arXiv:2305.03107v1 [math.CO] 4 May 2023

H曲面上嵌入图之间的同态

Delia Garijo* Andrew Goodall† Lluís Vena ‡

2023年5月8日

摘要

我们通过设计尊重曲面拓扑的顶点和边上的运算，将图同态的概念扩展到胞腔嵌入图（地图）；由此，我们首次定义了地图同态，同时保持了组合结构（作为图同态）和曲面的拓扑结构（特别是可定向性和亏格）。随后，我们将图的核以及核上的同态序等概念扩展到地图。我们还为地图的各种拓扑特征建立了纯组合框架，例如闭游走的可收缩性；该框架尤其使我们能够刻画地图核。接着我们证明，按同态存在性排序的地图核的偏序集是连通的，并且与图同态不同，它不包含任何稠密区间（因此对于可数偏序集而言并非通用）。最后，我们给出若干示例：一对核之间存在无限多个核、存在一条无限间隙链，以及存在具有公共同态像且大小任意大的反链。

目录

1 引言 **2**

2 地图 42.1 删除与收缩.7

3 图同态 **12**

3.1 顶点粘合.12 3.2 重复边.20 3.3 同态.22

4 个核 **25**

4.1 基本性质.25 4.2 分离的与可收缩交叉回路.27 4.3 交叉回路与同态.32

*西班牙塞维利亚大学应用数学系 I。dgarijo@us.es。由项目 PID2019-104129GB-I00/ AEI/ 10.13039/501100011033 资助。

†布拉格查理大学计算机科学研究所（IÚUK）。andrew@iuuk.mff.cuni.cz。由 GAČR22-17398S 资助。

‡巴塞罗那加泰罗尼亚理工大学数学系。lluis.vena@upc.edu。由 AGAUR 的 Beatriu de Pinós 奖学金 BP2018-0030 资助，该奖学金由地平线 2020 计划共同资助。

4.4 地图核的刻画.37 4.5 地图核的偏序集.39

1 引言

带有附加结构的集合之间的同态，是保持该结构的映射。例如，图之间的图同态是顶点集之间保持邻接关系的映射。对于多重图（允许环和平行边），同态定义为一对映射，一个作用于顶点，另一个作用于边，二者共同保持顶点—边关联。若想了解图同态理论的丰富内涵，读者可参阅 [10]。

理解图同态结构的关键是核的概念 [11]，尤其是核的偏序集，即所谓的同态序。图同态的计数将其理论与统计物理中的应用联系起来：图上的 q态 Potts 模型的配分函数，以及更一般的顶点着色模型配分函数，都是同态函数 [6] 的实例（该函数通过加权计数从给定图到固定边加权图的图同态来定义）。这些配分函数又与图的 Tutte 多项式密切相关，其取值包括着色和流的计数。事实上，图的 Tutte 多项式中任何可表示为同态函数的取值，都是该图上某个 Potts 模型的配分函数 [7]。对于细胞嵌入曲面的图（地图），相应的着色概念（或者更确切地说，张力）和流（在有限群中取非恒等映射值）由曲面Tutte多项式 [8, 9], 的取值计数，并已表示为边着色模型的配分函数 [15]。于是便产生了这样一个问题：这些计数能否通过地图同态表示为地图上的顶点着色模型配分函数？要着手回答这个问题，我们需要给出地图同态的定义，使之既扩展图同态的定义，又尊重图嵌入的拓扑。如此一来，我们便能将通过核的偏序集对图同态所作的富有成效的分析，推广到地图的情形。

正如我们即将阐述的，如何定义地图之间的同态并不那么明确，其中一个难点在于既要保留图的组合结构，也要保留嵌入的拓扑结构。地图有多种表示方式，有些着重体现其拓扑结构（图的胞腔嵌入、带状图），有些则着重体现其组合结构（顶点—边—面旗标、旋转系统、图编码地图、Tutte的置换公理化）。因此，何谓地图同态可能取决于所选的表示方式：究竟要保留哪些结构？为打下坚实基础，无论选择何种表示方式，地图同构的定义都只有一种可能。

我们采用一种 Tutte 地图置换公理化的形式 [19, 第 X 章]：在一个“交叉”集合上定义的三个对合（该集合由将地图的边四等分而得），描述了如何在尊重地图拓扑结构的前提下，从一个顶点、边或面到达与之相邻的顶点、边或面（形式化定义见下文定义 1）。在这种表示中，两个地图之间的同构是其交叉集合之间的双射，且该双射与定义地图的对合可交换。去掉双射条件后，我们便得到地图同态的定义；Malnič、Nedela 和 Škoviera [16]（限于可定向曲面的情形）以及 Litjens 和 Sevenster [15]（限于局部双射映射，背景是图的万有覆盖）都给出了这一概念。如此定义的地图同态保留局部的组合与拓扑结构（例如顶点—边—面关联关系以及顶点旋转），但通常并不保留

可定向性或亏格等全局拓扑参数。

我们提出了一种新的地图同态定义（定义 22），以确保同态能够保持曲面拓扑；我们的定义主要基于一种称为顶点粘合的顶点识别操作。顶点粘合根据交叉置换（定义 8）进行定义。在将地图表示为曲面上图的胞腔嵌入时，该操作具有如下含义：如果两个顶点能够在不与任何边发生交叉的情况下连续地相向移动直至重合，或者它们位于不同的连通分支中，那么就可以通过该操作将这两个顶点识别。顶点粘合可以通过插入一条边（以保持亏格和可定向性的方式连接待识别的两个顶点），随后再将该边收缩来实现。对于地图而言，其他任何已定义的顶点识别规则，要么是顶点粘合的特殊情况，要么在某些情况下无法保持亏格和可定向性。随后，我们将地图同态定义为一系列此类顶点粘合操作，之后再进行一系列重边粘合（相当于图中消除平行边的操作）。按照我们所提出的定义，地图同态不仅保持可定向性和亏格，还保持其他关键的拓扑特征（例如面游走的可收缩性）以及地图的组合结构（忽略嵌入时，地图之间的同态会导出其底层图之间的同态）。

根据我们对地图同态的定义，我们将地图的核 （定义25）定义为整个地图的同态像中极小的子映射，这与图核的定义类似。我们证明了地图核与图核共有的若干性质，并从一类特定的可缩闭游走出发刻画地图核；粗略地说，这类游走会将一个圆盘与地图所在曲面的其余部分隔开。这一刻画利用了地图同态的“局部性”：任何地图同态都可以分解为一系列地图同态，其中每个同态都固定曲面上某条可缩曲线所围区域内的一个平面子图之外的所有部分。给出该刻画的一些应用后，我们证明，与图同态不同，地图同态序不存在稠密区间，因此不是普适的。最后，我们给出若干例子：两个地图之间存在无限多个核；存在一个无限间隙链；以及存在任意大的、具有共同同态像的核反链。

我们还想强调，我们工作的另一项贡献是对地图的各种拓扑特征给出纯组合的表述。这些地图表示为图在闭曲面上的胞腔嵌入，例如闭游走的可缩性。（我们需要一种比 Mohar 和 Thomassen [17]，所给概念更一般的可缩性概念；后者未涵盖会重复经过边的闭游走，而 Cabello 和 Mohar [2] 给出的可缩性拓扑定义则不易直接转化为组合术语。）

本文的组织结构如下。第 2 节中，我们采用地图的置换公理化，建立后续构造与证明所需的形式体系。第 2.1 节着重讨论地图中边的删除与收缩操作。通过考察这些操作对连通性、亏格和可定向性等各种地图参数的影响，我们得出了十一种地图边类型（相比之下，多重图只有普通边、桥和环三种边类型）。这些类型用于表明一条边在地图中所起的组合与拓扑角色。

第 3 节致力于建立地图之间同态的概念。在第 3.1 节中，我们对顶点粘合操作作出形式化说明；在第 3.2 节中，我们定义重边粘合操作。在第 3.3 节中，我们利用顶点粘合和重边粘合来定义一个地图到另一个地图的满同态，并利用已经确立的地图之间同构的概念，来定义一个地图到另一个地图的单同态。

映射到另一个映射中。通过复合一个满同态和一个单同态，我们最终得出从一个地图到另一个地图的同态意味着什么。

既然已经掌握了地图之间同态的形式化定义，第4节便专门讨论地图中图核的对应概念。在第4.2节和第4.3节中，我们用地图的置换表示来定义分离曲线和可缩曲线等拓扑概念，以便逐步导向第4.4节给出的地图为核的判定。随后，在按“存在同态”关系排列的核集合的偏序结构中，图核与地图核之间的显著差异也随之显现（第4.5节）。

2 地图

我们采用基于Tutte的置换公理化的地图组合定义，该定义针对细胞嵌入图 [18], [19, 第 X 章] （另见 [12, 1]）作了调整，以容纳孤立顶点（无边的地图）。此外，我们不采用 [19, 公理 X.1 至 X.4], 中的两个对合和基本置换，而是用三个对合来定义地图（如无边界的 2 [13, 14, 3], 维广义映射，并通过空置换循环这一技巧来容纳无边地图）。我们先引入一些记号。

有限集 C 上的置换采用函数记号书写，置换的乘积是它们的复合，并按从右到左的顺序读取：若 α、β：$C \to C$ 是两个置换，则对 $c \in C$，$\alpha\beta$ 定义为 $\alpha\beta(c) = \alpha(\beta(c))$。圆括号用于括起循环置换，也用于标示映射中的元素；在第一种情况下，我们会在括号与圈中的元素之间留出一些空格；在第二种情况下，则可以省略若干括号（写作 αc，表示 $\alpha(c)$；注意，我们用拉丁字母表示交叉，用希腊字母表示置换）。对于 C 中由互不相同的元素组成的序列 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$，其循环记号置换 $(\ x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_k\ )$ 记作 $(\,\mathbf{x}\,)$。对于置换 α，令 $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_k)$；则 $(\ \alpha\mathbf{x}\ ) = \alpha(\,\mathbf{x}\,)\alpha^{-1}$。逆序列 $(x_k, \ldots, x_2, x_1)$ 记作 $\underline{\mathbf{x}}$，作为循环置换有 $(\,\mathbf{x}\,) = (\,\underline{\mathbf{x}}\,)^{-1}$。因此，$\alpha\,\underline{\mathbf{x}}$（等于 $\alpha\overline{\mathbf{x}}$）表示序列 $(\alpha x_k, \ldots, \alpha x_2, \alpha x_1)$，并且 $(\,\alpha\underline{\mathbf{x}}\,) = \alpha(\,\mathbf{x}\,)^{-1}\alpha^{-1}$。

定义 1. 令 V、E 和 F 为有限集，其元素分别称为顶点、边 和面。一个地图 $M = (V, E, F)$ 由一个元组$(C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ 指定，其中 C 是一个有限集，其元素称为交叉；并且

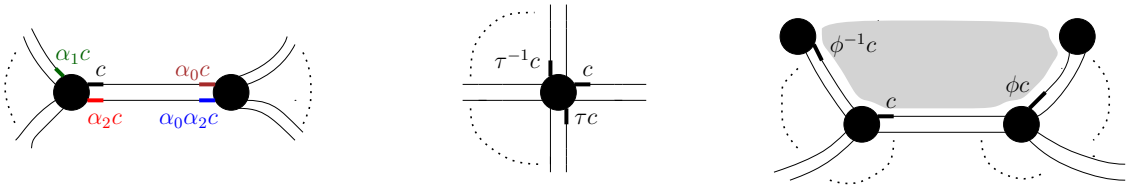
- $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$：$C \to C$ 是没有不动点的对合，也就是说，对于每个$i \in \{0, 1, 2\}$ 和所有 $c \in C$，$\alpha_i^2 c = c$ 和 $\alpha_i c \neq c$；
- 置换 α_0 和 α_2 可交换，即 $\alpha_0\alpha_2 = \alpha_2\alpha_0$；
- 每个顶点 $v \in V$ 都与置换 $\alpha_1\alpha_2$ 的不相交循环分解中的一对圈$(\ \mathbf{x}\ )$ $(\ \alpha_2\mathbf{x}\ )$ 相关联，其中$\mathbf{x}$ 是一个交叉序列（我们允许$\mathbf{x}$ 为空，从而形成一对空圈，这对应于 v 是一个孤立顶点）；
- 对合 α_1 的不相交循环分解补充了若干对空循环（每对对应地图的无边分支）；
- 每条边 $e \in E$ 都与某个交叉 $c \in C$对应的一对对换$(\ c\ \ \alpha_0\alpha_2 c\ )$ $(\ \alpha_0 c\ \ \alpha_2 c\ )$ 相关联；

- 每个面 $z \in F$ 都与置换 $\alpha_1\alpha_0$的不相交圈分解中的一对圈($\mathbf{y}$)($\alpha_0\mathbf{y}$) 相关联，其中$\mathbf{y}$ 是交叉序列（我们允许$\mathbf{y}$ 为空，这对应于 z 孤立顶点的面）。

M 的顶点置换和面置换分别记为

$$\tau = \alpha_1\alpha_2 \quad \text{and} \quad \phi = \alpha_1\alpha_0.$$

元组（C， α_0， α_1， α_2）也可以通过给出 C， α_0， α_2 以及顶点置换 τ 或面置换 ϕ来指定；Tutte [19, 第 X 章]采用了这种方法。图 1 展示了对合 α_0， α_1 和 α_2、顶点置换 τ 以及面置换 ϕ；在本图及后续图中，使用带状图表示有助于更直观地进行可视化。



(a) (b) (c)

图 1：（a）定义了作用于交叉 c上的地图的置换 α_0， α_1， α_2；（b）顶点置换$\tau = \alpha_1\alpha_2$；（c）面置换 $\phi = \alpha_1\alpha_0$。阴影区域表示一个面，而点表示该区域中可能还有一些额外的边。

对于由元组（C， α_0， α_1， α_2）指定的地图 $M = (V, E, F)$，当上下文中无需说明 V， E 和 F 分别是什么时，可以写作 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$。我们还将写作 $v \equiv (\mathbf{x})$（$\alpha_2\mathbf{x}$）、$e \equiv$（c $\alpha_0\alpha_2 c$）（$\alpha_0 c$ $\alpha_2 c$）和 $z \equiv (\mathbf{y})$（$\alpha_0\mathbf{y}$），以表示分别与顶点 v、边 e和面 z相关联的圈。

设 $v \equiv (\mathbf{x})(\alpha_2\bar{\mathbf{x}})$ 是一个顶点，使得 $\mathbf{x}$ 中出现交叉 c or $\alpha_0 c$。我们称 v 与边 $e \equiv$(c $\alpha_0\alpha_2 c$)($\alpha_0 c$ $\alpha_2 c$)关联；类似地，如果 e 的一个交叉出现在与 z 相关联的 ϕ 的对应一对圈中，则称边 e 与面 z 关联。按照此关联定义，$\Gamma = (V, E)$ 是由 $(C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ 指定的地图 $M = (V, E, F)$ 的底层图。Γ 的孤立顶点与附加到 τ 的圈分解中的一对空圈相关联；相应的一对空圈也会附加到 ϕ 的圈分解中（表示给定嵌入中环绕 Γ 的孤立顶点的面）。

顶点 v 的度是其在 τ 的圈分解中关联的圈之一所含交叉的数量，而面 z 的度是其在 ϕ 中的一个圈所含交叉的数量。

M 的环是仅与一个顶点关联的边，而环是与两个不同顶点关联的边。我们分别用$\mathbf{v}(M)$、$\mathbf{e}(M)$和$\mathbf{f}(M)$表示 M的顶点数、边数和面数。$\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ 作用于 C的每个轨道都是 M的一个连通分支。与一个孤立顶点关联的 τ的每一对空圈各自构成一个连通分支。连通分支的数量记为$\mathbf{k}(M)$。如果一个地图只有一个连通分支，则称其为连通的（单个顶点上的无边地图是连通的）。

对于连通地图 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$，$\langle \alpha_0\alpha_2, \alpha_1\alpha_2 \rangle$ 作用于C的轨道数$\mathbf{o}(M)$要么为 1，要么为 2 [19, 定理 X.11]；当$\mathbf{o}(M) = 1$时，M是不可定向 的；当$\mathbf{o}(M) = 2$时，M是可定向 的。一般而言，一个（不一定连通的）地图 M 称为可定向的，如果它的所有连通分支都是

可定向的，否则称为不可定向。通过在所有地图上定义$\mathbf{o}(M) = \min_i \mathbf{o}(M_i)$（其中 M 有连通分支 $\{M_i\}$），将参数$\mathbf{o}(M)$从连通地图推广到所有地图。

地图 M 的 欧拉示性数 定义为

$$\boldsymbol{\chi}(M) = \mathbf{v}(M) - \mathbf{e}(M) + \mathbf{f}(M),$$

用于定义欧拉亏格的方程。

$$\mathbf{eg}(M) = 2\mathbf{k}(M) - \boldsymbol{\chi}(M),$$

该亏格 通过

$$\mathbf{g}(M) = \mathbf{eg}(M)/\mathbf{o}(M),$$

和带符号亏格通过

$$\mathbf{sg}(M) = [2\mathbf{o}(M) - 3]\mathbf{g}(M) = \frac{2\mathbf{o}(M) - 3}{\mathbf{o}(M)}\mathbf{eg}(M) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{eg}(M) & \text{if } \mathbf{o}(M) = 2 \\ -\mathbf{eg}(M) & \text{if } \mathbf{o}(M) = 1 \end{cases}. \tag{1}$$

参数$\mathbf{e}$、$\mathbf{f}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{k}$ $\boldsymbol{\chi}$、$\mathbf{g}$和$\mathbf{eg}$在各个连通分支上具有可加性：它们在M 上的取值等于其在每个连通分支上的取值之和。（可定向性参数$\mathbf{o}$和带符号亏格$\mathbf{sg}$ 参数则不具有这种连通分支上的可加性。）

两个地图 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $M' \equiv (C', \alpha_0', \alpha_1', \alpha_2')$ 是同构的 [19, X.4] 如果它们有相同数量的孤立顶点，并且存在一个双射 $\beta\colon C \to C'$，使得对于任意 $c \in C$ 和 $i \in \{0, 1, 2\}$，都有 $\beta\alpha_i c = \alpha_i'\beta c$。注意，$\beta$ 自然确定了两个地图的顶点、边和面之间，以及它们各自的顶点置换循环和面置换循环之间的双射。

地图 $M \equiv (C,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2)$ 的（几何）对偶是地图 $M^* \equiv (C,\ \alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_0)$。交换 α_0 和 α_2 以构造对偶的效果是得到 $\phi = \tau^*$ 和 $\tau = \phi^*$：M 的一个面周围边的旋转次序变为 M^* 中一个顶点周围边的旋转次序；反过来，M 的一个顶点周围边的旋转次序则变为 M^*的一个面周围边的旋转次序。M^*所对应的图由 $\Gamma^* = (F,\ E)$ 以及边-面关联关系给出。

本节所述地图的置换表示比以下等价的拓扑定义更适合我们的组合方法:

> 地图是嵌入在曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Sigma_k$ 上的图 Γ（每个 Σ_i 都是紧致、连通且无边界的 2-流形）：顶点是点，边是连接一对顶点的闭曲线，彼此不相交，但可能在端点处相交（通俗地说，图绘制在曲面上，使得两条边不会交叉）。

定义 1 的核心思想是，通过说明如何从某个给定顶点、边或面的附近一点，移动到其“相邻”顶点、边或面的附近一点，来描述图在曲面中的嵌入。为此，将边横向和纵向切分成四部分，即交叉[1]，描述邻接关系的对合则作用于这一组交叉上（见图 1）。

[1]正如 Tutte 所解释的那样，[19, X.10.2], “交叉”一词源于它们在图示中的表示形式：两支相交的箭头，一支沿着一条边，另一支横跨该边；这两支箭头分别由两个彼此可交换的对合反转。Bryant 和 Singerman [1] 将交叉称为叶片。如前所述，定义 1 给出的地图可以看作广义地图，[13, 14, 3], 在这一语境中，这些交叉被称为飞镖。对 Tutte 而言，“飞镖”一词用于表示一条有向边，它对应于一对通过两个彼此可交换的对合之积相互关联的交叉。

根据定义 1 给出的连通组合地图，我们可以通过沿着各个面粘合开圆盘（沿用该面交叉的一种置换）来得到一个曲面 Σ；由此，地图的底层图 Γ 嵌入到 Σ 中，并具有这样的性质：从 Σ 中移除 Γ 的顶点和边后，剩下的连通分支均与圆盘同胚。换言之，这是 Γ的一个*2-胞腔嵌入*。因此，连通地图与连通图在曲面中的 2-胞腔嵌入之间存在对应关系。特别地，图的每个连通分支都 2-胞腔嵌入到各自的连通曲面中。连通曲面 Σ 的亏格和可定向性，与底层图已在 Σ中进行 2-胞腔嵌入的连通地图的亏格和可定向性一致。

2.1 删除与收缩

地图 M 的边 e 的删除与收缩在 [9], 中有形式化定义，分别记作 $M\backslash e$ 和 M/e。[2] 对于环边，这些操作与在 M 的底层图中进行删除和收缩效果相同。删除 M 的一个环，同样对应于在底层图中删除该环。然而，收缩一个环的结果取决于其类型，并不等同于在底层图中删除它：如果该边的交叉 c 和 $\alpha_0 c$ 属于 τ 的同一个置换循环，则该环为**扭曲** 环；否则，该环为**非扭曲** 环（该边的交叉 c 和 $\alpha_2\alpha_0 c$ 属于 τ 的同一个置换循环）。收缩扭曲环的效果是将它的一侧“翻转”过去，而收缩非扭曲环完全不对应于在底层图中收缩该环：事实上，收缩非扭曲环会将与之关联的顶点分裂为两个顶点。

正如图中边的删除与收缩是对偶操作（就拟阵对偶性而言，此处相关的拟阵是该图的环拟阵）一样，地图中边的删除与收缩也是对偶操作（就几何对偶性而言）。因此， [9, 命题 A。5],

$$(M/e)^* = M^*\backslash e \qquad \text{and} \qquad (M\backslash e)^* = M^*/e. \tag{2}$$

与图类似，执行边的删除与收缩的顺序并不重要，这使我们能够定义边子集的删除与收缩。我们用 $M\backslash A$表示删除 A 中的边（按任意顺序）所得的结果，用 M/B 表示收缩 B 中的边（按任意顺序）所得的结果。如 [9, 引理 A。6], 所示，对于地图 M 以及 A, B 中边的互不相交子集 M，可得 $(M \setminus A)/B = (M/B) \setminus A$。

本文只需了解这些操作对顶点置换和面置换的影响，具体如表1和表2所述（实际上，删除与收缩的定义可以从这些表中得出）。对于顶点置换 τ，其影响取决于已经定义的三种边类型：环、非扭曲环和扭曲环。对于面置换 ϕ，我们还需要另外三种边类型： M的**对偶环**、**对偶扭曲环** 或对偶**非扭曲环**，它们分别定义为对偶地图 M^*中的环、扭曲环或非扭曲环。这些组合产生九种边类型；一些示例见图2。

虽然这九种边类型足以确定删除与收缩对地图参数$\mathbf{v}(M)$、$\mathbf{e}(M)$和$\mathbf{f}(M)$的影响，但要确定其对参数$\mathbf{k}(M)$和$\mathbf{o}(M)$的影响，并进而通过欧拉关系确定其对$\mathbf{g}(M)$的影响，还需要另外两种边类型：一条

[2]删除与收缩一条边对对合 α_1 的影响在引理9的证明中有所描述。

M 中 e的边类型 （$c\ \alpha_0\alpha_2 c$） （$\alpha_0 c\ \alpha_2 c$）	link	非扭曲环	扭曲环
τ中的循环对	$(c\ \mathbf{x})(\alpha_2 c\ \alpha_2\mathbf{x})^{-}$ $(\alpha_0\alpha_2 c\ \mathbf{y})\,(\alpha_0 c\ \alpha_2\mathbf{y})^{-}$	$(c\mathbf{x}\ \ \alpha_0\alpha_2 c\mathbf{y})$ <escape>$(\alpha_2\mathbf{x}\ \ \alpha_2 c\ \alpha_2\mathbf{y}^{-}\alpha_0 c)$ </escape>	$(c\mathbf{x}\ \ \alpha_0 c\mathbf{y})$ $(\alpha_2\overline{\mathbf{x}}\ \ \alpha_2 c\ \alpha_2\overline{\mathbf{y}}\ \ \alpha_0\alpha_2 c)$
循环对在 τ 删除 e 后	$(\mathbf{x})\,(\alpha_2\mathbf{x})^{-}$ $(\mathbf{y})\,(\alpha_2\mathbf{y})^{-}$	$(\mathbf{x}\,\mathbf{y})(\alpha_2\mathbf{x}^{-}\alpha_2\mathbf{y})^{-}$	$(\mathbf{x}\,\mathbf{y})(\alpha_2\mathbf{x}^{-}\alpha_2\mathbf{y})^{-}$
$\mathbf{v}(M\backslash e)\ =$	$\mathbf{v}(M)$	$\mathbf{v}(M)$	$\mathbf{v}(M)$
τ中的循环对 收缩 e后	$(\mathbf{x}\,\mathbf{y})(\alpha_2\mathbf{x}^{-}\alpha_2\mathbf{y})^{-}$	$(\mathbf{x})\,(\alpha_2\mathbf{x})^{-}$ $(\mathbf{y})\,(\alpha_2\mathbf{y})^{-}$	$(\mathbf{x}\ \ \alpha_2\mathbf{y})(\alpha_2\mathbf{x}\,\mathbf{y})$
$\mathbf{v}(M/e)\ =$	$\mathbf{v}(M)\ -1$	$\mathbf{v}(M)\ +1$	$\mathbf{v}(M)$

表1： 删除和收缩一条边对顶点置换 τ 的影响，其中 $\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$是（可能为空的）交叉序列。

e的 M 中的边类型 $(\ c\ \alpha_0\alpha_2 c)(\ \alpha_0 c\ \alpha_2 c)$	对偶环	对偶非扭曲环	对偶扭曲环
ϕ中的循环对	$(c\ \mathbf{x})(\alpha_0 c\ \alpha_0\mathbf{x})^{-}$ $(\alpha_0\alpha_2 c\ \mathbf{y})\,(\alpha_2 c\ \alpha_0\mathbf{y})^{-}$	$(c\mathbf{x}\ \ \alpha_0\alpha_2 c\mathbf{y})$ <escape>$(\alpha_0\mathbf{x}\ \ \alpha_0 c\ \alpha_0\mathbf{y}^{-}\alpha_2 c)$ </escape>	$(c\mathbf{x}\ \ \alpha_2 c\mathbf{y})$ $(\alpha_0\overline{\mathbf{x}}\ \ \alpha_0 c\ \alpha_0\overline{\mathbf{y}}\ \ \alpha_0\alpha_2 c)$
ϕ中的循环对 收缩 e 后	$(\mathbf{x})\,(\alpha_0\mathbf{x})^{-}$ $(\mathbf{y})\,(\alpha_0\mathbf{y})^{-}$	$(\mathbf{x}\,\mathbf{y})(\alpha_0\mathbf{x}^{-}\alpha_0\mathbf{y})^{-}$	$(\mathbf{x}\,\mathbf{y})(\alpha_0\mathbf{x}^{-}\alpha_0\mathbf{y})^{-}$
$\mathbf{f}(M/e)\ =$	$\mathbf{f}(M)$	$\mathbf{f}(M)$	$\mathbf{f}(M)$
循环对在 ϕ 删除 e 后	$(\mathbf{x}\,\mathbf{y})(\alpha_0\mathbf{x}^{-}\alpha_0\mathbf{y})^{-}$	$(\mathbf{x})\,(\alpha_0\mathbf{x})^{-}$ $(\mathbf{y})\,(\alpha_0\mathbf{y})^{-}$	$(\mathbf{x}\ \ \alpha_0\mathbf{y})(\alpha_0\mathbf{x}\,\mathbf{y})$
$\mathbf{f}(M\backslash e)\ =$	$\mathbf{f}(M)\ -1$	$\mathbf{f}(M)\ +1$	$\mathbf{f}(M)$

表 2： 收缩和删除边对面置换 ϕ的影响，其中$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 是（可能为空的）交叉序列。

桥 和一个对偶桥。桥的定义性质是 e 是

$$\mathbf{k}(M\backslash e) = \begin{cases} \mathbf{k}(M)+1 & \text{if } e \text{ is a bridge,} \\ \mathbf{k}(M) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3}$$

对偶桥 e 的定义具有相同的性质，只是将$\mathbf{k}(M\backslash e)$替换为$\mathbf{k}(M/e)$。

桥是一种特殊类型的环和对偶非扭曲环（它是一个环，因为删除顶点 v 上的环不会影响 v 与其他顶点的连接；它也是一个对偶非扭曲环，因为删除使 M 断开的边 e 会增加面数）。类似地，对偶桥是一种特殊类型的非扭曲环和对偶环。不是桥的（对偶）环称为（对偶）普通环。

Fi图 2 所示的地图合在一起包含了全部十一种边类型的示例。 s.

欧拉示性数和欧拉亏格。删除和收缩一条边 e 在M 上的作用对欧拉示性数 $\boldsymbol{\chi}(M)$ 的影响，依据表1和表2中的信息记录在表3中。从表中可以看出——正如 Tutte [19, 定理 X.26] 所证明的——收缩一个环不会改变欧拉示性数（对偶地，删除一个对偶环也不会改变它）。

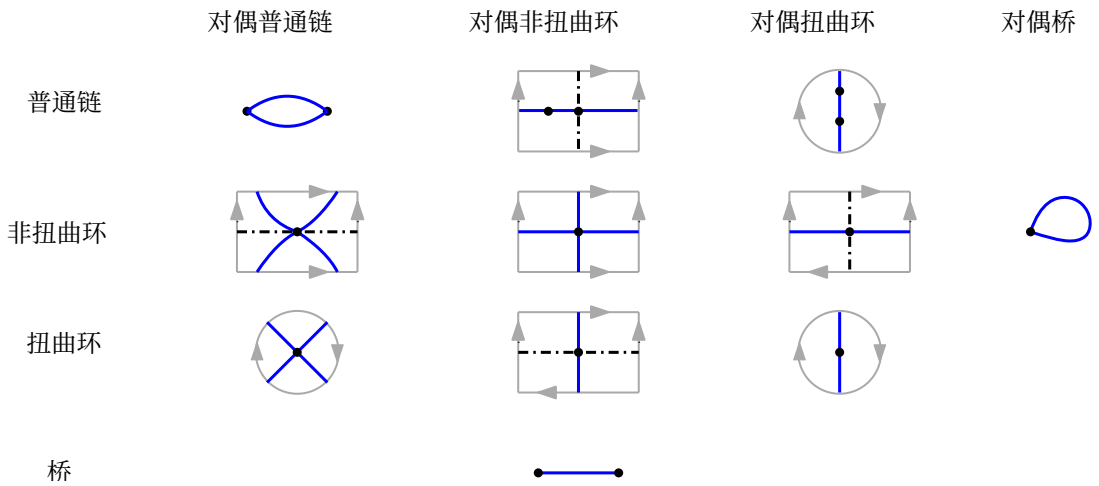


图2：包含全部十一种边类型的地图示例；实线边（蓝色）属于指定类型。表中的转置项为对偶地图（对角线上的项为自对偶地图）。

M 中的边类型（ e）	对偶环		对偶非扭曲环		对偶扭曲环	
	$\backslash e$	$/e$	$\backslash e$	$/e$	$\backslash e$	$/e$
link	0	0	$+2$	0	$+1$	0
非扭曲环	0	$+2$	$+2$	$+2$	$+1$	$+2$
扭曲环	0	$+1$	$+2$	$+1$	$+1$	$+1$

表3： 删除与收缩对欧拉示性数的影响：对于 e 的九种可能边类型（不区分桥），差值 $\chi(M\backslash e) - \chi(M)$（在标题为 $\backslash e$ 的列中）和 $\chi(M/e) - \chi(M)$（在标题为 $/e$ 的列中）。

表 3 结合桥与对偶桥的区分，得出表 4。表 4 展示了按照 11 种边类型进行删除与收缩时，对欧拉亏格 $\mathbf{eg}(M)$ 的影响。删除对偶环或桥时，欧拉亏格保持不变；否则会降低。

可定向性。 Tutte 在 [19, 定理 X.26 和 X.28] 中证明，收缩一个环不会改变可定向性（对偶地，删除一个对偶环也不会改变可定向性）；我们将这一结果作为以下引理中的陈述 (ii) 列出（证明略）。

引理2。 设 e 是连通地图 M 的一条边。

(i) 若$\mathbf{o}(M) = 2$，则$\mathbf{o}(M\backslash e) = \mathbf{o}(M) = \mathbf{o}(M/e)$。

(ii) 如果 e 是对偶环，则 $\mathbf{o}(M\backslash e) = \mathbf{o}(M)$；如果 e 是环，则 $\mathbf{o}(M/e) = \mathbf{o}(M)$。

(iii) 如果 e 是桥或对偶桥，则 $\mathbf{o}(M\backslash e) = \mathbf{o}(M) = \mathbf{o}(M/e)$.

证明。设 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$，且 $e \equiv (c \quad \alpha_0\alpha_2 c)(\alpha_0 c \quad \alpha_2 c)$。若$\mathbf{o}(M) = 2$，则$\mathbf{o}(M\backslash e) = 2$，因为删除只是从 M 的顶点置换τ的循环中移除 e 的交叉，因此不会合并这两个定向类（在 $\langle \tau, \alpha_0\alpha_2 \rangle$ 作用下的轨道）。

M 中的边类型	对偶环			对偶非扭曲环		对偶扭曲环	
	对偶普通环	对偶普通环	对偶桥				
	$\backslash e$	$/e$		$\backslash e$	$/e$	$\backslash e$	$/e$
普通链环	0	0		-2	0	-1	0
桥环				0			
非扭曲环	0	-2	0	-2	-2	-1	-2
扭曲环	0	-1		-2	-1	-1	-1

表 4： 删除与收缩对欧拉亏格的影响：根据十一种可能的边类型，$\mathbf{eg}(M\backslash e) - \mathbf{eg}(M)$（在 $\backslash e$列标题下）与 $\mathbf{eg}(M/e) - \mathbf{eg}(M)$（在 $/e$列标题下）之间的差值；对于 e （作为对偶连边的非扭曲环，按其对偶连边是普通链还是对偶桥进行划分；对于作为对偶非扭曲环的环，也采用类似的划分。）

由同样的论证应用于面置换 ϕ （或者通过对偶性，$\mathbf{o}(M^*) = \mathbf{o}(M)$），我们有$\mathbf{o}(M/e) = 2$。这证明了陈述 (i)。

当 $\mathbf{o}(M) = 2$ 陈述（iii）由陈述（i）推出。现在假设边 e 是一座桥，且 $\mathbf{o}(M) = 1$。群 $\langle \tau, \alpha_0\alpha_2 \rangle$ 在 C 上的作用只有一个轨道：以 τ 的圈为顶点的图 $\mathcal{G}_\tau$ 是连通的；若两个圈中一个含有交叉 a，且 $\alpha_0\alpha_2 a$ 位于另一个圈中，则在这两个圈之间连一条边（因为 $\mathcal{G}_\tau$ 的连通分支数对应于 $\langle \tau, \alpha_0\alpha_2 \rangle$ 在 C 上作用的轨道数）。这些圈

$$(\ c \quad \mathbf{x} \ ) (\ \alpha_2 c \quad \alpha_2 \overline{\mathbf{x}} \ ) \qquad \text{and} \qquad (\ \alpha_0\alpha_2 c \quad \mathbf{y} \ ) (\ \alpha_0 c \quad \alpha_2 \overline{\mathbf{y}} \ )$$

在 τ 中包含 e 的交叉，并且 $\mathcal{G}_\tau$ 中有一条边连接（ c x）和（ $\alpha_0\alpha_2 c$ y），还有一条边连接（$\alpha_2 c$ α_2x）和（ $\alpha_0 \overline{c}$ α_2y）。删去 e 后， τ 的这些圈变成 $C\backslash\{c, \alpha_0\alpha_2 c, \alpha_0 c, \alpha_2 c\}$ 的顶点置换 τ' 的圈（$\overline{\mathbf{x}}$） （ α_2x）和（$\overline{\mathbf{y}}$）（ α_2y），而 τ 的其他圈保持不变。原先连接（ c x）和（ $\alpha_0\alpha_2 c$ y）的边，以及连接（$\alpha_2 c$ α_2x）和（ $\alpha_0 c$ α_2y）的边，都在新图 $\mathcal{G}_{\tau'}$ 中消失。（由于 e 是一座桥，在将 $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ 的作用限制到 $C\backslash\{c, \alpha_0\alpha_2 c, \alpha_0 c, \alpha_2 c\}$ 上时，x 中的交叉与 y 中的交叉不属于同一个轨道。）然而， $\mathcal{G}_\tau$ 中的所有其他边都保留下来。因此，图 $\mathcal{G}_{\tau'}$ 不可能有四个连通分支；也就是说，群 $\langle \tau', \alpha_0\alpha_2 \rangle$ 在 $C\backslash\{c, \alpha_0\alpha_2 c, \alpha_0 c, \alpha_2 c\}$ 上的作用不可能有四个轨道（在 $\langle \tau', \alpha_0\alpha_2 \rangle$ 的作用下，要么存在一个包含 x 的交叉的单一轨道，要么存在一个包含 y 的交叉的单一轨道）。这意味着 $M\backslash e$ 的两个连通分支不可能都可定向，因此 $\mathbf{o}(M\backslash e) = \mathbf{o}(M) = 1$。

最后，我们证明 M/e 是不可定向的，因为 $\langle \tau, \alpha_0\alpha_2 \rangle$ 在 C 上作用所产生的单个轨道，在 M/e 中仍是单个轨道。收缩 e 后， τ 中包含 e 的交叉的圈变为 (x y) (α_2x α_2y)。于是，在 $\langle \tau, \alpha_0\alpha_2 \rangle$ 对 $C\backslash\{c, \alpha_0\alpha_2 c, \alpha_0 \overline{c}, \alpha_2 c\}$ 的作用下，包含x 的交叉的轨道与包含y 的交叉的轨道重合。因此，$\mathbf{o}(M\backslash e) = 1$。

陈述（iii）中对偶桥的情形，随即由 $\mathbf{o}(M^*) = \mathbf{o}(M)$、$(M\backslash e)^* = M/e$ 和 $(M/e)^* = M\backslash e$ 得出。□

亏格与带符号亏格。 接下来的两个引理将重点说明（带符号）亏格关于删除和收缩一条边的性质，这些性质将在后文中用到。

引理3。 设 e 是地图 M 的一条边。那么，

(i) $\mathbf{sg}(M\backslash e) = \mathbf{sg}(M)$ 当且仅当 e 是一个对偶环或桥。

(ii) $\mathbf{sg}(M/e) = \mathbf{sg}(M)$ 当且仅当 e 是一个环或对偶桥。

(iii) $\mathbf{sg}(M\backslash e) = \mathbf{sg}(M) = \mathbf{sg}(M/e)$ 当且仅当 e 是一个环和对偶环、一座桥或一座对偶桥时。

证明。只需证明命题（i），因为（ii）由对偶性推出，而（iii）是（i）和（ii）的合取。首先，假设 e 是一个对偶环或桥。由表 4 可知 $\mathbf{eg}(M\backslash e) = \mathbf{eg}(M)$，根据引理2，我们有 $\mathbf{o}(M\backslash e) = \mathbf{o}(M)$。由方程（1）可得 $\mathbf{sg}(M\backslash e) = \mathbf{sg}(M)$。

现在假设 $\mathbf{sg}(M\backslash e) = \mathbf{sg}(M)$，且 e 不是对偶环。那么，边 e 是对偶环。若$\mathbf{o}(M) = 2$，根据引理2，地图 M和 $M\backslash e$ 具有相同的可定向性。因此 $\mathbf{eg}(M\backslash e) = \mathbf{eg}(M)$，并且根据表 4，当且仅当 e 是桥时，这个等式成立。

现在假设 $\mathbf{o}(M) = 1$且$\mathbf{o}(M\backslash e) = 2$（否则我们可以像上面那样论证）。方程（1）给出 $\mathbf{sg}(M) = -\mathbf{eg}(M)$ 且 $\mathbf{sg}(M\backslash e) = \frac{1}{2}\mathbf{eg}(M\backslash e)$。此外，由表 4 可知 $\mathbf{eg}(M\backslash e) \in \{\mathbf{eg}(M) - 1, \mathbf{eg}(M) - 2\}$，这与欧拉亏格为整数矛盾。因此，$M$ 和 $M\backslash e$ 必定具有相同的可定向性；通过与$\mathbf{o}(M) = 2$的情形相同的论证，我们可以得出结论：e 是一座桥。 □

根据引理3和表 4，当且仅当 $\mathbf{sg}(M\backslash e) = \mathbf{sg}(M)$ 时，$\mathbf{eg}(M\backslash e) = \mathbf{eg}(M)$。边删除对带符号亏格 $\mathbf{sg}(M)$ 的影响，除此之外，是使其绝对值 $\mathbf{g}(M)$ 减小：

引理4。设 e 是地图 M 的一条边。

(i) 如果 M 是可定向的，那么$\mathbf{g}(M\backslash e) < \mathbf{g}(M)$；但若 e 是对偶环或桥，则$\mathbf{g}(M\backslash e) = \mathbf{g}(M)$。

(ii) 如果 M 和 $M\backslash e$ 都是不可定向的，那么$\mathbf{g}(M\backslash e) < \mathbf{g}(M)$；但若 e 是对偶环或桥，则$\mathbf{g}(M\backslash e) = \mathbf{g}(M)$。

(iii) 如果 M 是不可定向的，而 $M\backslash e$ 是可定向的，那么$2\mathbf{g}(M\backslash e) < \mathbf{g}(M)$。

证明。如果 M 是可定向的，那么根据引理2(i)，$M\backslash e$ 是可定向的。由表 4 以及在可定向性假设下$\mathbf{eg}(M) = 2\mathbf{g}(M)$ 和$\mathbf{eg}(M\backslash e) = 2\mathbf{g}(M\backslash e)$ 这一事实，可得结论 (i)。类似地，由表 4 以及$\mathbf{eg}(M) = \mathbf{g}(M)$ 和 $\mathbf{eg}(M\backslash e) = \mathbf{g}(M\backslash e)$ 这一事实（在可定向性假设下），可得结论 (ii)。对于这两个结论，根据引理3，当 e 是对偶环或桥时，有$\mathbf{g}(M\backslash e) = \mathbf{g}(M)$。

根据引理2（i），$\mathbf{o}(M) = 2$和$\mathbf{o}(M\backslash e) = 1$不可能同时成立，因此需要考虑的剩余情形是$\mathbf{o}(M) = 1$和$\mathbf{o}(M\backslash e) = 2$，这正是陈述（iii）的假设。根据引理2（ii），在此情形下，边 e必须是一个对偶环。参见表 4，这意味着$\mathbf{eg}(M\backslash e) < \mathbf{eg}(M)$，除非 e是桥；若是桥，则根据引理2（iii），有$\mathbf{o}(M\backslash e) = \mathbf{o}(M)$，这与假设矛盾。在给定的可定向性假设下，$\mathbf{eg}(M) = \mathbf{g}(M)$且$\mathbf{eg}(M\backslash e) = 2\mathbf{g}(M\backslash e)$。 □

子映射的欧拉亏格和带符号亏格。设 v 是地图 $M = (V, E, F)$ 的一个顶点。通过删除 v 得到的地图 $M - v$，是先删除所有与v关联的边，然后移除与现在已成为孤立顶点的 v 相关联的空循环对后得到的地图。如果对于某个 $U \subseteq V$，$N = M - U$ 成立，则地图 N 是 M 的诱导子图；类似地，如果对于某个 $A \subseteq E$，$N = M\backslash A$ 成立，则 N 是 M 的生成子图。M 的生成子图的诱导子图称为 M 的子映射。若所有类型的子映射都不同于该地图，则称它们为真子映射。

如果 M' 是 M 的子映射，那么 $\mathbf{v}(M') \leq \mathbf{v}(M)$，且 $\mathbf{e}(M') \leq \mathbf{e}(M)$；连通分支数和面数都可能双向变化。[3] 不过，接下来我们将证明欧拉亏格具有单调性。

引理 5. 设 M' 是地图 M 的子映射。那么，

(i) $\mathbf{eg}(M') \leq \mathbf{eg}(M)$，且 *(ii)* $\mathbf{eg}(M') = \mathbf{eg}(M)$ 当且仅当 $\mathbf{sg}(M') = \mathbf{sg}(M)$。

证明。 第(i)部分由表 4 得出：删除边不会增加欧拉亏格，删除孤立顶点也不会。第(ii)部分由表 4 和引理3得出。 □

3 地图同态

图同态的像可以通过依次识别不同顶点对，再抑制平行边（即关联于同一对顶点的边；对于平行环，则是关联于同一顶点的环）来实现。为了定义从地图出发的同态的像，使其限制在底层图上时给出一个图同态，我们需要明确如何在地图中识别一对顶点，以便无歧义地产生另一个地图，并定义地图中的边平行是什么意思。在地图中识别顶点时，还需要考虑与它们关联的面，以及顶点旋转和面旋转：这正是地图的置换公理化至关重要之处，它使我们能够表述一种在地图上定义明确的操作，类似于图中的顶点识别。

3.1 顶点粘合

本节将用交叉置换来定义顶点粘合操作，并借助边删除与收缩的性质，证明顶点粘合是保持亏格和可定向性的同时识别地图中顶点的唯一一般方法（这一性质尤其是一般定义同态的限制与复合所必需的）。首先，我们介绍一种作用于由交叉对合表示的地图上的操作，进而说明如何利用这一操作形式化顶点粘合。

定义 6. 设 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ 是一个地图，且有 $a, b \in C$。通过对 a 和 b 进行交错操作 得到的地图是 $M^{(a\,b)} \equiv (C, \alpha_0, \widetilde{\alpha}_1, \alpha_2)$，其中 $\widetilde{\alpha}_1 a = \alpha_1 b$，$\widetilde{\alpha}_1 b = \alpha_1 a$，且 $\widetilde{\alpha}_1 = \alpha_1$ 于 $C \setminus \{a, b, \alpha_1 a, \alpha_1 b\}$。

图 3 展示了交错操作的示例。对于 $\widetilde{\alpha}_1 a = \alpha_1 b$ 和 $\widetilde{\alpha}_1 b = \alpha_1 a$，我们有 $\widetilde{\alpha}_1(\alpha_1 a) = \widetilde{\alpha}_1^2 b = b$，同理，$\widetilde{\alpha}_1(\alpha_1 b) = a$。通过交错操作 a 和 b 得到的 C 上的对合 $\widetilde{\alpha}_1$，是将对合 α_1 与对换 $(a\ \ b)$ 共轭，或与对换 $(\alpha_1 a\ \ \alpha_1 b)$ 共轭的结果；因此我们有 $M^{(a\,b)} = M^{(\alpha_1 a\ \alpha_1 b)}$。$\alpha_1$ 的不相交循环分解中的一对对换 $(a\ \ \alpha_1 a)$ $(b\ \ \alpha_1 b)$ 被替换为一对对换 $(a\ \ \alpha_1 b)$ $(b\ \ \alpha_1 a)$。

虽然任意一对不同的交叉 a, b 都可以交错排列 M 以产生另一张地图，但只有在某些条件下，亏格和可定向性才会保持不变。接下来我们引入一些术语，以便描述这些条件。若交叉 c 与顶点 v （或面 z）关联，则称其为关联 。

[3]例如，嵌入环面中的两个环与同一个公共面关联；删除其中一个环后，另一个环便与两个面关联；而删除这个环会再次留下一个孤立顶点和一个面。

与 v （分别与 z）关联的置换循环对包含 c。如果一对交叉属于 τ （分别为 ϕ）的同一轨道，即它们属于与 v （分别与 z）关联的循环对中的同一置换循环，则这对交叉与顶点 v （面 z）重合。如果 a，b与公共面 z重合，则交叉 $\alpha_1 a$ 和 $\alpha_1 b$ 出现在（ a $\ldots$ b $\ldots$）的共轭逆循环中；因此， a，b与公共面 z重合，当且仅当 $\alpha_1 a$， $\alpha_1 b$与公共面 z重合。

引理 7. 当满足以下条件之一时，交错操作 a 和 b 可保持亏格和可定向性：

(1) (i) M 中的交叉 a 和 b 关联于不同顶点，且重合于一个公共面；或 *(ii)* 这些交叉所关联的顶点和面分别属于不同的连通分支；

(2) (i) M 中的交叉 a 和 b 重合于一个公共顶点，且关联于不同的面；或 *(ii)* 这些交叉重合于一个公共顶点和面，并且$\mathbf{k}(M^{(a\,b)}) > \mathbf{k}(M)$。

换言之，在这些情况下，$\mathbf{sg}(M^{(a\,b)}) = \mathbf{sg}(M)$。

证明。 首先假设交叉 a, b满足条件 (1)。我们将 $M^+ \equiv (C^+, \alpha_0^+, \alpha_1^+, \alpha_2^+)$定义为从 M 通过添加一条边 $e \equiv (\ c\ \ \alpha_0^+\alpha_2^+ c\ )\,(\ \alpha_0^+ c\ \ \alpha_2^+ c\ )$得到的地图，使得 $M^+\backslash e = M$和 $M^+/e = M^{(a\,b)}$。明确地说，可以验证 $M^+/e = M^{(a\,b)}$设定

- $C^+ = C \sqcup \{c, \alpha_0^+ c, \alpha_2^+ c, \alpha_0^+\alpha_2^+ c\}$;
- $\alpha_0^+ = \alpha_0$ on C;
- $\alpha_1^+ = \alpha_1$ on $C\backslash\{a, b, \alpha_1 a, \alpha_1 b\}$, and $\alpha_1^+ a = c$, $\alpha_1^+ b = \alpha_0^+\alpha_2^+ c$, $\alpha_1^+(\alpha_1 a) = \alpha_2^+ c$, $\alpha_1^+(\alpha_1 b) = \alpha_0^+ c$;
- $\alpha_2^+ = \alpha_2$ on C.

当 a 和 b 属于 ϕ的同一个置换循环时，边 e 是 M^+中的环和对偶环；当它们属于 M的不同连通分支时，边 e是 M^+的一条桥。由引理3，$\mathbf{sg}(M) = \mathbf{sg}(M^+)$，且 $\mathbf{sg}(M^+) = \mathbf{sg}(M^+/e)$，因此 $\mathbf{sg}(M) = \mathbf{sg}(M^{(a\,b)})$。

要证明满足条件（2）的交错操作也保持亏格和可定向性，只需证明：若在 M 中，交叉 a 和 b 重合于同一个顶点并关联不同的面（条件（2)(i)），则在 $M^{(a\,b)}$中，交叉 a和 b关联不同的顶点，并重合于同一个面（条件 (1)(i)）；类似地，若在 M 中，交叉 a 和 b 重合于同一个顶点和公共面，且 $\mathbf{k}(M^{(a\,b)}) > \mathbf{k}(M)$（条件（2)(ii)），则在 $M^{(a\,b)}$中，交叉 a和 b关联的顶点和面分别属于不同的连通分支（条件 (1)(ii)）。这样便有，$\mathbf{sg}(M^{(a\,b)}) = \mathbf{sg}((M^{(a\,b)})^{(a\,b)})$，结论由此得出，因为 $(M^{(a\,b)})^{(a\,b)} = M$。

接下来只需确定在条件（2）下，对交叉进行交错操作 a，b 对 M的顶点置换和面置换的影响；由于再次进行交错操作 a，b会使 $M^{(a\,b)}$恢复为原来的地图 M，因此只需确定在条件（1）下，交错操作对 τ 和 ϕ 的影响。（我们选择这个方向，是因为它有助于阐明下文定义 8 中的顶点粘合这一关键操作所涉及的内容，该操作将在图 3 中用与此处相同的记号加以说明。）

首先假设条件 (1)(i) 成立，即交叉 a 和 b 分别关联不同顶点 u 和 v，并在 M 中与公共面 z 重合。与 z 相关联的面置换循环对的形式为

$$\phi_z = (\ a\ \ \mathbf{x}\ \ b\ \ \mathbf{y}\ )\,(\ \alpha_0\overline{\mathbf{x}}\ \ \alpha_0 a\ \ \alpha_0\overline{\mathbf{y}}\ \ \alpha_0 b\ ),$$

a以及与 u 和 v 相关联的顶点置换循环对如下所示。 rm

$$\tau_u = (\ a\quad \mathbf{u}\ )(\ \alpha_2\overline{\mathbf{u}}\quad \alpha_2 a\ )\quad \text{and}\quad \tau_v = (\ b\quad \mathbf{v}\ )(\ \alpha_2\overline{\mathbf{v}}\quad \alpha_2 b\ ),$$

对于（可能为空的）交叉序列 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$、$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$。

交错操作 a 和 b后， M 的面 z 被分成两个面 x、y，而顶点 u 和 v 被合并~为一个顶点 w；就合并 u和 v并经过 z后得到的地图 $M^{(a\,b}$（C、α_0、$\widetilde{\alpha}_1$、α_2）的顶点置换 $\widetilde{\tau} = \widetilde{\alpha}_1\alpha_2$ 和面置换 $\phi = \widetilde{\alpha}_1\alpha_0$而言，

$$\widetilde{\phi}_x = (\ a\quad \mathbf{x}\ )(\ \alpha_0\overline{\mathbf{x}}\quad \alpha_0 a\ )\quad \text{and}\quad \widetilde{\phi}_y = (\ b\quad \mathbf{y}\ )(\ \alpha_0\overline{\mathbf{y}}\quad \alpha_0 b\ ),$$

and

$$\widetilde{\tau}_w = (\ a\quad \mathbf{u}\quad b\quad \mathbf{v}\ )(\ \alpha_2\overline{\mathbf{u}}\quad \alpha_2 a\quad \alpha_2\overline{\mathbf{v}}\quad \alpha_2 b\ ).$$

~在其他交叉处，我们有 $\widetilde{\tau} = \tau$和 $\phi = \phi_0$。因此，交错操作 a、b 包括将顶点 u 和v 合并为一个顶点 w，同时将公共面 z 分成面 x 和 y_0。现在，交叉 a、b 满足第（2）部分的条件（i）。再次对 a、b 进行交错操作，即可回到第（1）部分的条件（i）。

现在假设条件（1）（ii）：交叉 a，b与顶点 u，v及面 x，y关联，而这些顶点和面分别属于 M 的不同连通分支。这里有

$$\tau_u = (\ a\quad \mathbf{u}\ )(\ \alpha_2\overline{\mathbf{u}}\quad \alpha_2 a\ )\quad \text{and}\quad \tau_v = (\ b\quad \mathbf{v}\ )(\ \alpha_2\overline{\mathbf{v}}\quad \alpha_2 b\ ),$$

and

$$\phi_x = (\ a\quad \mathbf{x}\ )(\ \alpha_0\overline{\mathbf{x}}\quad \alpha_0 a\ )\quad \text{and}\quad \phi_y = (\ b\quad \mathbf{y}\ )(\ \alpha_0\overline{\mathbf{y}}\quad \alpha_0 b\ ),$$

（可能为空的）交叉序列 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$，$\mathbf{u}$和 $\mathbf{v}$。然后，将 u 和 v 合并为单个顶点 w，并将 x 和 y 合并为单个面 z，所得结果是地图 $M^{(a\,b)} \equiv (C,\ \alpha_0,\ \widetilde{\alpha}_1,\ \alpha_2)$，其中

$$\widetilde{\tau}_w = (\ \mathbf{u}\quad a\quad \mathbf{v}\quad b\ )(\ \alpha_2 a\quad \alpha_2\overline{\mathbf{u}}\quad \alpha_2 b\quad \alpha_2\overline{\mathbf{v}}\ ).$$
$$\widetilde{\phi}_z = (\ a\quad \mathbf{x}\quad b\quad \mathbf{y}\ )(\ \alpha_0\overline{\mathbf{x}}\quad \alpha_0 a\quad \alpha_0\overline{\mathbf{y}}\quad \alpha_0 b\ ).$$

交叉 a，b 现在满足第（2）部分的条件（ii）。再次对 a，b 进行交错操作，会使我们回到第（1）部分的条件（ii）。 □

引理 7 中保持亏格和可定向性的条件（1）在交错操作交叉的定义中发挥作用；见图 3。（在条件（2）下对交错操作交叉进行顶点粘合的逆操作会将一个顶点拆分，同时保持亏格和可定向性，该操作将在稍后的第 4.2 节中发挥作用。）

定义 8。设 a、b 是地图 M 中的交叉，且满足以下任一条件：

(i) a 和 b 与面 z 重合，而 a 与顶点 u 关联，且 b 与另一个顶点 v 关联；或

(ii) a、b 与顶点 u、v 及面 x、y 关联，且这些顶点和面属于不同的连通分支。

由 M 粘合顶点 u 和 v（若满足条件 ***(i)***，则分裂面 z；若满足条件 ***(ii)***，则合并面 x 和 y）所得的地图，是由 M 对 a 和 b 执行交错操作而得到的地图 $M^{(a\,b)}$。

如果 u 或 v 是孤立顶点，那么粘合顶点 u 和 v 就相当于删除该孤立顶点（如果两者都是孤立顶点，则任意选择其中一个删除）。

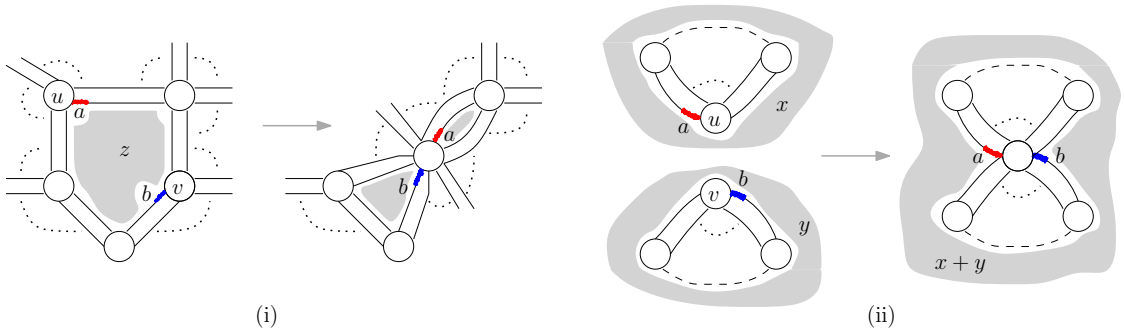


图 3： 对交叉 a和 b进行交错操作，得到地图 $M^{(a\,b)}$；该地图由粘合不同顶点 u 和 v得到，这两个顶点所关联的交叉 a 和 b：(i) 与一个面 z重合；(ii) 与不同连通分支中的不同面 x, y 相关联。

顶点粘合对 M 的顶点置换和面置换的影响，已在上文引理 7 的证明末尾明确给出。

现在，我们已经给出了顶点粘合的形式化定义——即一种保持亏格和可定向性的地图顶点识别操作。接下来，我们通过确立其若干与后续内容相关的性质来结束本节。从引理9到引理11，我们证明了顶点粘合与对偶环或桥的删除可交换。引理14指出，改变一系列顶点粘合操作的顺序，可以得到另一系列顶点粘合操作，而根据引理13，这两种操作最终得到相同的地图。

引理9。 如果 $e \equiv (\ c\ \ \alpha_0\alpha_2 c\,)(\ \alpha_0 c\ \ \alpha_2 c\,)$ 是 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ 的一条边，并且 a, b 是 M 的交叉，使得 $\{a, b, \alpha_1 a, \alpha_1 b\} \cap \{c, \alpha_0 c, \alpha_2 c, \alpha_0\alpha_2 c\} = \emptyset$，那么

$$(M\backslash e)^{(a\,b)} = M^{(a\,b)}\backslash e, \quad and \quad (M/e)^{(a\,b)} = M^{(a\,b)}/e.$$

证明。 我们证明删除 e 的恒等映射；其收缩的证明类似。地图$M^{(a\,b)} \equiv (C,\ \alpha_0,\ \widetilde{\alpha}_1,\ \alpha_2)$ 的对合 $\widetilde{\alpha}_1$ 等于将 α_1 与 $(a\ \ b)$ 共轭所得的结果。地图$M\backslash e \equiv (C',\ \alpha'_0,\ \alpha'_1,\ \alpha'_2)$ 有 $C' = C \setminus \{c, \alpha_0 c, \alpha_2 c, \alpha_0\alpha_2 c\}$，且 $\alpha'_0 = \alpha_0$和 $\alpha'_2 = \alpha_2$位于 C'上。为了根据不相交循环分解（对换的乘积）从 α_1 得到 α'_1，考虑 α_1 中包含来自边 e的交叉的（至多四个）对换。我们先说明如何从 α_1的对换得到 α'_1 的对换；然后说明在什么条件下会向 α'_1 添加成对的空圈（表示新的孤立顶点）。

如果 e 的交叉分别位于 α_1 的四个不同对换中，移除这些交叉后，将原先与 c 和 $\alpha_2 c$ 配对的交叉合并成一个对换；同样，将原先与 $\alpha_0 c$ 和 $\alpha_0\alpha_2 c$ 配对的交叉合并成另一个对换。如果有三个对换包含来自 e 的交叉，那么其中一个对换包含 e 的两个交叉，另外两个对换各只包含来自 e 的一个交叉；移除 e 的交叉后，将剩余的非空圈合并，在原先两个对换的位置形成一个对换。最后，如果只有两个对换包含来自 e 的交叉，那么只需移除这两个对换，即可得到 α'_1 的对换。

向 α'_1 添加一对空圈的条件如下。如果 $\alpha_1 c = \alpha_2 c$，则添加一对空圈来表示由此产生的孤立顶点；同样，如果 $\alpha_1\alpha_0 c = \alpha_0\alpha_2 c$，则添加一对空圈来表示由此产生的孤立顶点。（这相当于删除一个端点度为一的环。）如果 $\alpha_1 c = \alpha_0 c$ 和 $\alpha_1\alpha_2 c = \alpha_2\alpha_0 c$,

则添加一对空圈。（这相当于删除一个非扭曲环，并得到一个新的孤立顶点。）如果 $\alpha_1 c = \alpha_2\alpha_0 c$ 和 $\alpha_1\alpha_2 c = \alpha_0 c$，则添加一对空圈。（这相当于删除一个扭曲环，并得到一个新的孤立顶点。）

因此我们看到，α_1' 的 $M\backslash e$ 对合仅在 $\{c, \alpha_0 c, \alpha_2 c, \alpha_0\alpha_2 c\} \cup \{\alpha_1 c, \alpha_1\alpha_0 c, \alpha_1\alpha_2 c, \alpha_1\alpha_0\alpha_2 c\}$上与 α_1 不同。

现在我们已经看到如何用对合 α_1来定义删除边[4]，于是我们注意到，假设 $\{a, b, \alpha_1 a, \alpha_1 b\} \cap \{c, \alpha_0 c, \alpha_2 c, \alpha_0\alpha_2 c\} = \emptyset$ 还意味着 $\{a, b, \alpha_1 a, \alpha_1 b\} \cap \{\alpha_1 c, \alpha_1\alpha_0 c, \alpha_1\alpha_2 c, \alpha_1\alpha_0\alpha_2 c\} = \emptyset$（将对合 α_1 应用于交集中的两个集合即可得出）。由于删除 e 和交错操作 a，b 因此只会在互不相交的交叉集合上改变 α_1，且二者都会保留 C'上的 α_0和 α_2，所以这两个操作可交换。 □

推论 10. 如果 $e \equiv (\ c\ \ \alpha_0\alpha_2 c\ )(\ \alpha_0 c\ \ \alpha_2 c\ )$ 是 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$的对偶环或桥，并且 a, b 是 M 的交叉，满足 $\{a, b, \alpha_1 a, \alpha_1 b\} \cap \{c, \alpha_0 c, \alpha_2 c, \alpha_0\alpha_2 c\} = \emptyset$，那么通过交错操作 a, b 表示的 M 的顶点粘合，也是 $M\backslash e$ 的顶点粘合，仍由交错操作 a, b表示。

证明. 由引理9，$(M\backslash e)^{(a\,b)} = M^{(a\,b)}\backslash e$，我们只需验证：与不同顶点关联、且在 M 中与同一个面重合，或位于 M 的不同连通分支中的交叉 a, b，在 $M\backslash e$ 中也与同一个面重合，或位于 $M\backslash e$ 的不同连通分支中。

删除 M 中与面 x' 和 y' 关联的对偶环 e，会将 x' 和 y' 合并为一个面 z'。如果 a，b与 M 的某个公共面 z 重合，那么在 $M\backslash e$ 中情况也相同（若 $z \notin \{x', y'\}$，则是同一个面 z；若 $z \in \{x', y'\}$，则是 x' 和 y' 的合并）。如果 a，b 属于 M 的不同连通分支，且在 M 中分别与面 x，y 关联，那么它们在 $M\backslash e$ 中也属于不同的连通分支，并且在 $M\backslash e$ 中与相同的面 x，y 关联，和在 M 中一样。

删除 M 中与面 z' 关联的桥 e，会将 z' 分割成两个面 x'、y'，它们属于不同的连通分支。如果 a、b 与 M 的某个公共面 z 重合，那么当 $z \neq z'$ 时，$M\backslash e$ 中情况也相同；如果 $z = z'$，则交叉 a、b 要么与 $M\backslash e$ 中的公共面 x' 或公共面 y' 重合，要么属于不同的连通分支，分别与面 x' 和 y' 关联。如果 a、b 属于 M 的不同连通分支，且在 M 中分别与面 x、y 关联，那么除非 $\{x, y\} \cap \{z\} \neq \emptyset$，否则它们在 $M\backslash e$ 中也属于不同的连通分支，并在 $M\backslash e$ 中与相同的面 x、y 关联，和在 M 中一样；若 $\{x, y\} \cap \{z\} \neq \emptyset$，则包含 e 的 M 所在连通分支中的面（例如包含 a 的 $x = z$）会被分割成两个面，其中一个包含 a（不过，关于 a、b 属于 $M \setminus e$ 的不同连通分支这一说法仍然成立）。 □

推论 10 可以扩展为下面的引理11，以涵盖对任意对偶环或桥的删除。这将使我们能够在推论12中，从 M 的顶点粘合导出一个相应的子映射的顶点粘合，且该子映射具有相同的亏格和可定向性。

引理11。 设 e 是地图$M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$的一个对偶环，或一个没有度为一的端点的桥。设 a, b 是 M 中关联于不同顶点的交叉，且要么与同一个面重合，要么位于 M的不同连通分支中。则存在唯一确定的交叉 $a', b' \in C$，使得$(M^{(a\,b)})\backslash e = (M\backslash e)^{(a'\,b')}$。特别地，$M$中由对 a, b 进行交错操作所表示的顶点粘合，对应于 $M\backslash e$ 中由对 a', b'进行交错操作所表示的顶点粘合。

[4]对于收缩，其对 α_1 的影响与删除时所述相同，只需交换 α_0 和 α_2 的角色（收缩会产生非扭曲环的孤立顶点，其中 $\alpha_1 c = \alpha_0 c$ 或 $\alpha_1\alpha_2 c = \alpha_0\alpha_2 c$。）.

证明。令 $e \equiv (\ c\ \ \alpha_0\alpha_2 c)(\ \alpha_0 c\ \ \alpha_2 c)$。当 $\{a, b, \alpha_1 a, \alpha_1 b\} \cap \{c, \alpha_0 c, \alpha_2 c, \alpha_0\alpha_2 c\} = \emptyset$ 时，根据推论 10，我们可以取 $a' = a, b' = b$。

如果 e 是对偶环，那么 a 和 b 不可能同时属于 $\{c, \alpha_0 c, \alpha_2 c, \alpha_0\alpha_2 c\}$，因为它们与同一个面重合（这会阻止 $b = \alpha_0 a$）；并且，由于 e 是对偶环，c，$\alpha_0 c$ 属于与 $\alpha_2 c$，$\alpha_0\alpha_2 c$ 不同的面（这会阻止 b 成为这些交叉之一）。不失一般性，设 $a = c$ 与 M 的面 x 关联，而 $b \notin \{c, \alpha_0 c, \alpha_2 c, \alpha_0\alpha_2 c\}$ 要么是与面 x 上的 a 重合的交叉，要么属于 M的另一个连通分支。若令 $a' = \alpha_1\alpha_2 a = \tau a$，则 $(M^{(a\ b)})\backslash e = (M\backslash e)^{(a'\ b)}$。

现在假设 e 是与面 z 关联的一座桥，且 $a = c$。可能是 $b = \alpha_0\alpha_2 c$，即与面 z上的 a 重合的一个交叉，但无论如何 $b \notin \{\alpha_0 c, \alpha_2 c\}$。当 $b \neq \alpha_0\alpha_2 c$时，选择相同的$a' = \alpha_1\alpha_2 a$可得 $(M^{(\ a\ b)})\backslash e = (M\backslash e)^{(a'\ b)}$，除非 a与 e的一个度为一的端点关联。当 $b = \alpha_0\alpha_2 c$时，交叉 $a' = \alpha_1\alpha_2 a$ 和 $b' = \alpha_1\alpha_2 b$ 属于 $M\backslash e$的不同连通分支，边 e是 $M^{(a\ b)}$中的一个环，因此有 $(M^{(a\ b)})\backslash e = (M\backslash e)^{(a'\ b')} = M/e$。

在所有情况下，当 $a \notin \{c, \alpha_0 c, \alpha_2 c, \alpha_0\alpha_2 c\}$ 时，交叉 a' 等于 a；当 $a \in \{c, \alpha_0 c, \alpha_2 c, \alpha_0\alpha_2 c\}$ 时，交叉 a' 等于 τa；同样，根据 b' 是否属于 e 的交叉，将其设为等于 b 或 τb。

□

以下推论给出了一种将顶点粘合序列限制到生成子图的方法，并将在第 3.3 节中用于定义地图同态对子映射的限制。

推论12。设 $M\backslash A$是 M的一个生成子图，使得$\mathbf{sg}(M\backslash A) = \mathbf{sg}(M)$，并设 a、b是 M 中分别与不同顶点 u、v 关联的交叉，且它们要么与同一个面重合，要么位于不同的连通分支中。如果 u 和 v 都不是 $M\backslash A$中的孤立顶点，那么存在 $M\backslash A$中的交叉 a'、b'，使得 $M^{(a\ b)}\backslash A = (M\backslash A)^{(a'\ b')}$。

证明。引理11和归纳法给出了该结果，因为根据引理3(i)，任何与 M 具有相同带符号亏格的生成子图，都可通过一系列删除对偶连边或桥得到。 □

下面的引　　理记录了交换两个交错排列的复合顺序所产生的影响　　.

引理13。对于地图 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ 中的两对不同交叉 a、b 和 a'、b'，以下陈述成立：

(i) 如果 a、b、a'、b' 互不相同，则 $(M^{(a\ b)})^{(a'\ b')} = (M^{(\ a'\ b')})^{(a\ b)}$；并且，以 $(\ \alpha_1 a\ \ \alpha_1 b\ )$ 替代 $(\ a\ \ b\ )$ 或以 $(\ \alpha_1 a'\ \ \alpha_1 b'\ )$ 替代 $(\ a'\ \ b'\ )$ 时，同一恒等式也成立。*(ii)* 如果 $a = a'$ 和 $b \neq b'$，则 $(M^{(a\ b)})^{(a\ b')} = (M^{(\ a\ b')})^{(\alpha_1 a\ \ \alpha_1 b)}$；并且，以 $(\ \alpha_1 a\ \ \alpha_1 b\ )$ 替代 $(\ a\ \ b\ )$ 或以 $(\ \alpha_1 a\ \ \alpha_1 b'\ )$ 替代 $(\ a\ \ b'\ )$ 时，同一恒等式也成立。*(iii)* 如果 $a = a'$ 和 $b = b'$，则 $(M^{(\ a\ b)})^{(a\ b)} = M$；并且，以 $(\ \alpha_1 a\ \ \alpha_1 b\ )$ 替代任一换位 $(\ a\ \ b\ )$（也可能同时替代两个）时，同一恒等式也成立。

证明。首先，假设 a'、b'、$\alpha_1 a'$、$\alpha_1 b'$ 中没有交叉，而 a、b、$\alpha_1 a$、$\alpha_1 b$ 中有一个交叉。那么，$(\ a\ \ b\ )(\ a'\ \ b'\ ) = (\ a'\ \ b'\ )(\ a\ \ b\ )$，因此先通过 $(\ a\ \ b\ )$ 再通过 $(\ a'\ \ b'\ )$ 对 α_1 进行共轭，与先通过 $(\ a'\ \ b'\ )$ 再通过 $(\ a\ \ b)$ 进行共轭所得的置换相同。因此，$(M^{(a\ b)})^{(a'\ b')} = (M^{(a'\ b')})^{(a\ b)}$，这证明了 (i)。同样的论证表明，用 $\alpha_1 a$、$\alpha_1 b$ 替换 a、b，或用 $\alpha_1 a'$、$\alpha_1 b'$ 替换 a'、b' 时，恒等映射仍然成立。

现在假设 $a = a'$ 和 $b \neq b'$。这个对合

$$\alpha_1 = (\ a\ \ \alpha_1 a\ )\ (\ b\ \ \alpha_1 b\ )\ (\ b'\ \ \alpha_1 b'\ )\ \ldots \tag{4}$$

通过 (a b') 或 ($\alpha_1 a$ $\alpha_1 b'$) 共轭后变为 (a $\alpha_1 b'$) (b $\alpha_1 b$) (b' $\alpha_1 a$) ...然后，通过 ($\alpha_1 a$ $\alpha_1 b$) 共轭得到

$$(\ a\ \ \alpha_1 b'\ )\ (\ b\ \ \alpha_1 a\ )\ (\ b'\ \ \alpha_1 b\ )\ \ldots \tag{5}$$

现在用（ a b ）或（ $\alpha_1 a$ $\alpha_1 b$ ）对（4）中的对合 α_1 进行共轭，得到

$$(\ b\ \ \alpha_1 a\ )\ (\ a\ \ \alpha_1 b\ )\ (\ b'\ \ \alpha_1 b'\ )\ \ldots,$$

然后通过 (a b') 共轭，得到 (b $\alpha_1 a$) (b' $\alpha_1 b$) (a $\alpha_1 b'$) ...，这与 (5) 中的对合相同。由此证明了 (ii)。

最后，当 $a = a'$ 和 $b = b'$ 时，先用 (a b) 共轭 α_1，再用 (a b) 共轭，等同于用对换的乘积 (a b) (a b) 共轭，该乘积等于恒等置换。由此得到 (iii)。

□

在陈述下一个引理之前，我们定义一个证明所需、且将在下文第 4.2 节中继续使用的概念。若交叉圈 γ 中不同的交叉 a, b, a', b' 满足 $\gamma = (\ a\,\mathbf{x}\ \ a'\mathbf{y}\,b\,\mathbf{z}\,b'\,\mathbf{w}\ )$ 或 $\gamma = (\ a\,\mathbf{x}\,b'\,\mathbf{y}\,b\,\mathbf{z}\,a'\,\mathbf{w}\ )$，则称它们是交错的，其中$\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$,$\mathbf{z}$ 和$\mathbf{w}$ 是（可能为空的）交叉序列。

引理14. 设 a, b 和 a', b' 是地图 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$的两对不同交叉，并设 $M_{(a\,b)}$是 M的顶点粘合，且$(M^{(a\,b)})^{(a'\,b')}$是 $M^{(a\,b)}$的顶点粘合。那么，或者

(i) $M^{(a'\,b')}$是 M和 $(M_{(a'\,b')})^{(a\,b)}$ 的顶点粘合 $M_{(a'\,b')}$，以及 $(M_{(a\,b)})^{(a'\,b')}$ $=$ $(M^{(a'\,b')})^{(a\,b)}$，或 *(ii)* $M^{(\alpha_1 a'\,\alpha_1 b')}$ 是 M的顶点粘合，且 $(M_{(\alpha_1 a'\,\alpha_1 b')})^{(a\,b)}$ 是 $M_{(\alpha_1 a'\,\alpha_1 b')}$ 的顶点粘合，并且 $(M^{(a\,b)})^{(a'\,b')} = (M^{(\alpha_1 a'\,\alpha_1 b')})^{(a\,b)}$；或 *(iii)* $M^{(a'\,b')}$ 是 M 的顶点粘合，且 $(M_{(a'\,b')})^{(\alpha_1 a\,\alpha_1 b)}$ 是 $M_{(a'\,b')}$ 的顶点粘合，并且 $(M^{(a\,b)})^{(a'\,b')} = (M_{(a'\,b')})^{(\alpha_1 a\,\alpha_1 b)}$。

证明。 陈述(i)、(ii)和(iii)的最后等式由引理13得出。为证明引理的其余部分，我们将证明如果 a, b 二者或

(h1) 与不同顶点关联，且与 M 的一个公共面重合，或

(h2) 与 M 的不同连通分支中的顶点和面关联,

而 a'， b' 要么是

(h1') 与不同顶点关联，并与 $M^{(a\,b)}$ 的公共面重合，或

(h2') 与不同连通分支中的顶点和面关联的 $M^{(a\,b)}$,

那么 a', b' 要么

(c1) 与不同顶点关联，且与 M 的一个公共面重合，或

(c2) 与 M 的不同连通分支中的顶点和面关联,

而 a, b 要么

(c1') 与不同顶点关联，且与 $M^{(a'\,b')}$ 的某个公共面重合，o r

(c2') 与不同连通分支中的顶点和面关联，其中 $M^{(a'\,b'}$),

并对陈述中的情形（ii）和（iii）作相应修改：对于（ii），在 (c1)、(c2)、(c1') 和 (c2') 中将 a' 替换为 $\alpha_1 a'$，并将 b' 替换为 $\alpha_1 b'$；对于（iii），在 (c1)、(c2)、(c1') 和 (c2') 中将 a 替换为 $\alpha_1 a$，并将 b 替换为 $\alpha_1 b$。

我们依次考察以下四种情形，它们由 M 中交叉 a, b 的位置以及 $M^{(a\,b)}$ 中 a', b' 的位置决定。我们注意到，情形（ii）和（iii）只会出现在下文证明的第一种情形中。

情形（*h1*）和（*h1'*）：在 M 中交错操作 a, b 将 M 中包含 a, b 的面 z 分成两个面 x, y，第一个包含 a，第二个包含 b。根据（h1'），$M^{(a\,b)}$ 中有一个面 z'，包含 a', b'。

如果 $z' \neq x$ 和 $z' \neq y$，那么面 z' 在 M中也是一个面，因此我们得到 (c1)（因为若 a'和 b'的顶点在 $M^{(a\,b)}$中不同，那么由于我们正在进行顶点粘合，它们在 M中也不同；这是因为存在一个从 M 的顶点到 $M^{(a\,b}$的顶点的满射映射）。现在，根据假设 $z' \neq x$和$z' \neq y$以及 (h1')，a和 b在 $M^{(a'\,b')}$ 中也与同一个面重合；此外，它们在 $M^{(a'\,b')}$中也关联于不同顶点，因为我们刚刚粘合了关联于 a' 的顶点和关联于 b'的顶点；若在 M中关联于 a和 b的两个不同顶点如今在 $M^{(a'\,b')}$中变成同一个顶点，这意味着它们在 $M^{(a\,b)}$中也已被粘合在一起，从而与假设 (h1') 矛盾。这就证明了所述的 (c1')。

如果 $z' = x$（情形 $z' = y$ 的论证类似），那么我们可以得出结论：$\{a, b, a', b'\}$ 都与 M 中的同一个面 z 关联。现在，条件 (h1') 蕴含 $\{a, b\} \neq \{a', b'\}$，否则 a' 和 b' 将位于两个不同的面中，这与 (h1') 矛盾。考虑交错两个面 z 的置换循环的交叉的循环 $\gamma = (\ a\ \ \alpha_0 a\ \ \phi a\ \ \alpha_0 \phi a\ \ \cdots\ \ \alpha_1 a)$（其中一个按其自身顺序排列，另一个按逆序排列）。首先假设 $|\{a, b, a', b'\}| = 4$，那么这四个交叉不能在 γ 中相互交错，否则 (h1') 将不成立。于是我们得到 (c1) 和 (c1')。现在假设 $|\{a, b, a', b'\}| = 3$，不妨设 $a' = a$。对于 γ 有两种情形：或者是 $\gamma_1 = (\ a = a'\,\mathrm{x}\ \ b\,\mathrm{y}\ \ b'\,\mathrm{z})$，或者是 $\gamma_2 = (\ a = a'\,\mathrm{x}\ \ b'\,\mathrm{y}\ \ b\,\mathrm{z})$，其中 x、y、z 是非空的交叉序列。第一种情形中，将 y 写作 $= (\mathrm{y}', \alpha_1 b')$，将 z 写作 $= (\mathrm{z}', \alpha_1 a')$，我们有 $\gamma_1 = (\,\alpha_1 a'\ \ a\,\mathrm{x}\,b\,\mathrm{y}'\ \ \alpha_1 b'\ \ b'\,\mathrm{z}')$，因此 $\{\alpha_1 a', \alpha_1 b'\}$ 和 $\{a, b\}$ 不相互交错，从而得到 (c1) 和 (c1') 对 $\alpha_1 a'$ 和 $\alpha_1 b'$ 成立（于是得到该陈述的第(ii)部分）。第二种情形中，将 y 写作 $= (\mathrm{y}', \alpha_1 b)$，将 z 写作 $= (\mathrm{z}', \alpha_1 a)$，我们有$\gamma_2 = (\ \alpha_1 a\ \ a'\mathrm{x}\ \ b'\mathrm{y}'\ \ \alpha_1 b\ \ b\,\mathrm{z}')$，因此 $\{\alpha_1 a, \alpha_1 b\}$ 和 $\{a', b'\}$ 不相互交错，从而 (c1) 和 (c1') 对 $\alpha_1 a$ 和 $\alpha_1 b$ 成立（于是得到该陈述的第(iii)部分）。

情形 *(h1)* 和 *(h2')*：由于在 M 中进行交错操作 a, b 会保持连通分支不变，交叉 a', b' 也必定属于 M 的不同连通分支。因此，(c2) 得证。现在证明 (c1') 成立。在 M 中进行交错操作 a', b' 时，包含 a 和 b 的 M 的连通分支所发生的唯一变化，可能只是向其某个顶点添加一些交叉。因此，如果 a 和 b 在 M 中分别与不同顶点关联，那么它们在 $M_{(\,a'\,b')}$ 中也分别与不同顶点关联。该连通分支的面所受的影响，是向其中一个面添加交叉。因此，如果 a 和 b 在 M 中与同一个面重合，那么它们在 $M_{(\,a'\,b')}$ 中也与某个面重合。这就证明了 (c1')。

[5] γ的循环性以及 $\{a', b'\}$ 和 $\{a, b\}$ 与该面重合这一事实，使得$\{a', \alpha_1 a\}$ 和 $\{b', \alpha_1 b'\}$ 在 γ_1 和 γ_2中的相对位置相同。

情形 (h2) 和 (h1')：在 M 中对 a,b 进行交错操作，会将它们各自的面 x,y 合并为一个面 z， a, b 在 $M^{(a\,b}$ 中与该面重合。如果包含 a' 和 b' 的 $M(_{\,a\,b})$ 的面 z' 不等于 z，那么 a',b' 在 M 中仍与该面重合，于是得到 (c1) 和 (c2')。如果 $z'=z$，则有两种可能。第一种是 a',b' 与 M 的某个公共面重合（即 x 或 y），因此 (c1) 成立；此外，由于在一个连通分支中粘合 a' 和 b' 的顶点不会影响另一个连通分支，(c2') 也成立。第二种可能是， a' 与 M 的同一个面关联，该面也与 a 或 b 关联；设该面为 x （但 a 和 a' 不一定重合），而 b' 与面 y 关联。在这种情况下，(c2) 成立。现在，在 $M^{(a\,b}$ 中，交叉 a' 和 b' 与 a 和 b 位于同一个面，并且假设 (h1') 表明， a' 和 b' 实际上与该面重合。如果 $\{a,a'\}$ 和 $\{b,b'\}$ 这两对对象分别在 M 的各自面上重合，则交叉 a 和 b 与 a' 和 b' 位于同一个面置换循环中；如果这两对对象都关联但未在 M 的各自面上重合，则它们位于不同的面置换循环中。（假设 (h1') 排除了其中一对重合而另一对不重合的情况。）此外，假设 (h1') 还意味着 a' 和 b' 在 $M^{(a\,b}$ 中分别与不同顶点关联。这就证明了 (c1')。

情形 *(h2)* 和 *(h2')*：对 M 中的 a 和 b 进行交错操作，会将 a 和 b的两个连通分支合并为一个，而 a' 和 b'的连通分支则不会合并。因此， M中的交叉 $\{a,b,a',b'\}$至少跨越三个连通分支。这表明 (c2) 和 (c2') 成立。 □

3.2 重复边

若 Γ的 e 和 f 是不同的平行边，那么分别删除 e 和 f后得到的图是同构的；该同构映射固定所有顶点，并固定除 e 和 f以外的所有边，同时交换这两条边。就同态是否存在而言，平行边可以互换：从 $\Gamma\backslash e$ 到图 Γ' 存在同态，当且仅当从 $\Gamma\backslash f$到 Γ'存在同态；此外，其中一条平行边是多余的，因为从 Γ 到 Γ' 存在同态，当且仅当从 $\Gamma\backslash e$ 到 Γ'存在同态。若考虑从图 Γ' 出发而非以它为目标的同态，同样的结论也成立。

然而，底层图相同、仅平行边的位置不同的地图可能并不同构。例如，一个带有一条弦的平面四环，再添加一条与该弦平行的边：一种情况下，围成一个二度面和一个三度面；另一种情况下，则围成两个三度面。

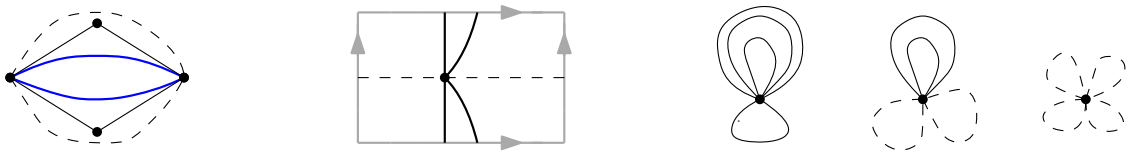
为了将图中平行边在同态方面不可区分这一性质推广到地图，我们需要增加一个拓扑约束。

定义15。 地图 M 中的两条边若关联于同一个二度面，则称为重边。

图4展示了重边和非重边的不同例子。可以看出，重边可以合并为一条边，同时仍保持在地图所在的曲面上（这与将公共面上的顶点对粘合起来，同时仍保持在地图所在的曲面上非常相似）。

定义16。 设 $M\equiv(C,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)$ 是一个包含交叉 a 和 $b=\phi a$ 的地图，使得$e\equiv(\quad a\quad \alpha_0\alpha_2 a\ )$ $(\quad \alpha_0 a\quad \alpha_2 a\ )$ 和 $f\equiv(\quad b\quad \alpha_0\alpha_2 b\ )(\quad \alpha_0 b\quad \alpha_2 b\ )$ 是重边，围成度为二的面 $(\quad a\quad b\ )(\quad \alpha_0 a\quad \alpha_0 b\ )$。将 e 与 f 粘合 后得到的地图为$M^{[a\,b]}\equiv(C,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)$，其中

- $\overline{C}=C\backslash\{a,\alpha_0 a,b,\alpha_0 b\}$;



(a) (b) (c)

图4： (a) 平面地图中的两对重边（较粗的蓝色边和虚线边）；(b) 环面上的两个重环（较粗的边），以及一个与其他环不重合的环（虚线）；(c) 一个顶点上四个环的三种平面嵌入，其中虚线环与其他任何环都不重合，非虚线环则是重环。

- $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0$ 和 $\alpha_1^- = \alpha_1$ 在 C上；
- $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2$ 在 $C\setminus\{\alpha_2 a, \alpha_0\alpha_2 a, \alpha_2 b, \alpha_0\alpha_2 b\}$上，并且

$$\bar{\alpha}_2(\alpha_2 a) = \alpha_0\alpha_2 b, \quad \bar{\alpha}_2(\alpha_0\alpha_2 a) = \alpha_2 b.$$

等价地，我们通过保留三个对合并设定 $\alpha_0\alpha_2 b \leftarrow a$和 $\alpha_0\alpha_2 a \leftarrow b$ （使得 $\alpha_2 b \leftarrow \alpha_0 a$ 和 $\alpha_2 a \leftarrow \alpha_0 b$），从 M得到 $M^{[a\,b]}$。

注17。 根据定义*16*给出的地图 $M^{[a\,b]}$，在设定 $\alpha_0\alpha_2 b \leftarrow a$、$\alpha_2 b \leftarrow \alpha_0 a$时与 $M\setminus f$同构，在设定 $\alpha_0\alpha_2 a \leftarrow b$、 $\alpha_2 a \leftarrow \alpha_0 b$时与 $M\setminus e$ 同构。

定义16可推广到位于较高次数公共面上的边对 e， f，或属于不同连通分支的边对，但我们只将其用于重边对：更一般的粘合操作 e 和 f 可定义为两次顶点粘合（若 e 和 f 没有共同端点）或一次顶点粘合（若 e 和 f 有一个共同端点）与一次重边粘合的复合。

M 中重复的边与 M^*中一个度为二的公共顶点关联。 M^* 中的极大诱导路径，其边集恰好是 M 上由“重复”关系的传递闭包所定义关系的等价类：此等价关系细化了 M底层图中的平行边关系。

引理18。 若 e, f是 M中的重复边，则 $\mathbf{sg}(M\setminus e) = \mathbf{sg}(M\setminus f) = \mathbf{sg}(M)$。

证明。 第一个等式由注17得出，第二个等式由引理3 (i) 得出，因为重复边是对偶环。

□

以下引理说明，重复边在顶点粘合下仍保持为重复边（但顶点粘合涉及由重复边围成的面时可能例外），并且可以在顶点粘合之前或之后粘合重复边，而不会改变所得的地图。

引理19。 令 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ 为一张包含交叉 a和 $b = \phi a$ 的地图，满足 $e \equiv (\ a\ \ \alpha_0\alpha_2 a\ )\,(\ \alpha_0 a\ \ \alpha_2 a\ )$ 和 $f \equiv (\ b\ \ \alpha_0\alpha_2 b\ )\,(\ \alpha_0 b\ \ \alpha_2 b\ )$ 是重复边。

假设 a'、b' 是 M 的交叉，且 $\{a', b', \alpha_1 a', \alpha_1 b'\}$ 与 $\{a, \alpha_0 a, b, \alpha_0 b\}$ 不相交。那么 e 和 f 在 $M^{(a'\,b')}$中重复，且

$$(M^{[a\,b]})^{(a'\,b')} = (M^{(a'\,b')})^{[a\,b]}.$$

证明。 根据交叉 $a', b', \alpha_1 a', \alpha_1 b'$ 的不相交条件，交错操作 a', b' 保持 $a, b, \alpha_1 a = \alpha_0 b$ 和 $\alpha_1 b = \alpha_0 a$ 不变，因此二度面（ a b ）（ $\alpha_0 a$ $\alpha_0 b$ ）也保持不变，即边 e 和 f 在 $M^{(a'\,b')}$ 中仍然重复。

交错操作 a', b' 固定了 α_0 和 α_2，且只改变四个交叉 $a', b', \alpha_1 a', \alpha_1 b'$ 上的 α_1；根据假设，这些交叉都属于 $C = C \setminus \{a, \alpha_0 a, b, \alpha_0 b\}$。地图 $M^{[a\,b]}$ 是通过将 α_0, α_1 限制到 C，并将 α_2 限制到 C 而得到的，同时将其在 $\alpha_2 a, \alpha_0\alpha_2 a, \alpha_2 b, \alpha_0\alpha_2 b$ 处的值分别从 $a, \alpha_0 a, b, \alpha_0 b$ 改为 $\alpha_0\alpha_2 b, \alpha_2 b, \alpha_0\alpha_2 a, \alpha_2 a$。因此，通过交错操作/重边粘合，对合 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ 受到如下影响：

	交错操作	重边粘合
α_0	fix	限制到 C
α_1	在 $\{a', \alpha_1 a', b', \alpha_1 b'\}$ 处改变	限制到 C
α_2	fix	限制到 C 并在 $\{\alpha_2 a, \alpha_0\alpha_2 a, \alpha_2 b, \alpha_0\alpha_2 b\}$ 上进行更改。

对于每个对合，先进行重边粘合再进行交错操作，与先进行交错操作再进行重边粘合，效果相同。（对于 α_1，需要满足四个交叉 a'， b'， $\alpha_1 a'$， $\alpha_1 b'$ 都属于 $C = C \setminus \{a, \alpha_0 a, b, \alpha_0 b\}$ 这一条件，这样才能先对 C 进行限制，再在 $\{a', b', \alpha_1 a', \alpha_1 b'\}$ 上进行更改。）

□

与在保留每个平行类中至少一条边的同时“删除图中的平行边”类似，我们可以在地图中迭代地粘合成对的重边，直到不再有重边为止。 M 中的重边 e， f 可以互换，也就是说，存在一个从 $M \backslash e$ 到 $M \backslash f$ 的同构，它固定所有顶点和所有边，除了 e 或 f。

3.3 同态

我们已经看到，先进行一系列顶点粘合，再进行一系列重边粘合，可以将一个地图变为另一个带符号亏格相同的地图：这些地图的底层图之间诱导出的映射是满同态（满射图同态）。这尤其促使我们给出地图之间满同态的以下定义。

定义20。 设 M 和 N 是带符号亏格相同的地图。

从 M 到 N 的满同态 $n : M \twoheadrightarrow N$ 是一个同构：它将 N 映到一个由 M 经过一系列顶点粘合和一系列重边粘合后得到的地图。

从 M 到 N 的单同态 是一个同构，它将 M 映到 N 的一个子映射。

在满同态中，两种操作序列——顶点粘合序列或重边粘合序列——都可以为空。注意，引理13、14和19共同表明，可以先进行顶点粘合，再进行重边粘合；而每种序列内部的操作顺序无关紧要（重边粘合彼此可交换，这一点很容易通过将其解释为边删除得出）。

在给出地图同态的定义之前，我们先记录以下命题，该命题将在第4节中使用。

命题21。 设 M 和 M' 是两个地图，存在满同态 $M \twoheadrightarrow M'$ 和 $M' \twoheadrightarrow M$（分别存在单同态 $M \rightarrowtail M'$ 和 $M' \rightarrowtail M$）。则， M 和 M' 同构。

证明。 如果 M 和 M'之间双向都存在满同态，那么既不可能存在顶点粘合（这会减少顶点数），也不可能存在重边粘合（这会减少边数）。因此， M' 是通过对 M 进行空的顶点粘合和重边粘合序列得到的，故 M' 和 M之间存在同构。

如果 M 和 M'之间存在双向单同态，那么 M 与 M' 的一个子映射之间存在同构，且 M' 与 M 的一个子映射之间也存在同构。由于这些地图都是有限的，因此 M 与 M' 之间存在同构。□

定义 22. 设 M、M' 是具有相同带符号亏格的地图。从 M 到 M' 的地图同态 是由一个从 M 到 M' 的子映射 N 的满同态，以及一个从 N 到 M' 的单同态复合而成。用符号表示，地图同态 h: $M \to M'$ 是满同态 $n: M \twoheadrightarrow N$ 与单同态 $m: N \rightarrowtail M'$ 的复合 $m \circ n$。

从一个地图到另一个地图的同态会在它们各自的底层图之间诱导出一个图同态：因此，地图同态可以看作一种图同态，它还满足由该图作为地图的嵌入所规定的额外拓扑约束。

一个同态 h： $M \to M'$由复合 $h = m \circ n$给出，其像记为 $h(M)$，等于其组成满同态 n的像；即 $h(M) = N$。稍微进一步滥用记号，与 h关联的是一个定义在交叉上的函数，我们用 $h(c)$表示 M 的交叉 c 经 h映射到的 M' 的交叉。当地图同态 h 仅由一系列以交错排列表示的顶点粘合构成时， h 固定每个交叉（作为交叉上的映射）；发生改变的是对合 α_1。当地图同态 h 仅由一次重边粘合构成时，它会将四个交叉映射到另外四个交叉，如定义16所述。此外，定义从 $h(M)$ 到 M' 的单同态的同构，由 $h(M)$ 的交叉与 M' 的交叉的一个子集之间的双射构成。

与同态 $h: M \to M'$ 相对应，有一个从 M 的顶点到 M' 的顶点的函数：与 M 中给定顶点 v 关联的交叉，经由 h 映射到 M' 中与唯一一个顶点 v' 关联的交叉。同样， $h: M \to M'$ 定义了一个从 M 的边到 M' 的边的函数：与 M 中一条边 e 关联的四个交叉，经由 h 映射到 M' 中与一条边 e' 关联的四个交叉。这两个分别定义在顶点和边上的函数，构成了 M 和 M' 的底层图之间的图同态。

同态映射的限制。 引理11和引理12给出了一个过程，可以将应用于 M 的一系列顶点粘合转换为应用于同亏格且可定向性相同的生成子映射 $M\backslash A$上的一系列顶点粘合。

定义23。 设 M为一个顶点置换为 τ的地图， $M\backslash A$为 M的一个具有相同带符号亏格的生成子映射。设 $h = m \circ n$ 为从 M 到 M'的地图同态。h到 $M\backslash A$的限制 记为 $h_{|M\backslash A}$： $M\backslash A \to M'$，通过对 n和 m 进行如下限制来定义：

n的限制：首先，通过将 M 中与顶点 u、v 关联的交叉 a、b 的交错排列所表示的顶点粘合替换为……，将其顶点粘合序列修改为 $M\backslash A$ 的顶点粘合序列。

- $M\backslash A$的顶点粘合，由 $M\backslash A$中的 $\tau^i a$、$\tau^j b$的交错排列表示（其中 i、$j \geq 0$在 $\tau^i a$、$\tau^j b$是 $M\backslash A$ 的交叉这一条件下取最小值，若此类 i、j存在）；

- 删除孤立顶点 u（如果对于任意 i，$\tau^i a$都不是 $M\backslash A$ 的交叉，但对于某个 j，$\tau^j b$是 $M\backslash A$ 的交叉），或孤立顶点 v（如果对于任意 j，$\tau^j b$都不是 $M\backslash A$ 的交叉，但对于某个 i，$\tau^i a$是$M\backslash A$ 的交叉）；

- 删除孤立顶点 u和 v之一（如果对于任意 i，j，$\tau^i a$，$\tau^j b$都不是 $M\backslash A$的交叉）。

其次，通过移除其中一条或两条边属于 A的重复边粘合，修改其重边粘合序列。

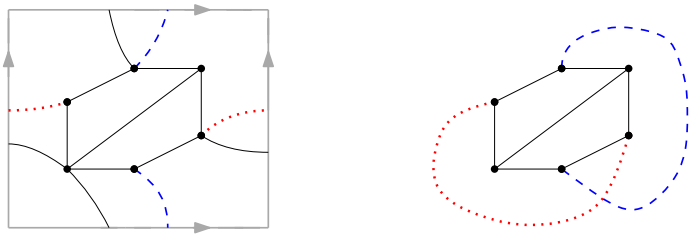
m的限制：我们将定义 m 的同构限制在受限满同态 n下子映射 $M\backslash A$的像上。

限制 $h_{|M\backslash A}$ 涉及粘合与定义 h 的构成满同态的顶点粘合序列中相同的顶点对（可能不同的是顶点粘合所合并或分裂的面）：对应于 h 的图同态从 M 的底层图到 M'的底层图的映射，被限制到 $M\backslash A$的底层图上。

在介绍了对生成子映射 $M\backslash A$ 的限制后，我们接下来定义从 h 到子映射 $N = (M\backslash A) - U$ 的同态映射 $M \to M'$ 的限制，其中 U 是 $M\backslash A$ 的孤立顶点的子集。要得到 $h_{|N}$，我们只需执行限制 $h_{|M\backslash A}$，但作如下修改：在顶点粘合序列中，当需要在 U 中的顶点和其外部的一个顶点 U 之间作出选择时，删除 U 中的顶点；之后，删除 U 中任何剩余的顶点。如果 N 与 M 具有相同的带符号亏格，那么 $M\backslash A$ 也如此，因此我们有以下结果。

命题 24. 设 N 是与 M 具有相同带符号亏格的地图 M 的子映射，且 $h : M \to M'$ 是从 M 到地图 M' 的同态。那么，限制 $h_{|N}$：$N \to M'$ 是一个同态。

鉴于前述命题，我们可能会问：是否可以为任意子映射 N 定义限制 $h_{|N}$，即使 N 是一个与 M 具有不同带符号亏格的子映射？一般而言，这是不可能的，如图 5 所示；如果 N 是一个平面子图，就无法按照 h 所要求的顺序进行顶点粘合。这就是要求 $\mathbf{sg}(N) = \mathbf{sg}(M)$ 的原因。



(a) (b)

图 5：(a) 嵌入环面中的地图 M；红色点线和蓝色虚线表示相应顶点的粘合。(b) M 的一个平面子图 N，其中无法进行 (a) 中的顶点粘合。

同态的复合。 设 M, M', M''是带符号亏格相同的地图，且h：$M \to M'$和 h'：$M' \to M''$是同态。像 $h(M)$ 是 M' 的子映射，且带符号亏格相同。由命题 24 可知，限制 $h'_{|h(M)}$：$h(M) \to M''$ 是一个

同态。 $h'_{|h(M)}$ 与 h 的复合定义了 h 和 h′的复合，这是一个同态 $h' \circ h\colon M \to M''$。

将 $h = m \circ n$ 和 $h' = m' \circ n'$ 分解为各自的满同态和单同态，复合 $h' \circ h$ 的满同态为 $n'_{|h(M)} \circ n$，其顶点粘合序列由定义 n 的顶点粘合序列与定义 n' 到 h（M）的限制的顶点粘合序列拼接而成。重边粘合序列由定义 n 的重边粘合序列，与 n' 到 h（M）的限制所定义的重边粘合序列中的边在 $n'_{|h(M)}$ 下的原像拼接而成，其中原像中的边可以按任意顺序排列。

由于地图同态的复合仍是地图同态，地图之间存在同态这一关系具有传递性；又因为从 M 到其自身的恒等映射是一个同态，因此这一关系在地图上定义了一个拟序。第4.5节通过定义地图的图核类比，从这一拟序导出一个偏序。

4 核

图 Γ [11] 的核是一个子图 Δ，它具有如下性质：对于任意图 Γ'，从 Γ 到 Γ' 存在同态，当且仅当从 Δ 到 Γ'存在同态；并且 Δ 的任何真子图都不具有这一性质。等价地，如果 Δ 是 Γ 的一个极小子图（按包含关系而言），且存在从 Γ 到 Δ的图同态，那么 Δ 就是 Γ 的核。图的核在同构意义下是唯一的。

我们以定义图的核的类似方式来定义地图的核。

定义25。 地图 M 的子映射 N 是 M 的核，如果存在同态 $M \to N$，但对于 N的任何真子映射 N'，都不存在同态 $M \to N'$。

与图一样，我们称一个地图是核，当它是自身的核时。地图 M 的一个核作为 M 的同态像，与 M 具有相同的带符号亏格，且没有重边。如果一个图不连通，那么它的核也可能不连通（例如，考虑将 K_3 与这样一个图作不交并：该图由 K_4 的每条完美匹配边各细分两次得到，因此围长为四；它是一个核，因为 K_3 不是细分后的 K_4 的同态像，且两个连通分支本身都是图核）；地图的情形类似（前述图的一个平面嵌入是映射核，因为图核的任意嵌入都是映射核）。因此，我们将重点放在连通地图的拟序集上。

4.1 基本性质

对于具有核 N 的地图 M，从 M 到 N 的同态必须是满射的（否则 M 将被映射到 N 的真子映射，这与 N 是一个核相矛盾）。对于图而言，地图的核是唯一的。

命题 26。 如果 N 和 N' 是地图 M 的核，那么 N 与 N' 同构。

证明。 我们有 $\mathbf{sg}(N) = \mathbf{sg}(M) = \mathbf{sg}(N')$，并且存在同态 $h\colon M \to N$和$h'\colon M \to N'$。根据命题 24，限制 $h_{|N'}\colon N' \to N$和 $h'_{|N}\colon N \to N'$是同态。此外，它们是满射的；否则复合 $h_{|N'} \circ h'$ 和

$h'_{|N} \circ h$ 将是从 M 到 N 和 N' 的真子映射的同态，这分别与 N 和 N' 是核这一事实相矛盾。现在由命题21可得结论。 □

在下面的命题中，我们将证明，图核 [11] 的一些基本性质在映射核中也有对应的性质。

命题 27. 以下关于地图 M 的核 N 的陈述成立。

(i) N 是一个核（即 N 是其自身的核）。

(ii) 存在一个从 M 到 N 的同态，其在 N 上的限制是恒等映射。

(iii) N 在粘合其重复边后是 M 的一个诱导子映射。

(iv) 给定另一个具有核 N' 的地图 M'，存在从 M 到 M' 的同态，当且仅当存在从 N 到 N' 的同态。

证明。 (i) 假设存在一个同态 h'，从 N 到 N 的真子映射 N'。我们可以将 h' 与一个同态 $h\colon M \to N$ 复合，得到一个同态 $h' \circ h\colon M \to N'$，这与 N 是 M 的核这一事实矛盾。因此， N 是一个核。

(ii) 令 $h\colon M \to N$，并考虑限制 $h_{|N}\colon N \to N$。根据命题 24，该限制是一个同态，因为 $\mathbf{sg}(N) = \mathbf{sg}(M)$。此外，它是满射的（因为 N 是一个核），因此 $h_{|N}$ 是一个同构（根据命题21，将恒等映射用作另一个满同态）。于是，我们可以将 h 与 $h_{|N}$ 的逆映射（也是一个同构）复合，得到一个从 M 到 N 的同态，它在 N 上是恒等映射。

(iii) 任意地图中的重边都可以通过粘合得到一个作为同态像的真子映射，因此 N 不能包含重边。

令 N' 为 M 中由 N 的顶点诱导的子映射（因此 N 是 N' 的生成子图）。由于 $\mathbf{sg}(N) = \mathbf{sg}(M)$，根据引理 5，我们有 $\mathbf{sg}(N') = \mathbf{sg}(M)$。令 $h\colon M \to N$ 为一个同态，其在限制到 N 时是恒等映射；根据 (ii)，我们可以作此假设。考虑限制映射 $h_{|N'}\colon N' \to N$，根据命题 24，以及 N 是 M 的核且 h 在 N 上是恒等映射这一事实，它是一个满同态。于是，定义20表明， N 同构于一个地图，该地图由 N' 经一系列顶点粘合、随后一系列重边粘合得到。由于 $V(N) = V(N')$，顶点粘合序列为空，只剩下一系列重边粘合。因此， N 是诱导子图 N'，其中的重边经过粘合，直至没有重边为止；示例见图 6。注意，粘合后的边在 N' 中是重复的，但在 M 中不是。

(iv) 设 $h\colon M \to N$ 是从 M 到其核 N 的同态。首先，假设存在同态 $k\colon N \to N'$。则复合 $k \circ h\colon M \to N'$ 是一个同态，并且 N' 是 M' 的子映射，且 $\mathbf{sg}(M') = \mathbf{sg}(N')$。因此， $k \circ h\colon M \to M'$ 是一个同态。

反之，假设存在同态 $\ell\colon M \to M'$，并令 $h'\colon M' \to N'$ 为从 M' 到其核 N' 的同态。由于 N 是 M 的子映射且具有相同的带符号亏格，因此存在单同态 $\iota\colon N \to M$，它仅将 N 视为 M 中的子映射；于是复合 $h' \circ \ell \circ \iota$ 是 N 与 N' 之间的同态，因为所有地图都具有相同的带符号亏格。 □

命题 27(ii) 的结论对 M 的任意子映射 N 都成立，只要它与 M 具有相同的带符号亏格（不一定是核），正如我们将在下面的引理中证明的那样。这一事实在第 4.3 节中会很有用，因为它确保：存在一个从 M 到像 N 的自同态，当且仅当存在一个固定 N 的此类自同态。

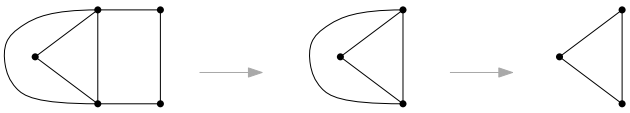


图 6： 一个地图（左），其核是一个三角形，但它不是诱导子映射：由三角形的三个顶点诱导的子映射中的重边需要删除。（请注意，只有在移除最右侧的顶点后，这条边才会成为重边。）

引理28。 设 M 是一个地图， N 是 M 的一个子映射，且两者具有相同的带符号亏格。若存在满同态 $n: M \twoheadrightarrow N,$ ，则存在一个从 M 到 N 的满同态，其在 N 上的限制是恒等映射。

证明。 如果 N 是 M 的核，且存在满同态 $n: M \twoheadrightarrow N,$ ，则可类似命题 27(ii) 得出结论。因此，假设 N 不是核，并令 $N_0 \subset N$ 为 N 的核，因而也是 M 的核（满同态 $n: M \twoheadrightarrow N$ 可与一个满同态 $N \twoheadrightarrow N_0$ 复合）。根据命题 27(ii)，存在满同态 $n_0: M \twoheadrightarrow N_0$ ，其在 N_0 上的限制是恒等映射。此满同态由一系列顶点粘合定义，这些粘合得到一个地图 $N_0 \cup \{e_1, \ldots, e_s\}$，其中的 e_i 是必须粘合以得到 N_0 的重边。每次进行顶点粘合时，我们都会识别两个不同顶点，从而得到一个少了一个顶点的地图。在此识别过程中，我们总是尽量保留属于 N_0 或 $N \setminus N_0$ 的顶点；注意，两个被识别的顶点不可能都属于 $V(N_0)$ ，因为 n_0 在 N_0 上是恒等映射。可以反向来看这一系列顶点粘合和重边粘合：我们不执行该序列中最后一次从 $N \setminus V(N_0)$ 移除一个顶点的顶点粘合，也不粘合那些在 N_1 中不再与另一条边重复的边 e_i ，从而由 N_0 构造出地图 N_1 。这便得到一个满同态 $n_1: M \twoheadrightarrow N_1$ ，其在 N_1 上的限制是恒等映射。

反复执行该过程，我们构造出一列地图 $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_k \subseteq N$，其中 N_i 是从 N_{i-1} 得到的：在得到 N_{i-1} 的过程中，不执行移除 $V(N)$ 中一个顶点的最后一次顶点粘合 $\setminus V(N_{i-1})$ ，也不粘合那些在 N_i 中不再是重边的边 e_i 。我们有 $V(N_k) = V(N)$ ；然后 N 是从 N_k 得到的：不粘合 N 中的重边（这些边可能已被粘合以构成 N_k ，因为它们存在重复边）。与每个 N_i 关联的是一个满同态 n_i ： $M \twoheadrightarrow N_i$ ，其在 N_i 上的限制是恒等映射。因此，从 n_k 很容易得到所需的满同态：当从 N_k 转到 N 时， $M \twoheadrightarrow N_k$ 是从 M 到 N 的满同态，其在 N 上的限制是恒等映射。

□

4.2 分离的和可缩的交叉回路

本节的目的是将简单（即非自相交）闭曲线、分离曲线和可缩曲线（或至少某一类型的可缩曲线）这些拓扑概念，转化为定义地图的交叉置换语言。

在拓扑学中，如果曲面上的闭曲线可以通过同伦映射到一个点，则称其为可缩的；等价地说，该曲线包含在曲面的一个区域内，而该区域与一个开圆盘同胚。这个概念在地图的语境中已有多种转化方式：闭曲线由游走来描述，而游走是以组合方式而非拓扑方式定义的。

将地图 M 视为图 Γ 到曲面 Σ的嵌入后，Mohar 和 Thomassen [17]将 Γ 中的一个圈（一条简单回路，每个顶点至多进入和离开一次）定义为可缩的，当且仅当它在 Σ 中定义的闭曲线在 M 中是可缩的。这一定义的一个不足之处是 天天爱彩票提现

对我们的目的而言，其问题在于它只适用于 Γ 中的圈，而不适用于会重复经过顶点或边的 Γ 闭游走。Cabello 和 Mohar [2],提出的定义规避了这一缺陷：他们将 Γ 中的闭游走称为在 M 中可缩，条件是它在 Σ 中定义的闭曲线可以经过 ϵ扰动，变为一条可缩闭曲线。这种扰动确保只有有限个自交；游走中多次经过的边或多次访问的顶点会分别表示为互不相交的曲线或点，因此彼此可以区分。从我们的角度来看，问题在于这两种可缩性定义都依赖于由 Γ 的闭游走确定的 Σ 中曲线的拓扑性质，而不是把地图 M 视为组合对象时所具有的性质。

为了保持在由交叉对合所定义的地图范畴内，我们首先引入一个与图中的 回路 类似的对象；在图中，回路是不重复经过任何边的闭游走，而在地图中，回路是不重复经过任何交叉的闭游走（定义 29）。通过这种方式，我们将 Mohar 和 Thomassen 所定义的可缩性概念从图圈扩展到交叉回路；因此，所有面游走都是可缩的，即使它们多次经过同一条边也是如此，这与面的定义性质相对应，即面围成拓扑圆盘。

定义 29. 设 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ 是一个地图，其顶点置换为 τ，面置换为 ϕ。 M 的交叉回路 κ 是一对圈，

$$\kappa = (\ c_0\ \ c_1\ \ \cdots\ \ c_{\ell-1}\ )\,(\ \alpha_0 c_{\ell-1}\ \ \cdots\ \ \alpha_0 c_1\ \ \alpha_0 c_0\ ),$$

具有以下性质： $\{c_i\} \cup \{\alpha_0 c_i\}$ 中的 2ℓ 交叉两两不同，并且对于每个 i，都存在一个 j，使得 $c_i = \tau^j \phi c_{i-1}$ （指标 i 按模 ℓ计算）。

交叉回路 κ 的两个圈表示其沿相反方向的遍历。其长度记作 $\ell(\kappa)$。遍历面 z 的面游走由交叉回路 ϕ_z表示。

回顾一下，图中的闭游走是由一系列边组成的序列，这些边连接一系列顶点，并从同一顶点出发、最终回到该顶点；而回路中不允许重复经过边。对于可定向地图，我们可以使用半边找到一种组合表示法（将半边集合视为等价类中模 $\langle \alpha_0\alpha_2, \phi \rangle$ 的交叉集合，因此图中每条边对应两条半边，而不是四个交叉）。因此，在沿可定向地图的交叉回路中，每条半边最多遍历一次，所以每条边最多遍历两次，每个方向各一次。如果地图不可定向，我们会在组合表示法中为每条边额外添加一对半边，使交叉总数达到四个；此时交叉回路至多使用来自 $\{c, \alpha_0 c\}$ 的每个交叉一次，因此每条边至多使用两次。

为顶点-边关联选择交叉，不仅体现了行进方向（我们从 c “到 $\alpha_0 c$”，然后“到 $\alpha_1\alpha_0 c$”），还体现了行走所在的边的哪一“侧”， c 位于一侧，而 $\alpha_2 c$ 位于另一侧。例如，环沿哪个方向 traversed 取决于选择 c、 $\alpha_2 c$ 或 $\alpha_0 c$ $\alpha_0\alpha_2 c$ 中的哪一个来表示顶点-边关联，因而也表示边的哪一侧。于是，地图中的闭行走不仅由顶点和边的序列给出，还由沿边行走时所处的一侧给出——这由面置换ϕ 如何指示行走沿一条边迈出一步所决定，也正是其在定义 29 中所起作用的原因。

如果不存在两个不同的指标 (i、 j)，使得交叉对 $\alpha_0 c_i$、 c_{i+1} 和$\alpha_0 c_j$、 c_{j+1}在由与某个给定顶点关联的所有交叉组成的圈 (c $\alpha_1 c$ τc $\tau\alpha_1 c \cdots$ $\tau^{-1} c$ $\tau^{-1}\alpha_1 c$) 中交错，则称交叉回路 (c_0 c_1 $\cdots$ $c_{\ell-1}$) ($\alpha_0 c_{\ell-1}$ $\cdots$ $\alpha_0 c_1$ $\alpha_0 c_0$) 是非自交的。

接下来，我们介绍一种沿无自交交叉回路切割地图的步骤，该步骤依赖于两种首先定义的操作：边分裂和顶点分裂。

定义 30。 设 $e \equiv (\ \ c\ \ \alpha_0\alpha_2 c\,)\,(\ \ \alpha_0 c\ \ \alpha_2 c\,)$ 是地图 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$的一条边。由 M通过将边分裂 e 为两条不同的边而得到、且这两条边围成一个新的二度面的地图 $M' \equiv (C', \alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2)$ 定义如下：

- $C' = C \sqcup \{\alpha'_2 c,\ \alpha'_2\alpha_0 c,\ \alpha'_2\alpha_2 c, \alpha'_2\alpha_0\alpha_2 c\}$;
- $\alpha'_0 = \alpha_0$ 在 C上，且

$$\begin{aligned} \alpha'_0(\alpha'_2 c) &= \alpha'_2\alpha_0 c\,, & \alpha'_0(\alpha'_2\alpha_0 c) &= \alpha'_2 c\,,\\ \alpha'_0(\alpha'_2\alpha_0\alpha_2 c) &= \alpha'_2\alpha_2 c\,, & \alpha'_0(\alpha'_2\alpha_2 c) &= \alpha'_2\alpha_0\alpha_2 c\,; \end{aligned}$$

- $\alpha'_2 = \alpha_2$ 在 $C \setminus \{c, \alpha_0 c, \alpha_2 c, \alpha_0\alpha_2 c\}$上，且

$$\begin{aligned} \alpha'_2(\alpha'_2 c) &= c\,, & \alpha'_2(\alpha'_2\alpha_0 c) &= \alpha_0 c\,,\\ \alpha'_2(\alpha'_2\alpha_0\alpha_2 c) &= \alpha_0\alpha_2 c\,, & \alpha'_2(\alpha'_2\alpha_2 c) &= \alpha_2 c\,; \end{aligned}$$

- $\alpha'_1 = \alpha_1$ 在 C上，且

$$\begin{aligned} \alpha'_1(\alpha'_2 c) &= \alpha'_2\alpha_2 c\,, & \alpha'_1(\alpha'_2\alpha_2 c) &= \alpha'_2 c\,,\\ \alpha'_1(\alpha'_2\alpha_0 c) &= \alpha'_2\alpha_0\alpha_2 c\,, & \alpha'_1(\alpha'_2\alpha_0\alpha_2 c) &= \alpha'_2\alpha_0 c\,. \end{aligned}$$

边分裂如图 7(a) 所示，很容易看出，该操作是边粘合的逆操作（在定义16中令 $a = \alpha'_2 c$ 和 $b = \alpha'_2(\alpha_0\alpha_2 c)$）。

定义16。 设 a、b 是一对不同的交叉，它们与地图$M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$的顶点 v 重合。通过交错操作 a、b得到的地图 $M^{(a\,b)}$，即为经由 a、b对顶点 v进行分裂 的结果。

顶点分裂如图 7(b) 所示。当交叉对 a, b 满足引理 7 的条件（2）时，此操作是顶点粘合的逆操作（见图 3）。Tutte [19, 第 X 章] 定义了一种相关的顶点分裂操作：该操作在定义16所述操作之后，插入一个连接按我们定义的方式分裂所产生的两个顶点的环，并以此保持亏格和可定向性（关于如何插入这条边，详见上文引理 7 的证明）。读者可在引理 43 的证明中了解如何利用定义16、顶点粘合、重边粘合和边添加，复现 Tutte 的顶点分裂操作。

非自交交叉回路 κ的沿周围切割过程（我们接下来将对其进行定义），非正式地说，操作如下。在沿着 κ 行进时，每经过一条边，我们就将其分裂一次（总计，每条边被分裂的次数等于它被经过的次数）。随后，分裂后各边的交叉与新生成的度为二的面（由边分裂产生）相关联。非自交这一性质使我们在分裂顶点时能够合并这些新的度为二的面：随着操作的进行，这些面逐渐合并成一个度数更大的偶度面，直到最后一步，回路闭合，合并后的面与自身粘合在一起，而最后一次顶点分裂产生两个新面 x 和 y。如果这最后一次顶点分裂使地图不连通，那么 x 和 y 位于不同的连通分支中（此时最后一次顶点分裂和之前的每一次分裂一样，都是顶点粘合的逆操作，并保持亏格和可定向性不变）。否则，这次分裂产生的两个顶点不与任何公共面关联（也不属于不同的连通分支）；其中一个与面 x 关联，另一个与面 y关联。

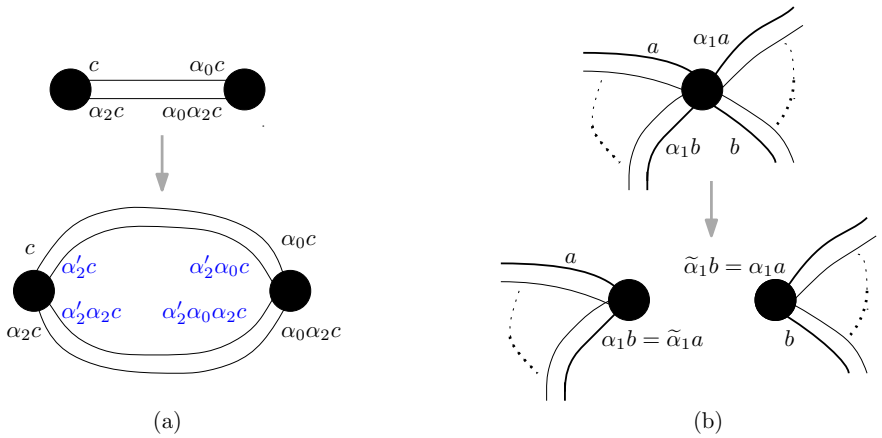


图7： (a) 边分裂：新交叉以蓝色标记；(b) 通过交叉 a、b 分裂地图 M 的一个顶点，从而得到地图 $M^{(a\ b)}$。

定义 32. 设 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ 是一个地图，并设

$$\kappa = (\ c_0\ \ c_1\ \ \cdots\ \ c_{\ell-1}\ )\ (\ \alpha_0 c_{\ell-1}\ \ \cdots\ \ \alpha_0 c_1\ \ \alpha_0 c_0\ )$$

是 M 的一个无自交交叉回路。由 M 通过沿周围切割κ 得到的地图 $M \ltimes \kappa$ 是按以下步骤得到的：*(i)* 依次分裂包含 c_0、c_1、……、$c_{\ell-1}$ 的 M 的边，生成地图 $M' \equiv (C'$、α_0'、α_1'、$\alpha_2')$；*(ii)* 对 M' 应用一系列顶点分裂，这些分裂通过对 $i = 0$、……、$\ell - 1$ 进行交错操作交叉 $\alpha_2'\alpha_0 c_i$ 和 $\alpha_1'\alpha_2' c_{i+1}$ 来实现（指标模 ℓ）。

注意，在定义 32 中， $M \ltimes \kappa$ 与 M' 具有相同的交叉集合。图 8 和图 9 展示了沿无自交交叉回路 κ周围切割这一过程的示例。接下来明确记录沿 κ 周围切割所产生的新面游走。

引理33。 设 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ 是一个连通地图，并设

$$\kappa = (\ c_0\ \ c_1\ \ \cdots\ \ c_{\ell-1}\ )\ (\ \alpha_0 c_{\ell-1}\ \ \cdots\ \ \alpha_0 c_1\ \ \alpha_0 c_0\ )$$

是 M的一个无自交交叉回路。若 $M' \equiv (C', \alpha_0', \alpha_1', \alpha_2')$ 由 M按照定义 *32* 依次分裂包含 $c_0, c_1, \ldots,$ $c_{\ell-1}$ 的边得到，那么 $M \ltimes \kappa$中不是 M 的面游走的两个面游走为

$$\begin{cases} \kappa_{\ltimes} = (\ \alpha_2' c_0\ \ \alpha_2' c_1\ \ \ldots\ \ \alpha_2' c_{\ell-1}\ )\ (\ \alpha_0'\alpha_2' c_{\ell-1}\ \ \ldots\ \ \alpha_0'\alpha_2' c_1\ \ \alpha_0'\alpha_2' c_0\ ), \\ \kappa^{\ltimes} = (\ \alpha_1'\alpha_2' c_0\ \ \alpha_1'\alpha_2' c_1\ \ \ldots\ \ \alpha_1'\alpha_2' c_{\ell-1}\ )\ (\ \alpha_0'\alpha_1'\alpha_2' c_{\ell-1}\ \ \ldots\ \ \alpha_0'\alpha_1'\alpha_2' c_1\ \ \alpha_0'\alpha_1'\alpha_2' c_0\ ). \end{cases}$$

证明。 记录分裂边以形成地图 M'，以及分裂 κ经过的顶点所产生的效果，即可得到结论。如果被分裂的顶点不是最后一个，那么与两个交错排列的交叉关联的两个面彼此不同；对于最后一个顶点，交叉与一个公共顶点和一个公共面重合。见图7。边分裂后进行顶点分裂，意味着我们沿着 κ 的边，在图 7(a) 中分别于$\alpha_2' c$ 和 $\alpha_2'\alpha_2 c$之间以及 $\alpha_2'\alpha_0 c$ 和 $\alpha_2'\alpha_0\alpha_2 c$ 之间切开。 □

下面的引理给出了在围绕一条非自相交交叉回路切割时所出现的各种情况下，顶点分裂对带符号亏格的影响。

引理 34。 设 $M \equiv (C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ 是一个连通地图，且 a、b 是与顶点 w 重合的 M 的交叉。经过沿 a 通过 w 到 b 进行顶点分裂，使地图成为 $M^{(a\,b)}$:

(i) 若 a、b 关联于不同的面，则 $\mathbf{k}(M^{(a\,b)}) = \mathbf{k}(M)$，且 $\mathbf{sg}(M_{(a\,b)}) = \mathbf{sg}(M)$。

(ii) 若 a、b 与同一个公共面重合，且 $\mathbf{k}(M^{(a\,b)}) > \mathbf{k}(M)$，则 $\mathbf{sg}(M^{(a\,b)}) = \mathbf{sg}(M)$。

(iii) 若 a、b 与同一个公共面重合，且 $\mathbf{k}(M^{(a\,b)}) = \mathbf{k}(M)$，则 $\mathbf{sg}(M^{(a\,b)}) \neq \mathbf{sg}(M)$。

证明。 (i) 在这种情况下，交叉 a, b 位于 $M^{(a\,b)}$，关联于不同的顶点，并与同一个公共面重合。因此，根据引理 7，且由于 $[M_{(a\,b)}]_{(a\,b)} = M$，我们有 $\mathbf{sg}(M^{(a\,b)}) = \mathbf{sg}(M)$。由欧拉示性数和欧拉亏格保持不变这一事实可知，$\mathbf{k}(M^{(a\,b)}) = \mathbf{k}(M)$。

(ii) 连通分支数量的假设意味着，将 w 分成 u 和 v 会使 $M^{(a\,b)}$ 中包含 u 的连通分支与包含 v 的连通分支断开。因此，交叉 a, b 位于 $M^{(a\,b)}$，其关联的顶点和面分属不同的连通分支。根据引理 7，结论成立。

(iii) 由 $\mathbf{v}(M_{(a\,b)}) = \mathbf{v}(M) + 1$、$\mathbf{e}(M_{(a\,b)}) = \mathbf{e}(M)$ 和 $\mathbf{f}(M_{(a\,b)}) = \mathbf{f}(M) + 1$，可得 $\boldsymbol{\chi}(M^{(a\,b)}) = \boldsymbol{\chi}(M) + 2$。后者结合假设 $\mathbf{k}(M_{(a\,b)}) = \mathbf{k}(M)$，可推出 $\mathbf{eg}(M_{(a\,b)}) = \mathbf{eg}(M) + 2$。因此，

$$\text{if} \quad \begin{cases} \mathbf{o}(M^{(a\,b)}) = \mathbf{o}(M) = 2 \\ \mathbf{o}(M^{(a\,b)}) = \mathbf{o}(M) = 1 \\ \mathbf{o}(M^{(a\,b)}) = 2, \mathbf{o}(M) = 1 \\ \mathbf{o}(M^{(a\,b)}) = 1, \mathbf{o}(M) = 2 \end{cases} \quad \text{then} \quad \begin{cases} \mathbf{sg}(M^{(a\,b)}) = \mathbf{sg}(M) + 1 \\ \mathbf{sg}(M^{(a\,b)}) = \mathbf{sg}(M) - 2 \\ \mathbf{sg}(M^{(a\,b)}) = 1 - \frac{\mathbf{sg}(M)}{2} \\ \mathbf{sg}(M^{(a\,b)}) = -2\mathbf{sg}(M) - 2 \end{cases} \qquad \square$$

地图 $M \ltimes \kappa$ 是通过先分裂（或复制） κ 的边（这不会改变 M 的带符号亏格），然后进行一系列顶点分裂而从 M 得到的。当 κ 是 M 的无自交交叉回路时，根据引理 34(i)，依次分裂它经过的顶点不会改变连通分支的数量，除非可能在分裂最后一个顶点时发生变化。按照定义 32 中的记号，这最后一次顶点分裂是通过交错操作交叉 $\alpha_2'\alpha_0 c_\ell$ 和 $\alpha_2' c_0$ 实现的；它们重合于一个公共顶点和一个公共面，因此 $\mathbf{k}(M) \leq \mathbf{k}(M \ltimes \kappa) \leq \mathbf{k}(M) + 1$. 当 $\mathbf{k}(M \ltimes \kappa) = \mathbf{k}(M)$ 时，无自交交叉回路 κ 称为非分离的；如果$\mathbf{k}(M \ltimes \kappa) = \mathbf{k}(M) + 1$，则称其为分离的 。引理 34(iii) 和引理 34(ii) 给出了这两种情况下带符号亏格的变化。

当 κ 是连通地图 M 的分离交叉回路时，地图 $M \ltimes \kappa$ 是两个地图的不交并:

- 一个包含 κ 的交叉和面游走 $\kappa_{\ltimes}$ 的连通地图 M_κ，以及
- 一个包含面游走 $\kappa^{\ltimes}$ 的交叉的连通地图 M^κ 。

引理33中描述了面游走 $\kappa_{\ltimes}$ 和 $\kappa^{\ltimes}$；另见图 8 和图 9。若 M_κ 或 M^κ 是平面地图，我们就称κ 为可缩的。对于非连通地图，如果交叉回路在其所属的连通分支中具有这一性质，就称它是可缩的。这一可缩性概念将 Mohar 和 Thomassen [17], 定义的可缩圈作为一个特例包含在内；当 Cabello 和 Mohar [2] 的定义仅限于那些可以经过 ϵ-微扰而变为非自相交的曲线时，本概念也与该定义一致。（我们的术语“可缩的”假定交叉回路是分离的，因而不是自相交的。）

定义 35。连通地图 M 的可缩交叉回路 κ 若满足以下条件，则称为面前： M_κ是平面，且面游走 $\kappa_{\ltimes}$ 在 M_κ的底层图中遍历一个圈。

要求交叉回路 κ 为面前，除了要求它可缩之外，还增加了方向限制，即它必须沿某个特定方向可缩（M_κ 是平面），而对面游走 $\kappa_{\ltimes}$ 的限制则增加了一项不可约条件。图8展示了一个可缩但非面前的交叉回路，因为它的收缩方向并非朝向平面部分。一个带有 M_κ 平面且非面前的可缩交叉回路 κ 的例子是：沿着环“内部”的半边，绕一个顶点上的两个平面环行走。（或者，取图3(a)右侧地图中由 (a ϕa b ϕb $\phi^2 b$) 给出的 κ 。）图9展示了一个面前交叉回路。

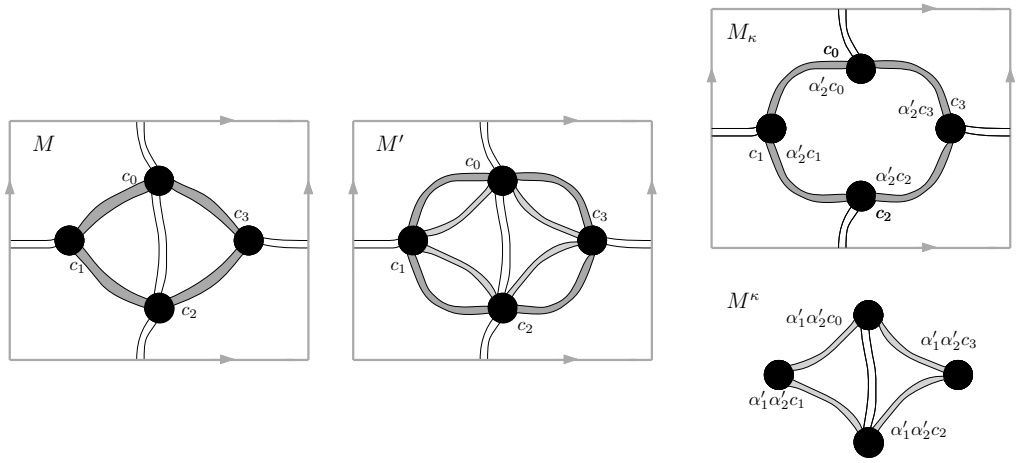


图8： 地图 M （嵌入在环面中）中的一个交叉回路 κ ，由 (c_0 c_1 c_2 c_3) 给出。将包含地图 κ 中交叉的边（深灰色边）分裂后，得到地图 M' （浅灰色边来自某次边分裂）。随后，通过对 M' 进行一系列顶点分裂得到地图 $M \ltimes \kappa$ ：它是 M_κ 与 M^κ 的不交并。交叉回路 κ 是可缩的（M^κ 是平面），但不是面前的（M_κ 不是平面）。

4.3 交叉回路与同态

本节将介绍地图同态与不同类型交叉回路之间相互作用的技术工具；这些工具将引出地图核的刻画（定理 41）。我们首先证明，连通地图的前面交叉回路与任何具有相同带符号亏格的连通子映射的面游走之间存在对应关系。随后，我们利用前面交叉回路对地图的边集进行恰当划分，使同态能够在划分所得的各个子集上独立作用。

引理 36。 设 M 是一个连通地图，且 N 是 M 的一个连通子映射，二者带符号亏格相同。则，

(i) N 中的每个面游走 κ 都是 M的一个前面交叉回路。*(ii)* 反之，对于每个前面交叉回路 κ，都存在一个子映射 $N(\kappa)$ ，其带符号亏格相同

d

亏格为 M ，使得 κ 是 $N(\kappa)$ 的面游走。*(iii)* $E(M) \setminus E(N)$ 中的每条边都属于某个面游走 κ 在 N 中对应的唯一一个 $M_\kappa \setminus E(\kappa_{\ltimes})$。

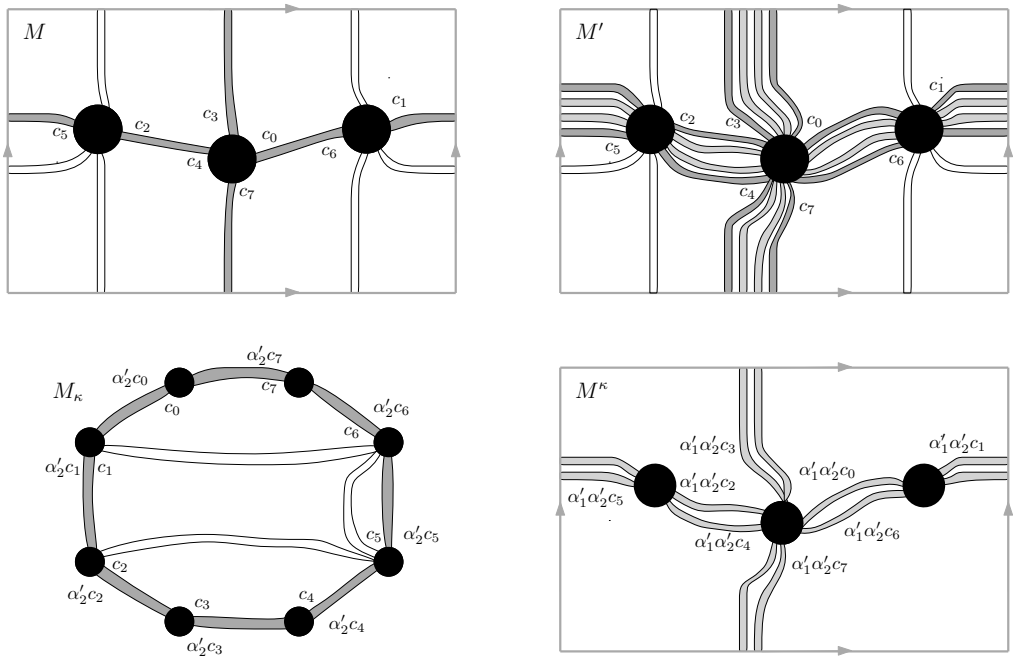


图9：地图 M （嵌入环面）中的一个交叉回路 κ，由（ c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7 ）给出。地图 M' 通过分裂包含 κ 中交叉的边（深灰色的边）得到；每条边分裂两次，因为定义 κ 的圈中有两个交叉（浅灰色的边来自某次边分裂）。随后，在 M'中通过一系列顶点分裂得到地图 $M \ltimes \kappa$：它是不交并 M_κ和M^κ。交叉回路 κ 是面前的。

证明。 对于 (i) 和 (iii)，只需证明：如果我们将 $E(M) \setminus E(N)$ 的边 e 逐条添加到 N 中（使所得地图始终保持连通），那么每条边 e 要么将一个已有的面细分，要么添加一个新顶点。然后，对连续地图的面游走进行一个简单的归纳论证，即可得出结论。

由于通过添加边 e 生成的子映射的可定向性保持不变，带符号亏格和欧拉亏格也保持不变（见引理 5）。因此，所有这些子映射的亏格相同；根据引理4，这意味着边 e 要么是对偶环（从而将一个面分成两个），要么是桥（添加一个新顶点），正如所需。

第(ii)部分可通过从 M 中移除 M_κ 里不属于 κ的边和顶点得到；此操作会生成 M 的一个子映射 $N(\kappa)$，满足该陈述的条件。 □

引理 37。 设 κ 是连通地图 M的一个分离交叉回路。

(i) 一个固定 κ 的交叉点的同态 $h_\kappa\colon M_\kappa \to M_\kappa$ 会导出一个同态 $h\colon M \to M$，具有以下性质：

- κ 是 $h(M)$的一个分离交叉回路，
- $h(M) \ltimes \kappa$ 由地图 M^κ 和连通地图 $h_\kappa(M_\kappa)$组成，
- h 是 $M \setminus [E(M_\kappa) \setminus E(\kappa)]$上的恒等映射。

(ii) 与 M 中的面 z 相对应的交叉回路 ϕ_z 是 M_κ 或 M^κ的面游走。反过来， M_κ （分别是 M^κ）中除 $\kappa_{\ltimes}$ （分别是 $\kappa^{\ltimes}$）之外的面游走定义了 M的一个面游走。

证明。 (i) 由于 κ 中的交叉由 h_κ 固定，h_κ 在 M_κ 中定义的顶点粘合所对应的交错操作不涉及来自 $\kappa_{\ltimes}$ 的任何交叉。此外，我们可以假设在粘合重复边时不会移除来自 $\kappa_{\ltimes}$ 的交叉（按照定义16中的记号，交叉 a 和 b 至少有一个不属于 $\kappa_{\ltimes}$；如果其中一个属于，例如 a，我们可以说包含 a 的边仍属于该地图）。类似地，我们可以考虑 M^κ 上的恒等映射，并得出结论：顶点粘合或重边粘合均不涉及来自 $\kappa^{\ltimes}$ 的交叉。

由于 κ 是分离的，引理 34(ii)(i) 得出 $\mathbf{sg}(M) = \mathbf{sg}(M \ltimes \kappa) = \mathbf{sg}(M_\kappa \sqcup M^\kappa)$。因此，我们可以通过粘合相应的顶点，逆转构成 $M \ltimes \kappa$ 的切割操作（按照定义 32 中的记号，这些顶点粘合对应于将所有交叉 $(\alpha'_2\alpha_0 c_i, \alpha'_1\alpha'_2 c_{i-1})$ 交错复原，指标模 ℓ），然后将 $\kappa_{\ltimes}$ 的边与 $\kappa^{\ltimes}$ 的边粘合。由此得到一个满足所述性质的同态$h : M \to M$。

(ii) 根据引理33，沿无自交交叉回路 κ 周围切割，会在 $M \ltimes \kappa$ 中产生另外两个面；它们恰好包含切割过程中新增的那些交叉。其余不涉及新增交叉的面游走 $M \ltimes \kappa$ 保持不变。此外，关于 κ、 $M \ltimes \kappa = M_\kappa \sqcup M^\kappa$ 的分离假设也成立，结论随即得出。 □

若地图 M 的一个面 z 同时也是 M_κ 的一个面（也就是说， ϕ_z 的交叉圈置换对同时定义了 M 和 M_κ 的面游走），则称该面包含于 κ （而 κ 包含 z）。

观察 38。 奇数长度的前面交叉回路 κ 要么是面游走，要么包含奇数个奇度面。若 κ 的长度为偶数，则它包含偶数个奇度面。证明奇数长度情形的论证如下（偶数长度情形类似）：M_κ 是平面，并且有一个由 $\kappa_{\ltimes}$ 定义的奇度面。考察对偶地图 M^*_κ，在 M_κ 中必定还存在奇数个其他奇度面；根据引理*37(ii)*，每个这样的面都是包含于 κ 的 M 的一个面（根据握手引理，奇度顶点的数量为偶数）。

固定地图 M 的一个前面交叉回路 κ，在 M_κ 的可缩交叉回路上定义偏序 $\preceq$： $\lambda \preceq \mu$ 当且仅当 λ 在 M_μ 中确定一个交叉回路，且 M_λ 中的所有交叉都属于 M_μ （可能不包括 $\lambda_{\ltimes}$）。此偏序有最大元 $\kappa_{\ltimes}$，并且对于 M_κ 的每个面 z，其最小元之一是 ϕ_z。

接下来，我们将运用偏序 $\preceq$，并综合本节前面的结果，以确定何时整个平面地图可以（以地图同态的方式）映射到其周围的前面交叉回路。当不会引起混淆时，我们用 $M \to \lambda$ 表示地图 M 映射到由前面交叉回路 λ 的边所诱导的地图。

引理 39。 设 κ 是连通地图 M 的一个前面交叉回路。假设存在 M_κ 的一个面 z，使得：

（*i*） z 不同于 M_κ中由 $\kappa_{\ltimes}$ 定义的面；

（*ii*） z 的度至少等于 $\kappa_{\ltimes}$所 *traversed* 的面的度，且两个面具有相同的奇偶性；

(iii) M_κ 的其他每个面都具有偶度；

(iv) 对于 M_κ 的每个前面交叉回路 λ，若 $\phi_z \preceq \lambda \preceq$，则 $\leq \ell\,(\kappa)$ $\lambda\,(\leq \ell)$ κ.

于是，存在一个 M_κ 的自同态，它将 M_κ 映射到由 κ （等价地， $\kappa_{\ltimes}$）的边所诱导的地图，并且在 κ 和 $\kappa_{\ltimes}$ 上是恒等映射。

以下事实用于证明前面的引理。

观察 40。 在引理 *39* 的假设下，有：

- M_κ 及其所有连通子图都是平面图，因而是可定向的。因此，我们可以用单个置换循环来表示与面、顶点和可缩交叉回路相关联的置换。
- M_κ 的任何交叉回路，只要是 M_κ 的底层图中的圈，就是可缩交叉回路（因为 M_κ 是平面图）。
- 任何前面交叉回路 λ，只要 $\phi_z \preceq \lambda \preceq \kappa$ 与 κ 具有相同的奇偶性，且 ϕ_z （这可由假设 *(ii)* 和 *(iii)* 通过奇偶性论证得出：若一个偶数长度的可缩交叉回路包含一个奇数度面，则它至少包含两个这样的面（观察 *38*））。

引理 *39* 的证明。 我们对 M_κ 内边和顶点的数量进行归纳。基本情形为 $\phi_z = \kappa$，因此 M_κ 是一个平面圈；利用恒等映射作为地图同态即可得到该结论。现在假设 $\phi_z \neq \kappa$；归纳论证采用分类讨论。

情形 *1*：不存在面前交叉回路 λ 满足 $\phi_z \preceq \lambda \preceq \kappa$ 和 $\phi_z \neq \lambda \neq \kappa$。令 z' 为不同于 z 的一个面，其中包含 M_κ 中 κ 的交叉（由于 $\phi_z \neq \kappa$，该面存在）。我们可以假设 $\phi_{z'} \neq \kappa$，否则 κ 将只包含 z'，而不会同时包含 z。令 $\phi_{z'} = (\ c_0 \ \cdots \ c_s\ )$，使得 $c_0 \in \kappa$ 且 $c_1 \notin \kappa$。注意，z' 必须在 κ 内部和 κ 外部都包含交叉：如果所有交叉都在 κ 内部，则由于 $\kappa_{\ltimes}$ 是平面地图底层图中的一个圈，它将是 $\kappa = \phi_{z'}$；如果所有交叉都在 κ 外部，则利用 M 和 M_κ 的连通性，可以在 ϕ_z 与 κ 之间找到一个面前交叉回路 λ。

情形 *1.1*：如果与 c_2 相邻的顶点属于 κ，且与 c_0的顶点相同，那么$c_2 = c_0$；否则，我们可以找到一个严格短于 κ 且包含 z 的前面交叉回路 λ；但是，由于它们之间没有其他前面回路，因此它必定是 $\lambda = \phi_z$，这与假设 (ii) 矛盾。因此，我们得出 $c_2 = c_0$，且 z' 是一个长度为2的面。通过移除/粘合封闭 z'的边，我们得到一个地图 M'_κ，其中 ϕ_z 与 κ 之间没有新的前面交叉回路，并满足引理 39 的假设。根据归纳法， M'_κ 可以通过同态映射到 κ。因此，先移除/粘合从 M_κ 到 M'_κ 的边，再将 M'_κ 映射到 κ，两者复合即可得到所需结果。

情形 *1.2*：如果与 c_2 相邻的顶点属于 κ 且不同于 c_0的顶点，那么 κ具有形式（ $c_0 \ \ c'_1 \ \ \cdots \ \ c'_i \ \ c_2 \ \ c'_{i+2} \ \ \cdots \ \ c'_{\ell(\kappa)-1}$），并且可以划分为交叉$\{c'_1, \ldots, c'_i\}$ 和 $\{c_2, c'_{i+2}, \ldots, c'_{\ell(\kappa)-1}, c_0\}$。于是，由 $\alpha_2\alpha_0 c_1$和交叉 $\{c'_1, \ldots, c'_i\}$构成的前面交叉回路，或者由 c_1和 $\{c_2, c'_{i+2}, \cdots, c'_{\ell(\kappa)-1}, c_0\}$ 构成的前面交叉回路，包含面 z。因此，该前面交叉回路必定是 ϕ_z，因为 κ与ϕ_z 之间没有前面交叉回路（而且它不是 κ）。由于 c_0 和 c_2 的顶点互不相同， ϕ_z 的长度严格小于 κ的长度，这与假设（ii）矛盾。

情形 *1.3*：如果与 c_2 相邻的顶点不属于 κ，那么我们沿着面 z'，通过 $M_{(c_0\ c_2)\kappa}$，粘合 c_0 和 c_2的顶点，并移除/粘合 c_2的边。由此得到一个新的地图 M'_κ，其中有 $\kappa_{\ltimes}$

外面中的边和顶点各少一个，且所有面都具有偶数长度（因为 z' 的长度为偶数，而我们将其缩短了两个单位）。此外，我们没有在 κ 和 ϕ_z之间产生前面交叉回路，因为那将对应于 M_κ中κ 和 ϕ_z 之间的一个（可能由多个部分组成的）可缩的交叉回路。其他面的长度均未改变（尤其是 z的长度）。因此，满足引理 39的假设，我们可以通过归纳法应用该结果。将顶点粘合 $M^{(c_0\ c_2)_\kappa}$ 与粘合现在包含 c_2 的重边，并将从 M'_κ 到 κ的映射进行复合，即得所需结果。（注意，其中一个被粘合的顶点不属于 κ，包含 c_2 的边也不属于 κ，因此，映射在 κ 上为恒等映射这一条件得以保留。）

<escape>情况 *2*：存在一个前面交叉回路 λ 满足 $\phi_z \preceq \lambda \preceq \kappa$ 且 $\phi_z \neq \lambda \neq \kappa$。令 λ_0 为与 ϕ_z 具有相同长度且距离其“最近”的前面交叉回路（也可能就是 κ 本身），即，</escape>

- $\lambda_0 \neq \phi_z$ 和 $\phi_z \prec \lambda_0 \preceq \kappa$;
- $\ell(\kappa) = \ell(\lambda_0)$ 和 $\ell(\lambda_0) < \ell(\lambda)$，对于每个满足 $\phi_z \prec \lambda \preceq \lambda_0$ 的 λ。

前面交叉回路 λ_0 在 M_κ中诱导出一个图圈；否则，若选取 λ'_0 为（最小）图圈的交叉回路，该图圈的所有交叉均属于 λ_0 且包含面 z，则有 $\phi_z \preceq \lambda'_0 \preceq \kappa$ 和 $\ell(\lambda'_0) < \ell(\kappa)$，这与假设 (iv) 矛盾。[6]

情况 *2.1*：如果 $\lambda_0 \neq \kappa$，那么 M_{λ_0} 是 M_κ 的一个严格子映射，且带符号亏格相同。事实上，这两个地图都是平面的，并且 λ_0 诱导出一个图圈，因此，在 M_κ 中沿 λ_0 周围切割，等同于移除 M_κ中位于 λ_0 之外的所有边和顶点。因此，根据归纳法，存在一个自同态$M_{\lambda_0} \to \lambda_0$，将 ϕ_z 映射到 λ_0，并且在 λ_0上是恒等映射。引理 37 允许我们将这个自同态扩展为映射 $h_{\lambda_0}\colon M_\kappa \to M_\kappa$（限制在 M_{λ_0} 上的映射是自同态 $M_{\lambda_0} \to \lambda_0$，其他地方则是恒等映射）。由于 $\lambda_0 \neq \kappa$，像 $h_{\lambda_0}(M_\kappa)$ 是 M_κ 的一个严格子映射，并且以 λ_0为面游走。我们可以应用归纳法得到一个自同态 $h_\kappa\colon h_{\lambda_0}(M_\kappa) \to \kappa$，它将$\lambda_0$ 映射到 κ，并且在 κ上是恒等映射。复合 $h_{\lambda_0} \circ h_\kappa\colon M_\kappa \to \kappa$ 具有所需的性质。

情况 2.2：现在假设 $\lambda_0 = \kappa$。我们采用类似的方法粘合一个顶点和一条边（如情况 1.3），或者只粘合一条边（如情况 1.1）。设 λ_1 是一个前面交叉回路，满足 $\phi_z \prec \lambda_1 \prec \kappa$（根据情况 2 的假设，它存在），并且不存在满足 $\lambda_1 \prec \lambda_2 \prec \kappa$ 的前面交叉回路 λ_2（由于面游走的数量有限，可以作此假设）。我们有 $\ell(\lambda_1) > \ell(\kappa)$（根据 λ_0 的性质以及本情形中的 $\lambda_0 = \kappa$）。一个小的约化论证（如情况 1 中所做）表明，λ_1 的形式为（$c_0\ \ c_1\ \ \cdots\ \ c_i\ \ c'_{i+1}\ \ \cdots\ \ c'_t$），其中 c_j 是 κ 的交叉（为方便起见，假设从 c_0 开始），而 c'_{i+1}、.....、c'_t 不是。c'_{i+1} 的顶点属于 κ，但与 c'_{i+2} 相邻的顶点不属于（否则它将是 $\ell(\lambda_1) \leq \ell(\kappa)$）。$c_{i+1}$ 的面也是 $\alpha_0\alpha_2c'_{i+1}$ 的面（事实上，$\phi\alpha_0\alpha_2c'_{i+1} = c_{i+1}$），否则在 λ_1 和 κ 之间会存在另一个前面圈。此外，c_{i+1} 的面不是 z，因为它不在 λ_1 内。现在，我们通过交错操作 $M^{(\alpha_0\alpha_2c_{i+1}\ \phi c_{i+1})}\ \kappa$，粘合与 c_{i+2} 和 c'_{i+2} 相邻的顶点。请注意，对于这个新地图：

- 条件 (ii) 成立，因为 κ 和 ϕ_z 均未被修改。
- 奇偶性 o　　如果 ϕ_z 和 κ 之间的前面交叉回路与 κ 相同（观察 40）　　).

[6]请注意，我们并未声称这样的 λ'_0 位于 λ_0内部；例如，如果 λ'_0 是一个圈，而 λ_0 是该圈及其内部的一条悬挂边，那么 λ_0 就在 λ'_0内部。

- 条件 (iii) 成立，因为我们通过面外部的面粘合了面中距离为二的两个顶点 z。此外， ϕ_z 与 κ 之间前面交叉回路的奇偶性保持不变（对新地图和旧地图均使用观察 40 ）。

- ϕ_z 和 κ 之间的一些前面交叉回路可能已被删除，或因长度缩短而发生改变。缩短幅度恰好为两个单位，因此， ϕ_z 和 κ 之间新形成的前面交叉回路满足条件 (iv)，其中 $\leq$ 成立（关于情况 2 的假设要求它们的长度之间满足严格不等式）。

因此，我们可以对新的映射 $M^{(\alpha_0\alpha_2 c_{i+1}\ \phi c_{i+1})\,\kappa}$ 归纳地应用引理 39。由于这两个映射在 κ 上都是恒等映射（这里我们使用引理 37 来处理我们已经执行的顶点粘合），因此，先粘合一个顶点，再执行归纳步骤所得到的复合映射在 κ 上也仍然是恒等映射，从而得证。

□

4.4 映射核的刻画

我们在以下定理中汇总前几节关于核的概念和结果。

定理 41。 连通地图 M 是一个核，当且仅当其每个面前交叉回路 λ要么是一个面游走，要么包含多个奇度面，要么不包含度大于或等于 $\ell(\lambda)$ 的面，且与 $\ell(\lambda)$具有相同的奇偶性。

证明。 对于两个蕴含方向，我们都采用逆否命题进行论证。从左到右，假设存在一个地图 M 的前面交叉回路 λ，满足：(i) 它不是面游走；(ii) 它至多包含一个奇度面；(iii) 它包含一个面 z，其度至少为 $\ell(\lambda)$，且与 $\ell(\lambda)$ 奇偶性相同。

如果 λ 的长度为奇数，那么根据 (ii) 和 (iii)， z 是 λ 内唯一的奇度面，而任何包含 $\phi_z \preceq \mu \preceq \lambda$ 的前面交叉回路 μ 都具有奇数长度（见观察 40）。如果 λ 的长度为偶数，那么 λ 内的所有面都具有偶度（否则，根据观察 38， λ 内至少会有两个奇度面）。

令 κ 为一个前面交叉回路，使得 $\phi_z \prec \kappa \preceq \lambda$ 和 $\ell(\kappa) = \min\{\ell(\mu) : \phi_z \preceq \mu \preceq \lambda\}$（也许就是 λ 本身）。引理 39 的条件对面 z 和前面交叉回路 κ 均成立。因此存在一个同态 $h_\kappa : M_\kappa \to \kappa$，它在 κ 上是恒等映射。由于 κ 是前面交叉回路，根据引理 36，我们可以得出结论：通过移除 κ 的内部而得到的子映射 M'（它是 M 中使 κ 成为面游走的最大子映射）与 M 具有相同的带符号亏格。此外，$\kappa \neq \phi_z$，这意味着 M' 是 M 的真子映射。将引理 37 应用于 h_κ，便得到一个同态 h：$M \to M' \subsetneq M$；因此， M 不是核。

现在，我们再次使用逆否命题来证明从右向左的蕴含。假设M 不是一个核；我们希望找到一个满足上述条件 (i)–(iii) 的前面交叉回路。

令 N 为 M的核，并令 $h : M \to N$ 为一个同态，其在 N 上的限制是恒等映射（见命题 27(ii)）。由于 N 是 M 的一个具有相同带符号亏格的真子映射，引理 36 断言， N 存在一个面游走，它是 M 的前面交叉回路 κ，但不是 M的面游走。再次考虑 M的子映射 M'（如上所定义），并令 $h' : M \to M'$为按如下方式从 h 得到的映射：

- 顶点 u, v 在以下情况下是粘合的： h 将它们粘合，并且它们位于 κ的内部；或者 u 位于 κ 的内部且 v 位于 κ中。

- 如果 h 将 e, e' 粘合在一起，并且它们位于 κ的内部，或者 e 位于 κ 的内部且 e' 属于 κ，则这些边会被粘合。

当无法执行前面两种操作中的任何一种时，我们便停止，并得到 h'。请注意，我们不会粘合 κ 的两个顶点或两条边，因为 h 在 N上是恒等映射。

我们现在通过匹配上述描述的粘合指令，构造一个分层标记图 T；各层将表示该过程进行到相应阶段时，κ内部的面（记作 $\{f_1, \ldots, f_r\}$）的状态。在 T的第一层中，我们放置 r 个带有标签f_1、.....、 f_r 的顶点（每个面对应一个顶点）。现在，如果顶点粘合将一个面细分为两个新面，我们就在下一层放置两个新顶点，使它们与表示原面（父顶点）的顶点相邻；这些边是有向的，且始终指向新顶点，这两个新顶点都带有父顶点的标签。如果我们粘合两条边，它们所围成的两个面会合并为一个面；这由新层中的一个顶点表示，该顶点通过有向边与父顶点相邻（同样，边指向“新”顶点）。这个新顶点采用两个待合并面中度数较大的那个面的标签（如果两个面度数均为 2，则任意选择其中一个面的标签）。对于其余顶点（表示各个面，包括未被细分的面），我们在新层放置一个新顶点，其标签与父顶点相同，并添加一条从旧顶点指向新顶点的有向边。

前述过程确保 T 的所有顶点都带有 κ 内原始面之一的标签，即 $\{f_1, \ldots, f_r\}$。此外，从 T 的一层到下一层，该过程会对面进行一些细分（当两个顶点粘合时），并破坏一些面（当两条边粘合时）；最终只剩下一个面，它由 T 最后一层中的一个唯一顶点表示，其标签指出了那个尚未被破坏或合并到其他面的原始面。接下来，我们将讨论在此过程中各面的度的奇偶性如何变化。

当一个奇数度面被细分时，会出现一个新的奇数度面和一个偶度面；如果我们细分一个偶度面，则会出现两个奇数度面或两个偶度面。因此，在细分偶度面时不会产生奇数度面，因为在整个过程结束时只剩下一个面，而当一个奇数度面产生时，实际上会产生两个，并且它们都无法被消除（我们只能消除度为 2 的面）。此外，T 中任何一条穿越不同层（从高层到低层）的路径上的顶点都具有这样的性质：如果它们的标签相同，那么其关联面的度数序列是弱递减的。令 f_i 为最后一层中唯一顶点的标签，并考虑一条所有顶点的标签均为 f_i 、从第一层延伸到最后一层的路径；由此我们得出：

- f_i 的奇偶性与 κ 相同（这一性质在整个过程中保持不变，并且这样的面游走会不断修改，直到它变成 κ）；

M 中其他面的度均为偶数，而 f_i 的度大于或等于 ℓ（κ）。

因此，κ 是 M 的一个满足条件 (i)–(iii) 的前面交叉回路；这就完成了从右向左蕴含的逆否命题，并完成了整个命题的证明。 □

将该刻画应用于四类地图。花束图是只有一个顶点且所有边都是环的地图。与之对偶的，准树是只有一个面的地图，也称为单面嵌入图。（花束图和准树必定是连通的。）定理 41 指出：花束图是核，当且仅当它没有重边；准树是核，当且仅当它要么是平面的，且由一条边或一个孤立顶点构成，要么不是平面的，且没有度为一的顶点。（这两个事实可以直接证明。）对于另外两类连通地图，我们利用定理 41 中的奇偶条件 κ 得出以下结论。没有度为一的顶点且所有面度数均为奇数的连通地图是核。任何平面连通核地图都恰好满足以下性质之一：

（i）由一条边或一个孤立顶点构成（当所有面度数均为偶数时，由观察 40 可知底层图是二分的）；或者（ii）是奇数长度的圈（因此恰有两个面，且两者的度数均为奇数）；或者（iii）至少有四个奇数度面（根据观察 38，数量为四个而非三个）。

图核与映射核。由于地图同态是图同态，因此任何图核的嵌入都是映射核。然而，有些映射核的底层图并非图核，例如，在环面上将一个带有两个环的顶点嵌入为准树。此外，将准树刻画为映射核（如上一段所述），鲜明地突显了映射核与图核之间的差异。事实上，任何连通图都可以在某个曲面上拥有准树嵌入，该曲面也可能是不可定向的 [4, 第123页，第三段],；由此可知，任何没有度为一顶点的连通图，都可以通过将其嵌入到适当的曲面上，成为某个映射核的底层图。

另一方面，通过图同态识别两个顶点，可以看作通过地图同态粘合两个顶点，并使用适当的嵌入（在要粘合的两个顶点之间放置一个面）；为处理平行边，将图嵌入成使这些边重复出现。因此，任何图同态都可以视为若干地图同态的复合（或许需要改变相应底层图的嵌入）。

这一讨论引出了一个自然的问题：能否利用映射核来识别图核？对于每个不是核的连通图 Γ，是否都能找到一个底层图为 Γ 的地图 M，使得 M 不是（映射）核？

我们的答案是否定的。令 Γ 为将两个完全图 K_5 的副本通过一个顶点识别后得到的图（它有 9 个顶点，且没有其他边）。Γ 的核是 K_5。事实上，所有从 Γ 到某个子图（不一定是核）的图同态，都可以通过将 K_5 的一个副本映射到另一个副本来得到。现在，假设存在一个底层图为 Γ、且不是映射核的地图 M。我们可以应用证明定理 41 时使用的论证，得出存在一个前面交叉回路 κ（它不是面游走），以及一个从 M 到 M 的真子映射的同态，该同态将 κ 的内部映射到 κ。特别地，这个同态是一个从 Γ 到某个子图的图同态，而该子图必定是 K_5。因此，κ 内部的底层图应当包含 K_5；但这与 κ 的内部是一个平面地图矛盾。

4.5 映射核的偏序集

现在已经介绍了如何判断一个地图是否为核，接下来我们将引入并研究地图核的偏序集，并将其性质与图核的偏序集进行比较。

对于固定的 $g \in \mathbb{Z}$，令 $\mathcal{M}(g)$和 $\mathcal{M}_c(g)$分别表示带符号亏格为 g的地图集和核集。对于 M, $M' \in \mathcal{M}(g)$，我们称 $M \leq M'$，如果存在从 M到 M'的地图同态，也就是说，如果 $M \to M'$。相应的严格序关系 $M < M'$成立，当且仅当 $M \to M'$且$M' \not\to M$。关系 $\leq$ 在 $\mathcal{M}_c(g)$上类似地定义；事实上，它是将预序$(\mathcal{M}(g)\ \leq)$按由以下条件定义的等价关系 $\cong$取商得到的：若 $M \leq M'$ 且 $M' \leq M$，则 $M \cong M'$。

引理42。 关系 $\leq$ 在 $\mathcal{M}(g)$ 上定义了一个预序，并在 $\mathcal{M}_c(g)$上定义了一个偏序。

证明。 预序部分由命题21以及这样一个事实得出： $\mathcal{M}(g)$ 中地图之间的同态复合仍是同态。对于核，命题 26 确保

预序　　der 实际上是一个偏序，因为我们考虑的是同构意义下的地图　　m.　　□

我们要确立的第一个性质是偏序集 $(\mathcal{M}_c(g), \preceq)$ 连通，具体做法是先证明预序 $(\mathcal{M}(g), \preceq)$ 连通。回顾一下，若对任意一对元素 a、b，都存在一个序列 $a = c_0$、c_1、……、c_{k-1}、$c_k = b$，使得对每个 $i = 0$，1、……、$k-1$，$c_i \preceq c_{i+1}$ 或 $c_{i+1} \preceq c_i$ 成立，则称预序 $(P, \preceq)$ 是连通的。

引理 43。设 M 和 M' 是带符号亏格相同且至少有一条边的连通地图，M' 可以通过一系列顶点粘合、顶点分裂（定义 *31*，且满足引理 *7(2)(i)*的附加条件）、边分裂和重边粘合由 M 得到。

证明。在所述条件下，顶点粘合与顶点分裂互为逆操作，重复边粘合与边分裂也是如此，并且所有这些操作都保持带符号亏格和连通性不变。一个具有多个面的连通地图必然存在一条对偶环；对偶地，一个具有多个顶点的连通地图必然存在一条环。对于一条对偶环$e \equiv (\ c\ \ \alpha_2\alpha_0 c\ )\ (\ \alpha_2 c\ \ \alpha_0\alpha_2 c\ )$，$c$ 与 $\alpha_2 c$ 交叉且属于不同的面。通过交错操作 c 和 τc，将包含 c 与 $\alpha_2 c$ 交叉的顶点进行分裂，其效果是增加一个顶点并移除一个面（因此 e 的所有交叉现在都属于同一个面），同时保持带符号亏格和连通性不变，从而减少面的数量。重复这一过程，直到地图变成准树。如果该准树具有多个顶点，则通过收缩环可以在保持带符号亏格（引理4(ii)）和连通性的同时减少顶点数，因而不会产生新的面；于是，通过一系列这样的环收缩，可以将该准树同时变成花束图。Tutte 将这种具有一个顶点和一个面的地图称为幺正地图。如果该地图至少有两条边，则收缩一条环 $e \equiv (\ c\ \ \alpha_2\alpha_0 c\ )\ (\ \alpha_2 c\ \ \alpha_0\alpha_2 c\ )$可以通过以下一系列顶点粘合/顶点分裂（定义 31，附加引理 7(2)(i)中的条件）以及重边粘合/边分裂来实现：(1) 通过交错操作 c 和 ϕc，粘合与 e 关联的两个顶点，使 e 变成一个环；然后(2) 通过交错操作 c 和 $\alpha_2\alpha_0 c$，分裂与该环关联的顶点，从而生成一个叶顶点；然后(3) 通过交错操作 $\alpha_0\alpha_2 c$ 和 $\phi^{-1}c$，将该叶顶点与包含 $\phi^{-1}c$ 的顶点粘合，从而生成一对重边；最后(4) 粘合这两条重边。

我们刚刚看到，任何至少含有一条边的连通地图，都可以通过一系列顶点粘合/顶点分裂以及重边粘合/边分裂变为幺正地图。亏格为 g 的可定向典范地图 是其顶点置换含有形如[7]$(\ c_1\ \ c_2\ \ \alpha_0\alpha_2 c_2\ \ \alpha_0\alpha_2 c_1\ \ \cdots\ \ c_{2g-1}\ \ c_{2g}\ \ \alpha_0\alpha_2 c_{2g}\ \ \alpha_0\alpha_2 c_{2g-1}\ )$，这一循环的幺正地图，而亏格为 g 的不可定向典范地图 的顶点置换则含有一个形如

$$(\ c_1\ \ \alpha_0 c_1\ \ c_2\ \ \alpha_0 c_2\ \ \cdots\ \ c_g\ \ \alpha_0 c_g\ ).$$

正如定义 31之后所述，Tutte定义了一种顶点分裂操作 [19, 图 X.7.1 和 X.7.2]，通过插入一个环而与我们的顶点分裂操作相关；这使得他的操作成为收缩链接的逆操作。因此，要实现 Tutte的顶点分裂操作，我们采用上述实现环收缩操作的四个操作的逆序列。换言之，先执行上述步骤（4）的逆操作（分裂一条边以生成一条重边），然后执行步骤（3）的逆操作（分裂重边的一个端点以生成一个叶顶点），

[7]当 $g = 0$ 典范地图是一个孤立顶点时，顶点置换由一对空圈组成；由于 Tutte 不允许无边地图，他将亏格为零的典范地图定义为由一个环组成的地图。

接着执行步骤（2）的逆操作（将叶顶点与和它关联的顶点粘合），最后执行步骤（1）的逆操作（分裂环的端点）。Tutte证明了 [19,定理 X.37] ，利用他所定义的顶点分裂和环收缩，可以在保持带符号亏格不变的情况下，将任意幺正地图转换为典范地图。[8] 因此，使用我们定义的顶点粘合和顶点分裂，以及边分裂和重边粘合时，结论同样成立，因为这些操作可以按照上述方式模拟Tutte所使用的两种操作。

最后，我们将把 M 化为其带符号亏格对应的典范地图的操作序列，与把 M' 化为同一典范地图的操作序列的逆序列复合，从而得到 M'。这样，我们便通过其带符号亏格对应的典范地图，以引理陈述中所述类型的一系列操作，从 M 转到 M'。

□

定理 44. 偏序集 $(\mathcal{M}_c(g) \leq)$ 是连通的。

证明。 根据引理 43，对于每一对至少有一条边的地图 $M, M' \in \mathcal{M}(g)$，存在一列地图 $M_0 = M, M_1, M_2, \ldots, M_k = M'$，使得在以下两种情况下之一，存在从$M_i$ 到 M_{i+1} 的同态（当 M_{i+1} 由 M_i 经过顶点粘合或重边粘合得到时），或存在从M_{i+1} 到 M_i 的同态（当 M_{i+1} 由 M_i 经过顶点分裂或边分裂得到时）；所有操作均为引理 43 中所述的操作。再注意到，在 $g = 0$ 的情况下，单个顶点可以映射到任意位置，由此可知预序 $(\mathcal{M}(g) \leq)$ 是连通的；接着，考察它们的核之间对应的同态，可得偏序集 $(\mathcal{M}_c(g) \leq)$ 也连通。

□

我们回顾偏序理论中的一些进一步定义。设 a, b 是偏序集（$P, <$）中的元素，满足 $a < b$。如果对于任意满足 $a \leq c < d \leq b$ 的 $c, d \in P$，都存在元素 e 使得 $c < e < d$，则偏序集 P 在 a 与 b 之间是稠密的；如果不存在满足 $a < c < b$ 的元素 c，则 a、 b 在 P 中构成一个间隙（或者说， b 覆盖 a，即 b 是 a 的直接后继）。在图的（图核）偏序集中，其偏序 $G \leq H$ 由存在图同态 $G \to H$ 所定义，每一对可比较的核（顶点与 K_2 之间的那一对除外）都确定了一个构成稠密全序的区间（实际上，这样的区间是普适的，即每个可数偏序都可以看作其子序 [5]）。下面的定理表明，映射核的偏序与图核的偏序有着截然不同的性质。

定理 45。 在偏序 $(\mathcal{M}_c(g) \leq)$中，不存在一对核 N_1, N_2，使得 $N_1 < N_2$ 成立，且它们之间存在稠密全序。

证明。 反设两个核之间存在稠密全序 $N_1, N_2 \in \mathcal{M}_c(g)$，并首先假设二者都连通。因此，$N_1$ 与 N_2 之间有无穷多个核，且必定存在两个核 $N_3, N_4 \in \mathcal{M}_c(g)$，满足 $N_1 < N_3 < N_4 < N_2$，使得它们之间的每个核（包括这两个核）都有相同数量的奇度面[9], ，且它们之间存在稠密全序。令 $\mathcal{N}_{3,4}$ 为 N_3 与 N_4之间的核集。

[8]属于交叉帽 的交叉（即在顶点置换的一个圈中成对出现的扭曲环 $c, \alpha_0 c$），或属于柄 的交叉（即在顶点置换的一个圈中彼此交错的两个非扭曲环 $a, b, \alpha_0\alpha_2 a, \alpha_0\alpha_2 b$），会在典范地图中连续出现；或者用 Tutte 的术语来说，它们是组装在一起的：Tutte 以此给出了紧致曲面的分类定理的组合证明。[9]N_2 具有有限个奇度面，并且取同态像时奇度面的总数不会减少：移除平行边会保留其度，而顶点粘合总是会由一个奇度面产生一个奇度面，并会由一个偶度面产生零个或两个奇度面。

断言： 存在两个核 N_5,$N_6 \in \mathcal{N}_{3,4}$，满足 $N_5 < N_6$，使得：

- 从 $\mathcal{N}_{3,\ 4}$ 到 N_5 和 N_6之间，核构成一个稠密全序，并且
- 对于全序中 N_5和 N_6之间（包括它们）的每一对核 $N' < N''$，都存在一个同态 $N' \to N''$，它在奇度面之间诱导一一对应，并保持它们的度。

~ ~ ~证明该断言。令 $N, N \in \mathcal{N}_{3,4}$ 满足 $N < N$，并令 $h\colon N \to N$。在 h下， N 的每个奇度面的像~都是一个面，它在 N 中诱导一个长度小于~或等于其度的前面交叉回路 κ （此处我们用到 $h(N)$ 是 N 的子映射以及引理 36；注意，一个面的像并不诱导一个前面交叉回路，而是诱导若干前面交叉回路的并，~我们从中选取一个）。这些 κ 中的每一个恰好包含 N 中的一个奇度面 z_κ：根据观察 38，它至少应包含一个；而它不可能包含更多，因为那样 N中的奇度面数量就会严格大于 N中的数量，这与 $N, N \in \mathcal{N}_{3,4}$ 矛盾。由于 N是一个核，根据定理 41，要么 $\phi_{z_\kappa} = \kappa$，要么 z_κ 的度严格小于 $\ell(\kappa)$。由于 $\mathcal{N}_{3,4}$ 中有无穷多个核且它们构成全序，这些度在两个核之间稳定下来，这两个核就是所需的 N_5, N_6。还可以进一步假设这些核 N_5, N_6 之间包含一个稠密全序，因为 N_3 和 N_4之间存在一个稠密全序。 □

令 $\mathcal{N}_{5,\ 6}$ 为在 N_5 与 N_6 之间全序排列的核的集合。接下来我们证明，在 $\mathcal{N}_{5,\ 6}$ 中存在两个核，它们之间只有有限个核，这与 N_1 与 N_2 之间存在稠密全序的假设相矛盾。

令 $h\colon\ N \to N'$，其中 $N < N'$ 是 $\mathcal{N}_{5,\ 6}$ 中的两个核。 N 的每个偶长度面游走 λ都会在 $h(N)$ 中变成若干个偶长度面游走 $\subseteq N'$，其总长度至多为 $\ell(\lambda)$（面可能会完全消失）；这是因为不存在这样的偶度面：对其依次进行顶点粘合和重边粘合后，能够产生两个奇度面。 $h(N)$ 中的这些偶度面会在核 N' 中变成前面交叉回路 κ。如果 κ 不是面游走，根据定理 41， κ 内部的面具有严格小于 $\ell(\kappa)$ 的偶度。因此，当我们考虑从 N_5 到 $\mathcal{N}_{5,\ 6}$ 中某个核的同态时，其像可以通过减少面的数量（粘合重复边）或将偶度面细分为度数更小的偶度面（粘合顶点）得到；可以在这些面内放置一个平面子图，使其所有面都具有严格更小的偶度（这里使用了陪域是另一个核这一事实，以及定理 41 中前面交叉回路 κ 是来自 N_5 的面游走的一部分这一结论）。由于面度存在绝对最小值，这一过程不可能无限次进行。[10] 因此，在某个时刻，偶度面的数量及其度数会稳定下来。由于奇度面的数量及其各自的度数也已经稳定，并且具有这些参数的地图只有有限多个，我们 conclude 区间 N_5 与 N_6 之间不是稠密的。当核 N_1， N_2 连通时，证明即告完成。

现在假设核 N_1, N_2 不连通；我们对各个连通分支进行类似论证，因为它们是核，而地图同态只能将它们合并。由于带符号亏格固定，且除平面连通分支外，欧拉亏格在各连通分支上可加，因此我们可以找到两个核 N_3, N_4 ，使得 $N_1 < N_3 < N_4 < N_2$ 的剖面_久久爱

[10]固定同态的像后，面的数量本身是有限的，尽管我们可以用度严格较小的面填充给定的面，从而得到任意多个核；这个任意数量之后也会固定下来，而所有这些内部面的度都将严格较小。因此，一旦该任意数量固定，且选定了特定的一组核，这一过程就不可能无限次重复。

具有不同带符号亏格（且不为 0）的连通分支数量相同，中间的所有核也具有相同的性质。对于平面连通分支，接下来我们采用关于奇度面数量的论证。

如定理 41 的应用中所述，每个平面连通分支要么至少有三个奇度面，要么是一个平面奇圈，要么是二分的（所有面都具有偶数长度）。在后一种情况下，核是一条边，可以映射到其他任意位置。我们还知道，连通分支中至多有一个平面奇圈，否则就可以将一个映射到另一个中，从而整个地图就不会是一个核。此外，$\mathcal{N}_{3,4}$ 的核之间的同态不能将一个平面连通分支与一个非平面连通分支合并，因为这会严格增加非平面连通分支的奇度面数量（除奇圈之外，平面连通分支都至少有三个奇度面，而合并两个连通分支至多会使奇度面的总数减少两个）。因此，由于奇度面的总数在 N_4中有界，对于$\mathcal{N}_{3,4}$中的每个核，平面连通分支的数量也有界。于是，存在 N_5,$N_6 \in \mathcal{N}_{3,4}$ 个具有相同连通分支及奇度面概况的$N_5 < N_6$ （各连通分支的亏格，以及每个连通分支上的奇度面数量），并且它们之间具有稠密全序。运用连通情形中的相同推理，我们在$\mathcal{N}_{5,6}$ 中找到两个核，且它们之间只有有限多个核。

□

推论 46. 在预序 $(\mathcal{M}(g) \leq)$中，不存在一对地图 M_1, M_2，使得 $M_1 < M_2$，且它们之间存在稠密全序。

证明。 这是因为，根据命题 27 的第 (iv) 部分，两个地图之间若存在稠密全序，则它们的核之间也存在稠密全序；这里还用到了若 $M_1 < M_2$，则它们的核不同这一事实。

□

现在我们来展示一个映射核的无限链。在本节余下部分，我们用 C_i 表示长度为 i 的图圈的平面地图。令 $T_{i,j}$ 为通过以下方式得到的平面地图：在 C_4 中添加一条长度为 i 、连接第一个顶点和第三个顶点的路径，以及一条长度为 j 、连接第二个顶点和第四个顶点的路径（这两条路径各自将平面上由 C_4 诱导出的一个面细分）。因此，$T_{i,j}$ 有四个面，其中两个长度为 $i+2$，另两个长度为 $j+2$。由于 $T_{2k+1,2s+1}$ 的所有面都具有奇度，且没有度为一的顶点，因此对所有 $k, s \geq 0$，$T_{2k+1,2s+1}$ 都是一个核。通过适当地折叠一条边，我们有 $T_{2k+1,2s+1} \to T_{2k+1,2(s-1)+1}$，其中 $s \geq 1$ 且 $k \geq 0$；对称地，$T_{2k+1,2s+1} \to T_{2(k-1)+1,2s+1}$，其中 $s \geq 0$ 且 $k \geq 1$。由于 $T_{i,3}$ 有一个长度为 5 的面，我们得出 $C_5 \to \cdots \to T_{2s+1,3} \to T_{2(s-1)+1,3} \to \cdots \to T_{3,3} \to T_{1,3}$ 构成一个无限（有序）核链。

我们还可以利用以下事实找到一条无限间隙链：作为核的平面连通地图，要么是二分的（由一条边或一个孤立顶点构成），要么是奇数长度的圈，要么至少有四个奇度面；并且地图同态的陪域的奇度面数量必须不少于定义域。

定理 47. 令 C_i 表示长度为 i 的平面圈。对于每个 $k \geq 1$，$C_{2k+3} \to C_{2k+1}$，并且 C_{2k+3} 与 C_{2k+1}之间存在一个间隙。

对于每个带符号亏格 g，通过考虑具有数量递增的奇度面，且这些面中每个面的度也递增的地图，我们在 $\mathcal{M}_c(g)$ 和 $\mathcal{M}(g)$ 中得到一个无限反链。在[11]中，作者对每个图 H 考虑族 $\mathcal{G}(H) = \{G \mid G$ 是一个图且 $G \to H\}$，并且

证明存在一个图 H_0，使得 $\mathcal{G}(H_0)$ 包含一个无限反链 [11, 定理 6]（该论证仅使用平面图）；接下来，我们给出一个类似的构造，以在由 $\mathcal{F}(H) = \{M \mid M$ 是一个地图且 $M \to H\}$ 给出的偏序集中找到任意大的反链。

定理 48. 对于每个偶数 n 和奇数 $k \geq 3$，都存在平面地图 B 和 $A_1, \ldots, A_n$，使得

- A_1，……，A_n 的底层图都是图核，而 B 是映射核，
- B 和 A_1 各自都具有奇围长为 $2k+1$ 的底层图，…… A_n。
- $A_i \to B$ 对于每个 $i \in [n]$，且 $A_i \not\to A_j$ 对于不同的 i、$j \in [n]$。

证明。 我们略微调整了 [11, 定理 6]中的论证；构造示意图请参见图 10 和图 11。

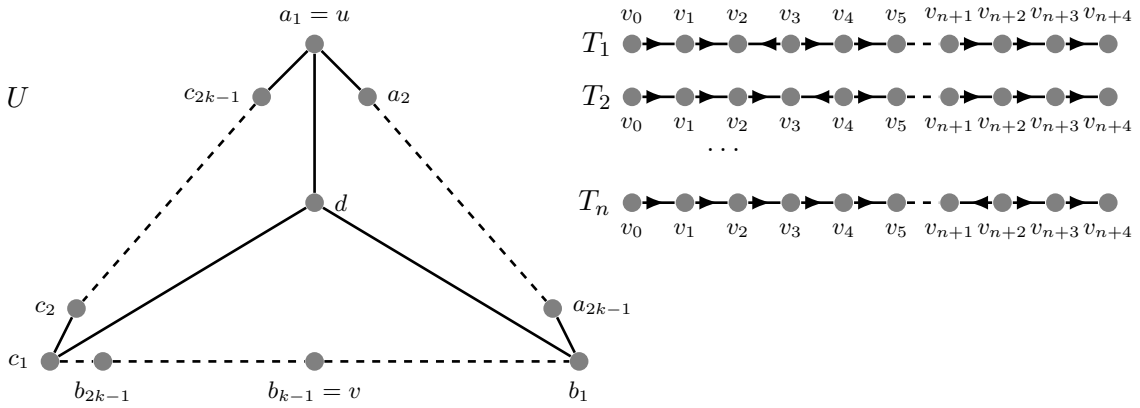


图 10：图 U 的副本，以及有向映射 T_i。

设 U 是一个顶点为 $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}, b_1, b_2, \ldots, b_{2k-1}, c_1, c_2, \ldots, c_{2k-1}, d\}$ 的图，其中有一个圈（a_1、a_2、……、a_{2k-1}、b_1、b_2、……、b_{2k-1}、c_1、c_2、……、c_{2k-1}、a_1），且 d 与 b_1、c_1、a_1 相邻。现在用标签 u 表示 a_1，用 v 表示 b_{k-1}。U 的一个平面嵌入是一个映射核，因为所有面都有奇度。它也是一个图核，因为每个奇圈都应映射到一个奇圈，而长度等于奇围长的圈应映射到长度等于奇围长的圈；这两个圈不能映射到同一个圈，否则第三个长度为奇围长的圈就会被缩短。

让 T_i, $1 \leq i \leq n$ 是一条含有 $n+4$ 条有向边的路径，这些边的方向都相同，只有第 $i+2$ 条边的方向相反。令 G_i 为通过将 T_i 的每条边替换为一份 U 而得到的图，并将顶点 u 置于该边的尾，将 v 置于该边的头。现在，考虑图 G_i 的平面嵌入，记为 A_i；其中相应三角形的所有顶点 b_1 都“朝上”，除了对应于由反向边给出的 U 副本的 b_1，它“朝下”。平面地图 B 是通过将第一个顶点 u 与最后一个顶点 v 粘合而形成的。因此，B 由 $n+4$ 份 U 组成，其中除一个顶点 b_1 外，其余顶点都位于圆的外侧，而一个顶点 b_1 位于圆内。显然，$A_i \to B$，但根据 [11, 定理 6] 中的论证，所有图 G_i 都是图核，并且 $A_i \not\to A_j$（事实上，假设并非如此；由于 U 是一个核，A_i 中的每份 U 都应映射到一份 U，不同副本中的顶点 u 也应彼此映射，顶点 v 亦然，因为 v 沿着一条奇围长的圈略微偏向一侧；这样我们就会得到 T_i 与 T_j 之间的图同态，一个

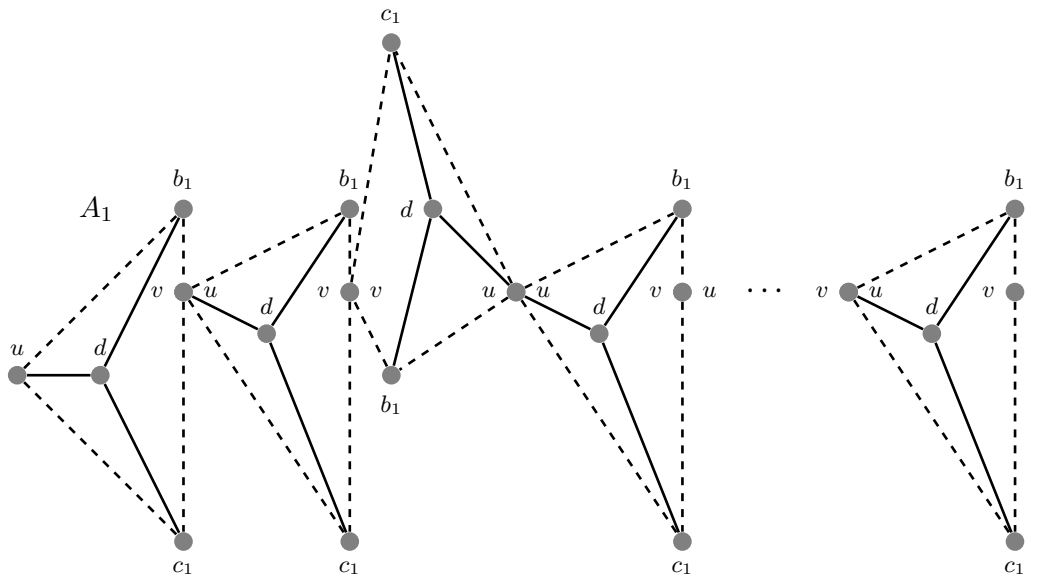


图11：将 T_1 的边替换为 U 的副本，以创建 A_1。地图 B 通过沿外部面粘合第一个 u 和最后一个 v而获得。

（矛盾），因此 A_i 是映射核。此外，当 n 为偶数时， B 的每个面都具有奇度，因此它是映射核。这是因为 U 的平面嵌入中的每个面都具有奇度，所以路径 uv 一侧的长度为奇数，另一侧的长度为偶数；特别地，将偶数个 U 连接在一起，并如 A_i 中那样合并第一个 u 和最后一个 v，便得到两个面，且两者的度都是奇数（一个面的面游走由奇数条奇数长度的路径加上一条偶数长度的路径构成，另一个面的面游走则由奇数条偶数长度的路径加上一条奇数长度的路径构成）。

□

在 $[11, \text{定理 } 6]$, 中，反链的图陪域是长度为 $2k+1$ 的奇圈，它是一个（图）核，并且不依赖于 n，而只依赖于 k。然而，由于 A_1、.....、A_n 的奇度面数量随 n 增加，在使用相同构造时，反链的映射核 B（即陪域）也依赖于 n。因此，我们可以找到任意大的反链，但无法找到一个无限反链。这引出了以下问题：

是否存在一个地图 B，使得 $\mathcal{F}(B)$ 包含一个无限反链?

参考文献

[1] R. P. Bryant 和 D. Singerman. 带边界曲面上地图理论基础. 《牛津数学季刊》 *(2),* 36(141):17–41, 1985年.[2] S. Cabello 和 B. Mohar. 求拓扑嵌入图中的最短非分离圈和不可缩圈. 《离散计算几何》, 37:213–235, 2007年.[3] G. Damiand 和 P. Lienhardt. n维广义地图的删除与收缩. 收录于 I. Nys- tröm、G. Sanniti di Baja 和 S. Svensson 编，计算机图像离散几何，计算机科学讲义第2886卷，第408–419页，2003年。

[4] J. Edmonds. 线性图的曲面对偶性. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, 69(5):121–123, 1965年.[5] J. Fiala、J. Hubička、Y. Long 和 J. Nešetřil. 图同态序的分形性质.《欧洲组合学杂志》, 66:101–109, 2017年。EuroComb15精选论文。[6] M. Freedman、L. Lovász 和 A. Schrijver. 反射正性、秩连通性与图同态.《美国数学会杂志》, 20(1):37–51, 2007年.[7] D. Garijo、A. Goodall 和 J. Nešetřil. 通过图的左右同态剖面区分图.《欧洲组合学杂志》, 32(7):1025–1053, 2011年.[8] A. Goodall、T. Krajewski、G. Regts 和 L. Vena. 地图的 Tutte 多项式. *Combin. Probab.Comput.*, 27(6):913–945, 2018年.[9] A. Goodall、B. Litjens、G. Regts 和 L. Vena. 地图的 Tutte 多项式 II：非定向情形.《欧洲组合学杂志》, 86:103095, 32, 2020年.[10] P. Hell 和 J. Nešetřil.《图与同态》. 牛津数学及其应用讲座丛书. 牛津大学出版社, 2004年.[11] P. Hell 和 J. Nešetřil. 图的核.《离散数学》, 109(1-3):117–126, 1992年.[12] G. Jones. 图嵌入、群与黎曼曲面. 收录于《图论中的代数方法 *I*、*II*，塞格德 *1978*年》，János Bolyai 数学学会讨论会，第25卷。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1981年.[13] P. Lienhardt. 边界表示的拓扑模型：与n维广义地图的比较.《计算机辅助设计》, 23(1):59 – 82, 1991年.[14] P. Lienhardt. n维广义组合地图与胞腔拟流形. *Internat. J.Comput. Geom. Appl.*, 4(3):275–324, 1994年.[15] B. Litjens 和 B. Sevenster. 嵌入图的配分函数与广义着色-流对偶. *J. Graph Theory*, 88(2):271–283, 2018年.[16] A. Malnič、R. Nedela 和 M. Škoviera. 正则同态与正则映射.《欧洲组合学杂志》, 23(4):449–461, 2002年.[17] B. Mohar 和 C. Thomassen.《曲面上的图》. 约翰·霍普金斯大学出版社, 2001年.[18] W. T. Tutte. 什么是地图？收录于《图论的新方向（第三届安娜堡会议论文集，密歇根大学，密歇根州安娜堡，*1971*年）》，第309–325页，1973年.[19] W. T. Tutte.《图论》，数学及其应用百科全书第21卷。《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，剑桥，2001年。