arXiv:2305.03115v1 [physics.optics] 4 May 2023

开放式多段激光器中的等角螺线

Christopher P. J. O'Connor, [1] Sebastian Wieczorek, [1] 和 Andreas Amann[1]
[1] *School of Mathematical Sciences, University College Cork, Ireland*

我们介绍了一种形式体系，可高效计算具有开放边界的多段激光器中的激射模式和光学功率流。该形式体系以将复值电场及其空间导数投影到经过适当扩展的复数 $\mathcal{Z}$平面为基础，从而降低问题的阶数并简化分析。对于单段激光器，我们证明激光模是扩展复数 *loxodrome* 平面上的一条 $\mathcal{Z}$。对于多段激光器，我们求得激光器各区段的等角螺线。随后，利用开放边界条件，将各区段的等角螺线连续拼接，构造出多段激射模。将扩展复数 $\mathcal{Z}$平面立体投影到黎曼球面上，可对这一构造进行直观可视化。我们的形式体系简化了对开放多段激光器中激射模式的分析，并为模态几何和简并现象提供了新的见解。

PACS 分类号：42.55.-f，42.60.Da，03.50.De，41.20.-q

I. 引言

随着光学器件日益微型化以及光子集成电路不断发展，对包含有源介质区段和吸收区段的复杂结构中的光学模态进行建模，已成为一个日益突出的问题。对于一维结构，问题的核心在于求解具有复系数的电磁波方程的多点边值问题，而开放边界条件使情况更加复杂。单区段的情形对应于经典法布里–珀罗激光器，可以通过解析方法求解[1], ；而两个或更多区段的情形则困难得多，但也有趣得多。

本文旨在为求解具有开放边界的多段激光器中的激射模式提供一种通用方法，并帮助读者更直观地理解激射模式的几何形态。为此，我们提出了一种形式体系，如图1所示，适用于空间一维的激光器结构，记作 z。第一步，我们采用单模近似，将电场 $\mathcal{E}(z,\ t)$ 的实值偏微分波动方程约化为描述模场分布 $E(z)$ 的复值常微分波动方程。由于约化后的波动方程是二阶的，因此空间中每一点处的激射场都由两个复数表示：电场 $kE(z)$ 及其空间导数 $E'(z)$。因此，一个激射模在二维复向量空间（四维实向量空间）中表示为一条曲线，这很难直观呈现。因此，泵浦条件变化和不同激光器设计所产生的影响也难以理解。第二步，我们通过将两个复值变量投影到单个复值变量 $\mathcal{Z}(z)$ 上的不可逆H-投影，来解决这一高维问题；其中，复 E平面的原点映射到 $\mathcal{Z}$ 的无穷远处。关键在于，这个新变量与立体投影结合后，能够自然地将激射模表示为一条.....

条黎曼球面上的一维曲线黎曼球面 [2]。值得注意的是，黎曼球面已成功应用于物理学的许多领域，例如在量子计算中以布洛赫球表示两能级系统 [3]，或用来表示光的偏振态的庞加莱球面 [4]。我们形式体系的最后一步是在黎曼球面上计算这条曲线。为此，我们运用优雅的（可逆）莫比乌斯变换数学形式体系 [2] 来证明:

(i) 多区段激光器中给定区段内激射模的每一部分在扩充复平面上都只是对数螺线。

(ii) 这个对数螺线的逆莫比乌斯变换给出了一个 $\mathcal{Z}(z)$，它对应于黎曼球面上的一条特殊曲线，称为 斜航线 [5]。

(iii) 开放边界多段激光器的整个激射模，是将黎曼球面上的各条等角螺线首尾连接而得到的。

求解多段激光器激射模式的一种常用方法是传输矩阵方法 [6–8]。在这种方法中，多段激光器某一段中的部分激射模用一个复数 2×2矩阵表示，该矩阵取决于这一段的物理性质。我们的方法将问题的维数从四维实数空间降至二维实数空间，因此能以更简单、更直观的方式呈现激射模式。这使其成为传输矩阵方法的一种有趣替代方案。

为了验证并展示我们方法的实用性，我们首先重现单区段法布里–珀罗激光器的知名结果。随后，我们研究两个物理长度相同、但增益或吸收特性不同的区段组成的激光器。在这种情况下，我们区分两种情形：要么两个区段都具有净局部增益，要么一个区段具有净局部增益，而另一个区段具有净局部吸收。这里所说的"局部"是指该性质

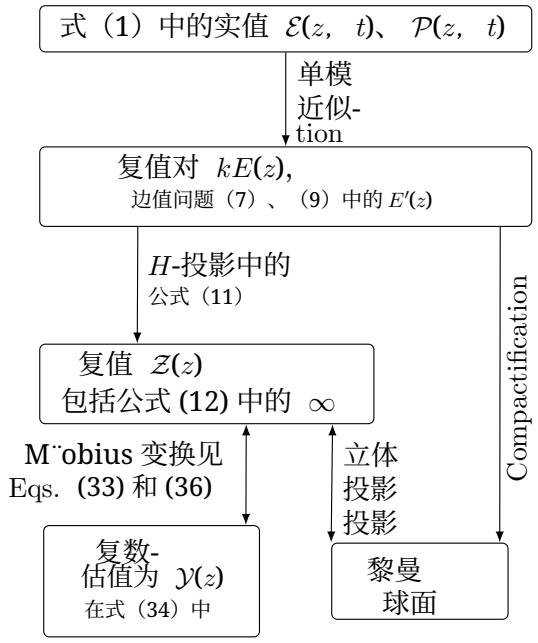

图1. 我们的形式体系概览，展示了文中讨论的三个步骤所涉及的不同变换。

不包括边界的介质。最后，我们研究一种三段式激光器，在两个具有净局部增益的外侧区段之间引入一个空气隙。

在此背景下，我们着重研究这样一些有趣的情形：随着一个或两个系统参数的变化，两个不同的模态会合并，或变为简并。

II. 电磁波动方程

激光器内部的电场是一个随空间和时间变化的三维实值矢量。考虑该电场的单个（标量）分量 $\mathcal{E}(z,\ t)$ 的时空演化，该分量沿激光器结构的纵向z-方向变化 [9]

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\mathcal{E}(z,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{E}(z,t) - \mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{P}(z,t) = 0, \quad (1)$$

其中 c 是真空中的光速， μ_0 是真空磁导率，而 $\mathcal{P}(z,t)$ 是总实值极化，由有源介质和背景极化两部分组成。我们采用单模恒定强度近似，并将电场和极化分解为复值空间模式分布（分别记为 $E(z)$ 和 $P(z)$）以及光学频率为 ω 的时间振荡:

$$\mathcal{E}(z,t) = \mathrm{Re}\left[E(z)e^{-i\omega t}\right], \quad (2)$$
$$\mathcal{P}(z,t) = \mathrm{Re}\left[P(z)e^{-i\omega t}\right]. \quad (3)$$

现在，我们可以通过以下关系，将复值极化和电场 [9, 10] 的同频分量联系起来:

$$P(z) = \epsilon_0\left(\chi_b(z) + \chi_g(z)\right)E(z), \quad (4)$$

其中， $\chi_b(z)$ 和 $\chi_g(z)$ 分别是复值背景磁化率和有源介质磁化率。引入介质的复介电常数 $\epsilon(z)$ 很有用:

$$\epsilon(z) = 1 + \chi_b(z) + \chi_g(z). \quad (5)$$

当 $\mathrm{Im}\left[\epsilon(z)\right] > 0$ 时，对应净局部吸收；而 $\mathrm{Im}\left[\epsilon(z)\right] < 0$ 则表示净局部增益或吸收。这使我们能够将波动方程 (1) 改写为简洁形式

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2\,\epsilon(z)\right)E(z) = 0, \quad (6)$$

其中 $k = \omega/c$ 是自由空间波数。通过引入新变量 $E'(z)$，这个二阶微分方程可以写成两个耦合的一阶微分方程:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}E(z) &= E'(z),\\ \frac{d}{dz}E'(z) &= -k^2\,\epsilon(z)\,E(z).\end{aligned} \quad (7)$$

由于 $E(z)$ 和 $E'(z)$ 是复值的，因此我们处理的是一个由实变量构成的四维问题。这是图1所示的第一步，我们从实值的 $\mathcal{E}(z,\ t)$ 和 $\mathcal{P}(z,\ t)$ 转换为复值变量对 $kE(z)$ 和 $E'(z)$。

A. 边界条件

本文考虑图2所示的三种不同激光器结构。每种激光器结构的外边界位于 $z = 0$ 和 $z = L$，并假设每个外边界处只有出射光，即光在 $z < 0$ 处向左传播，在 $z > L$处向右传播。假设激光器结构外部是真空，则对于 $z < 0$ 和 $z > L$，有 $\epsilon(z) = 1$。然后，在出射光假设下求解方程 (6)，得到

$$E(z) = \begin{cases} E(0)\,e^{-ikz} & \text{for } z < 0,\\ E(L)\,e^{ik(z-L)} & \text{for } z > L.\end{cases} \quad (8)$$

因此我们得到以下边界条件

$$\begin{aligned}E'(0) &= -ikE(0),\\ E'(L) &= ikE(L),\end{aligned} \quad (9)$$

它们与方程（7）一起定义了一个边值问题（BVP）。需要注意的是，这个边值问题的解并不唯一：如果 $E(z)$ 是一个解，那么对于任意复数 $\rho \neq 0$，$\rho E(z)$ 也是一个解。

下一节讨论的 H 投影将消除这种不唯一性。

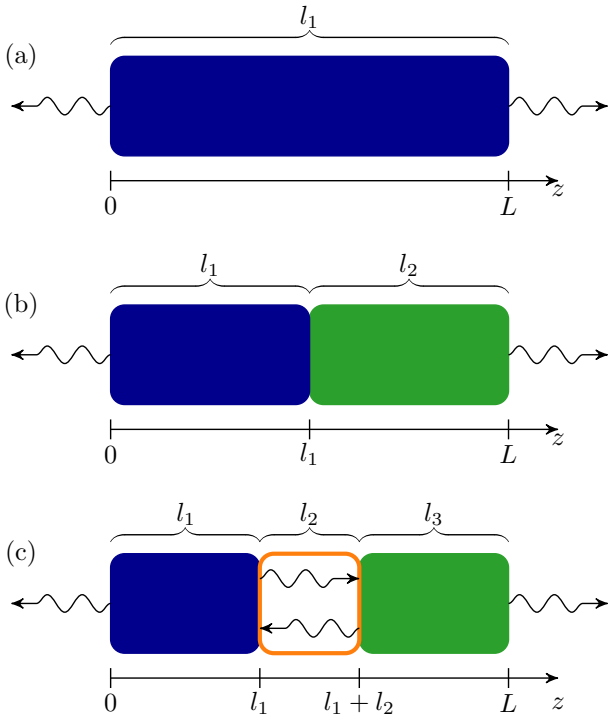

图2。（a）具有开放边界的单段激光器。（b）具有开放外边界的双段激光器结构，包含两个（蓝色（深灰色）和绿色（中灰色））增益介质段。（c）具有开放外边界的三段激光器结构，由两个（蓝色（深灰色）和绿色（中灰色））增益介质段组成，两者由一个真空间隙（白色，周边为橙色（浅灰色））分隔。

III. H投影

H 投影的目的是将两个一阶常微分方程（7）的维数从四个实维降至两个实维。我们将 H 投影定义为从 $\mathbb{C}^2$ 到扩展复平面 $\mathbb{C}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 的映射，如下所示：

$$H(h_1,h_2)=\begin{cases}h_1/h_2 & \text{for } h_2\neq 0,\\ \infty & \text{for } h_2=0,\end{cases} \tag{10}$$

其中，h_1 和 h_2 是复数。尽管 H 不可逆，但它消除了第二节A中所讨论的非唯一性，即对于任意复数 $\rho\neq 0$，$H(\rho h_1,\ \rho h_2)=H(h_1,\ h_2)$。$H$投影对应于复射影几何背景下齐次（或射影）坐标的概念 [2]。

利用 H-投影，我们现在引入无量纲函数 $\mathcal{Z}(z)\in\mathbb{C}$，其定义为

$$\mathcal{Z}(z)=H(E'(z),kE(z))=\begin{cases}\frac{E'(z)}{kE(z)} & \text{for } E(z)\neq 0,\\ \infty & \text{for } E(z)=0.\end{cases} \tag{11}$$

这一新函数使我们能够将电场方程（7）和边界条件（9）重写为

$$\frac{d\mathcal{Z}(z)}{dz}=-k\left(\mathcal{Z}(z)^2+\epsilon(z)\right), \tag{12}$$
$$\mathcal{Z}(0)=-i, \tag{13}$$
$$\mathcal{Z}(L)=i. \tag{14}$$

这是图1中的第二步。

边值问题 (12)–(14) 可用于在 z-子区间上求得连续解，其中 $\mathcal{Z}(z)$ 有限（或者等价地，$E(z)\neq 0$）。例如，我们可以选择在 $\|\mathcal{Z}(z)\|\leq 1$ 的范围内求解 (12)–(14)。对应于 $\mathcal{Z}(z)^{-1}$ 的边值问题可推导为

$$\frac{d\mathcal{Z}(z)^{-1}}{dz}=k\left(1+\epsilon(z)\mathcal{Z}(z)^{-2}\right), \tag{15}$$
$$\mathcal{Z}(0)^{-1}=i, \tag{16}$$
$$\mathcal{Z}(L)^{-1}=-i, \tag{17}$$

并用于在 z-子区间上求得连续解，其中 $\|\mathcal{Z}(z)\|\geq 1$，包括 $\mathcal{Z}(z)=\infty$（或者等价地，$E(z)=0$）。随后，可以在单位圆 $\|\mathcal{Z}(z)\|=\|\mathcal{Z}(z)^{-1}\|=1$ 处匹配所得解，从而构造在整个 z-区间 $[0,L]$ 上有效的连续解。得到解 $\mathcal{Z}(z)$ 后，我们可以通过对方程 (11) 积分，为给定的 $E(0)$ 恢复原始复值电场函数$E(z)$，得到

$$E(z)=E(0)\exp\left(k\int_0^z\mathcal{Z}(z')dz'\right). \tag{18}$$

由于在 $\mathcal{Z}(z)$ 和 $\mathcal{Z}(z)^{-1}$ 之间切换颇为不便，因此我们将在下一节介绍黎曼球面，以更优雅地表示边值问题 (7) 和 (9) 的解。

A. 黎曼球面

从 (7) 到 (12) 的降维使我们能够直观地洞察光学模态的性质。可视化扩展复平面 $\mathbb{C}$ 的一种便捷方式是通过立体投影映射到黎曼球面，其定义为

$$(r_x,r_y,r_z)=\frac{1}{1+|\mathcal{Z}|^2}\left(2\mathrm{Re}\left[\mathcal{Z}\right],2\mathrm{Im}\left[\mathcal{Z}\right],|\mathcal{Z}|^2-1\right). \tag{19}$$

这里，(r_x,r_y,r_z) 是三维嵌入空间中的坐标，而方程（19）将其限制在半径为 1 的球面上，其中 $r_x^2+r_y^2+r_z^2=1$。点 $\mathcal{Z}=0$ 被映射

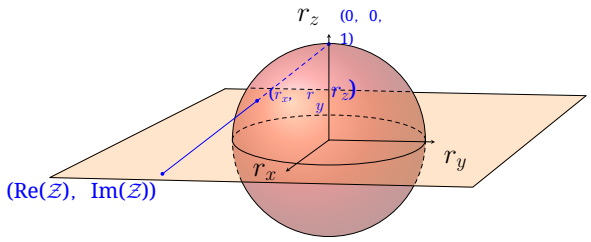

图 3. 根据方程 (19)，将扩充复平面 $\hat{\mathbb{C}}$ 中的点立体投影到嵌入 $\mathbb{R}^3$ 的黎曼球面上。

到点 (0，0，−1)，而复无穷远点 $\mathcal{Z}=\infty$ 被映射到嵌入空间中的点 (0，0，1)。方程（13）和（14）中的边界条件 $\mathcal{Z}=-i$ 和 i 分别映射到嵌入空间中的点 (0，−1，0) 和 (0，1，0)。这是图1第三步也是最后一步的一部分，如图3所示。由于黎曼球面是扩充复平面的紧化版本，因此我们形式体系中的最后两个步骤可以视为紧化。

B. 与物理量的联系

我们关注的物理量是复值电场 $|E(z)|^2$ 的强度，以及由时间平均坡印廷矢量 [1, Ch.1.3],给出的功率流

$$\mathcal{S}(z)=\mathrm{Re}\left[\frac{i}{2\mu_0 kc}E(z)(E'(z))^*\right], \tag{20}$$

其中，$(E'(z))^*$ 是 $E'(z)$的复共轭。利用公式（18），我们可以用$\mathcal{Z}$ 函数表示这些量如下

$$|E(z)|^2=|E(0)|^2\exp\left(2k\int_0^z \mathrm{Re}\left[\mathcal{Z}(z')\right]dz'\right), \tag{21}$$

$$\mathcal{S}(z)=\frac{1}{2\mu_0 c}|E(z)|^2\,\mathrm{Im}\left[\mathcal{Z}(z)\right]. \tag{22}$$

在给定的 z 处，$\mathcal{S}(z)>0$ 的含义是能量沿正 z方向（从左向右）在该 z处流动。由于 $\mathcal{S}(z)>0$ 蕴含 $\mathrm{Im}[\mathcal{Z}(z)]>0$，这种能量流由黎曼球面东半球上的点表示，即围绕 (0，1，0) 的点。对于 $\mathcal{S}(z)<0$，情况则相反。

下文中，为方便起见，我们引入并使用无量纲电场

$$\hat{E}(z)=\frac{E(z)}{E(0)}, \tag{23}$$

以及无量纲坡印廷矢量

$$\hat{S}(z)=2\mu_0 c\frac{\mathcal{S}(z)}{|E(0)|^2}=|\hat{E}(z)|^2\,\mathrm{Im}\left[\mathcal{Z}(z)\right], \tag{24}$$

注意，由式 (21) 和 (23) 可知

$$|\hat{E}(z)|^2=\exp\left(2k\int_0^z \mathrm{Re}\left[\mathcal{Z}(z')\right]dz'\right). \tag{25}$$

IV. 单段激光器的等角螺线

在将 H-投影应用于多段激光器之前，我们先借助图2(a)所示的著名单段法布里-珀罗激光器来说明其用法并介绍基本概念。我们忽略会导致段内 $\epsilon(z)$ 空间变化的任何效应，例如空间烧孔，并考虑介电常数 $\epsilon(z)=\epsilon_c$ 为常数的最简单情况。我们假设 $\mathrm{Im}[\epsilon_c]<0$，这对应于激光段内具有净局部增益的情形。

A. 不动点分析

使用这些定义

$$\mathcal{Z}_1^V(z)=-i\sqrt{\epsilon(z)},\quad \mathcal{Z}_2^V(z)=i\sqrt{\epsilon(z)}, \tag{26}$$

我们可以将 (12) 重写为非自治常微分方程的形式： [11]

$$\frac{d\mathcal{Z}(z)}{dz}=-k\left(\mathcal{Z}(z)-\mathcal{Z}_1^V(z)\right)\left(\mathcal{Z}(z)-\mathcal{Z}_2^V(z)\right), \tag{27}$$

这对于任意空间变化的 $\epsilon(z)$均成立。在 $\epsilon(z)=\epsilon_c$为空间常数的特殊情况下，方程 (27) 变为一个自治常微分方程:

$$\frac{d\mathcal{Z}(z)}{dz}=-k(\mathcal{Z}(z)-\mathcal{Z}_1^F)(\mathcal{Z}(z)-\mathcal{Z}_2^F), \tag{28}$$

其中

$$\mathcal{Z}_1^F=-i\sqrt{\epsilon_c},\quad \mathcal{Z}_2^F=i\sqrt{\epsilon_c}. \tag{29}$$

我们可以将方程（28）视为一个随 z 演化的平面自治动力系统，因此可以利用相平面和线性稳定性的概念，对方程（28）的解作出定性描述。点 $\mathcal{Z}_1^F$ 和 $\mathcal{Z}_2^F$ 是不动点。这些不动点的“稳定性”可由复值雅可比矩阵 $J(\mathcal{Z})$ 求得，其表达式为:

$$J(\mathcal{Z})=-2k\mathcal{Z}(z). \tag{30}$$

我们有 $\mathrm{Re}[\epsilon_c]>0$和 $\mathrm{Im}[\epsilon_c]<0$。采用约定 $\mathrm{Re}\left[\sqrt{\epsilon_c}\right]>0$ 可得 $\mathrm{Re}\left[\mathcal{Z}_1^F\right]<0$和 $\mathrm{Im}\left[\mathcal{Z}_1^F\right]<0$。利用（30）可知，$\mathrm{Re}\left[J(\mathcal{Z}_1^F)\right]=-2k\mathrm{Re}\left[\mathcal{Z}_1^F\right]>0$且 $\mathrm{Im}\left[J(\mathcal{Z}_1^F)\right]\neq 0$。因此，$\mathcal{Z}_1^F$表现为一条不稳定螺旋，这意味着解在相平面 $\mathcal{Z}$中螺旋式远离 $\mathcal{Z}_1^F$。类似地可以证明，$\mathcal{Z}_2^F$表现为一条稳定螺旋，这意味着解在 $\mathcal{Z}$中螺旋式趋近于 $\mathcal{Z}_2^F$。

B. 等角螺线解

现在我们证明，（28）的通解具有一种特殊形式，称为斜航线 [2, 5, 12]。要正式定义斜航线，需要用到对数螺旋和 M¨obius 变换的概念。对数螺旋是 $\mathbb{C}$ 中的一条曲线，其形式为

$$Q(z) = Q_0 \exp[Wz], \tag{31}$$

其中 Q_0，$W \in \mathbb{C}$ 且 $z \in \mathbb{R}$。莫比乌斯变换 ˆ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的函数 M，其形式为

$$M(p) = \frac{a_{11}p + a_{12}}{a_{21}p + a_{22}}, \tag{32}$$

ˆ其中 $p \in \mathbb{C}$ 和 a_{ij} 是满足以下条件的复数

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

我们注意到，每个莫比乌斯变换都有一个逆变换，且该逆变换也是莫比乌斯变换。斜航线定义为对数螺线经过莫比乌斯变换后的像，即 $M(Q(z))$。

为求得方程 (28) 的一般解，我们考虑以下将 $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}$ 映射到 $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}$ 的莫比乌斯变换：ˆˆ

$$\mathcal{Y} = \frac{\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_1^F}{\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_2^F} = \frac{\mathcal{Z} + i\sqrt{\epsilon_c}}{\mathcal{Z} - i\sqrt{\epsilon_c}}. \tag{33}$$

此变换分别将不动点 $\mathcal{Z}_1^F$ 和 $\mathcal{Z}_2^F$ 映射到 0 和 ∞。将其应用于方程 (28)，得到

$$\frac{d\mathcal{Y}(z)}{dz} = 2i\sqrt{\epsilon_c}\, k\, \mathcal{Y}(z). \tag{34}$$

方程 (34) 的通解是形式如 (31) 的对数螺旋，其中 $Q_0 = C$ 和 $W = 2i\sqrt{\epsilon_c}\, k$:

$$\mathcal{Y}(z) = C\, e^{2i\sqrt{\epsilon_c}\, kz}, \tag{35}$$

其中 $C \in \mathbb{C}$ 是一个未知的积分常数。对 (35) 应用 (33) 的逆变换，即

$$\mathcal{Z} = i\sqrt{\epsilon_c}\, \frac{\mathcal{Y} + 1}{\mathcal{Y} - 1}, \tag{36}$$

我们得到 (28) 的通解为

$$\mathcal{Z}(z) = \sqrt{\epsilon_c}\, \frac{D\cos(\sqrt{\epsilon_c}\, kz) - \sqrt{\epsilon_c}\sin(\sqrt{\epsilon_c}\, kz)}{D\sin(\sqrt{\epsilon_c}\, kz) + \sqrt{\epsilon_c}\cos(\sqrt{\epsilon_c}\, kz)}, \tag{37}$$

其中，$D \in \mathbb{C}$ 是一个未知的积分常数。方程 (28) 的通解 $\mathcal{Z}(z)$（见式 (37)）是对数螺旋的一个莫比乌斯变换，因此也是一条斜航线。

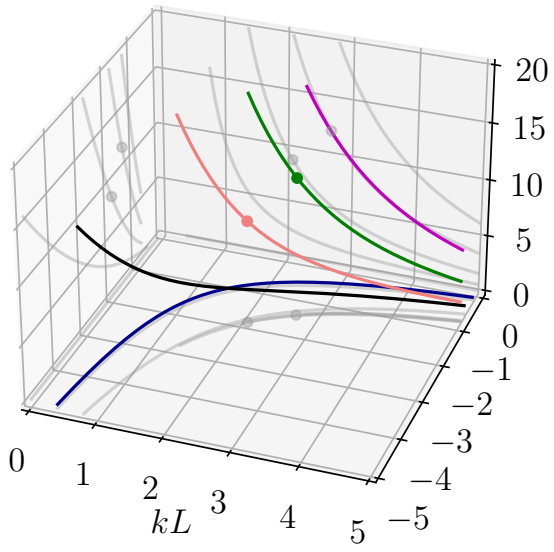

图4. 方程 (43) 的五个解分支。红色（浅灰色）和绿色（中灰色）点对应于表 I。请注意，此图及后续所有图中的坐标轴均表示无量纲量。

C. 边界条件

现在，我们为单段激光器施加边界条件，以确定积分的未知常数，并获得与 ϵ_c 和 kL 相对应的激射模式。

首先，从对数螺旋通解 (35) 可知 $C = \mathcal{Y}(0)$，并得到

$$\mathcal{Y}(z) = \mathcal{Y}(0)\, e^{2i\sqrt{\epsilon_c}\, kz}, \tag{38}$$

$$\mathcal{Y}(L) = \mathcal{Y}(0)\, e^{2i\sqrt{\epsilon_c}\, kL}. \tag{39}$$

在激光器的物理相关情形中，我们有 Re $[\epsilon_c] > 0$、Im $[\epsilon_c] < 0$ 和 $kL > 0$。因此，式 (38) 描述了一条从给定的 $\mathcal{Y}(0)$ 出发的对数螺旋，其有两个未知参数 $\epsilon_c \in \mathbb{C}$ 和 $kL \in \mathbb{R}$。条件 (39) 确定 ϵ_c 和 kL，使螺旋连接到给定的 $\mathcal{Y}(L)$。换言之，满足 (39) 的多个解对应于多个单段激射模。利用 (33) 对边界条件 (13) 和 (14) 进行变换，我们得到

$$\mathcal{Y}(0) = \frac{1 - \sqrt{\epsilon_c}}{1 + \sqrt{\epsilon_c}} \quad \text{and} \quad \mathcal{Y}(L) = \frac{1 + \sqrt{\epsilon_c}}{1 - \sqrt{\epsilon_c}}, \tag{40}$$

并将（39）改写为

$$\pm 1 = \frac{1 - \sqrt{\epsilon_c}}{1 + \sqrt{\epsilon_c}}\, e^{i\sqrt{\epsilon_c}\, kL}. \tag{41}$$

我们使用该公式将激射模式展示为三维参数空间（Re $[\epsilon_c]$, Im $[\epsilon_c]$, kL）中的一族一维流形，如图4所示。

或者，我们从一般的等角螺线解 (37) 注意到 $D = \mathcal{Z}(0)$, 并得到

$$\mathcal{Z}(z) = \sqrt{\epsilon_c}\,\frac{\mathcal{Z}(0)\cos(\sqrt{\epsilon_c}\,kz) - \sqrt{\epsilon_c}\sin(\sqrt{\epsilon_c}\,kz)}{\mathcal{Z}(0)\sin(\sqrt{\epsilon_c}\,kz) + \sqrt{\epsilon_c}\cos(\sqrt{\epsilon_c}\,kz)}. \quad (42)$$

然后施加边界条件 (13)，得到单段激光模式条件 (14)

$$i = \sqrt{\epsilon_c}\frac{-i\cos(\sqrt{\epsilon_c}\,kL) - \sqrt{\epsilon_c}\sin(\sqrt{\epsilon_c}\,kL)}{-i\sin(\sqrt{\epsilon_c}\,kL) + \sqrt{\epsilon_c}\cos(\sqrt{\epsilon_c}\,kL)}. \quad (43)$$

条件 (43) 等价于条件 (41)，也就是说，它确定了 $\epsilon_c \in \mathbb{C}$ 和 $kL \in \mathbb{R}$，使等角螺线解 $\mathcal{Z}(z)$ 连接 $\mathcal{Z}(0) = -i$ 和 $\mathcal{Z}(L) = i$。当我们将激射模式的计算推广到多段激光器时，这个条件将很有用。

D. 单段激光器的等角螺线

运用迄今引入的工具，现在我们来展示如何在黎曼球面和复 $\mathcal{Z}$ 平面上表示单段激光器中的激射模式。这也将使我们能够把等角螺线与电场强度和功率流等物理特性联系起来。取对应于图4中红色（浅灰色）圆点的参数值（表 I 中的第一组参数），可得到由 (42) 给出的解 $\mathcal{Z}(z)$。该解显示在图6(a)的扩充复平面 $\mathcal{Z}$ 上，并投影到图5(a)的黎曼球面上。在图6(a)中可以看到，所得等角螺线连接边界条件 $-i$ 和 $+i$，它从不稳定定点 $Z_1^F = -i\sqrt{\epsilon_c}$ 螺旋远离，穿过 0，然后螺旋趋近稳定定点 $Z_2^F = i\sqrt{\epsilon_c}$。同样，我们也可以在图5(a)的黎曼球面上观察到这一行为。相应激射模的电场强度$|E(z)|^2$ 可用 (21) 求得。从图6(b)可以看出，该电场强度在激光段内有三个极大值和两个极小值。

类似地，取图4中绿色（中灰色）圆点所对应的参数值（表 I 中第二组参数），图7(a)的扩充复平面 $\mathcal{Z}$ 中展示了另一个斜航线示例，并将其投影到图5(b)的黎曼球面上。关键区别在于，这个例子中的斜航线螺旋穿过无穷远点，而非 0。相应激射模的电场强度在激光器内部有四个极大值和三个极小值，并在中心极小值处为零，其中

$E(L/2) = 0$，或等价地$\mathcal{Z}(L/2) = \infty$。

为了对图 5 所示黎曼球面上的斜航线获得更直观的几何理解，我们

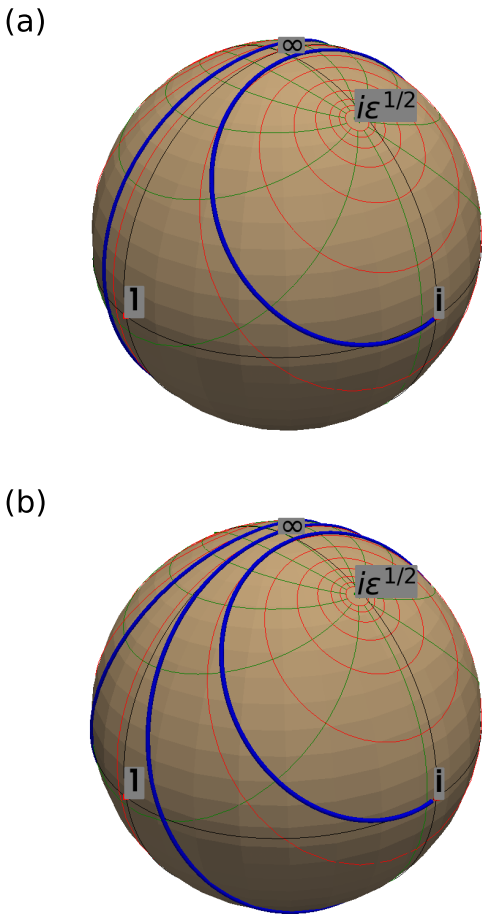

图5. 蓝色（深灰色）曲线表示利用方程 (19) 投影到黎曼球面上的等角螺线解 $\mathcal{Z}(z)$。两个面板 (a) 和 (b) 的参数组见表 I。红色（浅灰色）和绿色（中灰色）圆表示中心分别为 $\mathcal{Z}_1^F = -i\sqrt{\epsilon_c}$ 和 $\mathcal{Z}_2^F = i\sqrt{\epsilon_c}$的正交圆束。

加入了绿色（中灰色）圆，它们代表球面上所有经过两个不动点 $\mathcal{Z}_1^F$和 $\mathcal{Z}_2^F$的圆所组成的圆族。此外，我们还加入了红色（浅灰色）圆，它们代表与绿色（中灰色）圆垂直的圆所组成的圆族。从数学上说，这些红色（浅灰色）圆对应于一个正交圆系，其中心为 $\mathcal{Z}_1^F$和 $\mathcal{Z}_2^F$，如 [5]所述。斜航线曲线的定义性质是：它以固定角度 [2] 穿过每一族圆。

现在，我们将单段激光器的激射模式与激光器内部由式 (24) 定义的功率流 $S(z)$ 联系起来。对于上述研究的两个示例，结果分别如图 6(c) 和图 7(c) 所示。在这两种情况下，我们都发现 $S(0) < 0$且 $S(L) > 0$，这对应于两端的出射光。此外， $S(z)$——

参数	对于图 5(a) 和 6	对于图 5(b) 和 7
kL	2.1	2.7
ϵ_c	$9.0709 - 1.9521i$	$12.2368 - 1.5171i$
$\mathcal{Z}_2^F = -\mathcal{Z}_1^F$	$0.3222 + 3.0290i$	$0.2164 + 3.5048i$

表 I. 图 5、6 和 7 所用的参数。

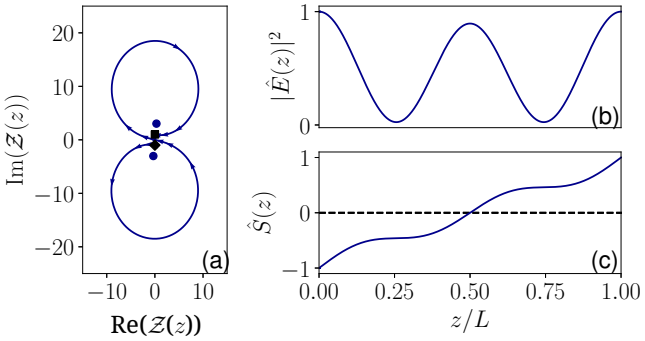

图 6。（a）复平面上的等角螺线解 $\mathcal{Z}(z)$ 参数图；边界条件 $+i$ 和 $-i$ 分别以方形和菱形标示；蓝色（深灰色）圆点表示不动点 Z_1^F 和 Z_2^F。面板（b）和（c）分别展示对应的电场强度分布 $\hat{}E(z)|^2$ 和功率流分布 $\hat{}S(z)$。参数组列于表 I 的第一列。

随着 z 的增大而单调增加，并且有 $\hat{}S(L/2) = 0$。

V. 多段激光器的复合斜航线

在单节法布里-珀罗激光器中使用 H-投影后，我们的下一个目标是在多节情况下求得边值问题 (12)-(14) 的解。

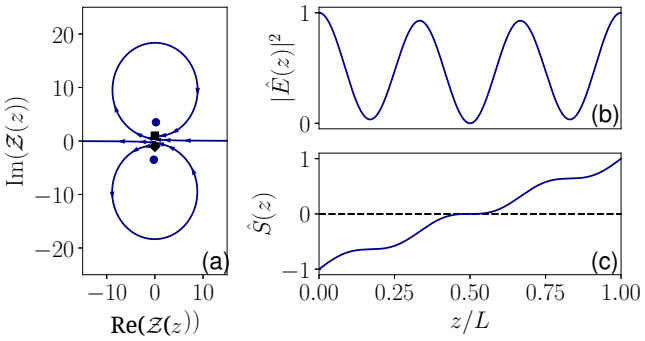

图 7. 与图 6 相同，但参数组采用表 I 第二列给出的数值。

激光器。这将通过不同 M¨obius 变换的组合来实现，每个区段对应一种变换，这让人联想到传递矩阵方法[13]。

具体而言，我们考虑总长度为 L 的 n 区段激光器，并使用 l_j 表示区段 j 的长度，因此 $l_1 + \ldots l_n = L$。我们假设公式 (12) 中的介电常数 $\epsilon(z)$ 是 z 的分段常数函数，并使用 ϵ_j 表示区段 j 中的恒定介电常数。此外，我们使用 z_j 表示区段 j 与 $j+1$ 之间边界的位置，其中 $z_0 = 0$ 和 $z_n = L$。

A. 莫比乌斯变换的复合

为高效计算多段等角螺线，我们引入以下便于使用的莫比乌斯变换记号。对于一个 2×2 复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{44}$$

我们将其对应的莫比乌斯变换 $[A]$定义如下

$$[A](p) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}(p) \equiv \frac{a_{11}p + a_{12}}{a_{21}p + a_{22}}. \tag{45}$$

请注意，莫比乌斯变换的表示并不唯一。特别地，对于任意复数 $c \neq 0$，矩阵 cA 定义的莫比乌斯变换与 A 相同。此外，我们注意到

$$([A] \circ [B])(p) = [AB](p), \tag{46}$$

这意味着，莫比乌斯变换$[A]$ 与 $[B]$ 的复合仍是一个莫比乌斯变换 $[AB]$，其对应矩阵为矩阵乘积 AB。

利用这一记号，我们将第 j 段的变换(33)改写为

$$\mathcal{Y}_j(z) = \begin{bmatrix} 1 & i\sqrt{\epsilon_j} \\ 1 & -i\sqrt{\epsilon_j} \end{bmatrix}(\mathcal{Z}_j(z)), \quad z \in [z_{j-1}, z_j]. \tag{47}$$

类似地，$\mathcal{Y}$ 中第 j 节的通解 (38) 可写成如下形式

$$\mathcal{Y}_j(z) = \begin{bmatrix} e^{2i\sqrt{\epsilon_j}\,k(z-z_{j-1})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(\mathcal{Y}_j(z_{j-1})). \tag{48}$$

接下来，我们对式 (47) 求逆，将 $\mathcal{Z}$ 中第 j 个区段的通解 (42) 重写为 M¨obius 变换的复合

$$\mathcal{Z}_j(z) = \begin{bmatrix} i\sqrt{\epsilon_j} & i\sqrt{\epsilon_j} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} e^{2i\sqrt{\epsilon_j}\,k(z-z_{j-1})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & i\sqrt{\epsilon_j} \\ 1 & -i\sqrt{\epsilon_j} \end{bmatrix}(\mathcal{Z}_j(z_{j-1})). \tag{49}$$

这样，我们得到 n 条各自独立的等角螺线，$\mathcal{Z}_1(z)\ldots,$ $\mathcal{Z}_n(z)$，每个区段 j 对应一条。介电常数不同的两个区段交界面处的电磁场边界条件要求电场及其一阶导数连续 [1]

$$E_j(z_j) = E_{j+1}(z_j) \quad \text{and} \quad E'_j(z_j) = E'_{j+1}(z_j).$$

根据（11），这意味着仅在 $\mathcal{Z}$中具有连续性。

$$\mathcal{Z}_j(z_j) = \mathcal{Z}_{j+1}(z_j). \tag{50}$$

随后，我们使用内部条件（50）将各个斜航线（49）连接成一条连续但通常不光滑的复合斜航线 $\mathcal{Z}^{comp}(z)$。需要注意的是，$\mathcal{Z}^{comp}(z)$取决于 $\mathcal{Z}_1(z_0)$和$3n$ 个实参数。这些实参数可以选择为 $\mathrm{Re}(\epsilon_1)\ldots,$ $\mathrm{Re}(\epsilon_n),$ $\mathrm{Im}(\epsilon_1)\ldots,$ $\mathrm{Im}(\epsilon_n)$ kL 以及段长 $n-1$ 的 kl_1 比值：$kl_2:\ldots:kl_n$。在第 VI 节中，我们将考虑一组基于各个区段不同物理特征的、更方便的参数。接下来，我们需要确保这样的 $\mathcal{Z}^{comp}(z)$满足边界条件（13）和（14）。因此，我们施加 $\mathcal{Z}^{comp}(0) = \mathcal{Z}_1(z_0) = -i$ 以及$\mathcal{Z}^{comp}(L) = \mathcal{Z}^{comp}(z_n) = i$，并使用（46）得到

$$\begin{aligned} i = &\begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\epsilon_n}\,kl_n) & -\sqrt{\epsilon_n}\sin(\sqrt{\epsilon_n}\,kl_n) \\ \frac{\sin(\sqrt{\epsilon_n}\,kl_n)}{\sqrt{\epsilon_n}} & \cos(\sqrt{\epsilon_n}\,kl_n) \end{bmatrix} \circ \\ &\cdots \\ &\circ \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\epsilon_1}\,kl_1) & -\sqrt{\epsilon_1}\sin(\sqrt{\epsilon_1}\,kl_1) \\ \frac{\sin(\sqrt{\epsilon_1}\,kl_1)}{\sqrt{\epsilon_1}} & \cos(\sqrt{\epsilon_1}\,kl_1) \end{bmatrix} (-i). \end{aligned} \tag{51}$$

这一复杂条件固定了所有 $3n$ 实参数，以确保 $\mathcal{Z}^{comp}(z)$ 满足（13）和（14）。它的多个解对应于多个多段激射模式。

在实践中，我们避免同时改变所有 $3n$ 实参数，而是按如下方式构造 $\mathcal{Z}^{comp}(z)$。我们使用合理的数值固定 $3n$ 实参数，从 $-i$ 处开始第一条斜航线，$z = z_0 = 0$ 使其满足第一个边界条件（13），然后按照上文所述进行斜航线拼接。所得结果是复合斜航线 $\mathcal{Z}^{comp}(z)$，其端点$\mathcal{Z}^{comp}(L)$位于扩充复平面上的某处。接下来，我们希望尽可能少地放宽 $3n$ 实参数的限制，以确保 $\mathcal{Z}^{comp}(L)$ 移动到点$\mathcal{Z} = i$，从而同时满足第二个边界条件（14）。由于 $\mathcal{Z} = i$ 是扩充复平面上的一个点，即余维为二，至少需要同时改变两个 $3n$ 实参数，才能使 $\mathcal{Z}^{comp}(L)$ $= i$。通过这种方式，我们得到一族复合斜航线，它们利用分段常数的 $\epsilon(z)$求解边值问题（12）–（14）。这种方法的一个显著优点是，它可以推广到任意连续空间变化的介电率

通过对具有足够大 n的 $\epsilon(z)$进行适当的分段常数近似，得到强度分布 $\epsilon(z)$。最后，

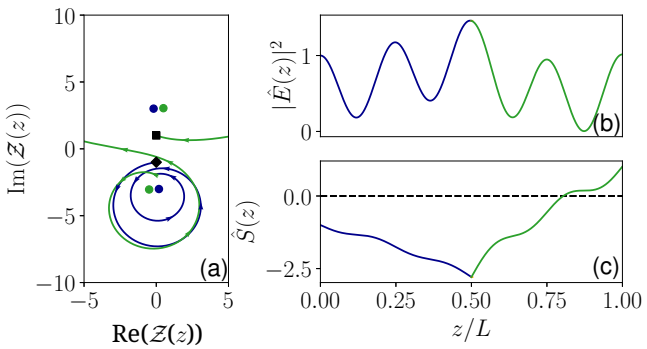

图8. (a) 等角螺线解 $\mathcal{Z}(z)$ 在复平面上的参数图；$+i$ 和 $-i$ 的边界值分别以方形和菱形标出；蓝色（深灰色）和绿色（中灰色）圆点分别表示区段1和区段2的不动点。面板(b)和(c)分别显示相应的电场强度分布 $|E(z)|^2$和功率流分布 $S(z)$。蓝色（深灰色）曲线和绿色（中灰色）曲线分别表示第一和第二区段的 $\mathcal{Z}(z)$。参数值见表 II 第一列。

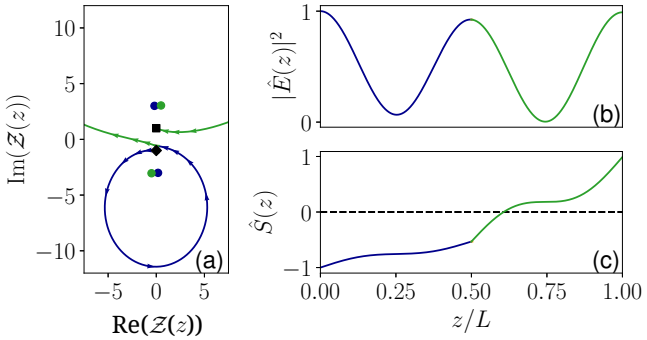

图9. 与图8相同，但参数值取自表 II 第二列。

利用公式（21）和（24）分别得到相应多段激射模式的电场强度和功率流。

B. 双段激光器

在转向三段式激光器之前，我们先简要讨论具有六个实参数的双段激光器。双段激光器问题有四个不动点，每个区段各有两个，我们将其记为 $\mathcal{Z}^F_{j,1} = -i\sqrt{\epsilon_j}$ 和 $\mathcal{Z}^F_{j,2} = i\sqrt{\epsilon_j}$，其中 $j = 1, 2$。

首先，利用左边界条件（13）和内部条件（50）连接两条等角螺线。然后，改变两个实参数 kL 和 $\mathrm{Im}(\epsilon_1)$，以满足右边界条件（14）。由此得到的复合等角螺线揭示了两种激射模式：增益-增益 （GG）激射模式和吸收-增益 （AG）激射模式。

参数	对于图8 (AG)	对于图9 (GG)
kL	4.2437	2.112
$kl_1 : kl_2$	1 : 1	1 : 1
ϵ_1	$9.0 + 1.1138i$	$9.0 - 0.8575i$
ϵ_2	$9.0 - 3.0i$	$9.0 - 3.0i$
$\mathcal{Z}^F_{1,2} = -\mathcal{Z}^F_{1,1}$	$-0.1853 + 3.006i$	$0.1427 + 3.0036i$
$\mathcal{Z}^F_{2,2} = -\mathcal{Z}^F_{2,1}$	$0.4934 + 3.0402i$	$0.4934 + 3.0402i$

表 II. 用于图 8 和图 9 的参数及其对应的不动点。

参数	对于图 10(a) 和图 11 (GNG)	对于图 10(b) 和图 12 (GNA)
kL	19.4456	20.0942
$kl_1 : kl_2 : kl_3$	10 : 1 : 10	10 : 1 : 10
ϵ_1	$9.2503 - 0.3042i$	$8.8759 - 0.3599i$
ϵ_2	1	1
ϵ_3	$9.2086 - 0.1350i$	$8.9344 + 0.2625i$
$\mathcal{Z}^F_{12} = -\mathcal{Z}^F_{11}$	$0.049995 + 3.0418i$	$0.06039 + 2.9799i$
$\mathcal{Z}^F_{22} = -\mathcal{Z}^F_{21}$	i	i
$\mathcal{Z}^F_{32} = -\mathcal{Z}^F_{31}$	$0.0223 + 3.0347i$	$-0.0439 + 2.9894i$

表III. 图 11 和图 12 所用的参数。

图9展示了一个增益-增益激射模示例，其参数值见表 II。该模态有两个增益段，与单段激射模相似。区别在于，现在有两段斜航线，每段都对应一对不同的不动点。第一区段中的斜航线（蓝色（深灰色））从不稳定的 $\mathcal{Z}^F_{1,1}$ 螺旋远离，趋向稳定的 $\mathcal{Z}^F_{1,2}$；第二区段中的斜航线（绿色（中灰色））从不稳定的 $\mathcal{Z}^F_{2,1}$ 螺旋远离，趋向稳定的 $\mathcal{Z}^F_{2,2}$。

图8展示了一个吸收-增益激射模示例。由于该模式由一个吸收段（$\mathrm{Im}(\epsilon_1) > 0$）和一个增益段（$\mathrm{Im}(\epsilon_2) < 0$）组合而成，因此与单段激射模大不相同。因此，相应的斜航线（蓝色（深灰色））螺旋趋向于 $\mathcal{Z}^F_{1,1}$，此时该点稳定。

C. 三段激光器

三段式激光器由九个实参数表征，并有六个不动点，每个区段对应两个，记为 $\mathcal{Z}^F_{j,1} = -i\sqrt{\epsilon_j}$ 和 $\mathcal{Z}^F_{j,2} = i\sqrt{\epsilon_j}$，其中 $j = 1, 2, 3$。现在我们讨论图2(b)所示的三段式激光器具体示例，其中两个具有局部增益或吸收的外侧区段由一个带真空间隙的区段隔开。因此，我们有 $\epsilon_2 = 1$，于是方程（51）变为

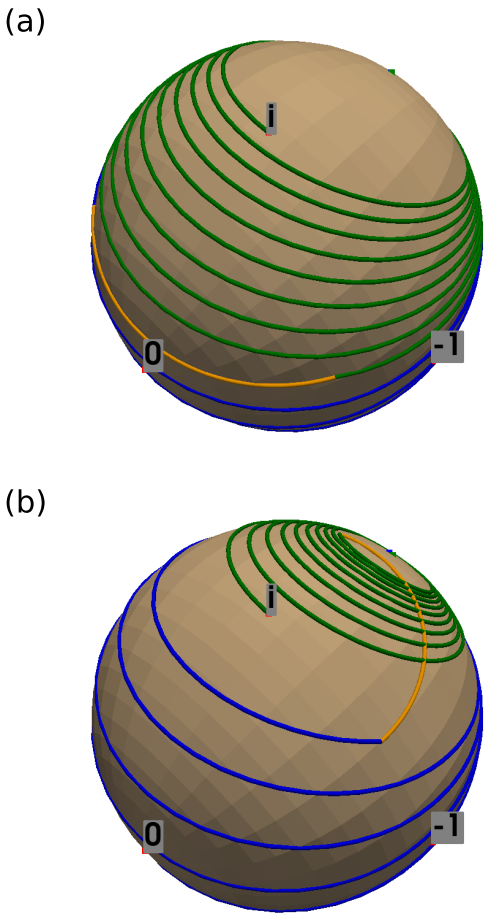

图10。蓝色（深灰色）、橙色（浅灰色）和绿色（中灰色）线分别表示三段激光器在区段1、2和3中的等角螺线解，并将其投影到黎曼球面上。两个面板(a)和(b)的参数组列于表III。

$$i = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\epsilon_3}kl_3) & -\sqrt{\epsilon_3}\sin(\sqrt{\epsilon_3}kl_3) \\ \frac{\sin(\sqrt{\epsilon_3}kl_3)}{\sqrt{\epsilon_3}} & \cos(\sqrt{\epsilon_3}kl_3) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \cos(kl_2) & -\sin(kl_2) \\ \sin(kl_2) & \cos(kl_2) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\epsilon_1}kl_1) & -\sqrt{\epsilon_1}\sin(\sqrt{\epsilon_1}kl_1) \\ \frac{\sin(\sqrt{\epsilon_1}kl_1)}{\sqrt{\epsilon_1}} & \cos(\sqrt{\epsilon_1}kl_1) \end{bmatrix} (-i). \tag{52}$$

与双段激光器类似，我们预期存在两种本质上不同类型的激射模式（方程 (52) 的解）。对于两个外侧区段均具有净局部增益的情况，这对应于 $\mathrm{Im}[\epsilon_1] < 0$ 和 $\mathrm{Im}[\epsilon_3] < 0$，我们预期会出现增益-中性-增益 （GNG）激射模式。另一方面，对于一个外侧区段具有净局部增益，而另一个外侧区段具有净局部吸收的情况，对应于 cor-

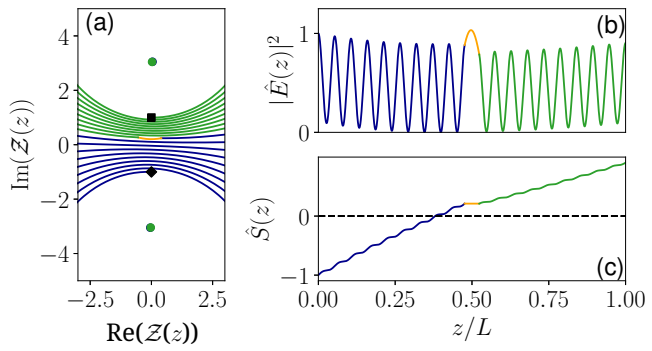

图11. (a) 等角螺线解 $\mathcal{Z}(z)$ 在复平面上的参数图； $+i$ 和 $-i$ 的边界值分别以方块和菱形标示；蓝色（深灰色）和绿色（中灰色）圆点分别表示区段1和区段3的不动点。面板 (b) 和 (c) 显示相应的电场强度分布 $|\hat{E}(z)|^2$和功率流分布 $\hat{S}(z)$。配色方案与图10一致，参数组列于表III的第一列

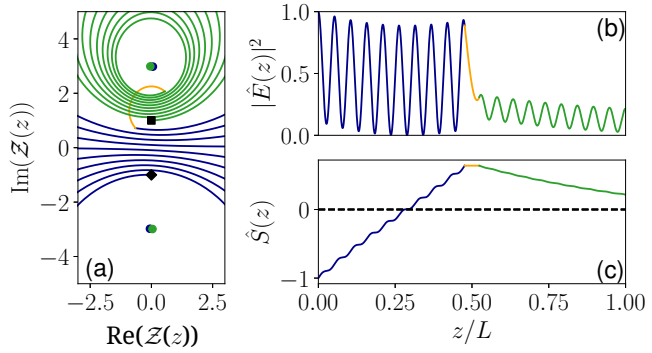

图12. 与图11相同，但参数组采用表III第二列所列的参数。

分别对应 $\mathrm{Im}[\epsilon_1] < 0$ 和 $\mathrm{Im}[\epsilon_3] > 0$，反之亦然，我们预期会出现增益-中性-吸收(GNA)激射模式和吸收-中性-增益(ANG) 激射模式。

使用表 III 中的数值，图10(a)和图11(a)展示了一个 GNG 激射模式的示例。参数经过选择，与图 14 中的绿色（中灰色）点相匹配。动力学由每个区段中的固定点结构决定。 $\mathcal{Z}(z)$从 $-i$ 开始，沿着斜航线轨迹（蓝色（深灰色）曲线）螺旋远离 $\mathcal{Z}_{11}^F$ 并朝向 $\mathcal{Z}_{12}^F$ 。在 $z = l_1$ 处，真空间隙使 $\mathcal{Z}(z)$沿圆周运动，直至到达 $z = z_2$ （橙色（浅灰色）曲线）。在第三区段中， $\mathcal{Z}(z)$再次沿着斜航线螺旋轨迹朝向 $\mathcal{Z}_{32}^F$ 运动，最终到达$\mathcal{Z}(L) = i$ （绿色（中灰色）曲线）。这种情况下的整体图景与单区段法布里-珀罗情形相似，因为区段1和区段3都具有净增益。图11(c)也展示了这一点，其中显示了即刻区段1和3中的功率流增加。相应的电场强度如图11(b)所示。区段1和3中的电场强度大小相近。

图10(b)和图12展示了一个 GNA 激射模示例，其参数与图14中的蓝色（深灰色）圆点相对应。由于区段3现在具有吸收性， $\mathcal{Z}(z)$（绿色（中灰色）曲线）在到达最终点 $\mathcal{Z}(L) = i$之前，便从$\mathcal{Z}_{32}^F$ 处螺旋远离。因此，功率流现在在内部真空区段达到最大值，如图12(c)所示。图12(b)表明，区段3中的电场强度显著小于区段1。

VI. 均匀展宽介质与尖点

在此，我们从不同角度重新考察单段和三段激光器。我们的目标是用与有源介质典型物理特性相对应的参数重新表述这个问题，例如增益或粒子数反转，以及粒子数导致的折射率变化。为清楚起见，我们考虑均匀展宽的二能级有源介质。为与第二节中采用的单模恒强度近似保持一致，我们假设每个区段内的粒子数反转恒定。

为了用区段 j 中有源介质的粒子数反转 N_j 表征区段 j 中的介电常数 $\epsilon_j \in \mathbb{C}$ ，我们使用 [14–16],

$$\epsilon_j = n_{b,j}^2 + \frac{N_j}{\Delta_j + i}, \tag{53}$$

其中 $n_{b,j} \in \mathbb{C}$ 是区段 j中的背景折射率， N_j 是区段 j 中的粒子数反转，并且

$$\Delta_j = \frac{k - k_{0,j}}{\gamma_{P,j}},$$

表征了区段 j中由粒子数引起的折射率变化；$c\,k_{0,j}$ 是二能级有源介质的跃迁频率，$c\,\gamma_{P,j}$ 是以秒的倒数为单位的有源介质极化衰减。因此，式（50）下方列出的 $3n$ 个独立实参数被（$6n + 1$）个独立参数取代：$\mathrm{Re}(n_b$, 1) . . ., $\mathrm{Re}(n_{b,n})$, $\mathrm{Im}(n_b$,1) . . ., $\mathrm{Im}(n_{b,n})$,N_1, . . . , N_n, k_0,1, . . . , $k_{0,n}$, γ_P,1, . . . , $\gamma_{P,n}$, k, l_1, . . . , l_n。

如果将范围限定为特定的激光器结构，参数数量就会显著减少：其中每个区段要么是真空段，要么包含相同类型的有源介质，但不同非真空段中的粒子数反转可以不同。这样一来，参数$n_{b、\,i}$, $k_{0、\,i}$和$\gamma_{P、\,i}$ 在所有非真空段中都相同，我们分别用 n_b、 k_0和 γ_P表示这些全局参数。因此，每个非真空段中由粒子数引起的折射率变化 Δ_j 也相同。

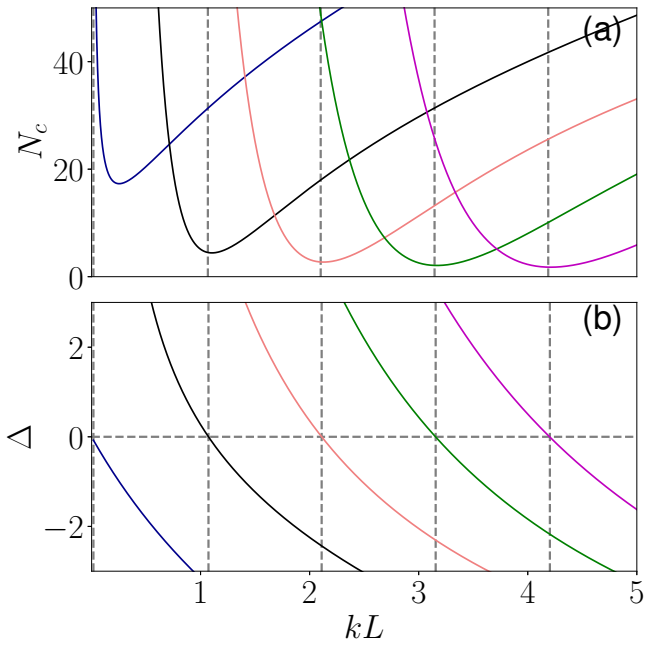

图13. 使用方程 (43) 和 (55) 得到的单段激光器中激射模的五个解分支，在 $n_b = 3 + 0.13i$ 投影到 (kL, N_c) 平面 (a) 和 (kL, Δ) 平面 (b) 上。

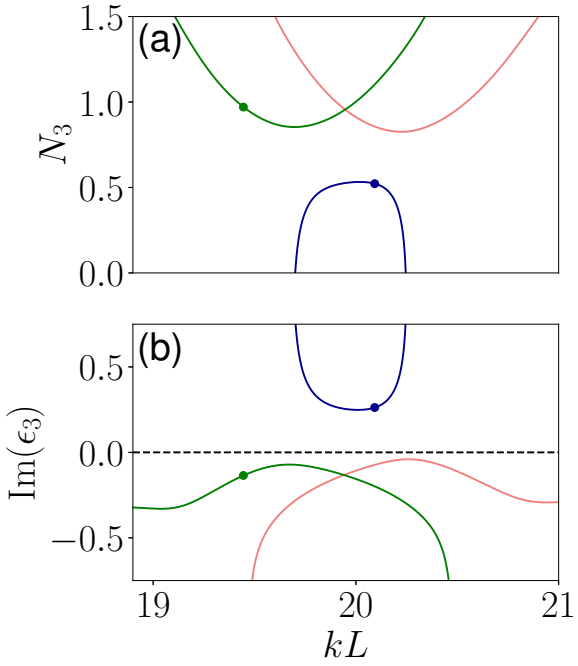

图14。（a）在（kL, N_3）平面中，针对 kl_1 : kl_2 : kl_3 = 10 : 1 : 10, $n_b = 3 + 0.13i$ 和 $N_1 = 1.15$，使用（56）–（58）得到的方程（52）的解分支。（b）使用方程（58）绘制的相应 Im(ϵ_3) 图。绿色（中灰色）和蓝色（深灰色）圆点表示表III中使用的数值。

截面，并将其记为 Δ。那么，方程（53）变为

$$\epsilon_j = \begin{cases} n_b^2 + \frac{N_j}{\Delta + i} & \text{for non-vacuum sections} \\ 1 & \text{for vacuum sections} \end{cases}. \tag{54}$$

此外，我们将 k 和 Δ 视为独立参数，从而进一步简化问题。换言之，对于具有 m 个非真空段的激光器，我们有$m+n+3$ 个实独立参数：Re(n_b)、Im(n_b)、N_1，...，N_m、Δ、kL，以及 $n-1$ 个段长kl_1 : kl_2 : ..... : kl_n 的比值。下文中，为了将我们的结果与 [16], 中的结果进行比较，我们允许 kL、Δ 和粒子数反转 N_1，.....，N_m 变化，同时保持其他参数不变。

A. 单段激光器

对于单段激光器，介电常数为

$$\epsilon_c = n_b^2 + \frac{N_c}{\Delta + i}. \tag{55}$$

在固定 n_b 的情况下，将 (55) 代入复方程 (43)，可为三个实参数 Δ、N_c 和 kL 提供两个实条件。由此得到的一维激射模解分支如图13所示。图13(a) 展示了各解分支中 N_c 随 kL 的变化。这些解分支对应于图4中的曲线，两图通过方程 (55) 相关联。

B. 三段激光器

现在，我们重新考察均匀展宽情况下第 VC 节中的三段激光器。此时，各段中的介电常数为：

$$\epsilon_1 = n_b^2 + \frac{N_1}{\Delta + i}, \tag{56}$$

$$\epsilon_2 = 1 \tag{57}$$

$$\epsilon_3 = n_b^2 + \frac{N_3}{\Delta + i}. \tag{58}$$

其中，N_1 和 N_3 分别是区段1和区段3的粒子数反转参数。我们选择这些参数（见图注），以便与 [16]进行比较。

利用（52）以及（56）—（58），我们得到如图14所示的激射模式解分支。我们注意到，图14(a)中的红色（浅灰色）和绿色（中灰色）分支与图13所示单段激光器中的分支相似。图14(b)表明，在这些情况下，Im(ϵ_3)为负，因此第3段具有净局部增益。因此，这些分支对应于增益-无增益激射模式。不过，还存在另一种不同类型的分支，如图14中的蓝色（深灰色）线所示，其形状倒置，且 N_3取值较低。该分支具有正的*Im()*，对应于第3段中的净局部吸收（图14(b)），因此

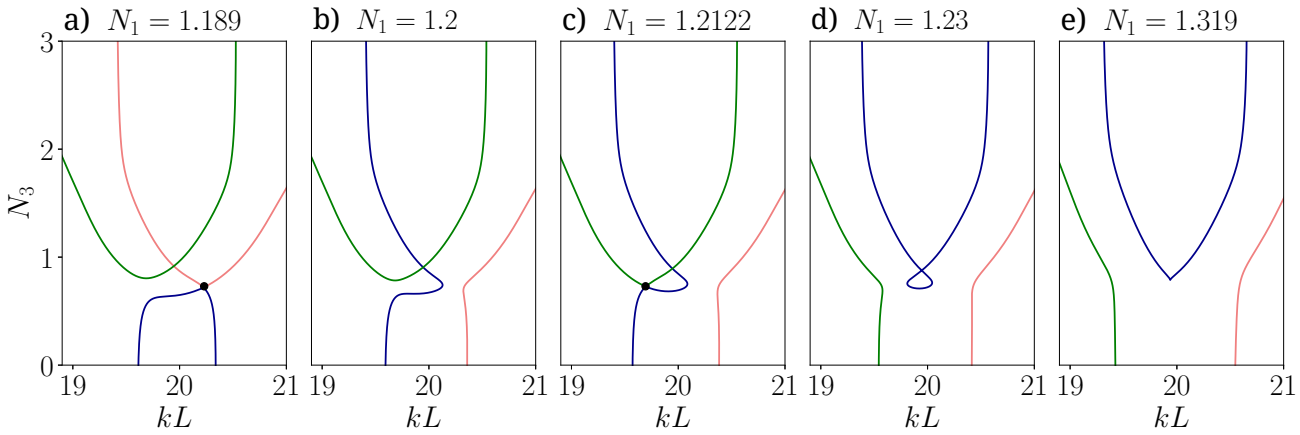

图15。对于每个面板中所示的不同 N_1 值，如图14(a)所示的解分支。分支合并点以黑点表示。

该激射模式属于GNA类型。分支之间的这一性质差异与我们在V.C节中的观察结果有关；在那里，我们区分了第3段具有净局部增益和吸收的解。更具体地说，图14中的绿色（中灰色）点对应于图 10(a) 和图 11 的参数，而蓝色（深灰色）点对应于图 10(b) 和图 12 的参数。

现在值得关注的是，随着第三个参数 N_1 的变化，图14(a)会如何改变。图15展示了这一变化。这些图揭示了若干有趣的现象，下面我们将详细讨论。

首先，来看图14(a)中 $N_1 = 1.15$ 到图15(a)中 $N_1 = 1.189$ 的转变。我们看到，红色（浅灰色）和蓝色（深灰色）分支在一个特殊点相交，我们称之为分支合并点。图16(a)放大展示了这个临界点周围的区域，(b)则绘出了 Δ 对 kL 的关系图。综合来看，这表明红色（浅灰色）和蓝色（深灰色）分支确实在三维 k、N_3、Δ 空间中相交。请注意，(a)图中虚线处绿色（中灰色）和红色（浅灰色）分支似乎也相交，但这只是特定投影造成的假象：它们在(b)图中并未相交，因此这并不对应一个分支合并点。

进一步增大 N_1 ，得到图15(b)，此时各分支的构型与图14(a)不同。具体而言，蓝色（深灰色）和红色（浅灰色）分支现在都具有 GNG 和 GNA 解，并且我们观察到 GNA 与 GNG 激射模式之间的连续转变。图15(b)中的分支对应于 [16, 图2]中讨论的阈值边界。

继续增大 N_1 ，我们会得到另一个分支合并点，如图15(c)所示。在这种情况下，绿色（中灰色）和蓝色（深灰色）分支合并。合并后，图15(d)中的蓝色（深灰色）分支出现一个特殊的环。绿色（中灰色）分支现在具有 GNA 与 GNG 激射模式之间的连续转变。

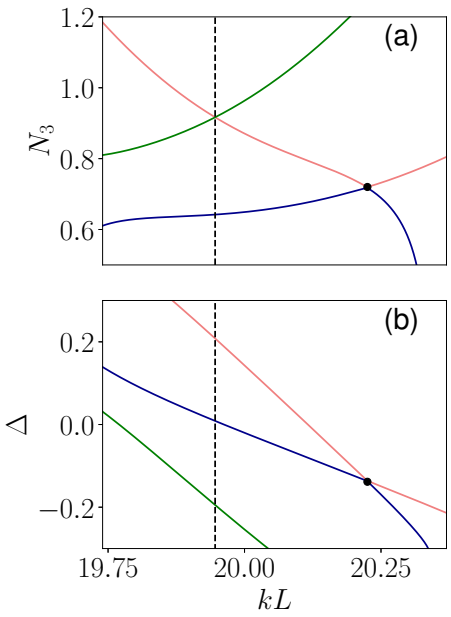

图16。（a）图15(a)的放大图，显示分支合并点（黑点）附近的细节。（b）对应的（kL，Δ）图。

最后，蓝色（深灰色）分支中的环转变为尖点奇异性，如图15(e)所示。图17更详细地展示了这一过程，其中比较了尖点奇异性出现前稍早时（a）、出现时（b）和出现后（c）的情况。可以看到，在 N_1的临界值处，（a）图中的特征环消失，蓝色（深灰色）曲线变得不光滑，并在（b）图中出现尖锐边缘。随着 N_1进一步增大，这一边缘变得平滑，如（c）图所示。这个尖点可与 [16] 中讨论的激光阈值处的异常点对应。在该论文的形式体系中，恰当定义的复数“特征值”与各个模态相关联，而异常点.....

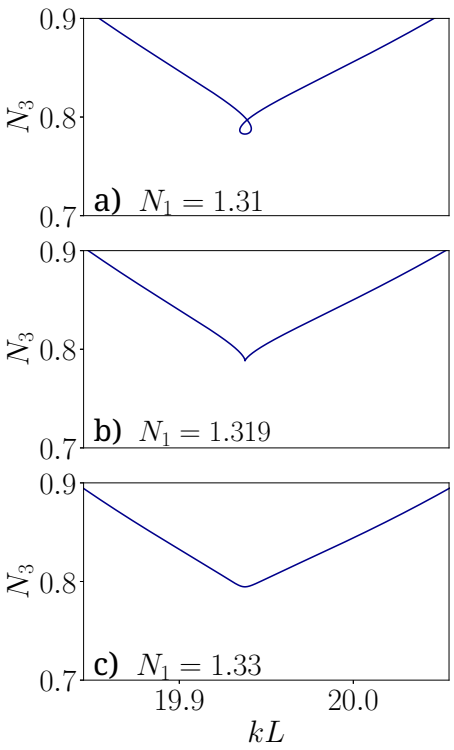

图17. 图15(e)附近参数值下，靠近尖点奇异性的解分支放大图。

tional 点由两个此类模态的简并定义。

C. 双区段激光器中的尖点

上一节描述的三段激光器中解分支的整体现象，在两段激光器中同样存在，不过对应的 kL 值更高。为确认这一点，图18展示了一个双区段激光器中激射模的解分支，其各区段长度为 $kl_1 : kl_2 = 1:1$，且均匀展宽由下式给出

$$\epsilon_1 = n_b^2 + \frac{N_1}{\Delta + i}, \tag{59}$$

$$\epsilon_2 = n_b^2 + \frac{N_2}{\Delta + i}. \tag{60}$$

图18(a)和(b)分别显示了与图15 (a)和(c)类似的两条分支合并情况。同样地

图18(c)表示一个尖点，如图18(e)所示。

VII. 结论

我们研究了激射模的解空间
在具有不同.....的开放边界多段激光器中

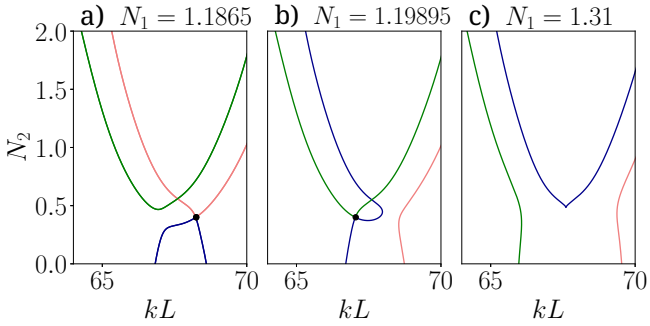

图18. 对于具有kl_1 、 $kl_2 = 1$ 和 $n_b = 3 + 0.13i$ 的双段激光器，在不同 N_1取值下的解分支。分支合并点以黑点标示。

每个区段中的复杂介电常数。通过采用适当的数学投影，可以将解直观地表示为黎曼球面上的路径，这些路径从点 $-i$ 出发，最终到达 $+i$。这些路径由等角螺线连续首尾相接而成，其中每个区段对应一条独立的等角螺线。求得激射模态显式解的数学形式体系涉及使用莫比乌斯变换。这种方法普遍适用于具有任意数量区段且各区段介电常数 ϵ_c不同的情形，也适用于对连续变化的介电常数分布 $\epsilon(z)$进行分段常数近似。

该形式体系使我们能够探索不同类型的解及其相互联系。特- 别是，三段激光器表现出 GNG（增益-中性-增益）和 GNA（增益-中性-吸收）解，它们以一种非平凡的方式相互作用。在均- 匀展宽的情况下，我们发现存在两类临界点。第一类是 分支合并点，即两个解分支合并之处。这使得 GNG 解与 GNA 解之间能够连续连接。第二类是 尖点 ，它们导致某个分支中出现特征性的环，并且类似于 [16] 中阈值处的例外点。在双段激光器中也观察到了非常相似的行为。

[1] A. Yariv 和 P. Yeh, *Photonics: optical electronics in modern communications* 6, 第*Photonics: optical electronics in modern communications* 6 卷（牛津大学出版社, 纽约，2007 年）。[2] T. Needham, *Visual complex analysis*（牛津大学出版社，1998 年）。[3] C. Cohen-Tannoudji、B. Diu、F. Laloe 和 B. Dui, 《量子力学》（2 卷套装）（2006 年）。[4] M. Born 和 E. Wolf, *Principles of optics: electromag-*

netic theory of propagation interference and diffraction , of light 2013

（Elsevier，）。[5] V. V. Kisil 和 J. Reid，载于 *Topics in Clifford Analysis*（Springer，2019），第 313 页。[6] S. Hansmann，《IEEE 量子电子学杂志》**28**，2589（1992）。[7] S. O'Brien、A. Amann、R. Fehse、S. Osborne、E. P. O' Reilly 和 J. M. Rondinelli，《JOSA B》**23**，1046（2006）。[8] E. Kapon、J. Katz 和 A. Yariv，《光学快报》**9**，125（1984）。[9] W. W. Chow 和 S. W. Koch， *Semiconductor-laser fundamentals: physics of the gain materials*（Springer 科学与商业媒体，1999）。[10] M. Sargent III、M. Scully 和 W. Lamb， *Laser Physics*（Addison-Wesley，1974）。[11] 该系统是非自治的，这是由于非自治的

项 $\mathcal{Z}_1^V(z)$ 和 $\mathcal{Z}_2^V(z)$ 对 z 具有预先规定的依赖关系。[12] J. J. Monz´on、A. G. Barriuso、L. L. S´anchez-Soto 和 J. M. Montesinos-Amilibia，《Physical Review A》**84**，023830（2011）。[13] M. Davis 和 R. O'Dowd，《IEEE Journal of Quantum Electronics》**30**，2458（1994）。[14] H. Haken，《 *Laser light dynamics*》，第 1 卷（ North-Holland，阿姆斯特丹，1985）。[15] L. Ge、Y. D. Chong 和 A. D. Stone，《Physical Review A》**82**，063824（2010）。[16] M. Liertzer、L. Ge、A. Cerjan、A. D. Stone、H. E. T¨ureci 和 S. Rotter，《Physical Review Letters》**108**，173901（2012）。