。由于 $\alpha+r(S^kz')=r(z')+|\gamma(z'_{[0,k)})|$，我们得到 $c_{r(z')+|\gamma(z'_{[0,k)})|}=c_{r(z')}\pmod{|s|}$，并且对于每个 $i\in[r(z')\ r(z')+|\gamma(z'_{[0,k)})|)$，都有根 $\tau(z_i)=t$。类似地可以证明，$\tilde{c}_{r(\tilde{z}')+|\gamma(\tilde{z}'_{[0,\ell)})|}=\tilde{c}_{r(\tilde{z}')}\pmod{|s|}$，并且对于每个 $j\in[r(\tilde{z}')\ r(\tilde{z}')+|\gamma(\tilde{z}'_{[0,\ell)})|)$，都有根 $\tau(\tilde{z}_j)=\tilde{t}$。由于 t 等于 $\tilde{t}$，我们得到条目 (1)。此外，由于 $c_{r(z')}=\tilde{c}_{r(\tilde{z}')}\pmod{|s|}$，我们也有条目（2）。

剩下的就是证明条目（3）。我们注意到，由于 $t=\tilde{t}$，等式（114）和（115）蕴含 $\psi(S^{r(z')}z)=\psi(S^{r(\tilde{z}')}\tilde{z})=(t,t,t)$。现在假设$\rho(z'_k)=\rho(\tilde{z}'_\ell)$。有两种情况。首先，假设 $|$根 $\tau(z'_k)|\le\varepsilon$。那么，根据引理 37，$c_{r(z')+|\gamma(z'_{[0,k)})|}\in[|\tau'(z'_{[0,k)})|-\varepsilon',|\tau'(z'_{[0,k)})|+\varepsilon')$。利用（114），我们得到 $\psi(S^{r(z')+|\gamma(z'_{[0,k)})|}z)=(t,t,t)$。现在，由于 $\rho(z'_k)=\rho(\tilde{z}'_\ell)$，我们有 $|$根 $\tau(\tilde{z}'_\ell)|\le\varepsilon$。因此，类似的论证表明$\psi(S^{r(\tilde{z})+|\gamma(\tilde{z}'_{[0,\ell)})|}\tilde{z})=(t,t,t)=\psi(S^{r(z')+|\gamma(z'_{[0,k)})|}z)$。接下来，假设|根 $\tau(z'_k)|>\varepsilon$。那么，由于 $\rho(z'_k)=\rho(\tilde{z}'_\ell)$ 且 $\rho(z'_{k-1})=\rho(\tilde{z}'_{\ell-1})=s$，我们可以用引理39，取 z'_k 和 $\tilde{z}'_\ell$，推得 $\psi(S^{r(\tilde{z})+|\gamma(\tilde{z}'_{[0,\ell)})|}\tilde{z})=\psi(S^{r(z')+|\gamma(z'_{[0,k)})|}z)$。 □

9 主要定理

现在我们完成定理 6 和定理 7 的证明。对于证明中需要从 $\mathcal{S}$ 进制结构得到复杂度限制的部分，利用引理 50 即可轻松完成。对于另一部分，我们首先在定理5中给出一个充分条件，使得能够得到定理 6 和定理 7 中的 $\mathcal{S}$ 进制结构。然后，我们利用引理4和引理5验证线性增长复杂度子移位和非超线性增长复杂度子移位满足这些条件。

9.1 一组充分条件

本小节旨在证明以下定理。

定理5. 设 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 是一个无限极小子移位。设 $(\ell_n)_{n\geq 0}$ 是一个递增的正整数序列，且 $d \geq \max\{10^4, \#\mathcal{A}\}$。假设对每个 $n \geq 0$

$$p_X(\ell_n) \leq d,\ p_X(\ell_n+1) - p_X(\ell_n) \leq d,\ and\ \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} \geq 10^4 d^{2d^3+6}. \tag{118}$$

那么，存在一个可识别的 $\mathcal{S}$-进序列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n\colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)_{n\geq 0}$，生成 X，使得对所有 $n \geq 1$:

$(\mathcal{P}_1)$ $\#(\mathrm{root}^{\sigma_{[0,n)}}(\mathcal{A}_n)) \leq 35d^{12d+24}$ 且 $\#\mathcal{A}_n \leq 7^4 d^{12d+36} \cdot$ 幂复杂度$(X)^4$。

$(\mathcal{P}_2)$ $|\sigma_{[0,n)}(a)| \leq 4d^{d^3+6} \cdot |\sigma_{[0,n)}(b)|$ *for every* $a, b \in \mathcal{A}_n$.

$(\mathcal{P}_3)$ $|\sigma_{n-1}(a)| \leq 40d^{2d^3+8} \cdot \frac{\ell_n}{\ell_{n-1}}$ 对于每个 $a \in \mathcal{A}_n$。

证明由一系列引理构成。

我们固定一个无限极小子移位 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$、一个递增的正整数序列 $(\ell_n)_{n\geq 0}$以及 $d \geq \max\{10^4, \#\mathcal{A}\}$，使得（118）对每个$n \geq 0$都成立。

我们首先定义 $\boldsymbol{\sigma}$。令 $(Z_n \subseteq \mathcal{C}_n^{\mathbb{Z}}, \tau_n\colon \mathcal{C}_n \to \mathcal{A}^+)$ 表示第 8.1 小节中使用 ℓ_n构造的编码，并令 $\varepsilon_n \in [\ell_n/d^{2d^3+4}, \ell_n/d)$ 和$\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_{n,\ \mathrm{ap}} \cup \mathcal{C}_{n,\ \mathrm{wp}} \cup \mathcal{C}_{n,\ \mathrm{sp}}$ 分别表示该构造中出现的常数和划分。在此背景下，命题 15 表述如下:

(i) $(\#\ \mathrm{root}\ \tau_n(\mathcal{C}_n)) \leq 5d^{3d+6}$, $\#\mathcal{C}_n \leq 7^4 d^{12d+36}$ pow-com$(X)^4$ and $\#\tau(\mathcal{C}_{n,\mathrm{ap}}) \leq 2d^{3d+6}$.

(ii) $2\varepsilon_n \leq |\tau_n(a)| \leq 10d^2\ell_n$ 对于所有 $a \in \mathcal{C}_n$。

此外，(65) 中 $\mathcal{C}_n$ 的定义保证了

(iii) 对于所有 $a \in \mathcal{C}_n$，都存在 $z \in Z_n$，使得 $z_0 = a$。

此外，(118) 蕴含 $500d^2\ell_n \leq \ell_{n+1}/d^{2d^3+4}$，因此可以将第 8.2 小节的结果应用于 (Z_{n+1}, ℓ_{n+1}) 和 (Z_n, τ_n)。特别是,

(iv) 命题 18、19、20 和 21 可与 (Z_{n+1}, ℓ_{n+1}) 和 (Z_n, τ_n) 配合使用。

我们将映射 r_n 定义如下。若 $z' \in Z_{n+1}$ 且 $(c, z) = \mathrm{F}_{(Z_n,\tau_n)}(\tau_{n+1}(z'))$，则

$$r_n(z') = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathsf{per}(\tau_{n+1}(z'_0)) \le \varepsilon \\ \min\{i \ge 0 : z_i \in \mathcal{C}_{n,\mathrm{ap}}\} & \text{if } \mathsf{per}(\tau_{n+1}(z'_0)) > \varepsilon \end{cases} \tag{119}$$

请注意，这与（94）中的 r 的定义类似。因此，命题 18 确保了定义 8 中描述的连接态射 σ_n: $\mathcal{C}_{n+1} \to \mathcal{C}_n^+$是良定义的。态射 σ_n 满足以下条件：若 $z' \in Z_{n+1}$，$(c, z) = \mathrm{F}_{(Z_n,\tau_n)}(\tau_{n+1}(z'))$ 且 i 是满足 $|\tau_{n+1}(z'_0)| \in [c_i, c_{i+1})$ 的整数，则

$$\sigma_n(z'_0) = z_{[r_n(z'), i+r_n(Sz'))}. \tag{120}$$

我们设定 $\sigma_0 = \tau_0$ 和 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n)_{n\ge 0}$。

接下来，我们将用 $\tau_n(z'_0)$ 和辅助函数$q_{j,\ n}$ 来描述 $\sigma_{[0,n)}(z'_0)$，这些辅助函数将在下面定义。对于 $z' \in Z_n$，我们设定 $q_{n,\ n}(z') = 0$，然后对 $0 \le j < n$ 进行归纳定义，

$$q_{j,n}(z') = q_{j+1,n}(z') + c_{r_j(z)}, \tag{121}$$

其中 $(c, z) = \mathrm{F}_{(Z_{j+1},\tau_{j+1})}(S^{q_{j+1,n}(z')}\tau_n(z'))$. 对 (121) 进行归纳应用可得公式

$$\sigma_{[0,n)}(z'_0) = \tau_n(z')_{[q_{0,n}(z'), |\tau_n(z'_0)|+q_{0,n}(Sz'))}. \tag{122}$$

尤其是,

$$\sigma_{[0,n)}(z') = S^{q_{0,n}(z')}\tau_n(z') \text{ for all } n \ge 1 \text{ and } z' \in Z_n. \tag{123}$$

我们现在证明 $\boldsymbol{\sigma}$ 满足定理5中的所有条件。

引理 40. 设 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_n : \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)_{n\ge 0}$ 是一个 $\mathcal{S}$-进序列。假设存在满足 $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{L}(Z_n)$ 的子移位 $Z_n \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{Z}}$。那么，对于每个 $x \in X_{\boldsymbol{\tau}}$，都存在序列 $(n_\ell)_{\ell\ge 0}$ 和 $x_\ell \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} S^k\tau_{[0,n_\ell)}(Z_{n_\ell})$，使得 x 是 $(x_\ell)_{\ell\ge 0}$ 的极限。

证明。令 $x \in X_{\boldsymbol{\tau}}$。那么，对于所有 $\ell \ge 0$，存在 $n_\ell \ge 0$ 和 $a_\ell \in \mathcal{A}_{n_\ell}$，使得 $x_{[-\ell,\ell)}$ 出现在 $\tau_{[0,n_\ell)}(a_\ell)$ 中。该假设允许我们找到 $z_\ell \in Z_{n_\ell}$，使得 $(z_\ell)_0 = a_\ell$。由于 $x_{[-\ell,\ell)}$ 是 $\tau_{[0,n_\ell)}((z_\ell)_0)$ 的一个子词，存在形如 $x_\ell = S^{k_\ell}\tau_{[0,n_\ell)}(z_\ell)$ 的点满足 $(x_\ell)_{[-\ell,\ell)} = x_{[-\ell,\ell)}$。于是，$x$ 是 $(x_\ell)_{\ell\ge 0}$ 的极限。引理得证。 □

引理 41。 $\mathcal{S}$-进序列 $\boldsymbol{\sigma}$ 是可识别的，并生成 X。

证明。首先，我们证明 $\boldsymbol{\sigma}$ 生成 X。注意，(123) 确保了 that

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k\sigma_{[0,n)}(Z_n) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k\tau_n(Z_n) = X.$$

现在，得益于条件 (iii)，我们可以使用引理 40，因此，任意 $x \in X_{\boldsymbol{\sigma}}$ 都是序列 $x_n \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} S^k\sigma_{[0,n)}(Z_n) = X$ 的一个附着点。因此，$X_{\boldsymbol{\sigma}} \subseteq X$。根据 X 的极小性，我们得出 $X_{\boldsymbol{\sigma}} = X$。

剩下要证明的是 $(Z_n, X_{[0,n)})$ 是可识别的。设 (k, z) 和 $(\tilde{k}, \tilde{z})$ 是 Z_n 中 $\sigma_{[0,n)}$ 的两个可识别的解。那么，等式 (123) 意味着

$$S^{k+q_{0,n}(z)}\tau_n(z) = S^k\sigma_{[0,n)}(z) = S^{\tilde{k}}\sigma_{[0,n)}(\tilde{z}) = S^{\tilde{k}+q_{0,n}(\tilde{z})}\tau_n(\tilde{z}).$$

特别地，$S^\ell\tau_n(z) = \tau_n(\tilde{z})$，其中 $\ell = k+q_{0,n}(z)-\tilde{k}-q_{0,n}(\tilde{z})$。不失一般性，假设 $\ell \geq 0$。我们可以找到 $i \geq 0$，使得 $(\ell-|\tau_n(z_{[0,i)})|, S^i z)$ 是 Z_n 中 $S^\ell\tau_n(z)$ 的一个 τ_n-分解。然后，由于 $(0, \tilde{z})$ 是 Z_n 中 $S^\ell\tau_n(z)$ 的一个 τ_n-分解，根据 (Z_n, τ_n) 的可识别性，我们可推出

$$\ell = k + q_{0,n}(z) - \tilde{k} - q_{0,n}(\tilde{z}) = |\tau_n(z_{[0,i)})| \text{ and } S^i z = \tilde{z} \tag{124}$$

利用这一点以及 (k, z) 和 $(k, \tilde{z})$ 都是 x 的 $\sigma_{[0,n)}$-分解这一事实，我们可以写出

$$\begin{aligned}\sigma_{[0,n)}(z) = S^{\tilde{k}-k}\sigma_{[0,n)}(\tilde{z}) &= S^{\tilde{k}-k}\sigma_{[0,n)}(S^i z)\\ &= S^{q_{0,n}(z)-q_{0,n}(\tilde{z})-|\tau_n(z_{[0,i)})|+|\sigma_{[0,n)}(z_{[0,i)})|}\sigma_{[0,n)}(z).\end{aligned}$$

由于 Z_n 非周期（如 X 非周期），我们得到 $q_{0,n}(z)-q_{0,n}(\tilde{z})+|\sigma_{[0,n)}(z_{[0,i)})|$ 等于 $|\tau_n(z_{[0,i)})|$。将其代入 (124) 得到 $|\sigma_{[0,n)}(z_{[0,i)})| = k-k$。由于 $k \in [0, |\sigma_{[0,n)}(z_0)|)$ 且 $k \in [0, |\sigma_{[0,n)}(\tilde{z}_0)|)$，我们得到。

$$|\sigma_{[0,n)}(z_{[0,i)})| \leq k < |\sigma_{[0,n)}(z_0)|.$$

我们推得 $i = 0$，继而由 (124) 得到 $z = \tilde{z}$ 和 $k = k$。 □

在继续之前，我们先给出 $q_{0,n}$ 的一些界。

引理 42。设 $n \geq 1$ 和 $z' \in Z_n$。那么，

$$-2\varepsilon_n \leq q_{0,n}(z') \leq |\tau_n(z'_0)| - 7\varepsilon_n. \tag{125}$$

此外，如果 $z'_0 \in \mathcal{C}_n \setminus \mathcal{C}_{n,\mathrm{ap}}$，那么

$$-2\varepsilon_n \leq q_{0,n}(z') \leq 2\varepsilon_n. \tag{126}$$

证明。引理 37 给出了对所有 $0 \leq j < n$ 和 $z \in Z_{j+1}$，$-\varepsilon_j \leq c_{r(z)} \leq |\tau_{j+1}(z_0)|-8\varepsilon_j$ 的界。因此，由 (122) 可得 $-\varepsilon_n \leq q_{n-1,n}(z') \leq |\tau_n(z'_0)| - 8\varepsilon_n$ 和 $q_{j+1,n}(z') - |\tau_{j+1}| \leq q_{j,n}(z') \leq q_{j+1,n}(z') + |\tau_{j+1}|$。我们得到

$$-\varepsilon_n - \sum_{j=0}^{n-2}|\tau_{j+1}| \leq q_{0,n}(z') \leq |\tau_n(z'_0)| - 8\varepsilon_n + \sum_{j=0}^{n-2}|\tau_{j+1}|. \tag{127}$$

现在，由于 $|\tau_j| \le 10d^2\ell_j$ 和 $500d^{2d^3+6}\cdot\ell_j \le \ell_{j+1}$，对每个 $j \in [0, n-1)$，我们都有界 $d^{n-2-j}|\tau_j| \le \ell_{n-1}$。因此，

$$\sum_{j=0}^{n-2} |\tau_{j+1}| \le \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{d^{n-2-j}}\ell_{n-1} \le 2d\ell_{n-1} \le \varepsilon_n.$$

将其代入（127）即可得到（125）。此外，若 $z_0' \in \mathcal{C}_n \setminus \mathcal{C}_{n,\mathrm{ap}}$，则由引理 37 可得 $q_{n-1,n}(z') \in [-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$。因此，前述论证表明，在这种情形下，$q_{0,n}(z') \in [-2\varepsilon_n, 2\varepsilon_n)$。□

引理 43. 对于每个 $n \ge 1$ 和 $z' \in Z_n$，

$$\frac{5}{d^{d^3+4}}\ell_n \le |\sigma_{[0,n)}(z_0')| \le 20d^2\ell_n. \tag{128}$$

特别地，$\boldsymbol{\sigma}$ 满足定理5的条目（$\mathcal{P}_2$）和（$\mathcal{P}_3$）。

证明。我们首先证明 (128) 蕴含 $\boldsymbol{\sigma}$ 满足定理5的条目 ($\mathcal{P}_1$) 和 ($\mathcal{P}_2$)。注意，根据条件 (iii)，(128) 表明，对于每个 $n \ge 1$ 和 a、$b \in \mathcal{C}_n$，有

$$|\sigma_{[0,n)}(a)| \le 20d^2\ell_n \le 4d^{d^3+6}\cdot|\sigma_{[0,n)}(b)|. \tag{129}$$

因此，($\mathcal{P}_2$) 得以满足。对于条目 ($\mathcal{P}_3$)，我们注意到，对于任意一对满足 $\xi\xi'$ 有定义的态射ξ 和 ξ'，都有 $|\xi\xi'| \ge \langle\xi\rangle|\xi'|$。因此，

$$|\sigma_{[0,n+1)}| \ge \langle\sigma_{[0,n)}\rangle|\sigma_n|.$$

于是，根据条目 (129)，

$$|\sigma_n| \le \frac{|\sigma_{[0,n+1)}|}{\langle\sigma_{[0,n)}\rangle} \le \frac{10d^2\ell_{n+1}}{1/4d^{2d^3+6}\ell_n} = 40d^{2d^3+8}\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n}.$$

现在证明 (128)。令 $n \ge 0$ 和 $z' \in Z_n$ 为任意元素。一方面，由 (122) 可得

$$|\sigma_{[0,n)}(z_0')| = |\tau_n(z_0')| - q_{0,n}(z') + q_{0,n}(Sz') \text{ for any } z' \in Z_n.$$

因此，根据 (125) 和条件 (ii)，

$$|\sigma_{[0,n)}(z_0')| = |\tau_n(z_0')| - q_{0,n}(z') + q_{0,n}(Sz') \le |\tau_n(z_0')| + |\tau_n(z_1')| - 5\varepsilon_n \le 20d^2\ell_n.$$

类似地，

$$|\sigma_{[0,n)}(z_0')| = |\tau_n(z_0')| - q_{0,n}(z') + q_{0,n}(Sz') \ge 5\varepsilon_n \ge \frac{5}{d^{d^3+4}}\ell_n.$$

□

现在引入一些记号。令 $\rho(a) = a$ 当且仅当 a 属于 $\mathcal{C}_{n,\,\mathrm{ap}}$ 对于某个 $n \geq 1$，并令 $\rho(a) =$ 根 $\tau_n(a)$ 当且仅当 $n \geq 1$ 且 $a \in \mathcal{C}_n \setminus \mathcal{C}_{n,\,\mathrm{ap}}$。对于 $n \geq 1$ 和 $z \in Z_n$，我们定义 $\psi(z) = (\rho(z_{-1})\ \rho(z_0)\ \rho(z_1))$。注意，这些定义与第 8.2.2 小节中的定义一致。

以下引理的证明将推迟到本小节末尾进行。

引理 44. 设 z、$\tilde{z} \in Z_n$ 满足 $\psi(z) = \psi(\tilde{z})$。那么，根$\sigma_{[0,n)}(z_0)$ =根 $\sigma_{[0,n)}(\tilde{z}_0)$。

引理 45. 定理5 的条目（$\mathcal{P}_1$）由 $\boldsymbol{\sigma}$ 满足。

证明。$\#\mathcal{C}_n \leq 7^4 d^{12d+36}\mathrm{pow\text{-}com}(X)^4$ 中的条目 ($\mathcal{P}_1$) 里的不等式由条件 (i) 得出。为了证明另一个不等式，我们注意到引理 44 意味着

$$\#\,\mathsf{root}\,\sigma_{[0,n)}(\mathcal{C}_n) \leq \#\psi(Z_n) \cdot \#\,\mathsf{root}\,\tau_n(\mathcal{C}_n).$$

现在，根据 ψ 的定义，$\#\psi(Z_n)$至多为（# 根 $\tau_n(\mathcal{C}_n)+\#\tau_n(\mathcal{C}_{n,\mathrm{ap}})$）^{3}。将其与条件 (i) 给出的界限相结合，可得

$$\begin{aligned}\#\,\mathsf{root}\,\sigma_{[0,n)}(\mathcal{C}_n) &\leq \#\psi(Z_n) \cdot \#\,\mathsf{root}\,\tau_n(\mathcal{C}_n)\\ &\leq (5d^{3d+6} + 2d^{3d+6})^3 \cdot 5d^{3d+6} \leq 35d^{12d+24}.\end{aligned}$$

□

只需证明引理 44。我们首先固定一些记号。设 $z^n, \tilde{z}^n \in Z_n$ 满足 $\psi(z^n) = \psi(\tilde{z}^n)$。我们令 $s =$根 $\tau_n(z_0^n) =$根 $\tau_n(\tilde{z}_0^n)$。对于 $j \in [0, n)$，我们归纳定义 $z^j = \sigma_j(z^{j+1})$ 和 $\tilde{z}^j = \sigma_j(\tilde{z}^{j+1})$。令 $(c^j, y^j) = \mathrm{F}_{(Z_j,\tau_j)}(\tau_{j+1}(z^{j+1}))$ 和 $(\tilde{c}^j, \tilde{y}^j) = \mathrm{F}_{(Z_j,\tau_j)}(\tau_{j+1}(\tilde{z}^{j+1}))$

采用上述记号，对于每个 $j \in [0, n)$，我们有

$$S^{r_j(z^{j+1})} y^j = z^j \tag{130}$$

并且

$$z^j = \sigma_{[j,n)}(z^n). \tag{131}$$

根据（121），也可以写成

$$\begin{aligned}q_{j,n}(z^n) &= q_{j+1,n}(z^n) + c^j_{r_j(z^{j+1})}\\ &\text{and } q_{j,n}(Sz^n) = q_{j+1,n}(Sz^n) + c^j_{r_j(z^{j+1})+|\sigma_{[j,n)}(z_0^n)|}\end{aligned} \tag{132}$$

对于每个 $j \in [0, n)$。对于 $\tilde{z}^n$，也有类似的关系。

接下来的三个引理是证明引理 44 的核心。

引理 46. 假设 $\psi(z^n) = \psi(\tilde{z}^n)$ 且 $\varepsilon_n < |s|$。那么，对于每个$j \in [0, n]$，以下结论成立：

(a) $q_{j,n}(z^n) = q_{j,n}(\tilde{z}^n)$ *and* $q_{j,n}(Sz^n) = q_{j,n}(S\tilde{z}^n)$.

(b) $\psi(z^j)=\psi(\tilde{z}^j)$ *and* $\psi(S^{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|}z^j)=\psi(S^{|\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}^n)|}\tilde{z}^j)$.

(c) $z_0^j,\tilde{z}_0^j,z^j_{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|},\tilde{z}^j_{|\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}^n)|}\in\mathcal{C}_{j,\mathrm{ap}}$.

证明。我们通过对 j 进行归纳法来证明这一结论。情形 $j=n$ 是假设的直接推论。假设 $j\in[0,n)$，并且该结论对 $j+1$ 成立。归纳假设表明，z_0^{j+1} 和 $\tilde{z}_0^{j+1}$ 属于 $\mathcal{C}_{j+1,\mathrm{ap}}$。特别地，$\mathsf{per}(\tau_{j+1}(z_0^{j+1}))$ 和 $\mathsf{per}(\tau_{j+1}(\tilde{z}_0^{j+1}))$ 均大于 ε_{j+1}。因此，根据 r_j 的定义和 (130)，$z_0^j=y^j_{r_j(z^{j+1})}\in\mathcal{C}_{j,\mathrm{ap}}$ 和 $\tilde{z}_0^j\in\mathcal{C}_{j,\mathrm{ap}}$。

接下来，根据归纳假设中的条目 (b) 和 (c)，z^j 和 $\tilde{z}^j$ 满足引理 19 的假设。因此，由 (130) 可得，

(1) $c^j_{r_j(z^{j+1})}=\tilde{c}^j_{r_j(\tilde{z}^{j+1})}$, and

(2) $\psi(z^j)=\psi(S^{r_j(z^{j+1})}y^j)=\psi(S^{r_j(\tilde{y}^{j+1})}\tilde{z}^j)=\psi(\tilde{z}^j)$.

将第一个方程和归纳假设中的条目 (a) 代入$q_{j,n}$ 的定义，得到

$$q_{j,n}(z^n)=q_{j+1,n}(z^n)+c^j_{r_j(z^{j+1})}=q_{j+1,n}(\tilde{z}^n)+\tilde{c}^j_{r_j(\tilde{z}^{j+1})}=q_{j,n}(\tilde{z}^n).$$

归纳步骤的其余部分可用类似论证得出。 □

引理 47. 假设 $\rho(z_0^n)=\rho(\tilde{z}_0^n)$ 且 $\varepsilon_{n-1}<|s|\le\varepsilon_n$。那么，对于每个$j\in[0,n)$，以下结论成立：

(a) $q_{j,n}(z^n)=q_{j,n}(\tilde{z}^n)=q_{j,n}(Sz^n)=q_{j,n}(S\tilde{z}^n)$.

(b) $\psi(z^j)=\psi(\tilde{z}^j)=\psi(S^{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|}z^j)=\psi(S^{|\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}^n)|}\tilde{z}^j)$.

(c) z_0^j, $\tilde{z}_0^j$, $z^j_{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|}$ *and* $\tilde{z}^j_{|\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}^n)|}$ *belong to* $\mathcal{C}_{j,\mathrm{ap}}$.

证明. 我们先假设 $j=n-1$。记 $r=r_{n-1}$、$c_j=c_j^{n-1}$、$z=z^{n-1}$、$y=y^{n-1}$ 等。由于 $\varepsilon_{n-1}<|s|\le\varepsilon_n$ 且 $\rho(z_0^n)=\rho(\tilde{z}_0^n)$，我们可以利用引理 20，结合 z_0^n 和 $\tilde{z}_0^n$，推出以下结论：

(a') $c_{r(z^n)}=\tilde{c}_{r(\tilde{z}^n)}=c_{r(z^n)+|\sigma_{n-1}(z_0^n)|}-|\tau_n(z_0^n)|=\tilde{c}_{r(\tilde{z}^n)+|\sigma_{n-1}(\tilde{z}_0^n)|}-|\tau_n(\tilde{z}_0^n)|$.

(b') $y_{r(z^n)}=\tilde{y}_{r(\tilde{z}^n)}=y_{r(z^n)+|\sigma_{n-1}(z_0^n)|}=\tilde{y}_{r(\tilde{z}^n)+|\sigma_{n-1}(\tilde{z}_0^n)|}$.

条目 (b') 根据 (130) 表明，命题的条目 (b) 对 $j=n-1$ 成立。此外，由于 $|s|>\varepsilon_{n-1}$，r 的定义确保 $z_0=y_{r(z^n)}\in\mathcal{C}_{n-1,\mathrm{ap}}$，因此命题的条目 (c) 成立。对于条目 (a)，注意到由于 $q_{n,n}\equiv 0$，q_{n-1} 的定义确保 n $q_{n-1,n}(z^n)=c_{r(z^n)}$，$q_{n-1,n}(\tilde{z}^n)=\tilde{c}_{r(\tilde{c}^n)}$，$q_{n-1,n}(Sz^n)=c_{r(z^n)+|\sigma_{n-1}(z_0^n)|}-|\tau_n(z_0^n)|$，以及 $q_{n-1,n}(S\tilde{z}^n)=\tilde{c}_{r(\tilde{z}^n)+|\sigma_{n-1}(\tilde{z}_0^n)|}\dashv\tau_n(\tilde{z}_0^n)|$。因此，命题的条目 (a) 可由条目 (a') 推出。

现在我们假设 $j\in[0,n-1)$，并且该结论对 $j+1$ 成立。归纳假设的条目 (c') 确保了

$$z_0^{j+1},\tilde{z}_0^{j+1}\in\mathcal{C}_{j+1,\mathrm{ap}}\text{ and }\psi(z^{j+1})=\psi(\tilde{z}^{j+1}).\tag{133}$$

然后，根据 r_j 的定义和 (130)，$z_0^j = y^j_{r_j(z^{j+1})} \in \mathcal{C}_{j,\mathrm{ap}}$ 以及 $\tilde{z}_0^j \in \mathcal{C}_{j,\mathrm{ap}}$。方程 (133) 还允许我们将引理 19 应用于 z^{j+1} 和 $\tilde{z}^{j+1}$，从而推导出以下结论：

(a') $c^j_{r_j(z^{j+1})} = \tilde{c}^j_{r_j(\tilde{z}^{j+1})}$.

(b') $\psi(S^{r_j(z^{j+1})}y^j) = \psi(S^{r_j(\tilde{z}^{j+1})}\tilde{y}^j)$.

方程 (130) 确保条目 (b') 等价于 $\psi(z^j) = \psi(\tilde{z}^j)$。现在，将条目 (a') 和归纳假设中的条目 (a) 代入$q_{j,\ n}$ 得到

$$q_{j,n}(z^n) = q_{j+1,n}(z_0^n) + c^j_{r_j(z^{j+1})} = q_{j+1,n}(\tilde{z}_0^n) + \tilde{c}^j_{r_j(\tilde{z}^{j+1})} = q_{j,n}(\tilde{z}^n).$$

类似的论证依赖于对 $S^{|\sigma_{[j+1,n)}(z_0^n)|}z^{j+1}$ 和$S^{|\sigma_{[j+1,n)}(\tilde{z}_0^n)|}\tilde{z}^{j+1}$ 使用引理 19，可得 $z^j_{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|}$, $\tilde{z}^j_{|\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}^n)|} \in \mathcal{C}_{j,\mathrm{ap}}$, $\psi(S^{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|}z^j) = \psi(S^{|\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}^n)|}\tilde{z}^j)$ 和 $q_{j,n}(Sz^n) = q_{j,n}(S\tilde{z}^n)$】【。

为了完成证明，只需证明 $\psi(z^j) = \psi(S^{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|}z^j)$ 和 $q_{j,n}(z^n) = q_{j,n}(Sz^n)$。我们注意到，归纳假设中的条目 (b) 保证了 $\psi(z^{j+1}) = \psi(S^{|\sigma_{[j+1,n)}(z_0^n)|}z^{j+1})$。由于我们知道 z_0^{j+1} 和 $z^{j+1}_{|\sigma_{[j+1,n)}(z_0^n)|}$ 属于 $\mathcal{C}_{j+1,\mathrm{ap}}$，因此可以利用引理 19，取 z^{j+1} 和 $S^{|\sigma_{[j+1,n)}(z_0^n)|}z^{j+1}$，得到如下结果：

(a") $c^j_{r_j(z^{j+1})} = c^j_{r_j(z^{j+1})+|\sigma_{[j,n)}(z_0^n)|} - |\tau_{j+1}\sigma_{[j+1,n)}(z_0^n)|$.

(b") $\psi(S^{r_j(z^{j+1})}y^j) = \psi(S^{r_j(z^{j+1})+|\sigma_{[j,n)}(z_0^n)|}y^j)$.

条目 (b") 根据 (130) 可推出 $\psi(z^j) = \psi(S^{|\sigma_{[j,n)}(z_0^n)|}z^j)$。此外，利用$q_{j+1}$的定义$_{,n}$ 以及条目 (a")，我们可以写成

$$\begin{aligned} q_{j,n}(Sz^n) - q_{j+1,n}(Sz^n) &= c^j_{r_j(z^{j+1})+|\sigma_{[j,n)}(z_0^n)|} - |\tau_{j+1}\sigma_{[j+1,n)}(z_0^n)| \\ &= c^j_{r_j(z^{j+1})} = q_{j,n}(z^n) - q_{j+1,n}(z^n). \end{aligned}$$

由此以及归纳假设的条目 (a) 可得 $q_{j,n}(Sz^n) = q_{j,n}(z^n)$。

□

引理 48。设 $\rho(z_0^n) = \rho(\tilde{z}_0^n)$ 且 $|s| \le \varepsilon_{n-1}$。令 $j_0 \in [0,n)$ 为满足 $|s| \le \varepsilon_{j_0}$ 的最小元素。那么，对于每个 $j \in [j_0, n]$，以下结论成立：

(a) 存在 s_j使得 $|s_j| = |s|$且 $s_j =$根 $\tau_j(z_k^j) =$根 $\tau_j(\tilde{z}_\ell^j)$ 对所有$k \in [0, |\sigma_{[j,n)}(z_0^n)|)$ 和 $\ell \in [0, |\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}_0^n)|)$ 都成立。(b) $q_{j,n}(z^n) = q_{j,n}(\tilde{z}^n) = q_{j,n}(Sz^n) = q_{j,n}(S\tilde{z}^n)$（模 $|s|$）。(c) $\psi(z^j) = \psi(\tilde{z}^j)$ 且 $\psi(S^{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|}z^j) = \psi(S^{|\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}^n)|}\tilde{z}^j)$。

证明。情形 $j = n$ 直接由假设得出。假设 $j \in [j_0, n)$，并且该结论对 $j+1$ 成立。我们注意到，根据归纳假设的条目 (a) 和 (c)，$z^{j+1}_{[0,|\sigma_{[j,n)}(z_0^n)|)}$ 以及 $\tilde{z}^{j+1}_{[0,|\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}_0^n)|)}$ 满足引理 21 的假设。因此，由 (130) 可知，条目 (a) 和 (c) 对 j 成立。此外，我们有

$$c^j_{r_j(y^{j+1})} = \tilde{c}^j_{r_j(\tilde{y}^{j+1})} = c^j_{r_j(y^{j+1})+|\sigma_{[j,n)}(z_0^n)|} = \tilde{c}^j_{r_j(\tilde{y}^{j+1})+|\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}_0^n)|} \pmod{|s|}. \tag{134}$$

现在，归纳假设的条目 (b) 给出 $q_{j+1,n}(z^n) = q_{j+1,n}(\tilde{z}^n) = q_{j+1,n}(Sz^n) = q_{j+1,n}(S\tilde{z}^n) \pmod{|s|}$。因此，根据 $q_{j,n}$ 的定义，

$$q_{j,n}(z^n) = q_{j+1,n}(z^n) + c^j_{r_j(y^{j+1})} = q_{j+1,n}(\tilde{z}^n) + c^j_{r_j(\tilde{y}^{j+1})} = q_{j,n}(\tilde{z}^n) \pmod{|s|}.$$

注意，由于条目 (a) 对 j 成立，因此我们有 $|\tau(z^j_{[0,|\sigma_{[j,n)}(z_0^n)|)})| = 0 \pmod{|s|}$。因此，根据 $q_{j,n}$ 的定义，

$$\begin{aligned} q_{j,n}(Sz^n) - q_{j+1,n}(Sz^n) &= c^j_{r_j(y^{j+1})+|\sigma_{[j,n)}(z_0^n)|} - |\sigma_{[j,n)}(z_0^n)| \\ &= c^j_{r_j(y^{j+1})+|\sigma_{[j,n)}(z_0^n)|} \pmod{|s|} \end{aligned}$$

因此，由 (134) 和归纳假设的条目 (b)，$q_{j,n}(Sz^n) = q_{j,n}(z^n)$。类似地，$q_{j,n}(S\tilde{z}^n) = q_{j,n}(\tilde{z}^n)$。由此得出，条目 (b) 对 j 成立。 □

引理 44 证明的最后一个要点是下面这个引理。

引理 49。假设 $\psi(z^n) = \psi(\tilde{z}^n)$。

(1) 若 $z_0^n \in \mathcal{C}_{n,\mathrm{ap}}$, $q_{0,n}(z^n) = q_{0,n}(\tilde{z}^n)$ 且 $q_{0,n}(Sz^n) = q_{0,n}(S\tilde{z}^n)$，则 $\sigma_{[0,n)}(z_0^n) = \sigma_{[0,n)}(\tilde{z}_0^n)$。(2) 设 $s = \mathrm{root}\,\tau_n(z_0^n)$，并假设 $|s| \le \varepsilon_n$ and $q_{0,n}(z^n) = q_{0,n}(\tilde{z}^n) = q_{0,n}(z^n) = q_{0,n}(\tilde{z}^n) \pmod{|s|}$。那么，$\mathrm{root}^{\sigma_{[0,n)}}(z_0^n) = \mathrm{root}^{\sigma_{[0,n)}}(\tilde{z}_0^n)$。

证明。假设条目 (1) 的假设成立。不失一般性，我们还假设 $|\tau_n(z_1^n)| \le |\tau_n(\tilde{z}_1^n)|$。首先注意到，由于 $z_0^n \in \mathcal{C}_{n,\,\mathrm{ap}}$ 且 $\psi(z^n) = \psi(\tilde{z}^n)$，我们有 $\tau_n(z_0^n)$ 等于 $\tau_n(\tilde{z}_0^n)$。此外，由条件 (ii) 可知

$$\tau_n(z^n)_{[-8\varepsilon_n, |\tau_n(z_0^n z_1^n)|)} = \tau_n(\tilde{z}^n)_{[-8\varepsilon_n, |\tau_n(z_0^n z_1^n)|)}. \tag{135}$$

现在，根据引理 42 和假设，我们得到

$$\begin{aligned} q_{0,n}(\tilde{z}^n) = q_{0,n}(z^n) &\in [-2\varepsilon_n, |\tau_n(z_0^n)| - 7\varepsilon_n) \\ \text{and } q_{0,n}(S\tilde{z}^n) = q_{0,n}(Sz^n) &\in [|\tau_n(z_0^n)| - 2\varepsilon_n, |\tau_n(z_0^n z_1^n)| - 7\varepsilon_n). \end{aligned}$$

由此，我们利用（135）得出

$$\begin{aligned} \sigma_{[0,n)}(z_0^n) &= \tau_n(z^n)_{[q_{0,n}(z^n), |\tau_n(z_0^n)|+q_{0,n}(Sz^n))} \\ &= \tau_n(\tilde{z}^n)_{[q_{0,n}(\tilde{z}^n), |\tau_n(\tilde{z}_0^n)|+q_{0,n}(S\tilde{z}^n))} = \sigma_{[0,n)}(\tilde{z}_0^n). \end{aligned}$$

接下来，我们假设条目（2）的假设成立。条件 $|s| \le \varepsilon_n$ 使我们能够应用引理 42 中的（126），因此

$$q_{0,n}(z^n) \in [-2\varepsilon_n, 2\varepsilon_n).$$

此外，由于 $|s| \le \varepsilon_n$，命题 15 的第 (3) 项保证

$$\tau_n(z^n)_{[-8\varepsilon_n, |\tau_n(z_0^n)|+8\varepsilon_n)} = s^{\mathbb{Z}}_{[-8\varepsilon_n, |\tau_n(z_0^n)|+8\varepsilon_n)}.$$

因此，

$$\sigma_{[0,n)}(z_0^n) = s^{\mathbb{Z}}_{[q_{0,n}(z^n), |\tau_n(z_0^n)|+q_{0,n}(Sz^n))}. \tag{136}$$

现在，根据假设，存在 $k \in \mathbb{Z}$，使得$k = q_{0,n}(z^n) = q_{0,n}(Sz^n)$（模 $|s|$）。由 (136) 可推得

$$\mathsf{root}\, \sigma_{[0,n)}(z_0^n) = s_{[k,k+|s|)}.$$

由于 $\psi(z^n)$ 等于 $\psi(\tilde{z}^n)$，我们有 $s =$ 根 $\tau_n(\tilde{z}_0^n)$。因此，我们可以用类似的论证证明 $\mathsf{root}^{\sigma_{[0,n)}}(\tilde{z}_0^n) = s_{[\tilde{k},\tilde{k}+|s|)}$，其中 $k = q_{0,n}(\tilde{z}^n) = q_{0,n}(S\tilde{z}^n)$（模 $|s|$）。由于假设保证了$k = k$（模 $|s|$），我们得出结论：$\mathsf{root}^{\sigma_{[0,n)}}(z_0^n) = \mathsf{root}^{\sigma_{[0,n)}}(\tilde{z}_0^n)$。

□

证明引理 44 所需的要素现已齐备。

引理 44 的证明。设 z'、$\tilde{z}' \in Z_n$ 满足 $\psi(z') = \psi(\tilde{z}')$，并设 $s =$ 是 $\tau(z'_0)$ 的根，$=$ 是 $\tau(\tilde{z}'_0)$ 的根。我们将证明分为两种情况。首先假设 $|s| > \varepsilon_n$。那么，我们可以使用引理 46 并推得 $q_{0,n}(z^n) = q_{0,n}(\tilde{z}^n)$ 和 $q_{0,n}(Sz^n) = q_{0,n}(S\tilde{z}^n)$。因此，由引理 49 可得 $\sigma_{[0,n)}(z_0^n) = \sigma_{[0,n)}(\tilde{z}_0^n)$，这意味着 $\sigma_{[0,n)}(z_0^n)$ 是 $=$ 的根$\sigma_{[0,n)}(\tilde{z}_0^n)$。

接下来，我们假设 $|s| \le \varepsilon_n$。设 $j \in [0, n]$ 是满足$|s| \le \varepsilon_j$的最小元素。我们声称以下结论成立：

(a) 如果 $j < n$，那么根 $\tau_j(z^j)$ 等于根$\tau_j(S^{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|-1}z^j)$，且长度为$|s|$。(b) $q_{j,n}(z^n) = q_{j,n}(\tilde{z}^n) = q_{j,n}(Sz^n) = q_{j,n}(S\tilde{z}^n)$（模 $|s|$）。(c) $\psi(z^j) = \psi(\tilde{z}^j)$，且 $\psi(S^{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|}z^j) = \psi(S^{|\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}^n)|}\tilde{z}^j)$。

如果 $j = n$，那么该断言等价于假设 $\psi(z') = \psi(\tilde{z}')$。我们假设 $j < n$。那么，$|s| \le \varepsilon_{n-1}$，这使得可以使用引理 48，并得出该断言的条目 (b) 和 (c) 成立。此外，引理 48 还指出，存在 t，使得对于所有$k \in [0, |\sigma_{[j,n)}(z_0^n)|)$ 和 $\ell \in [0, |\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}_0^n)|)$，$|t| = |s|$ 和 $t =$ 根 $\tau_j(z_k^j) =$ 根 $\tau_j(\tilde{z}_\ell^j)$。特别地，条目 (a) 成立。这就完成了该断言的证明。

接下来，我们证明

$$q_{0,n}(z^n) = q_{0,n}(\tilde{z}^n) = q_{0,n}(Sz^n) = q_{0,n}(S\tilde{z}^n) \pmod{|s|} \tag{137}$$

若 $j = 0$，则 (137) 可由该断言推出。假设 $j > 0$。那么，$\varepsilon_{j-1} < |s| \le \varepsilon_j$。这与该断言的条目 (a) 和 (c) 使我们可以使用引理。

47 两次，第一次使用 z^j 和 $\tilde{z}^j$，然后使用 $S^{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|-1}z^j$ 和 $S^{|\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}^n)|-1}\tilde{z}^j$。我们得到

$$q_{0,j}(z^j) = q_{0,j}(\tilde{z}^j). \text{ and } q_{0,j}(S^{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|}z^j) = q_{0,j}(S^{|\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}^n)|}\tilde{z}^j).$$

此外，由于根 $\tau_j(z^j)$ 等于根 $\tau_j(S^{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|-1}z^j)$，且长度为 $|s| \le \varepsilon_j$，我们可以对 z^j 和 $S^{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|-1}z^j$ 使用引理 47，从而得到 $q_{0,\ j}(z^j) = q_{0,\ j}(S^{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|}z^j)$。因此，

$$q_{0,j}(z^j) = q_{0,j}(\tilde{z}^j) = q_{0,j}(S^{|\sigma_{[j,n)}(z^n)|}z^j) = q_{0,j}(S^{|\sigma_{[j,n)}(\tilde{z}^n)|}\tilde{z}^j). \tag{138}$$

现在，根据 $q_{0,\ n}$ 的定义，我们有 $q_{0,\ n}(z^n) = q_{j,\ n}(z^n) + q_{0,\ j}(z^j)$ 和 $q_{0,\ n}(\tilde{z}^n) = q_{j,\ n}(\tilde{z}^n) + q_{0,\ j}(\tilde{z}^j)$。将 (138) 和该论断的条目 (b) 代入此关系，得到 $q_{0,\ n}(z^n) = q_{0,\ n}(\tilde{z}^n)$（模 $|s|$）。(137) 中其余等式也可用同样的方法，由 (138) 和该论断的条目 (b) 得出。(137) 的证明完毕。

我们回顾一下，我们假设 $\psi(z^n) = \psi(\tilde{z}^n)$ 且 $|s| \le \varepsilon_n$。这两点以及 (137) 使我们可以使用引理 49，并得出根$^{\sigma_{[0,n)}}(z_0^n)$ =根$^{\sigma_{[0,n)}}(\tilde{z}_0^n)$。

□

9.2 主要定理的证明

引理 50. 设 X 为一个子移位，$\mathcal{W}$ 为一个词集合，满足 $X \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k\mathcal{W}^{\mathbb{Z}}$。那么，$p_X(\langle\mathcal{W}\rangle) \le |\mathcal{W}| \cdot \#(\text{根 } \mathcal{W})^2$。

证明。该假设意味着，任何长度为 $\langle\mathcal{W}\rangle$ 、出现在某个$x \in X$ 中的 w ，都会出现在一个形如 uv 的词中，其中 $u, v \in \mathcal{W}$。特别地，w 出现在 (根 u)$^{|\mathcal{W}|}$(根 v)$^{|\mathcal{W}|}$ 中。满足这一条件的词至多有 $|\mathcal{W}| \cdot \#(\text{根 } \mathcal{W})^2$ 个，因此 $p_X(\langle\mathcal{W}\rangle) \le |\mathcal{W}| \cdot \#(\text{根 } \mathcal{W})^2$。 □

定理 6. 极小子移位 X 具有线性增长复杂度，即

$$\limsup_{n\to+\infty} p_X(n)/n < +\infty,$$

当且仅当存在 $d \ge 1$ 和一个 $\mathcal{S}$-进制序列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n\colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)_{n\ge 0}$，使得对每个 $n \ge 0$:

($\mathcal{P}_1$) $\#(\text{root}^{\sigma_{[0,n)}}(\mathcal{A}_n)) \le d$. ($\mathcal{P}_2$) $|\sigma_{[0,n)}(a)| \le d \cdot |\sigma_{[0,n)}(b)|$ 对每个 $a, b \in \mathcal{A}_n$. ($\mathcal{P}_3$) $|\sigma_{n-1}(a)| \le d$ 对每个 $a \in \mathcal{A}_n$。

若 X 是无限的且具有线性增长复杂度，则可以将 $\boldsymbol{\sigma}$ 选为可识别的，并满足对所有 $n \ge 0$，$\#\mathcal{A}_n \le d \cdot$ 幂复杂度$(X)^4$。

定理 7. 极小子移位 X 具有非超线性增长复杂度，即

$$\liminf_{n\to+\infty} p_X(n)/n < +\infty,$$

当且仅当存在 $d \ge 1$ 以及一个 $\mathcal{S}$-进序列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n\colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)_{n\ge 0}$，使得对于每个 $n \ge 0$

$(\mathcal{P}_1)$ #(根$^{\sigma_{[0,n)}}(\mathcal{A}_n)) \le d$。

$(\mathcal{P}_2)$ $|\sigma_{[0,n)}(a)| \le d \cdot |\sigma_{[0,n)}(b)|$ 对于每个 $a, b \in \mathcal{A}_n$。

如果 X 是无限的且具有非超线性增长复杂度，那么可以将 $\boldsymbol{\sigma}$ 选为可识别的，并且满足对所有 $n \ge 0$，#$\mathcal{A}_n \le d \cdot$幂复杂度$(X)^4$。

我们同时证明定理 6 和定理 7。

定理 6 和定理 7 的证明。令 $d = \liminf_{k\to+\infty} p_X(k)/k$，且 $d' = \sup^{k\ge 0} p_X(k)/k$。

我们首先假设 p_X 具有非超线性增长或线性增长，并证明存在一个 $\mathcal{S}$进制序列，分别如定理 6 和定理 7 中所述。

如果 p_X 具有非超线性增长，那么 d 是有限的，因此利用引理5，我们得到一个序列 $(\ell_n)^{n\ge 0}$，使得对所有 $n \ge 0$

$$\ell_{n+1} \ge d\ell_n,\ p_X(\ell_n) \le d\ell_n \text{ and } p_X(\ell_n + 1) - p_X(\ell_n) \le d. \tag{139}$$

如果 p_X 具有线性增长，那么 d' 是有限的，并且利用引理 4，我们得到一个满足 (139) 和的序列 $(\ell_n)^{n\ge 0}$。

$$\ell_{n+1} \le d'\ell_n \text{ for every } n \ge 0. \tag{140}$$

我们使用定理5和序列 $(\ell_n)^{n\ge 0}$。这会生成一个可识别的$\mathcal{S}$进序列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n\colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)^{n\ge 0}$，其生成的 X 满足对每个$n \ge 1$:

$(\mathcal{P}_1')$ #(根$^{\sigma_{[0,n)}}(\mathcal{A}_n)) \le d$ 和 #$\mathcal{A}_n \le$ 幂复杂度(X) .

$(\mathcal{P}_2')$ $|\sigma_{[0,n)}(a)| \le d \cdot |\sigma_{[0,n)}(b)|$ 对于每个 $a, b \in \mathcal{A}_n$.

$(\mathcal{P}_3')$ $|\sigma_{n-1}(a)| \le d\ell_n/\ell_{n-1}$ 对于每个 $a \in \mathcal{A}_n$.

特别地，定理 7 的结论成立。此外，如果 p_X 具有线性增长，那么方程（140）成立，因此对于每个 $n \ge 1$ 和 $a \in \mathcal{A}_n$，我们还有界 $|\sigma_{n-1}(a)| \le dd'$。因此，在这种情形下，$\sigma$ 满足定理 6 的结论。

现在假设存在一个 $\mathcal{S}$-进序列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n\colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)^{n\ge 0}$，满足定理 7 或定理 6 的结论。

注意，由于 $\boldsymbol{\sigma}$ 生成 X，我们有

$$X \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k \sigma_{[0,n)}(\mathcal{A}_n^{\mathbb{Z}})$$

对于任意 $n \ge 1$，均成立。因此，根据引理 50，$p_X(\langle\sigma_{[0,n)}\rangle)$ 至多为 $|\sigma_{[0,n)}|$#(根$^{\sigma_{[0,n)}}$($\mathcal{A}_n$))^2。定理 7 和定理 6 的条目（$\mathcal{P}_1$）及（$\mathcal{P}_2$）随即推出

$$p_X(\langle\sigma_{[0,n)}\rangle) \le d^3\langle\sigma_{[0,n)}\rangle \text{ for all } n \ge 1. \tag{141}$$

这证明了 X 具有非超线性增长复杂度。

尚需证明，在定理 6 的结论成立时，X 具有线性增长复杂度。我们假设 $\boldsymbol{\sigma}$ 满足定理 6 的条目（$\mathcal{P}_1$）、（$\mathcal{P}_2$）和（$\mathcal{P}_3$），

定理 6。令 $k \geq 1$ 为任意对象，并令 $n \geq 1$ 为满足 $\langle \sigma_{[0,n)} \rangle \leq k$的最大整数。那么，根据 n的极大性以及定理 6 的条目（$\mathcal{P}_2$）和（$\mathcal{P}_3$），我们可以计算

$$k < \langle \sigma_{[0,n+1)} \rangle \leq |\sigma_{[0,n)}| \cdot |\sigma_n| \leq d^2 \langle \sigma_{[0,n)} \rangle \leq d^2 k.$$

将此与 (141) 结合可得 $p_X(k) \leq d^5 k$。这证明 X 具有线性增长复杂度。

□

10 有界字母表结构

定理 6 和定理 7 为线性增长复杂度子移位和非超线性增长复杂度子移位提供了 $\mathcal{S}$-进结构。这些类并非只有这些已知的表示形式：例如，在 [DDMP21] 中，已证明，如果 X 具有非超线性增长复杂度，那么 X 由一个可识别的、适当的且本原的 $\mathcal{S}$-进序列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n \colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)_{n \geq 0}$ 生成，并且满足 $\#\mathcal{A}_n$ 一致有界。最后一个条件称为有界字母表性质，在低复杂度背景下被认为是自然的；参见 [Fer96; DLR13; Esp22]。请注意，定理 6 和定理 7 给出的表示不一定满足这一性质。事实上，当且仅当子移位具有有限幂复杂度时，我们的构造才会给出一个具有有界字母表的 $\mathcal{S}$-进序列。因此，自然会产生这样一个问题：是否可以对定理 6 和定理 7 进行修改，使其能够给出具有有界字母表的 $\mathcal{S}$-进序列？在本节中，我们证明，对于定理 6 而言，这种加强是不可能的。更准确地说，我们证明以下结论：

定理 8. 存在一个极小子移位 X，使得：

(1) X 具有线性增长复杂度。(2) 如果 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n \colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)_{n \geq 0}$ 是一个生成 X 并满足定理 6 中条目 (1)、(2) 和 (3) 的 $\mathcal{S}$-进制序列，那么 $\sup_{n \geq 1} \#\mathcal{A}_n = +\infty$。

我们未能为定理 7 得到类似的结果，因此将其留作一个开放问题。

将定理 8 与 [Ler14], 的主要结果进行比较很有意思，该结果描述了复杂度函数满足 $p_X(n+1) - p_X(n) \leq 2$（对所有 $n \geq 1$）的极小子移位的有界字母表 $\mathcal{S}$-进表示。这促使我们提出以下问题。

问题 2. 在定理 8 中，$\sup_{n \geq 1} p_X(n+1) - p_X(n)$ 最多可以变得多小？

现在我们转而证明定理 8。首先介绍一些技术引理。

设 $n, n_0, d, \ell \geq 1$。我们将 $P(n, n_0, \ell)$ 定义为满足 $p_j n_0 \in [8^j n, 2 \cdot 8^j n)$ 的整数序列 $(p_1, \ldots, p_\ell)$ 的集合。令 $K(n, d, \ell)$ 为整数序列 $(k_1, \ldots, k_\ell) \in P(n, n_0, \ell)$ 的集合，其中存在 $E \subseteq [d^{-1}n, dn)$，其元素至多有 d 个，使得每个 k_j 都可写成 $\sum_{e \in E} \alpha_e e$，其中$\alpha_e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。

引理 51。假设 $n > n_0^3$, $n > \ell^{18\ell^2}$ 和 $\ell > 3d > 8$。那么， $P(n, n_0, \ell)\backslash K(n, d, \ell)$ 非空。

证明。我们将证明 $\#P(n, n_0, \ell) > K(n, d, \ell)$，这意味着 $P(n, n_0, \ell)\backslash K(n, d, \ell)$ 非空。我们首先估计 $\#P(n, n_0, \ell)$。注意，在序列 $(p_1, \dots, p_\ell) \in P(n, n_0, \ell)$ 中选择 p_j 至少有 $(2\cdot 8^j n - 8^j n)/n_0$ 种方式。因此，

$$\#P(n, n_0, \ell) \geq \prod_{j=1}^{\ell} 8^j n/n_0 \geq (n/n_0)^\ell. \tag{142}$$

接下来，我们估计 $\#K(n, d, \ell)$。选择一个至多包含 d 个元素的集合 $E \subseteq [d^{-1}n, dn)$，最多可以有 $(dn - d^{-1}n)^d \leq (dn)^d$ 种不同方式。对于每个集合 E 和 $j \in [1, d]$，$[8^j n, 2\cdot 8^j n)$ 中的数 $\sum_{e\in E} \alpha_e e$ 至多有 $(2\cdot 8^j n/d^{-1}n)^d$ 个。因此，每个 E 至多生成 $(2d\cdot 8^1)^d \cdot (2d\cdot 8^2)^d \dots (2d\cdot 8^\ell)^d$ 个序列 $(k_1, \dots, k_\ell) \in K(n, d, \ell)$。因此，

$$\begin{aligned}\#K(n, d, \ell) &\leq (dn)^d \cdot (2d\cdot 8^1)\cdot(2d\cdot 8^2)\dots(2d\cdot 8^\ell) \\ &\leq d^{2d} n^d 2^\ell 8^{(\ell+2)^2} \leq n^d \ell^{6\ell^2}, \end{aligned} \tag{143}$$

这里我们用到了 $\ell > 3d > 8$。

现在，由于我们假设 $n > n_0^3$，因此有 $(n/n_0)^\ell > n^{2\ell/3}$。因此，由于该假设保证 $\ell > 3d$ 和 $n > \ell^{18\ell^2}$，

$$(n/n_0)^\ell > n^d n^{\ell/3} > n^d \ell^{6\ell^2}.$$

这以及方程（142）和（143）意味着 $P(n, n_0, \ell)\backslash K(n, d, \ell)$ 非空。

□

引理52. 设 $(\ell_n)_{n\geq 0}$ 是一个正整数序列。对于每个 $n \geq 0$、 $k_n \geq 1$ 以及满足 $p_j^n \in [8^j k_n, 2\cdot 8^j k_n)$ 的序列 $(p_1^n, \dots, p_{\ell_n}^n)$，我们进行考虑。对于 $a \in \{0, 1\}$ 和 $\bar{a} = 1 - a$，定义

$$\tau_n(a) = a^{p_1^n} \bar{a}^{p_1^n} a^{p_2^n} \bar{a}^{p_2^n} \dots a^{p_{\ell_n}^n} \bar{a}^{p_{\ell_n}^n}. \tag{144}$$

并且 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_n)_{n\geq 0}$。那么：

(1) $X_{\boldsymbol{\tau}}$ 是无限的、极小的，且具有线性增长复杂度。

(2) $|\tau_{[0,n)}(0)| = |\tau_{[0,n)}(1)|$。 （3）$(X_{\boldsymbol{\tau}}^{(n)}, \tau_{[0,n)})$ 是 $|\tau_{[0,n)}|$-可识别的。 （4）对于所有 $j \in [1, \ell_n]$， $10^{p_j^n} 1 \in \mathcal{L}(X_{\boldsymbol{\tau}}^{(n)})$。

证明。设 $\mathcal{A} = \{0, 1\}$。对于 $a \in \mathcal{A}$、 $n \geq 0$ 和 $j \in [1, \ell_n]$，我们使用记号 $w_{n,j}(a) = \tau_{[0,n)}(a)^{p_j^n}$ 和

$$W_{n,j}(a) = w_{n,1}(a)w_{n,1}(\bar{a})\dots w_{n,2}(a)w_{n,2}(\bar{a})\dots w_{n,j}(a)w_{n,j}(\bar{a}). \tag{145}$$

注意，$W_{n,\ell_n}(a) = \tau_{[0,n+1)}(a)$。

我们首先证明态射 τ_n 的以下性质。

(i) 对所有 $n \geq 0$ 和 $j \in [1, \ell_n]$, $|w_{n,\,j}(0)| = |w_{n,\,j}(1)|$ 以及 $|W_{n,\,j}(0)| = |W_{n,\,j}(1)|$。
(ii) $8^j k_n |\tau_{[0,n)}| \leq |w_{n\,j}\ a\ | \leq 2 \cdot 8^j k_n |\tau_{[0,n)}|$ $\quad 2 \cdot 8^j k_n |\tau_{[0,n)}| \leq |W_{n\,j}\ a\ | < 8^{j+1} k_n |\tau_{[0,n)}|$。
(iii) 如果 $n \geq 0$、a、$b \in \mathcal{A}$ 和 t 是一个词，使得 $|t| \geq |\tau_n|/2$、t 是 $\tau_n(a)$ 的前缀，且 t 是 $\tau_n(b)$ 的后缀，那么 $\tau_n(a) = \tau_n(b) = t$。

条目 (i) 可直接由 (144) 得出。在条目 (ii) 中，第一个不等式是由等式 $|w_{n,\,j}(a)| = p_j^n |\tau_{[0,n)}|$ 以及根据假设 $p_j^n \in [8^j k_n, 2 \cdot 8^j k_n)$ 得出的。我们可以用它来计算 $|W_{n,\,j}(a)| \geq 2|w_{n,\,j}(a)| \geq 2 \cdot 8^j k_n |\tau_{[0,n)}|$ 和

$$|W_{n,j}(a)| = \sum_{i=1}^{j} |w_{n,j}(a) w_{n,j}(\bar{a})| \leq 2 \sum_{i=1}^{j} 2 \cdot 8^i k_n |\tau_{[0,n)}| < 8^{j+1} k_n |\tau_{[0,n)}|,$$

这表明了 (ii) 中的第二个不等式。最后，我们证明条目 (iii)。注意到 (145) 意味着 $|\tau_{[0,n+1)}| = |W_{n,\,\ell_n}(0)| \geq 2|w_{n,\,\ell_n}(0)|$。因此，由于 (i) 保证了 $|\tau_{[0,n)}(0)| = |\tau_{[0,n)}(1)|$，

$$|\tau_n| = |\tau_{[0,n+1)}|/|\tau_{[0,n)}| \geq 2|w_{n,\ell_n}(a)|/|\tau_{[0,n)}| = 2|a^{p^n_{\ell_n}}|,$$

这使我们能够对 $|t| \geq |\tau_n|/2 \geq |a^{p^n_{\ell_n}}|$ 作出界定。由于 t 是 $\tau_n(a)$ 的后缀，这意味着 $a^{p^n_{\ell_n}}$ 是 t 的后缀。此外，由于 t 是 $\tau_n(b)$ 的前缀，$a^{p^n_{\ell_n}}$ 出现在 $\tau_n(b)$ 中。但 (144) 保证 $a^{p^n_{\ell_n}}$ 在 $\tau_n(b)$ 中仅作为后缀出现，因此必有 $t = \tau_n(b)$。因此，$\tau_n(a) = \tau_n(b) = t$。

现在我们证明 $\boldsymbol{\tau}$ 满足引理的性质。态射 τ_n 是正的，因此 X 是极小的。由（144）可知，对于所有 $n \geq 0$，$0^{p_1^n}1$ 和 $0^{p_0^n}0$ 都属于 $\mathcal{L}(X_{\boldsymbol{\tau}}^{(n)})$，因此 $\tau_{[0,n)}(0)1$ 和 $\tau_{[0,n)}(0)0$ 是 $\mathcal{L}(X)$ 的元素。这表明 X 有无穷多个右特殊词，从而 X 是无限的。为了证明 X 具有线性增长复杂度，我们将证明对于所有 $k \geq 1$，$p_X(k) \leq 1024k$。令 $k \geq 1$ 为任意对象。我们取 $n \geq 0$ 使得 $|\tau_{[0,n)}| \leq k < |\tau_{[0,n+1)}|$。我们考虑三种情形。首先假设 $k \lhd w_n 1(0)|$。那么，由（144）可知，任意 $w \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{A}^k$ 都会出现在形如 $w_n 1(a) w_n 1(b)$ 的词中，其中 $a, b \in \mathcal{A}$。由于对于任意 $a \in \mathcal{A}$，$|w| \geq |\tau_{[0,n)}(a)|$ 且 $w_n 1(a) = \tau_{[0,n)}(a)^{p_1^n}$，这意味着 $p_X(k) \leq \#\mathcal{A}^2 \cdot k = 4k$。

现在假设 $|w_{n,\,1}(0)| \leq k < |W_{n,\,\ell_n - 1}(0)|$。令 $j \in [1, \ell_n - 1]$ 为满足 $k < |W_{n,\,j}(0)|$ 的最小整数。于是，根据 (ii)，

$$k \leq |w_{i,n}(a)| = |\tau_{[0,n)}(0)^{p_i^n}| \text{ for all } i \in [j+1, \ell_n] \text{ and } a \in \mathcal{A}.$$

利用这一点、(144) 以及 $w_{n,i}(a)$ 的定义，我们可以推导出，任意 $w \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{A}^k$ 都出现在一个具有以下两种形式之一的词中：$W_{n,j}(a)\tau_{[0,n)}(b)^{p^n_{j+1}}$，或者 $\tau_{[0,n)}(a)^{p^n_{j+1}} \tau_{[0,n)}(b)^{p^n_{j+1}}$，其中 $a, b \in \mathcal{A}$。因此，

$$p_X(k) \leq \#\mathcal{A}^2 \cdot (|W_{n,j}(0)\tau_{[0,n)}(0)^{p^n_{j+1}}| + |\tau_{[0,n)}(0)^{p^n_{j+1}} \tau_{[0,n)}(0)^{p^n_{j+1}}|).$$

将该 $|W_{n,j}(0)| \le |\tau_{[0,n)}(0)^{p_{j+1}^n}|$ 代入最后一个不等式，得到

$$p_X(k) \le 16 p_{j+1}^n |\tau_{[0,n)}(0)| = 16|w_{n,j+1}(0)|.$$

现在，如果 $j=1$，那么根据 (ii)，$16|w_{n,2}(0)| \le 16 \cdot 16|w_{n,1}(0)| \le 256k$，因此 $p_X(k) \le 256k$。如果 $j>1$，那么 j 的极小性意味着 $k \ge |W_{n,j-1}(0)|$。因此，根据 (ii)，$16|w_{n,j+1}(0)| \le 16 \cdot 8^2 |W_{n,j}(0)| \le 1024k$，从而 $p_X(k) \le 1024k$。

最后，我们假设 $k \ge |W_{n,\ell_n-1}(0)|$。由于 $k < |\tau_{[0,n+1)}|$，任何 $w \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{A}^k$ 都出现在形如 $\tau_{[0,n+1)}(a)\tau_{[0,n+1)}(b)$ 的词中，其中 a，$b \in \mathcal{A}$。因此，$p_X(k) \le 4|\tau_{[0,n+1)}|$。此外，由于为 $|W_{n,\ell_n-1}(0)|$ 至多 k，根据 (ii) 可得 $4|\tau_{[0,n+1)}| = 4|W_{n,\ell_n}(0)| \le 8^2 |W_{n,\ell_n-1}(0)| \le 8^2 k$；因此，$p_X(k) \le 64k$。

我们得出，对于每个 $k \ge 1$，$p_X(k) \le 1024k$，并且 X 具有线性增长的复杂度。

引理中的条目（2）和（4）由（144）得出。因此，只需证明条目（3）。注意，由于 $|\tau_{[0,n)}| = |\tau_0| \cdots |\tau_{n-1}|$，根据引理 1，只需证明对于所有 $n \ge 0$，$(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \tau_n)$ 都是 $|\tau_n|$-可识别的。设 $x, \tilde{x} \in \mathcal{A}_n$ 和 (k,y)、$(\tilde{k}, \tilde{y})$ 分别是 τ_n 中 $x, \tilde{x}$ 的 τ_n-分解，并假设 $x_{[-|\tau_n|,|\tau_n|)}$ 等于 $\tilde{x}_{[-|\tau_n|,|\tau_n|)}$。不失一般性，假设 $\tilde{k} \le k$。有两种情况。若 $k - \tilde{k} \le |\tau_n|/2$，则 $x_{[-k,-\tilde{k}+|\tau_n|)}$ 的长度至少为 $|\tau_n|/2$，且是 $\tau_n(y_0)$ 的后缀。由于 $x_{[-|\tau_n|,|\tau_n|)} = \tilde{x}_{[-|\tau_n|,|\tau_n|)}$，我们还得到 $x_{[-k,-\tilde{k}+|\tau_n|)}$ 是 $\tau_n(\tilde{y}_1)$ 的前缀。利用（iii），我们推得 $\tau_n(y_0) = \tau_n(\tilde{y}_0) = x_{[-k,-\tilde{k}+|\tau_n|)}$，从而得到 $y_0 = \tilde{y}_0$。此外，由于 $k, \tilde{k} \in [0, |\tau_n|)$，$k = \tilde{k}$。现在假设 $k - \tilde{k} \ge |\tau_n|/2$。那么，$|x_{[-\tilde{k},-k)}| \ge |\tau_n|/2$，并且 $x_{[-\tilde{k},-k)}$ 既是 $\tau_n(\tilde{y}_{-1})$ 的后缀，也是 $\tau_n(y_0)$ 的前缀。因此，根据（iii），$\tau_n(\tilde{y}_{-1}) = \tau_n(y_0) = x_{[-k,-\tilde{k})}$，这不可能，因为 $k, \tilde{k} \in [0, |\tau_n|)$。我们得出，$(X_{\boldsymbol{\tau}}^{(n)}, \tau_n)$ 是 $|\tau_n|$-可识别的。 □

现在我们可以证明定理 8。

定理 8 的证明。设 $(\ell_n)_{n\ge 0}$ 和 $(d_n)_{n\ge 0}$ 是满足 $\ell_n > 3d_n > 8$ 的非递减发散整数序列。我们归纳定义 M_n、m_n、$(p_1^n, \dots, p_{\ell_n}^n)$ 以及 τ_n 如下。令 $m_0 = 1$ 和 M_0 满足 $M_0 > m_0^3$ 和 $M_0 > \ell_0^{18\ell_0^2}$。然后，我们可以使用引理5找到

$$(p_1^0, p_2^0, \dots, p_{\ell_0}^0) \in P(M_0, m_0, \ell_0) \setminus K(M_0, d_0, \ell_0).$$

我们按照（144）中的方式，使用 $(p_1^0, \dots, p_{\ell_0}^0)$ 定义 τ_0。现在假设 M_n、m_n、$(p_1^n, \dots, p_{\ell_n}^n)$ 以及 τ_n 已定义。我们令 $m_{n+1} = |\tau_{[0,n+1)}|$，并取 M_{n+1} 使得 $M_{n+1} > m_{n+1}^3$ 和 $M_{n+1} > \ell_{n+1}^{18\ell_{n+1}^2}$。然后，我们可以使用引理 144 找到

$$(p_0^{n+1}, p_1^{n+1}, \dots, p_{\ell_n}^{n+1})_{j=1}^{\ell_n} \in P(M_{n+1}, m_{n+1}, \ell_{n+1}) \setminus K(M_{n+1}, d_{n+1}, \ell_{n+1}) \tag{146}$$

并按照（144）中的定义，使用 $(p_1^{n+1}, \dots, p_{\ell_{n+1}}^{n+1})$ 定义 τ_{n+1}。

我们令 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_n)_{n\geq 0}$。那么，引理52中的条目（1）至（4）成立。特别地，$X_{\boldsymbol{\tau}}$ 是极小的，且具有线性增长复杂度。我们用矛盾法证明 $X_{\boldsymbol{\tau}}$ 满足该定理的结论。假设存在 d 和$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n\colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)_{n\geq 0}$，满足定理 6 的条目（1）、（2）和（3），并且对所有 $n \geq 1$都有 $\#\mathcal{A}_n \leq d$。

我们声称存在 n、$n' \geq 0$ 使得

$$d_n \geq 2d^6 + d,\ 2m_n \leq \frac{1}{6d^2} M_n \leq \langle \sigma_{[0,n')} \rangle \text{ and } |\sigma_{[0,n')}| \leq \frac{1}{6} M_n. \tag{147}$$

我们取 $n \geq 0$ 足够大，使得 $d_n \geq 12d^4 + d$ 和 $m_n \geq 12d^2$。令 $n' \geq 0$ 为满足$|\sigma_{[0,n')}| \leq \frac{1}{6} M_n < |\sigma_{[0,n'+1)}|$的整数。然后，根据定理 6 中的条目 (2) 和 (3),

$$\frac{1}{6} M_n < |\sigma_{[0,n'+1)}| \leq d^2 \langle \sigma_{[0,n')} \rangle.$$

此外，由于我们选择了 M_n 和 n 使得 $M_n > m_n^3$ 和 $m_n \geq 12d^2$，因此有 $m_n \leq \frac{1}{12d^2} M_n$。至此，该断言的证明完成。

令 $w_a = \tau_{[0,n)}(a)$ 对于 $a \in \{0, 1\}$。于是，根据引理52中的条目 (4), $10^{p_j^n} 1 \in \mathcal{L}(X_{\boldsymbol{\tau}}^{(n)})$ 对于每个 $j \in [1, p_{\ell_n}^n]$ 都成立。由于由 $\boldsymbol{\sigma}$ 生成 $X_{\boldsymbol{\tau}}$，存在 $u_j \in \mathcal{A}^+$，使得 $w_1 w_0^{p_j^n} w_1$ 出现在 $\sigma_{[0,n')}(u_j)$ 中。此外，我们可以取 u_j，使得满足以下条件：若 a_j 是 u_j 的第一个字母，且 b_j 是 u_j 的最后一个字母，则存在 $\sigma_{[0,n')}(a_j)$ 的一个前缀 s_j，以及 $\sigma_{[0,n')}(b_j)$ 的一个后缀 t_j，使得 $s_j w_1 w_0^{p_j^n} w_1 t_j = \sigma_{[0,n')}(u_j)$。注意到$|\sigma_{[0,n')}(u_j)| \geq |w_0^{p_1^n}| = M_n$，所以

$$|u_j| \geq |\sigma_{[0,n')}(u_j)| / |\sigma_{[0,n')}| \geq M_n / |\sigma_{[0,n')}| \geq 6. \tag{148}$$

我们将 $a_j a_j' a_j''$ 定义为 u_j 的前三个字母，将 $b_j'' b_j' b_j$ 定义为 u_j的最后三个字母。

我们声称,

$$\text{if } i, j \in [1, \ell_n] \text{ and } a_i a_i' a_i'' b_i'' b_i' b_i = a_j a_j' a_j'' b_j'' b_j' b_j, \text{ then } s_i = s_j \text{ and } t_i = t_j. \tag{149}$$

不等式$|w_1| = m_n \leq |\sigma_{[0,n')}|$ 和 (148) 确保 $\sigma_{[0,n)}(a_i)$ 是 $s_i w_1 w_0^\infty$ 的前缀。因此，由于 s_i 是 $\sigma_{[0,n)}(a_i)$ 的前缀，我们可以写成 $\sigma_{[0,n)}(a_i a_i') = s_i w_1 w_0^{q_i} r_i$，其中 $q_i \geq 1$，且 r_i 是 w_0 的一个不同于 w_0 的前缀。类似地，对于某个 $q_j \geq 2$ 以及 w_0 的一个不同于 w_0 的前缀 r_j，有 $\sigma_{[0,n)}(a_j a_j') = s_j w_1 w_0^{q_j} r_j$。于是，由于假设蕴含 $\sigma_{[0,n)}(a_i a_i' a_i'') = \sigma_{[0,n)}(a_j a_j' a_j'')$，可以使用引理52中的条目 (4) 得到 $r_i = r_j$。我们得到:

$$s_i w_1 w_0^{q_i} r_i = \sigma_{[0,n)}(a_i a_i') = \sigma_{[0,n)}(a_j a_j') = s_j w_1 w_0^{q_j} r_j = s_j w_1 w_0^{q_j} r_i.$$

因此，若 $q_i \neq q_j$，则 $w_0 = w_1$，这与 X 是无限集这一事实矛盾。我们得出 $q_i = q_j$，进而得到 $s_i = s_j$。类似的论证表明 $t_i = t_j$，于是结论成立。

由该结论可知，集合

$$S = \{|\sigma_{[0,n')}(a_k a'_k)| - |s_k w_1|, |\sigma_{[0,n')}(b'_k b_k)| - |w_1 t_k| : k \in [1, \ell_n]\} \cup \{|\sigma_{[0,n')}(a)| : a \in \mathcal{A}_{n'}\}$$

至多有 $2\#\mathcal{A}_{n'}^6 + \#\mathcal{A}_{n'}$ 个元素。因此，根据 d_n 的选取，

$$\#S \le 2d^6 + d \le d_n. \tag{150}$$

此外，由 (147) 可知，$\max S \le 2|\sigma_{[0,n')}| \le M_n$。而且，由于 $|s_j w_1| \le |\sigma_{[0,n')}(a_j)| + m_n$ 且 $|w_1 t_j| \le |\sigma_{[0,n')}(b_j)| + m_n$，我们有 $\min S \ge \langle \sigma_{[0,n')} \rangle - m_n \ge \frac{1}{12d^2} M_n$，其中最后一步用到了 (147)。因此，由于 $d_n \ge 2d^6 + d$，

$$S \subseteq [\frac{1}{d_n} M_n, d_n M_n]. \tag{151}$$

设 $u_j = a_j a'_j v_j b'_j b_j$ 表示某个 $s_i w_1 w_0^{q_i} r_i$ v_j $\sigma_{[0,n)}\ u_j\ =$ 。那么，方程 ( ) 意味着

$$p_j^n m_n = |w_0^{p_j^n}| = (\sigma_{[0,n')}(a_j a'_j) - |s_j w_1|) + |\sigma_{[0,n')}(v_j)| + (\sigma_{[0,n')}(b'_j b_j) - |w_1 t_j|).$$

这表明

$$\text{every } p_j^n m_n \text{ can be written as } \sum_{e \in S} \gamma_e e \text{ for certain } \gamma_e \in \mathbb{Z}_{\ge 0}. \tag{152}$$

由方程 (150)、(151) 和 (152) 可得，$(p_1^n, \dots, p_{\ell_n}^n)$ 属于 $K(M_n, d_n, \ell_n)$。这与 (146) 矛盾。 □

11 应用

本节基于定理 6 和定理 7，给出关于线性增长复杂度子移位和非超线性增长复杂度子移位的已知结果的新证明方法，这些证明更加简洁。

11.1 Cassaigne 定理

关于线性增长复杂度子移位的一个经典结果是 Cassaigne 定理[Cas95], ，其指出，对于这一复杂度类中的任意传递子移位 X ， $p_X(n+1) - p_X(n)$ 均一致有界。本小节将展示如何利用定理 6 为这一结果给出另一种证明，适用于 X 为极小的情形。

我们从一个包含我们方法技术核心的引理开始。

引理53. 设 $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$ 是一组互不相同的整数，且有 $\ell_1, \dots, \ell_n \ge 1$。假设:

(1) $x_{[p_j, p_j + \ell_j)} = y_{[0, \ell_j)}$ *for all* $j \in [1, n]$.

(2) $|p_j - p_i| \leq \frac{1}{2}\ell_k$ 对所有 i、j、$k \in [1,n]$。

那么，存在 $w \in \mathcal{A}^+$，使得对于所有 i、$j \in [1,n]$、$x_{[p_i,p_j)}$ 都是 w 的幂，并且 $x_{[p_i,p_j+\min(\ell_i,\ \ell_j)}$ 是 w^∞ 的前缀。

证明。由于 p_j 不同，不妨设 $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$。对于 i、$j \in [1,n]$，我们定义 $i < j$、$w_{i,\ j} =$ 根$x_{[p_i,p_j)}$以及 $\ell_{i,\ j} = \min(\ell_i, \ell_j)$。那么，引理陈述中的条目 (1) 确保 $x_{[p_i,p_i+\ell_{i,j})} = x_{[p_j,p_j+\ell_{i,j})}$，从而 $x_{[p_i,p_j+\ell_{i,j})}$ 是 $w_{i,\ j}^\infty$的前缀。特别地，由于 $p_i < p_j$和 $w_{i,\ j} =$ 根$x_{[p_i,j_j)}$，对于所有满足 $i < j$ 的 i、$j \in [1,n]$，我们有，

$$x_{[p_i,p_i+\ell_{i,j}]} \text{ and } x_{[p_j,p_j+\ell_{i,j})} \text{ are prefixes of } w_{i,j}^\infty. \tag{153}$$

因此，只需找到 w 使得 $w = w_{i,\ j}$ 对所有 $i < j$。

首先，我们证明

$$w_{i,k} = w_{j,k} \text{ for all } i,j,k \in [1,n] \text{ with } i,j < k. \tag{154}$$

注意，在这种情况下，由（153）可知，若 $m = \min(\ell_{i,k},\ell_{j,k})$，则 $x_{[p_k,p_k+m)}$ 是 $w_{i,k}^\infty$ 的前缀，且 $x_{[p_k,p_k+m)}$ 是$w_{j,k}^\infty$ 的前缀。因此，

$$(w_{i,k}^{\mathbb{Z}})_{[0,m)} = (w_{j,k}^{\mathbb{Z}})_{[0,m)}. \tag{155}$$

现在，根据引理陈述中的条目（2）以及 $w_{i,k}$ 和$w_{j,k}$, $w_{i,k}$ 和 $w_{j,k}$ 的定义，它们的长度至多为 $m/2$。由此以及 (155)，可以应用定理 4，得到 $w_{i,k}$ 和 $w_{j,k}$ 是同一词的幂。这意味着，由于 $w_{i,k}$ 和 $w_{j,k}$ 定义为根，因此 $w_{i,k} = w_{j,k}$。

我们现在注意到，如果 i、$j \in [1,n]$ 和 $i < j$，那么 (154) 保证了 $w_{1,\ j} =w_{i,\ j}$。因此，由于 $x_{[p_1,p_j)} = x_{[p_1,p_i)}x_{[p_i,p_j)}$，$w_{1,\ i} = w_{1,\ j} = w_{i,\ j}$。由于 i、j 是任意的，这意味着 $w_{1,\ 2} = w_{1,\ j} = w_{i,\ j}$。因此，通过定义 $w := w_{1,\ 2}$，即可得出该引理。 □

下面的命题利用引理53，在非常一般的情形下给出了 $p_X(n+1) - p_X(n)$ 的一个界。

命题22. 设 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}^+$ 和 $X \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k\mathcal{W}^{\mathbb{Z}}$。那么，对于任意 $\ell < \langle\mathcal{W}\rangle$,

$$p_X(\ell+1) - p_X(\ell) \leq 256\#\mathcal{A} \cdot \#(\text{root}\,\mathcal{W})^2|\mathcal{W}|^2/\ell^2.$$

证明。我们用反证法证明该命题。假设 $\ell < \langle\mathcal{W}\rangle$ 且 $p_X(\ell+1) - p_X(\ell) \geq 256\#\mathcal{A}\cdot\#$(根 $\mathcal{W}$)$^2|\mathcal{W}|^2/\ell^2$。那么，根据命题 5，我们可以找到至少 256#(根$\mathcal{W}$)$^2|\mathcal{W}|^2/\ell^2$ 个右特殊词 $\{u_i :\ i \in I\}$，其长度为 ℓ，且属于 X。设 $u_ia_{i,0}$ 和 $u_ia_{i,1}$ 是 u_i 在X中的两个不同右延伸。我们将证明，对于某个 $i \in I$，有 $a_{i,\ 0} = a_{i,1}$，这与 $u_ia_{i,0}$ 和$u_ia_{i,1}$ 不同这一事实矛盾。

令 $X' = \{\ldots vvv.v'v'v'\cdots :\ v, v' \in$ 根 $\mathcal{W}\} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$。那么，不难验证：

(a) 每个长度不超过 $\langle\mathcal{W}\rangle$ 的 $w \in \mathcal{L}(X)$ 都出现在某个 $x \in X'$ 中。

(b) $\#X' \le \#(\mathsf{root}\,\mathcal{W})^2$.

特别地，每个 $u_i a_{i,\ j}$ 都出现在某个 $x_{i,\ j} = \ldots v_{i,\ j} . v'_{i,\ j} \cdots \in X'$ 中，因此

$$u_i a_{i,j} = (x_{i,j})_{[\beta_{i,j},\beta_{i,j}+\ell]} \text{ for some } \beta_{i,j} \in [-|\mathcal{W}|, |\mathcal{W}|). \tag{156}$$

我们利用 (b) 和抽屉原理得到集合 $I' \subseteq I$ and $x_0, x_1 \in X'$，使得 $\#I' \ge 256|\mathcal{W}|^2/\ell^2$ and $x_j = x_{i,j}$ 对所有 $i \in I'$ 和 $j \in \{0,1\}$ 都成立。我们再次利用抽屉原理，找到满足 $\#I'' \ge \#I'/(8|\mathcal{W}|/\ell)^2 \ge 4$ 且

$$|\beta_{i,j} - \beta_{i',j}| \le 2|\mathcal{W}|/(8|\mathcal{W}|/\ell) = \ell/4 \text{ for all } i, i' \in I'' \text{ and } j \in \{0,1\}. \tag{157}$$

令 $\beta = \max\{\beta_{i,1} : i \in I''\}$，并且对于 $i \in I''$, $\gamma_i = \beta_{i,0} - \beta_{i,1} + \beta$。我们断言，对于所有 $i \in I''$,

(i) $\beta_{i,1} \le \beta \le \beta_{i,1} + \ell/4$ 和 $\beta_{i,0} \le \gamma_i \le \beta_{i,0} + \ell/4$; (ii) u_i 有一个后缀 u'_i，其长度至少为 $\frac{3}{4}\ell$，使得 $u'_i a_{i,0} = (x_0)_{[\gamma_i, \gamma_i + |u'_i|]}$ 且 $u'_i a_{i,1} = (x_1)_{[\beta, \beta + |u'_i|]}$; (iii) 如果 $p, q \in I''$ 不同，那么 $\gamma_p + |u'_p| \ne \gamma_q + |u'_q|$ 和 $\gamma_p \ne \gamma_q$。

条目 (i) 可由 (157) 得出。对于条目 (ii)，我们首先注意到，γ_i 的定义确保 $m_i := \ell + \beta_{i,1} - \beta = \ell + \beta_{i,0} - \gamma_i$，而且 (i) 给出 $\frac{3}{4}\ell \le m_i \le \ell$。因此，$u_i$ 有一个长度为 $m_i \ge \frac{3}{4}\ell$ 的后缀 u'_i，根据 (156)，该后缀满足条目 (ii)。

还需证明 (iii)。假设 $p, q \in I''$ 和 $\gamma_p + |u'_p| = \gamma_q + |u'_q|$。则，$\beta_p$, $_0 = \gamma_p + |u'_p| - \ell = \gamma_q + |u'_q| - \ell = \beta_q$,0，因此 $u_p = u_q$，这意味着 $p = q$。现在设 $\gamma_p = \gamma_q$。注意，如果 $|u'_p| = |u'_q|$，那么 $\gamma_p + |u'_p| = \gamma_q + |u'_q|$，因此根据我们刚刚证明的内容，$p = q$。因此，不妨假设 $|u'_p| < |u'_q|$。于是，(ii) 允许我们写成$u'_p a_p$,$_0 = (x_0)_{[\gamma_p, \gamma_p + |u'_p|]}$ 和 $u'_q = (x_0)_{[\gamma_p, \gamma_p + |u'_q|]}$。特别地，$u'_p a_p$,0 是 u'_q 的前缀。同样，(ii) 蕴含 $u'_p a_{p,\ 1} = (x_1)_{[\beta, \beta + |u'_p|]}$ 是 $u'_q = (x_1)_{[\beta, \beta + |u'_q|)}$ 的前缀。因此，$u'_p a_p$,$_0 = u'_p a_p$,1，这与 a_p,0 和 a_p,1 的定义相矛盾。这表明情形 $|u'_p| < |u'_q|$ 不会发生，因此 $|u'_p| = |u'_q|$ 和 $p = q$。这就完成了该断言的证明。

由该断言可知，$(x_0)_{[\gamma_i, \gamma_i + |u'_i|)} = (S^\beta x_1)_{[0, |u'_i|)}$ 且 $|\gamma_i - \gamma_{i'}| \le \frac{1}{2}|u'_i|$ 对所有 i, $i' \in I''$均成立。此外，根据 (iii)，所有的 γ_i 都互不相同。因此，我们可以使用引理53并推得存在 $w \in \mathcal{A}^+$，使得对任意$p, q \in I''$,

$(x_0)_{[\gamma_p, \gamma_q)}$ 是 w 的幂

$$\text{and } (x_0)_{[\gamma_p, \gamma_p + \min(|u'_p|, |u'_q|))} \text{ is a prefix of } w^\infty. \tag{158}$$

我们使用该命题的条目 (iii) 以及 $\#I'' \ge 4$，来找到 p、$q \in I''$，使得对于所有 $t \in I'' \setminus \{p, q\}$, $|u'_t| < |u'_p| < |u'_q|$。此外，(iii) 允许我们找到 r、$s \in I'' \setminus \{p, q\}$，使得 $\gamma_r + |u'_r| < \gamma_s + |u'_s|$。

我们观察到，由于 $|u'_s| < |u'_p|$，(158) 的第二部分确保 that $u'_s = (x_0)_{[\gamma_s,\gamma_s+|u'_s|)}$ 是 w^∞ 的一个前缀。然后，根据 (158) 的第一部分，$(x_0)_{[\gamma_r,\gamma_s+|u'_s|)}$ 是 w^∞ 的一个前缀。由于 $\gamma_r + |u'_r| < \gamma_s + |u'_s|$，我们得到 that

$$u'_r a_{r,0} = (x_0)_{[\gamma_r,\gamma_r+|u'_r|]} \text{ is a prefix of } w^\infty. \tag{159}$$

现在， r 和 p 的定义保证了 $|u'_r| < |u'_p|$，因此由 (156) 可知，$u'_r a_{r,\ 1} = (x_1)_{[\beta,\beta+|u'_r|]}$ 是 $(x_0)_{[\gamma_p,\gamma_p+|u'_p|)} = (x_1)_{[\beta,\beta+|u'_p|)}$的前缀。此外，由于 $|u'_p| \lhd u'_q|$，(158) 的第二部分表明 $(x_0)_{[\gamma_p,\gamma_p+|u'_p|)}$ 是 w^∞的前缀。由此可得，$u'_r a_{r,\ 1}$ 是 w^∞ 的前缀。但由 (159) 可知，$u'_r a_{r,\ 1} = u'_r a_{r,\ 0}$，这与我们的假设矛盾。 □

定理 9（[Cas95]）。设 X 是一个极小的线性增长复杂度子移位。那么， $p_X(\ell+1) - p_X(\ell)$ 一致有界。

证明。任取 $\ell \geq 1$ 。若 X 有限，则定理显然成立，因此我们假设 X 是无限的。于是，我们可以使用定理 6，得到一个生成 X 和 $d \geq 1$ 的 $\mathcal{S}$-进序列$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n : \mathcal{A}_{n+1}^+ \to \mathcal{A}_n^+)_{n\geq 1}$，使得定理 6 的条件 (1)、(2) 和 (3) 成立。

令 $n \geq 1$ 为满足 $\langle \sigma_{[0,n)} \rangle > \ell$的最小整数。则 X 是$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k \sigma_{[0,n)}(\mathcal{A}_n^{\mathbb{Z}})$的子集，因此由命题22和定理 6 中的条件可得以下界：

$$\begin{aligned} p_X(\ell+1) - p_X(\ell) &\leq 256 \#\mathcal{A}_0 \#(\text{root}\, \sigma_{[0,n)}(\mathcal{A}_n))^2 |\sigma_{[0,n)}|^2/\ell^2 \\ &\leq 256 \#\mathcal{A}_0 \cdot d^2 \cdot |\sigma_{[0,n)}|^2/\ell^2. \end{aligned}$$

现在， n 的极小性保证 $\langle \sigma_{[0,n-1)} \rangle \leq \ell$，因此根据定理 6 中的条目 (2) 和 (3)，

$$|\sigma_{[0,n)}| \leq |\sigma_{n-1}| \cdot |\sigma_{[0,n-1)}| \leq d^2 \langle \sigma_{[0,n-1)} \rangle \leq d^2 \ell.$$

因此， $p_X(\ell+1) - p_X(\ell) \leq 256 \#\mathcal{A}_0 \cdot d^6$和 $p_X(\ell+1) - p_X(\ell)$是一致有界的。 □

11.2 Cassaigne、Frid、Puzynina 和 Zamboni 的一个定理

以下结果已在 [CFPZ18] 中证明。

定理 10。设 $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 是一个无限序列。以下条件等价：

(1) x具有线性词复杂度。

(2) 存在 $S \subseteq \mathcal{A}^*$ 使得 $S^2 \supseteq \mathcal{L}(x)$ 且 $\sup_{n\geq 1} p_S(n) < +\infty$。

在本小节中，我们针对极小子移位这一情形给出定理 10 的另一种证明。我们首先证明定理 6 的以下推论。

命题 23. 设 X 是一个复杂度呈线性增长的无限极小子移位。存在 $d \geq 1$，使得对于任意 $d' \geq 2$，我们都能找到 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_n \colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)_{n \geq 0}$，它生成 X，使得：

(1) $\#(\mathsf{root}\, \tau_{[0,n)}(\mathcal{A}_n)) \leq d$.

(2) $|\tau_{[0,n)}(a)| \leq d \cdot |\tau_{[0,n)}(b)|$ *for all* $a, b \in \mathcal{A}_n$.

(3) $d' \leq |\tau_{n-1}(a)| \leq d^{6 \log_2 d'}$ *for all* $a \in \mathcal{A}_n$.

证明。令 $\boldsymbol{\tau}' = (\tau_n \colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)_{n \geq 0}$ 和 d 为定理 6 在应用于 X 时给出的元素，并令 $d' \geq 1$ 为任意元素。我们将通过仔细收缩 $\boldsymbol{\tau}'$ 来构造 $\boldsymbol{\tau}$。

令 $n_0 = 0$，并归纳地定义 n_{k+1} 为满足 $n_{k+1} > n_k$ 且 $\langle \tau_{[n_k, n_{k+1})} \rangle \geq 2$ 的最小整数。我们注意到，由于 $\langle \tau_{[n_k, n_{k+1}-1)} \rangle = 1$，根据 n_{k+1} 的极小性，我们有 $\langle \tau_{[0, n_{k+1}-1)} \rangle \leq |\tau_{[0,n_k)}|$。然后，根据定理 6 中的条目（2）和（3），我们可以对其进行界定

$$|\tau_{[0,n_{k+1})}| \leq |\tau_{[0,n_{k+1}-1)}||\tau_{n_{k+1}-1}| \leq d\langle \tau_{[0,n_{k+1}-1)} \rangle \cdot d \leq d^2 |\tau_{[0,n_k)}| \leq d^3 \langle \tau_{[0,n_k)} \rangle.$$

现在注意，对于任意一对使得 $\sigma\sigma'$ 有定义的态射 σ 和 σ'，我们有 $|\sigma\sigma'| \geq \langle \sigma \rangle |\sigma'|$。因此，

$$|\tau_{[n_k, n_{k+1})}| \leq \frac{|\tau_{[0,n_{k+1})}|}{\langle \tau_{[0,n_k)} \rangle} \leq d^3. \tag{160}$$

我们令 $\ell = \lceil \log_2 d' \rceil$，并考虑压缩映射 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{[n_{\ell k}, n_{\ell(k+1)})})_{k \geq 0}$。根据 n_k 的定义可知 $\langle \tau_{[n_{\ell k}, n_{\ell(k+1)})} \rangle \geq 2^\ell \geq d'$；由 (160) 可知 $|\tau_{[n_{\ell k}, n_{\ell(k+1)})}| \leq d^{3\ell} \leq d^{6 \log_2 d'}$。因此，$\boldsymbol{\tau}$ 满足该命题的条目（3）。此外，由于 $\boldsymbol{\tau}'$ 满足定理 6 中的条目（1）和（2），且 $\boldsymbol{\tau}$ 是 $\boldsymbol{\tau}'$ 的压缩映射，该命题的条目（1）和（2）也成立。 □

引理54。设 $w \in \mathcal{A}^+$ 和 $\ell \leq |w|$。存在一个词集合 $\mathcal{V}$，使得：

(1) 对所有 $n \geq 1$，$\#\mathcal{V} \cap \mathcal{A}^n \leq 2^5 |w|/\ell$。 (2) $\langle \mathcal{V} \rangle \geq \ell$, $|\mathcal{V}| \leq |w|$。
(3) 对于 w 中出现的任意长度为 $|u| \geq 2^6 \ell$ 的 u，都有 $u \in \mathcal{V}^2$。

证明。对于 $i \geq 0$ 和 $j \in [0, 7]$，令 $w = u_{ij}(1) u_{ij}(2) \cdots u_{ij}(2^i)$ 为 w 分解成 2^i 个词 $u_{ij}(k) \in \mathcal{A}^*$ 的（唯一）分解，使得对于所有 $k \in [1, 2^i]$，$|u_{ij}(1) \cdots u_{ij}(k)| = \lfloor (8k + j)|w|/2^{i+3} \rfloor$。我们将 $\mathcal{V}_i$ 定义为由某个 $u_{ij}(k)$ 的前缀或后缀组成、长度至少为 ℓ 的词集合。令 $\mathcal{V} := \cup_{0 \leq i < \log_2(|w|/\ell)} \mathcal{V}_i$。

由 $\mathcal{V}$ 的定义可知 $\langle \mathcal{V} \rangle \geq \ell$，且 $|\mathcal{V}| \leq |w|$，因此条目（2）成立。对于条目 (1)，注意若 $n \geq 1$，则每个 $u_{i,\,j}(k)$ 至多有一个长度为 n 的前缀，且至多有一个长度为 n 的后缀。因此，$\#\mathcal{V}_i \cap \mathcal{A}^n$ 有上界 $2 \cdot 8 \cdot 2^i = 2^{i+4}$。所以，$\#\mathcal{V} \cap \mathcal{A}^n \leq \sum_{0 \leq i < \text{对数}_2 |w|/\ell} 2^{i+4} \leq 2^5 |w|/\ell$。

现在我们证明条目（3）。设 u 是一个长度为 $|u| \geq 2^6 \ell$、出现在 w 中的词。记 $w = tus$，其中 t、$s \in \mathcal{A}^*$，并取满足 $|w|/2^{i+1} <$ 的 $i \geq 0$

$|u| \le |w|/2^i$。注意，当 $|u| \ge 2^6\ell$ 时， $i < \log_2(|w|/\ell)$。我们还考虑唯一的有序对 (k,j)，使得 $\in [1,2^i]\times[0,7]$

$$(8k+j)|w|/2^{i+3} \le |t| + |w|/2 < (8k+j+1)|w|/2^{i+3}.$$

于是，我们可以将 $u = u'u''$ 写成 $|tu'| = \lfloor (8k+j)|w|/2^{i+3}\rfloor$ 的形式。不难验证， u' 是 $u_{i,\ j}(k)$ 的后缀，而 u'' 是 $u_{i,\ j}(k+1)$ 的前缀。此外， $|u'|$、 $|u''| \ge |w|/2^i \ge \ell$，因此 u'、 $u'' \in \mathcal{V}_i$ 且 $u \in \mathcal{V}^2$。 □

定理 11. 设 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 是一个极小子移位。以下条件等价：

(1) X 具有线性词复杂度。

(2) 存在 $S \subseteq \mathcal{A}^*$ 使得 $S^2 \supseteq \mathcal{L}(X)$，且 $\sup_{n\ge1} p_S(n) < +\infty$。

证明。我们首先假设 X 满足条件 (2)，并定义 $d = \sup_{n\ge1} p_S(n)$。于是 $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{A}^n \subseteq \{ss' :\ s、\ s' \in S、\ |s| = n - |s'|\}$。因此，

$$p_X(n) \le \sum_{k=0}^{n} p_S(k)p_S(n-k) \le (n+1)d^2$$

并且 p_X 具有线性增长。

现在假设 X 具有线性增长复杂度。X 有限的情形是平凡的；因此，我们假设 X 是无限的。利用命题 23 和 $d' = 2$，我们可以找到一个常数 d 以及一个 $\mathcal{S}$-进制序列 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_n\colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)_{n\ge0}$，它生成 X，且满足命题 23 中的条目 (1)、(2) 和 (3)。

我们如下定义 S。令 $n \ge 1$。对于 $u \in$ 的根$_{\tau_{[0,n)}}(\mathcal{A}_n)$，我们取$p_{n,\ u} \ge 1$，使得 $|\tau_{[0,n)}| \le |u^{p_{n,\ u}}| < 2|\tau_{[0,n)}|$。我们定义 $\mathcal{W}_n = \{u^{p_{n,u}}v^{p_{n,v}} :\ u,v \in$ 的根$_{\tau_{[0,n)}}(\mathcal{A}_n)\}$。对于每个 $w \in \mathcal{W}_n$，我们利用引理 54 和 $\ell = \langle\tau_{[0,n-1)}\rangle/2^6$ 得到一个集合$\mathcal{V}_{n,\ w}$，满足以下条件：

(a) $\#\mathcal{V}_{n,\ w} \cap \mathcal{A}^k \le 2^{11}|w|/\langle\tau_{[0,n-1)}\rangle$ 对所有 $k \ge 1$ 均成立。(b) $\langle\mathcal{V}_{n,\ w}\rangle \ge \langle\tau_{[0,n-1)}\rangle/2^6$， $|\mathcal{V}_{n,\ w}| \le |w|$。(c) 若 u 出现在 w 和 $|u| \ge \langle\tau_{[0,n-1)}\rangle$ 中，则 $w \in \mathcal{V}_{n,\ w}^2$.

我们设 $S = \cup_{n\ge1}\cup_{w\in\mathcal{W}_n} \mathcal{V}_{n,\ w}$。

继续之前，我们先对这些定义作一些观察。由 $\mathcal{W}_n$ 的定义以及命题23中的条目 (1) 可知

$$\#\mathcal{W}_n \le \#(\text{root}\,\tau_{[0,n)}(\mathcal{A}_n))^2 \le d^2. \tag{161}$$

我们还有

$$\text{if } a,b \in \mathcal{A}_n \text{ and } v \text{ occurs in } \tau_{[0,n)}(ab), \text{ then } v \text{ occurs in some } w \in \mathcal{W}_n. \tag{162}$$

注意，由于对所有 $w \in \mathcal{W}_n$ 都有 $|w| \le 2|\tau_{[0,n)}|$，(a) 和 (b) 蕴含

$$|\mathcal{V}_{n,w}| \le 2|\tau_{[0,n)}| \text{ and } \#\mathcal{V}_{n,w} \le 2^{12}|\tau_{[0,n)}|/\langle\tau_{[0,n-1)}\rangle \le 2^{12}d^2, \tag{163}$$

其中最后一步用到了命题 23 的条目 (2) 和 (3)。

现在证明 S 满足所需性质。先证明 $\mathcal{L}(X) \subseteq S^2$。令 $u \in \mathcal{L}(X)$，并令 $n \geq 1$ 为满足 $|u| \geq \langle \tau_{[0,n)} \rangle$ 的最大整数。于是，$|u| < \langle \tau_{[0,n+1)} \rangle$，因此，由于 $\boldsymbol{\tau}$ 生成 X，存在 a、$b \in \mathcal{A}_{n+1}$，使得 u 出现在 $\tau_{[0,n+1)}(ab)$ 中。因此，根据（162），u 出现在某个 $w \in \mathcal{W}_{n+1}$ 中，这意味着根据（c），$u \in \mathcal{V}^2_{n+1,\ w} \subseteq S^2$。

还需证明 p_S 一致有界。令 $S_n = \cup_{w \in \mathcal{W}_n} \mathcal{V}_{n,\ w}$。我们断言如下：

(i) 对所有 $n \geq 0$ 和 $k \geq 0$，$\#p_{S_n}(k) \leq 2^{12} d^4$。

(ii) 对任意 $k \geq 0$，至多有 $\log_2(d)$ 个整数 n，使得 $S_n \cap \mathcal{A}^k$ 非空。

注意到 (i) 和 (ii) 使我们可以写成

$$p_S(k) \leq \sum_{n : S_n \cap \mathcal{A}^k \neq \emptyset} p_{S_n}(k) \leq (\log_2 d + 7) \cdot 2^{12} d^4,$$

这将表明 p_S 一致有界，并完成证明。

我们先证明 (i)。S_n 的定义保证了 $p_{S_n}(k) \leq \#\mathcal{W}_n \cdot \max\{\#\mathcal{V}_{n,\ w} \cap \mathcal{A}^k : w \in \mathcal{W}_n\}$。因此，由 (161) 和 (163) 得，$p_{S_n}(k) \leq d^2 \cdot 2^{12} d^2$。

接下来，我们用矛盾法证明 (ii)。假设存在多于 $\log_2 d + 7$ 个整数 n 满足 $S_n \cap \mathcal{A}^k \neq \emptyset$。那么，我们可以找到 n 和 m，使得 $S_n \cap \mathcal{A}^k \neq \emptyset$、$S_m \cap \mathcal{A}^k \neq \emptyset$ 和 $m > n + \log_2 d + 7$。一方面，S_m 的定义保证了 $k \geq \min_{w \in \mathcal{W}_n} \langle \mathcal{V}_{n,\ w} \rangle$。因此，由 (b) 和命题 23 中的条目（3），

$$k \geq \langle \tau_{[0,m-1)} \rangle / 2^6 \geq 2^{m-n-7} \langle \tau_{[0,n)} \rangle. \tag{164}$$

另一方面，S_n 的定义保证了 $k \leq \max_{w \in \mathcal{W}_n} |\mathcal{V}_{n,\ w}|$。将此结果与（163）及命题 23 中的条目（2）结合，可得

$$k \leq 2|\tau_{[0,n)}| \leq 2d \langle \tau_{[0,n)} \rangle. \tag{165}$$

由于 $m - n - 7 > \log_2 d$，方程（164）和（165）不相容。这一矛盾证明了（ii），并完成了定理的证明。 □

11.3 拓扑秩

极小子移位 X 的拓扑秩是满足以下条件的最小元素 $k \in [1, +\infty]$：存在一个可识别的 $\mathcal{S}$-进序列 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_n : \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)_{n \geq 0}$，使得对于每个 $n \geq 1$，都有 $\#\mathcal{A}_n \leq k$，且 τ_n 为正的且适当的。有限拓扑秩子移位这一类具有若干刚性性质，并且已经发展出许多工具来处理它；以下是不完全列举：[BKMS13；DFM19；Esp22；EM21；DM08；BSTY19；HPS92]。

在 [DDMP21] 中已证明，非超线性增长复杂度的极小子移位具有有限的拓扑秩，因此上述刚性性质对这一类也成立。本小节将基于定理 7 给出这一事实的新证明。

定理 12（[DDMP21]，定理 5.5）。设 X 是一个非超线性增长复杂度的极小子移位，则 X 具有有限的拓扑秩。

证明。 X 有限的情形是平凡的，因此我们可以假设X 无限。于是，定理 7 给出 d 和一个可识别的 $\mathcal{S}$-进序列$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n \colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n^+)_{n\geq 0}$，生成 X，并满足定理 7 的条目（1）和（2）。特别是，

$$X \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k(\operatorname{root}\sigma_{[0,n)}(\mathcal{A}_n))^{\mathbb{Z}} \text{ for all } n \geq 1. \tag{166}$$

现在，由于 $|\sigma_{[0,n)}|$ 在 $n \to +\infty$ 时趋于 $+\infty$，且根据定理 7 中的条目（2），$d|\sigma_{[0,n)}| \leq \langle\sigma_{[0,n)}\rangle$，我们有 $\langle\sigma_{[0,n)}\rangle$ 在 $n \to +\infty$时发散至 $+\infty$。因此，由于X 是非周期的，

$$\lim_{n\to+\infty} \langle\operatorname{root}\sigma_{[0,n)}(\mathcal{A}_n)\rangle = +\infty.$$

这与（166）使我们能够应用 [Esp22，推论 1.4] 或 [DDMP21，定理 4.3]，从而得出 X 具有有限的拓扑秩。 □

致谢

本研究获得 CONICYT-PFCHA/Doctorado Nacional/2020-21202229 博士奖学金的支持。

参考文献

[BKMS13]S. Bezuglyi 等：《有限秩 Bratteli 图：不变测度的结构》。载于：美国数学会汇刊 365.5（2013），第 2637–2679 页。ISSN：0002- 9947。DOI：10.1090/S0002-9947-2012-05744-8。URL：https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2012-05744-8。[BSTY19] Val´erieBerth´e 等：《态射序列的可识别性》载于：遍历理论与动力系统 39.11（2019），第 2896–2931 页。 ISSN：0143-3857。 DOI：10.1017/etds.2017.144。URL：https://doi.org/10.1017/etds.2017.144。[Cas11]Julien Cassaigne。《术语 S-进及其性质》。载于：（2011）。URL：https://www2.lirmm.fr/$%5Csim$ monteil/hebergement/pytheas-fogg/terminologie%5C_s%

[Cas95] Julien Cassaigne. “具有线性子词复杂度的序列的特殊因子”。载于：国际语言理论发展会议。1995年。[CFPZ18] Julien Cassaigne 等。“线性复杂度词的刻画”。载于：《美国数学会会刊》147（2018年12月），第1页。 DOI: 10.1090/proc/14440.

[Cre22] Darren Creutz. “测度论混合的最小词复杂度子移位”。载于：arXiv 预印本（2022年6月）。 DOI: 10.48550/arXiv.2206.10047.[DDMP21] Sebasti´an Donoso 等。“有限拓扑秩极小康托系统、 $\mathcal{S}$-adic 子移位及其复杂度之间的相互作用”。载于：美国数学会汇刊 374.5（2021），第3453–3489页。 ISSN: 0002-9947. DOI: 10.1090/tran/8315. URL: https://doi.org/10.1090/tran/8315.[DFM19] Fabien Durand、Alexander Frank 和 Alejandro Maass。“极小康托系统的特征值”。载于：J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 21.3（2019），第727–775页。 ISSN: 1435-9855. DOI: 10.4171/JEMS/849.URL: https://doi.org/10.4171/JEMS/849.[DHS99] F. Durand、B. Host 和 C. Skau。“替换动力系统、Bratteli 图和维数群”。载于：遍历理论与动力系统 19.4（1999），第953–993页。 ISSN: 0143-3857. DOI: 10.1017/S0143385799133947. URL: https://doi.org/10.1017/S0143385799133947.[DLR13] Fabien Durand、Julien Leroy 和 Gw´ena¨el Richomme。“S-adic 表示的性质能否决定因子复杂度？”载于：Journal of Integer Sequences 16（2013年3月）。[DM08] Tomasz Downarowicz 和 Alejandro Maass。“有限秩 Bratteli-Vershik 图具有扩张性”。载于：遍历理论与动力系统 28.3（2008），第739–747页。ISSN: 0143-3857.DOI: 10.1017/S0143385707000673. URL: https://doi.org/10.1017/S0143385707000673.[Dur98] Fabien Durand。“利用返回词刻画替换序列”。载于：Discrete Math. 179.1-3（1998），第89–101页。ISSN: 0012-365X. DOI: 10.1016/S0012-365X(97)00029-0. URL: https://doi-org.merlin.u-picardie.fr/10.1016/S0012-365X(97)00029-0.[EM21] Basti´an Espinoza 和 Alejandro Maass。“有限字母表秩极小 $\mathcal{S}$-adic 子移位的自同构群”。载于：《遍历理论与动力系统》（2021），第1–23页。 DOI: 10.1017/etds.2021.64.[Esp22] Basti´an Espinoza。“有限字母表秩 $\mathcal{S}$-adic 子移位的符号因子”。载于：《遍历理论与动力系统》（2022），第1–37页。 DOI: 10.1017/etds.2022.21.[Fer96] Sebastien Ferenczi。“秩与符号复杂度”。载于：《遍历理论与动力系统》16（1996年8月），第663–682页。 DOI: 10.1017/S0143385700009032.

[GJ00] Richard Gjerde 和 Ørjan Johansen。《Cantor 极小系统的 Bratteli–Vershik 模型：Toeplitz 流的应用》。载于：《遍历理论与动力系统》20.6（2000），第 1687–1710 页。 ISSN：0143-3857。 DOI：10.1017/S0143385700000948。 URL：https://doi.org/10.1017/S0143385700000948。[GJ02] Richard Gjerde 和 Ørjan Johansen。《与区间交换变换相关的 Cantor 极小系统的 Bratteli–Vershik 模型》。载于：Mathematica Scandinavica 90.1（2002），第 87–100 页。 ISSN：00255521, 19031807。URL：http://www.jstor.org/stable/24493363（访问于 2023 年 3 月 30 日）。[GL22] France Gheeraert 和 Julien Leroy。《极小 dendric 位移的 $\mathcal{S}$-adic 刻画》。载于：arXiv 电子预印本（2022 年 6 月）。 DOI：10.48550/arXiv.2206.00333。[HPS92] Richard H. Herman、Ian F. Putnam 和 Christian F. Skau。《有序 Bratteli 图、维数群与拓扑动力学》。载于：Internat. J. Math. 3.6（1992），第 827–864 页。 ISSN：0129-167X。 DOI：10.1142/S0129167X92000382。 URL：https://doi-org.merlin.u-picardie.fr/10.1142/S0129167X92000382。[Ler12] Julien Leroy。《S-adic 猜想的一些改进》。载于：Advances in Applied Mathematics 48.1（2012），第 79–98 页。ISSN：0196-8858。DOI：https://doi.org/10.1016/j.aam.2011.03.005。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196885811000571。[Ler14] Julien Leroy。《具有复杂度 $1 \leq p(n+1) - p(n) \leq 2$ 的首个差分的极小子移位的 S-adic 刻画》。载于：Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 16.1（2014），第 233–286 页。[LR13] Julien Leroy 和 Gwen¨ael Richomme。《具有线性复杂度的序列的 S-adic 性的组合证明》。载于：Integers *[仅电子版]*（2013 年 1 月）。[MH38] Marston Morse 和 Gustav A. Hedlund。《符号动力系统》。载于：《美国数学杂志》60.4（1938），第 815–866 页。ISSN：00029327, 10806377。URL：http://www.jstor.org/stable/2371264（访问于 2023 年 3 月 27 日）。[MH40] Marston Morse 和 Gustav A. Hedlund。《符号动力系统 II：Sturmian 轨道》。载于：《美国数学杂志》62.1（1940），第 1–42 页。 ISSN：00029327, 10806377。URL：http://www.jstor.org/stable/2371431（访问于 2023 年 3 月 30 日）。

[Mos96] Brigitte Moss´e。《替换的可识别性与自动序列的复杂度》。载于：法国数学会通报 124.2（1996），第 329–346 页。 ISSN：0037-9484。 URL：http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_2_329_0。[RS97] G. Rozenberg 和 A. Salomaa。《形式语言手册：第 1 卷。词、语言、语法》。形式语言手册。Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH，1997。ISBN：9783540604204。URL：https://books.google.cl/books?id=yQ59ojndUt4C。