满足´Calderon 传递原理的不等式中的尖锐常数

DARIUSZ KOSZ

Abstract. 本文旨在实现两个目标。首先，我们在一般交换多线性、多参数框架下，为可容许类型的不等式证明一个抽象的 Calder´on 传递原理版本。此类操作不会增大传递后不等式中的常数。其次，我们利用上述结果，研究一个二分现象；该现象出现在求解单参数遍历极大算子的弱型 (1, 1) 和强型 (p, p) 不等式的最佳常数问题中。

2020 年数学主题分类：主要分类 37A30、42B25。关键词：Calder´on 传递，极大算子，最佳常数。

arXiv:2305.03116v2 [math.DS] 5 Jul 2023

1. Introduction

1.1. 历史背景。 Calder´on 传递原理 [7] 是遍历理论中的有力工具，它可以将强型或弱型不等式等各种定量结果，从某个特定的动力系统——称为 典范 系统——推广到所有同类型的系统。颇具悖论意味的是，它的主要应用与一种纯粹的定性性质有关。事实上，这种传递方法被广泛用于验证当时间参数趋于无穷时遍历平均几乎处处收敛。

研究后一个主题的经典方法依赖于以下两步程序：

- 找到一类稠密函数，使得点态收敛成立，
- 通过为相关的平均算子证明一个适当的极大不等式，从而推出具有逐点收敛性质的函数集是闭集。

在系统之间转移的是这一极大不等式，其中最引人注目的例子是关于 $\mathbb{Z}$上的单侧平均算子的 Hardy–Littlewood 极大不等式；将它与 von Neumann[16] 的均值遍历定理结合起来，即可推导出 Birkhoff [2]著名的逐点遍历定理。

另一方面，在现代方法中，极大估计被一些更强的估计所取代——这些估计控制的是数列的变差，而非最大值——借助这些估计，可以直接对所有函数建立逐点收敛性。这一思想在 Bourgain 的一系列突破性文章中发挥了关键作用 [3, 4, 5] ，他为沿轨道进行平均且时间由多项式决定的算子证明了逐点遍历定理。最近，Krause、Mirek 和 Tao [14] 能够对某些双线性算子证明类似的结果，同时也运用了[7] 的思想，将问题化归为研究典范系统。这些结果是朝着证实关于沿多项式轨道取多重平均的逐点收敛性一般猜想迈出的重要一步，参见猜想 1.2，该猜想由 Furstenberg 提出，并由 Bergelson 和 Leibman 在 [1] 中陈述。

本文将证明，Calder´on 传递原理适用于广泛的情形，包括底层动力系统的类型以及待传递估计的类型，见定理 1.6。特别地，猜想 1.2 中考虑的所有情形均涵盖在内。正如我们将要证明的，整个过程可以在不增大所研究不等式的最优常数的情况下完成，见式（1.7）。

鉴于（1.7），下面的二分情形自然出现。对于给定的动力系统，所研究不等式的最佳常数要么等于关联典范系统中同一不等式的最佳常数，要么严格小于后者。为说明这一观察的重要性，我们将利用（

1.7）来分类在弱型（1，1）和强型（p，p）极大不等式的情形下，对于沿由单个遍历变换确定的线性轨道所取的中心、非中心或单侧平均，哪些系统会出现两个常数相等或严格不等，见定理1.9。

1.2. Calderón 迁移。设 $\mathbb{X}$ 是一个保测动力系统，即一个四元组 $(X, \mathsf{B}, \mu, \mathsf{T})$，其中 (X, B, μ) 是一个非平凡的[1] σ-有限测度空间，而 $\mathsf{T} = (T_1, \dots, T_d)$，$d \in \mathbb{N}$ 是 X 上的一族保测变换。后者意味着 $T_i : X \to X$ 是可测的，并且对于所有 $E \in \mathsf{B}$，有 $\mu(T_i^{-1}(E)) = \mu(E)$。在全文中，我们假设 T_i 是可逆的，并且彼此可交换。

接下来，对于 $m, k \in \mathbb{N}$，令 $\mathsf{P} = (P_{1,1}, \dots, P_{d,m})$ 为一族 k 元多项式 $P_{i,j}$，满足 $P_{i,j}(\mathbb{Z}^k) \subseteq \mathbb{Z}^k$。相应的 m 线性平均算子定义如下：

$$A_N^{\mathcal{P}} f(x) := \mathbb{E}_{n \in [N]^k} \prod_{j \in [m]} f_j(T_1^{P_{1,j}(n)} \cdots T_d^{P_{d,j}(n)} x), \qquad x \in X. \tag{1.1}$$

其中 $f = (f_1, \dots, f_m)$ 是 μ-可测函数 $f_j : X \to \mathbb{R}$ 的 m 元组，$[l]$ 表示 $\{1, \dots, l\}$，而 $\mathbb{E}_{y \in Y} g(y)$ 是 g 的期望值，其中期望是相对于所示有限集合 Y 上的离散均匀分布取的。

关于算子（1.1），[1]提出了以下猜想。

猜想 1.2。固定 d，m，$k \in \mathbb{N}$ 并设 $\mathbb{X}$，$\mathcal{P}$ 与前文相同。那么，对于算子 (1.1)，

$$\lim_{N \to \infty} A_N^{\mathcal{P}} f(x)$$

存在 对每个满足 $f_j \in L^\infty(\mathbb{X})$ 的 m 元组 $f = (f_1, \dots, f_m)$，几乎处处于 μ，$j \in [m]$.

如前所述，该猜想在一些特定情形下得到了验证，而证明通常需要对 $(A_N^{\mathcal{P}} f(x))_{N \in \mathbb{N}}$ 的行为有一定的定量知识。很可能一般情形若成立，也会以类似的方式得到证明。

基于这一点，我们引入一个抽象映射 $\mathsf{O} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to [0, \infty]$，其自变量是实数序列。对 O 唯一的假设是，它可以由一个可测映射序列 $(\mathsf{O}_K)_{K \in \mathbb{N}}$ 从下方逼近，这些映射只依赖有限个坐标。具体而言，对于每个 $K \in \mathbb{N}$，设 $\mathsf{O}_K : \mathbb{R}^K \to [0, \infty)$ 关于 $\mathbb{R}^K$ 上的标准拓扑可测。我们假设可以选择 O_K，使得

$$\mathcal{O}(a_n : n \in \mathbb{N}) \geq \mathcal{O}_K(a_n : n \in [K]), \qquad K \in \mathbb{N}, (a_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \tag{1.3}$$

and

$$\mathcal{O}(a_n : n \in \mathbb{N}) = \lim_{K \to \infty} \mathcal{O}_K(a_n : n \in [K]), \qquad (a_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}. \tag{1.4}$$

给定 $p = (p_0, p_1, \dots, p_m) \in (0, \infty)^{m+1}$，其中 $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p_0}$，我们考察不等式

$$\|\mathcal{O}(A_N^{\mathcal{P}} f : N \in \mathbb{N})\|_{p_0} \leq C \prod_{j \in [m]} \|f_j\|_{p_j} \quad \text{and} \quad \|\mathcal{O}(A_N^{\mathcal{P}} f : N \in \mathbb{N})\|_{p_0, \infty} \leq C \prod_{j \in [m]} \|f_j\|_{p_j}, \tag{1.5}$$

其中，$\mathsf{O}(g_n : n \in \mathbb{N})$表示函数 $x \mapsto \mathsf{O}(g_n(x) : n \in \mathbb{N})$，而 $\|g\|_q$ 和 $\|g\|_{q,\infty}$分别表示 g 关于 μ的通常 Lebesgue 和弱 Lebesgue q-拟范数。更准确地说，给定 $g : X \to \mathbb{R}$ 和 $q \in (0, \infty)$，有

$$\|g\|_q := \Big(\int_X |g(x)|^q \, \mathrm{d}\mu(x) \Big)^{1/q} \quad \text{and} \quad \|g\|_{q,\infty} := \sup_{\lambda \in (0,\infty)} \lambda \mu(\{x \in X : |g(x)| \geq \lambda\})^{1/q}.$$

我们分别用 $\mathsf{C}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}}(\mathbb{X}, p, \mathsf{s})$ 和 $\mathsf{C}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}}(\mathbb{X}, p, \mathsf{w})$ 表示使这些不等式对所有 m-元组 $f \in L^{p_1}(\mathbb{X}) \times \cdots \times L^{p_m}(\mathbb{X})$ 成立的最小常数 $C \in [0, \infty]$。

阅读时，可以考虑一个模型情形，其中 O 是上确界，也不 m

$$\mathcal{M}(a_n : n \in \mathbb{N}) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

[1]这里 b 所谓“非平凡”，是指存在一个 X 的子集，其测度有限且严格大于零。 e.

注意，M 从下方逼近于 $\mathsf{M}_K(a_n : n \in [K]) := \max_{n\in[K]} |a_n|$。另一个重要的例子是 r-变差半范数，$r \in [1,\infty)$，其定义为

$$\mathcal{V}^r(a_n : n \in \mathbb{N}) := \sup_{J\in\mathbb{N}} \sup_{n_0<n_1<\cdots<n_J} \Big(\sum_{j\in[J]} |a_{n_j} - a_{n_{j-1}}|^r \Big)^{1/r}$$

app由其截断版本 V_K^r逼近，其中我们还要求 $n_J \le K$.

我们注意到，M 和 V^r 分别控制输入值的大小和变化性。因此，V^r 的估计可用于直接证明逐点收敛，而极大不等式仅在估计误差项时有效，这就要求选取一个稠密的函数类，在该函数类上逐点收敛已先验成立。

实际上，对 $\mathcal{V}^r$ 的估计比对其对应的$\mathcal{M}$的估计更难证明。此外，它们往往只在有限范围内成立。例如，来自鞅的期望值算子序列满足关于 $r \in (2,\infty)$的变差估计，但不满足关于 $r \in [1,2]$的估计，见 [15, 19]。关于更多细节以及与振荡不等式或跳跃不等式相关的其他重要例子，敬请参阅 [11, 18, 20]。

关于底层系统 $\mathbb{X}$，我们的参考点是 d 维典范系统 $\mathbb{X}_d = (\mathbb{Z}^d, 2^{\mathbb{Z}^d}, \#_d, \mathsf{T}_d)$，即 $\mathbb{Z}^d$配备所有子集构成的 σ-代数、计数测度，以及由下式定义的 d 个相互独立的平移组成的族 $\mathsf{T}_d = (\mathsf{T}_{d,1}, \dots, \mathsf{T}_{d,d})$:

$$\mathcal{T}_{d,i}(l_1,\dots,l_{i-1},l_i,l_{i+1},\dots l_d) := (l_1,\dots,l_{i-1},l_i+1,l_{i+1},\dots l_d).$$

我们将证明以下结果，说明 O 在 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{X}_d$ 上的作用彼此 er.

定理 1.6（Calderˊon 转移）. 固定 d、m、$k \in \mathbb{N}$，并令 $\mathbb{X}$、P p 如前所述。则

$$\mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}}(\mathbb{X},p,\mathrm{s}) \le \mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}}(\mathbb{X}_d,p,\mathrm{s}) \quad and \quad \mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}}(\mathbb{X},p,\mathrm{w}) \le \mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}}(\mathbb{X}_d,p,\mathrm{w}) \tag{1.7}$$

对.....成立 所有 满足 的 O (1.3) 和 (1.4)，其中 $\mathbb{X}_d$ 是 d 维典范系统 .

特别是，对于极大不等式、变差不等式、振荡不等式或跳跃不等式，只需处理典范系统。

1.3. 二分性。定理1.6 引出了以下问题:

When does the equality take place in (1.7)?

我们将通过解决一个非常特殊且相对简单的情形，来说明如何处理这类问题。在本小节中，我们取 $d = m = k = 1$ 和 $P(n) = n$。此外，我们假设 T是遍历的，这意味着 $T^{-1}(E) = E$ 推出 $\mu(E) = 0$ 或 $\mu(X \setminus E) = 0$。在此背景下，我们通过以下公式引入单侧极大算子 T_*^{os}

$$T_*^{\mathrm{os}} f(x) := \sup_{N\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \Big| \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} f(T^n x) \Big|, \qquad x \in X.$$

类似地，我们定义双侧极大算子：中心化的 $T_{\mathrm{c}*}$和非中心化的 T_*^{u}，定义如下

$$T_*^{\mathrm{c}} f(x) := \sup_{N\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \Big| \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} f(T^n x) \Big| \quad \text{and} \quad T_*^{\mathrm{u}} f(x) := \sup_{\underline{r},\overline{r}\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \Big| \frac{1}{\underline{r}+\overline{r}+1} \sum_{n=-\underline{r}}^{\overline{r}} f(T^n x) \Big|.$$

对于这些算子，自然会考虑 $p \in (1,\infty]$的弱型 (1,1) 和强型 (p,p) 不等式。因此，对每个 $p \in (1,\infty)$，我们记 $\mathsf{C}^{\mathrm{os}}(\mathbb{X},1) := \mathsf{C}^{P}_{T_*^{\mathrm{os}}}(\mathbb{X},(1,1),\mathrm{w})$，类似地记 $\mathsf{C}^{\mathrm{os}}(\mathbb{X},p) := \mathsf{C}^{P}_{T_*^{\mathrm{os}}}(\mathbb{X},(p,p),\mathrm{s})$；而 $\mathsf{C}^{\mathrm{os}}(\mathbb{X},\infty)$ 表示不等式 $\|T_{\mathrm{os}*} f\|_\infty \le C\|f\|_\infty$中的最佳常数 C，其中

$$\|g\|_\infty := \inf\{\lambda \in [0,\infty] : |g(x)| \le \lambda \text{ for } \mu\text{-almost every } x \in X\}.$$

我们定义$\mathcal{C}^{\mathrm{c}}(\mathbb{X},\ p)$ 以及$\mathcal{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X},\ p)$，$p \in [1,\infty]$，以同样的方式，将 T_*^{os}替换为 $T_{\mathrm{c}*}$以及 T_*^{u}。根据定理1.6，在 $\mathbb{Z}$上的 Hardy–Littlewood 极大算子性质，以及 $p = \infty$的显然界，这些量均为有限值，与 $\mathbb{X}$无关。

给定一个非平凡的遍历系统 $\mathbb{X}$，如果 X 可分解为有限个两两不交的可测集 $X_0, X_1, \dots, X_L$，$L \in \mathbb{N}$，使得 $\mu(X_0) = 0$，则称其由有限个原子构成，

$T(X_l) \subseteq X_{l+1}$ 对于 $l \in [L-1]$, $T(X_L) \subseteq X_1$，且 X_l, $l \in [L]$ 均无法进一步拆分为两个具有非零测度的不相交集合。注意，此时 $\mu(X_1) = \cdots = \mu(X_L) \in (0,\infty)$。

以下这个众所周知的事实将在后文中派上用场。

事实 1.8（Kakutani–Rokhlin 引理）。设 $\mathbb{X}$ 是一个非平凡的遍历系统。那么以下两种情形恰有一种成立：

(A) 集合 X 由有限多个原子组成；(B) 对每个 $L \in \mathbb{N}$，都存在 $E_L \in \mathsf{B}$，使得 $\mu(E_L) \in (0,\infty)$，且集合 $T^{-l}(E_L)$、$l \in [L]$ 两两不相交。

现在可以陈述我们的第二个主要结果了。

定理 1.9（尖锐常数二分性）。设 $\mathbb{X}$ 与前文相同。那么对于 $p \in \{1,\infty\}$，有 $\mathsf{C}^{\mathrm{os}}(\mathbb{X},p) = \mathsf{C}^{\mathrm{os}}(\mathbb{X}_1,p)$；而对于 $p \in (1,\infty)$，则出现以下二分情形：

- 若 *(A)* 事实*1.8* 成立，则 $\mathsf{C}_{\mathrm{os}}(\mathbb{X},p) < \mathsf{C}_{\mathrm{os}}(\mathbb{X}_1,p)$,
- 若 *(B)* 事实*1.8* 成立，则 $\mathsf{C}_{\mathrm{os}}(\mathbb{X},p) = \mathsf{C}_{\mathrm{os}}(\mathbb{X}_1,p)$.

此外，我们有 $\mathsf{C}^{\mathrm{c}}(\mathbb{X},\infty) = \mathsf{C}^{\mathrm{c}}(\mathbb{X}_1,\infty)$ 和 $\mathsf{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X},\infty) = \mathsf{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X}_1,\infty)$，而对于 $p \in [1,\infty)$，会出现以下两种情况：

- 若 *(A)* 事实*1.8* 成立，则 $\mathsf{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{X},p) < \mathsf{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{X}_1,p)$ 且 $\mathsf{C}_{\mathrm{u}}(\mathbb{X},p) < \mathsf{C}_{\mathrm{u}}(\mathbb{X}_1,p)$,
- 若 *(B)* 事实*1.8* 成立，则 $\mathsf{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{X},p) = \mathsf{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{X}_1,p)$ 且 $\mathsf{C}_{\mathrm{u}}(\mathbb{X},p) = \mathsf{C}_{\mathrm{u}}(\mathbb{X}_1,p)$.

这一结果果是有趣的，因为关于 $\mathbb{X}_1$ 的一些常数是已知的 n.

推论 1.10. 设 $\mathbb{X}$ 与之前相同，并假设 *(B)* 来自事实*1.8* 成立。那么

- 对于 $p = 1$，我们有 $\mathsf{C}_{\mathrm{os}}(\mathbb{X},1) = 1$、$\mathsf{C}_{\mathrm{u}}(\mathbb{X},1) = 2$，以及 $\mathsf{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{X},1) = \frac{11+\sqrt{61}}{12}$,
- 对于 $p \in (1,\infty)$ 和非中心算子，我们有 $\mathsf{C}_{\mathrm{u}}(\mathbb{X},p) = c_p$，其中 c_p 是方程 $(p-1)x^p - px^{p-1} - 1 = 0$ 的唯一正解,
- 对于 $p = \infty$，我们有 $\mathsf{C}_{\mathrm{os}}(\mathbb{X},\infty) = \mathsf{C}_{\mathrm{u}}(\mathbb{X},\infty) = \mathsf{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{X},\infty) = 1$。

事实上，等式 $\mathsf{C}^{\mathrm{os}}(\mathbb{X}_1,1) = 1$ 众所周知，参见引理 3.1，其中给出了一个简单证明。接下来，$\mathsf{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X}_1,1) = 2$，因为 $\mathsf{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X}_1,1) \le 2$ 可由 $\mathbb{Z}$ 上重叠度为 2 的经典覆盖引理推出，而 $\mathsf{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X}_1,1) \ge 2$ 可通过取 $f = \mathbb{1}_{\{0\}}$ 并令 $\lambda \to 0$ 得到。另一方面，$\mathsf{C}^{\mathrm{c}}(\mathbb{X}_1,1) = \frac{11+\sqrt{61}}{12}$ 可由两项结果结合推出：一是 Melas 的著名结果 [17],，其中得到了实数集上的居中极大算子的弱型 (1,1) 不等式的最佳常数；二是 [13, 定理 1],，该定理比较了离散不等式与连续不等式中的最佳常数（在我们的情形下，两者相等）。对于 $p = \infty$，结论显然成立；对于 $p \in (1,\infty)$，与之前一样，我们将 Grafakos 和 Montgomery-Smith 关于 $\mathbb{R}$ 的结果 [9] 与以下传递原理结合起来。

命题 1.11。固定 $p \in (1,\infty)$，并令 $\mathbb{X}$ 与前文相同。则 $\mathsf{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X},p) = c_p$，其中 c_p 是 $\mathsf{M}^{\mathrm{u}}_{\mathbb{R}}$ 的强型 (p,p) 不等式的最佳常数；$\mathsf{M}^{\mathrm{u}}_{\mathbb{R}}$ 是非中心 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathbb{R}$。

证明。通过重复证明 [13,(1.3)] 时所用的论证，可得不等式 $\mathsf{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X},p) \ge c_p$。我们仅简述证明。取一个光滑函数 $f_{\mathrm{cont}}\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$，使得 c_p 几乎达到其上确界。利用伸缩变换，可假设 f_{cont} 变化得非常缓慢。通过对 $f_{\mathrm{dis}}(l) \coloneqq f_{\mathrm{cont}}(l)$ 采样，定义 $f_{\mathrm{dis}}\colon \mathbb{Z} \to [0,\infty)$。那么，对于 f_{dis} 陈述的极大不等式，其常数几乎与对应于 f_{cont} 的常数相同。

另一方面，$\mathsf{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X},p) \le c_p$ 很容易得出，因为对于任意 $f_{\mathrm{dis}}\colon \mathbb{Z} \to [0,\infty)$，我们有

$$\frac{\|T^{\mathrm{u}}_* f_{\mathrm{dis}}\|_p}{\|f_{\mathrm{dis}}\|_p} \le \frac{\|\mathcal{M}^{\mathrm{u}}_{\mathbb{R}} f_{\mathrm{cont}}\|_p}{\|f_{\mathrm{cont}}\|_p},$$

其中 $f_{\mathrm{cont}}\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ 由 $f_{\mathrm{cont}}(x) \coloneqq f_{\mathrm{dis}}(l)$ 给出，适用于 $x \in [l,l+1)$ $l \in \mathbb{N}$。事实上，这个不等式很容易看出，因为对每个 $x \in [l,l+1)$，都有 $\mathsf{M}^{\mathrm{u}}_{\mathbb{R}} f_{\mathrm{cont}}(x) \ge T^{\mathrm{u}}_* f_{\mathrm{dis}}(l)$（这里需要注意的是，我们研究的是非中心型算子）。□

类似的论证可以得到单侧算子对应的命题1.11 。对于中心算子，情况则有所不同，只有关于 $\mathcal{C}^c(\mathbb{X}, p)$ 的下界可以很容易地从连续情形转移到离散情形，参见 [13, 定理 1]。

1.4. 遍历性。典范系统 $\mathbb{X}_d$ 可视为带有哈尔测度的拓扑群，其变换 $\mathrm{T}_{d,i}$ 是由群元素（例如 $g_{d,i}$）所作的平移。由于由 $g_{d,i}$ 生成的子群 G恰为 $\mathbb{Z}^d$，典范系统是遍历的，也就是说，不存在非平凡的 G-不变集 $E \subseteq \mathbb{Z}^d$。借此机会，我们强调遍历性在此背景下的重要性。

我们将测度空间 $(X, \mathrm{B}\ \mu)$具体设为 $[1, 0)$，配备通常的博雷尔集和勒贝格测度。我们考虑该空间的双可测自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{X}, \mathrm{B}\ \mu)$，即满足 T, T^{-1} 保测的可逆映射 $T\colon X \to X$。事实上，$\mathrm{Aut}(\mathrm{X}, \mathrm{B}\ \mu)$中的元素是等价类，当且仅当 $T(x) = T'(x)$ 几乎处处成立时， $T \sim T'$，我们将称其代表元。

我们称 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 弱收敛到 T，如果对所有 $E \in \mathrm{B}$（其中 Δ为对称差符号），都有 $\lim_{n\to\infty} \mu(T_n(E)\Delta T(E)) = 0$。此外，如果对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\mu(\{x \in [0, 1) : T^n(x) = x\}) = 0$，则称 T 为非周期。按照 Halmos [10] 的观点，我们注意到，对于非周期的T，其共轭轨道 $\{S^{-1}TS : S \in \mathrm{Aut}(\mathrm{X}, \mathrm{B}\ \mu)\}$ 是弱稠密的。如果 T是遍历的，那么所有 $S^{-1}TS$也都是遍历的，而 μ 的性质意味着 T 同样是非周期的[2]。鉴于 $T_\pi(x) := x+\pi$ 模 1 的遍历性，例如，遍历自同构是弱稠密的。仅此事实便表明，许多问题都可以归结为遍历变换的情形。

另一个相关结果是所谓的 Conze 原理 [8]。其原始表述如下。给定一个由整数构成的序列 $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$，对于每个 $S \in \mathrm{Aut}(\mathrm{X}, \mathrm{B}\ \mu)$， $S_* f(x) := \sup_{N\in\mathbb{N}} |\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(S^{i_n} x)|$ 的弱型 (1, 1) 不等式的最佳常数，不大于针对 T_* 的对应最佳常数；其中 T_* 对任意非周期 $T \in \mathrm{Aut}(\mathrm{X}, \mathrm{B}\ \mu)$ 以类似方式定义。证明利用了 T 的共轭轨道的弱稠密性，而且该原理可以通过多种方式推广。同样，根据 μ 的性质，对于任意遍历的 T，这一结论也成立。

我们想要讨论的最后一个相关问题是 Stein 最大原理 [21]。正如我们所见，逐点收敛结果通常是不等式弱型的推论，而在 Conze 原理可用的情况下，证明后者可以归约到遍历的情形。Stein 的结果表明，在某些情况下，逐点收敛等价于相应的不等式弱型，这使得这些观察更具基础性。

这次令 X 为给定紧群 G的齐性空间。具体而言， X 的结构继承自 G，其上存在唯一的标准化G-不变测度 μ ，且 G 在 X上具有传递作用。例如， X 可以是n维球面，而 G 由 X的所有旋转组成。传递性意味着不存在非平凡的 G-不变集合 $E \subseteq X$，因此遍历性在这里确实至关重要。

现在，Stein 的结果表述如下。对于每个 $p \in [1, 2]$ ，以及给定的算子序列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$，若这些算子在 $L^p(X, \mu)$上有界，且与由 $g \in G$ 在 X上的作用所确定的所有变换交换，并且对所有 $f \in L^p(X, \mu)$，$\lim_{n\to\infty} T_n f(x)$ 几乎处处存在，那么 $T_* f(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n f(x)|$满足弱型 (p, p)不等式。

让我们确认遍历性不能省略。为此，假设 X 由互不相交的 G-不变集 X_l, $l \in \mathbb{N}$组成，这些集合满足 Stein 原理，且 $\mu(X_l) = 2^{-l}$。于是，逐点收敛分别给出所有 X_l 上的弱型不等式，但对 X 也成立这一点可能不正确，因为最佳常数可能随 l趋于无穷大。当$T_n f(x)$对 $x \in X_n$等于 $nf(x)$，而在其他情况下等于 0 时，就会出现这种情况。

再举一个有启发性的例子，取 $X_l := \{(l, 0), (l, 1) \ldots, (l, l)\}$，各点质量相等$2^{-l}/(l + 1)$，并令 $G := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \cdots$在 X 上的作用为 $g = (g_1, g_2, \ldots) \in G$，其定义为$\tau_g(l, i) := (l, i + g_l \bmod l + 1)$。那么，对于 $g_* := (1, 1, \ldots) \in G$和 $T_n f(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_{g_*}^{i^2} x)$，我们看到 $\lim_{n\to\infty} T_n f(x)$ 对所有 $f \in L^1(X, \mu)$ 都处处存在；然而，鉴于 Buczolich 和 Mauldin 的著名结果 [6]，不存在弱型 (1, 1) 不等式。

[2]注意 t 到事实 1.8 中满足 (A) 的遍历系统 1.8 缺乏非周期性，因此提及 μ 是必要的

1.5. 致谢。作者谨向 Mariusz Mirek 致谢，感谢他使作者注意到本文讨论的主题。此外，作者感谢 Mariusz Mirek 和 Luz Roncal 阅读稿件后提出的宝贵意见。

作者还要感谢审稿人对遍历性的深刻评论，这促成了第 1.4 节中富有成效的讨论。

作者获得了巴斯克政府（BERC 2022-2025）、西班牙国家研究署（CEX2021-001142-S 和 RYC2021-031981-I）以及波兰科学基金会（START 032.2022）的资助。

2. Proof of Theorem 1.6

现在我们来证明定理 1.6。

定理 *1.6* 的证明。 我们只证明第一个不等式；第二个不等式可以用非常相似的方法证明。

令 $f=(f_1,\dots,f_m)$，其中 $f_j\in L^{p_j}(\mathbb{X})$。对于每个 $K\in\mathbb{N}$，我们定义

$$F_j^K(x,l):=f_j(T_1^{-KR_K+l_1}\cdots T_d^{-KR_K+l_d}x)\cdot\mathbb{1}_{\{l\in[KR_K]^d\}},\qquad x\in X,\ l\in\mathbb{Z}^d,$$

其中 $R_K\in\mathbb{N}$ 足够大，使得 $|P_{i,\,j}(l)|\le R_K$ 对所有满足 $\|l\|_\infty\le K$ 的 i、j 均成立。于是

$$\|F_j^K\|_{p_j}=(KR_K)^{d/p_j}\|f_j\|_{p_j},$$

由 Fubini–Tonelli 定理可知，因为 T_i 保测度。上面的第一个范数是相对于 μ 与计数测度的乘积测度而言的。令 $F^K=(F_1^K,\dots,F_m^K)$。我们有

$$\mathcal{O}_K(A_N^{\mathcal{P}}F^K(x,l):N\in[K])=\mathcal{O}_K(A_N^{\mathcal{P}}f(T_1^{-KR_K+l_1}\cdots T_d^{-KR_K+l_d}x):N\in[K])$$

对于所有 $x\in X$ 和 $l\in\{R_K+1,\dots,(K-1)R_K\}^d$，当 $K\ge 3$ 时成立。因此

$$\|\mathcal{O}_K(A_N^{\mathcal{P}}F^K:N\in[K])\|_{p_0}\ge((K-2)R_K)^{d/p_0}\|\mathcal{O}_K(A_N^{\mathcal{P}}f:N\in[K])\|_{p_0}$$

由 Fubini–Tonelli 定理可知，因为 T_i 保测度。令 $K\to\infty$，得到

$$\|\mathcal{O}(A_N^{\mathcal{P}}f:N\in\mathbb{N})\|_{p_0}\le\mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}}(\mathbb{X}_d,p,\mathrm{s})\lim_{K\to\infty}((K-2)R_K)^{-d/p_0}\prod_{j\in[m]}\|F_j^K\|_{p_j}$$

由 Fat ou's 引理，（1.3）、（1.4），以及 $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}}(\mathbb{X}_d,p,\mathrm{s})$的定义。该极限等于

$$\lim_{K\to\infty}((K-2)R_K)^{-d/p_0}(KR_K)^{d/p_1+\cdots+d/p_m}\prod_{j\in[m]}\|f_j\|_{p_j}=\prod_{j\in[m]}\|f_j\|_{p_j}$$

得益于 H¨lder 指数假设。证明至此完成。 □

在看过定理 1.6的证明后，下面给出几点说明。

- 除了（1.5）中指定的估计之外，定理 1.6还可以考虑其他类型的估计。关键因素之一是良好的缩放；在本文中，我们通过假设 $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=\frac{1}{p_0}$ 来确保这一点。
- 的性质与由 $\mathbb{X}_d$ 生成的变换群结构相似 T_i。可以放弃交换性，但这会导致更复杂的典范系统；关于二阶幂零群的情形，见 [12] 。
- 除了 $A_{\mathcal{P}N}$，还可以考虑不同的算子，例如用于定义定理 $T_{\mathrm{os}*}$， $T_{\mathrm{c}*}$， $T_{\mathrm{u}*}$ 中的平均算子 1.9，见命题 2.1。

命题 2.1. 在定理 1.9 的假设下，对于每个 $p\in[1,\infty]$，我们有 $\mathrm{C}^{\mathrm{os}}(\mathbb{X},p)\le\mathrm{C}^{\mathrm{os}}(\mathbb{X}_1,p)$、$\mathrm{C}^{\mathrm{c}}(\mathbb{X},p)\le\mathrm{C}^{\mathrm{c}}(\mathbb{X}_1,p)$，以及 $\mathrm{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X},p)\le\mathrm{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X}_1,p)$。

证明。 我们重复定理 1.6 的证明。 □

3. Proof of Theorem 1.9

定理的证明 1.9 分为若干个引理。在本节中$d = m = k = 1$, T是遍历的，并且 $P(n) = n$。

引理 3.1（最佳常数等于 1）。我们有 $C^{os}(\mathbb{X}_1, 1) = C^{os}(\mathbb{X}_1, \infty) = C^{c}(\mathbb{X}_1, \infty) = C^{u}(\mathbb{X}_1, \infty) = 1$。因此，$C^{os}(\mathbb{X}, 1) = C^{os}(\mathbb{X}_1, 1)$, $C^{os}(\mathbb{X}, \infty) = C^{os}(\mathbb{X}_1, \infty)$, $C^{c}(\mathbb{X}, \infty) = C^{c}(\mathbb{X}_1, \infty)$, 且 $C^{u}(\mathbb{X}, \infty) = C^{u}(\mathbb{X}_1, \infty)$。

证明。我们只需证明第一部分，其余结论可由命题 2.1 以及 $|f| \le \min\{T_{os_*} f, T_{c_*} f, T_{u_*} f\}$ 这一事实直接推出。$p = \infty$ 的情形显然。此外，$C^{os}(\mathbb{X}_1, 1) = 1$ 是众所周知的，但为完整起见，我们仍给出证明。

我们将证明 $C^{os}(\mathbb{X}_1, 1) \le 1$，剩下的不等式 $C^{os}(\mathbb{X}_1, 1) \ge 1$ 显然成立。令 $f \in L^1(\mathbb{X}_1)$ 为非负函数，并假设 $\lambda \in (0, \infty)$ 满足集合

$$E_\lambda^{os}(f) := \{l \in \mathbb{Z} : |T_*^{os} f(l)| \ge \lambda\}$$

非空。因此，$E_\lambda^{os}(f) = \{l_1, \dots, l_J\}$，其中某些整数为 $l_1 < \cdots < l_J$, $J \in \mathbb{N}$。对于每个$j \in [J]$，我们令 N_j为满足 $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 且$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} f(l_j + n) \ge \lambda$的最小数。我们设 $B_j := \{l_j, \dots, l_j + N_j\}$，并注意到 $E_\lambda^{os}(f) \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} B_j$。接下来，对 $1 \ne j \in [J]$定义 $D_1 := B_1$和$D_j := B_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i$。于是 D_j两两不相交，且有 $\bigcup_{j=1}^{J} B_j = \bigcup_{j=1}^{J} D_j$；对于每个 j，要么 $D_j = \varnothing$，要么对于某个 $r_j \in [N_j] \cup \{0\}$，有 $D_j = \{l_j + r_j, \dots, l_j + N_j\}$。在后一种情形下，根据 N_j 的定义，有 $\sum_{l \in D_j} f(l) \ge \lambda |D_j|$。因此，

$$\lambda |E_\lambda^{os}(f)| \le \sum_{j \in [J]} \lambda |D_j| \le \sum_{j \in [J]} \sum_{l \in D_j} f(l) \le \|f\|_1$$

这就证明了 $C^{os}(\mathbb{X}_1, 1) \le 1$。 □

现在考虑原子系统的情形 $p \in (1, \infty)$。

引理 3.2（情形 (A)，$p \in (1, \infty)$）。假设事实 1.8 中的 (A) 成立。那么对每个$p \in (1, \infty)$，都有 $C^{os}(\mathbb{X}, p) < C^{os}(\mathbb{X}_1, p)$、$C^{c}(\mathbb{X}, p) < C^{c}(\mathbb{X}_1, p)$，以及 $C^{u}(\mathbb{X}, p) < C^{u}(\mathbb{X}_1, p)$。

证明。我们只证明 $C^{os}(\mathbb{X}, p) < C^{os}(\mathbb{X}_1, p)$；其余不等式可用非常相似的论证证明。

只需证明，对每个固定的 $L \in \mathbb{N}$ 和 $p \in (1, \infty)$，都有 $C^{os}(\mathbb{X}_{[L]}, p) < C^{os}(\mathbb{X}_1, p)$，其中 $\mathbb{X}_{[L]} = ([L], 2^{[L]}, \#_{[L]}, T_{[L]})$ 是含有 L 个元素的有限移位系统，也就是说，$T_{[L]}(l) := l + 1$ 对于 $l \in [L - 1]$ 成立，并且 $T_{[L]}(L) := 1$。

给定 $\epsilon \in (0, 1)$，令 $f : [L] \to [0, \infty)$ 满足 $\|T_{os_*} f\|_p \ge (1 - \epsilon) C^{os}(\mathbb{X}_{[L]}, p) \|f\|_p$。那么，对于一个较大的参数 $R \in \mathbb{N}$，我们定义 $F : \mathbb{Z} \to [0, \infty)$ 为

$$F(l) := \begin{cases} f(l \bmod L) & \text{for } l \in [RL], \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中，我们将 $f(0)$ 与 $f(L)$ 视为相同。注意，$\|F\|_p = R^{1/p} \|f\|_p$。此外，如果 R 足够大（相对于 L、p 和 ϵ 而言），那么

$$\|T_*^{os} F \cdot \mathbb{1}_{[RL]}\|_p \ge (1 - \epsilon)^2 C^{os}(\mathbb{X}_{[L]}, p) \|F\|_p.$$

对于每个 $l \in \{-RL + 1, \dots, 0\}$，利用 H¨older 不等式，我们得到

$$T_*^{os} F(l) \ge \frac{1}{2RL} \sum_{n \in [RL]} F(n) = \frac{1}{2L} \sum_{n \in [L]} f(n) \ge \frac{\|T_*^{os} f\|_\infty}{2L} \ge \frac{\|T_*^{os} f\|_p}{2L^{1+1/p}} \ge \frac{(1 - \epsilon) C^{os}(\mathbb{X}_{[L]}, p)}{2L^{1+1/p} R^{1/p}} \|F\|_p.$$

因此，

$$\|T_{os_*} F \cdot \mathbb{1}_{\{-RL+1, \dots, RL\}}\|_p^p \ge ((1 - \epsilon)^{2p} + RL \cdot (\frac{1 - \epsilon}{2^p L^{p+1} R})^p) C^{os}(\mathbb{X}_{[L]}, p)^p \|F\|_p^p > C^{os}(\mathbb{X}_{[L]}, p)^p \|F\|_p^p,$$

前提是 ϵ 足够小（相对于 L 和 p）。 □

接下来，我们考虑其他系统的情形 $p \in [1, \infty)$。

引理 3.3（情形（B），$p\in[1,\infty)$）。假设事实 1.8 中的（B）成立。那么对于每个 $p\in[1,\infty)$，我们有 $C^{os}(\mathbb{X},p)=C^{os}(\mathbb{X}_1,p)$、$C^{c}(\mathbb{X},p)=C^{c}(\mathbb{X}_1,p)$，以及 $C^{u}(\mathbb{X},p)=C^{u}(\mathbb{X}_1,p)$。

证明。我们只证明当 $p\in(1,\infty)$ 时，$C^{os}(\mathbb{X},p)=C^{os}(\mathbb{X}_1,p)$，其余等式或 $p=1$ 的情形均可用非常类似的论证验证。

给定 $\epsilon\in(0,1)$，可以找到 $L\in\mathbb{N}$ 和 $F:\mathbb{Z}\to[0,\infty)$，使得对每个 $l\in\mathbb{Z}\setminus[L]$，$F(l)=0$，并且

$$\|T_*^{os}F\cdot\mathbb{1}_{[L]}\|_p\geq(1-\epsilon)C^{os}(\mathbb{X}_1,p)\|F\|_p.$$

选取 $E_L\subseteq X$ 如(B) 引理1.8中的那样，并定义 $f\in L^p(\mathbb{X})$ 如下

$$f(x):=\begin{cases}F(L+1-l) & \text{for } x\in T^{-l}(E_L),\ l\in[L],\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

那么容易看出，$\|T_{os_*}f\|_p\geq(1-\epsilon)C^{os}(\mathbb{X}_1,p)\|f\|_p$。 □

剩下需要考虑的是 $p=1$ 原子系统的情形。我们只关注 T_*^{c}和 T_{u*}，因为关于 T_*^{os}的结论已在引理3.1中证明。

引理 3.4 (情形 (A)，$p=1$，中心算子)。假设 *(A)* 事实 *1.8* 中的条件成立。那么我们有 $\mathcal{C}^{c}(\mathbb{X},1)<\mathcal{C}^{c}(\mathbb{X}_1,1)$。

证明。只需证明，对于每个固定的 $L\in\mathbb{N}$，我们有 $\mathcal{C}^{c}(\mathbb{X}_{[L]},1)<\mathcal{C}^{c}(\mathbb{X}_1,1)$，其中$\mathbb{X}_{[L]}$ 如引理 3.2 中所述。我们遵循 [17, 定理 3]的证明。

首先注意到存在 $f_0:[L]\to[0,\infty)$，使得 $\|T_{c*}f_0\|_{1,\infty}=C^{c}(\mathbb{X}_{[L]},1)\|f_0\|_1$。事实上，令 $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 为一列非负函数，使得

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\|T_*^{c}f_j\|_{1,\infty}}{\|f_j\|_1}=\mathcal{C}^{c}(\mathbb{X}_{[L]},1).$$

通过应用适当的平移和缩放，我们可以假设 $f_j(1)=\|f_j\|_\infty=1$成立。选择一个子序列 $(j_i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得对于每个 $l\in[L]$，$\lim_{i\to\infty}f_{j_i}(l)$ 存在。然后，由 $f_0(l):=\lim_{i\to\infty}f_{j_i}(l)$ 定义的 f_0 就是我们要找的函数。类似地，注意到存在 $\lambda\in(0,1]$，使得 $\lambda|E_\lambda^{c}(f_0)|=C^{c}(\mathbb{X}_{[L]},1)\|f_0\|_1$。我们定义 $f:=f_0/\lambda$，并注意到对每个 $l\in[L]$，$f(l)\in[0,L]$成立（若 $f(l)>L$，则 $\|T_{c*}f\|_{1,\infty}<\|f\|_1$，这会导致矛盾）。下文中，我们将 f 与其 L-周期延拓等同。

对于某些 $J\in[L]$ 和 $l_1<\cdots<l_J$，我们有 $E_1^{c}(f)=\{l_1,\dots,l_J\}$。对于每个 $j\in[J]$，我们选择 $N_j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，使得 $f(l_j-N_j)+\cdots+f(l_j+N_j)\geq 2N_j+1$。考虑集合

$$\mathcal{S}:=\{(x_1,\dots,x_L)\in[0,L]^L:x_{l_j-N_j}+\cdots+x_{l_j+N_j}\geq 2N_j+1\text{ for each }j\in[J]\}.$$

注意到 \((f(1)\dots,f(L))\in S\)。因此，\(S\) 是一个非空、紧、凸多面体，包含于 \(\mathbb{R}^L\) 中。我们引入一个线性算子 \(\Lambda:\mathbb{R}^L\to\mathbb{R}\)，定义如下：

$$\Lambda(x_1,\dots,x_L):=x_1+\cdots+x_L.$$

那么，S 的一个顶点，例如 $(x_1^*,\dots,x_L^*)$，满足以下条件：

$$\Lambda(x_1^*,\dots,x_L^*)=\min\{\Lambda(x_1,\dots,x_L):(x_1,\dots,x_L)\in\mathcal{S}\}\leq\Lambda(f(1),\dots,f(L)).$$

我们注意到，$(x_1^*,\dots,x_L^*)$ 作为 S 的一个顶点，是由所有在以 $(x_1^*,\dots,x_L^*)$ 替代 $(x_1,\dots,x_L)$ 时成立的方程 $x_1=0,\dots,x_L=0$, $x_1=L,\dots,x_L=L$ 和 $x_{l_1-N_1}+\cdots+x_{l_1+N_1}=2N_1+1,\dots,x_{l_J-N_J}+\cdots+x_{l_J+N_J}=2N_J+1$ 所组成的线性方程组的唯一解。应用线性方程组理论中的一个标准论证，我们得到，对于每个 $l\in[L]$，都有 $x_l^*\in\mathbb{Q}$。

考虑由 $f^*:[L]\to[0,\infty)$ 定义的 $f^*(l):=x_l^*$。那么我们有 $\|f^*\|_1\leq\|f\|_1$和$E_1^{c}(f^*)\supseteq E_1^{c}(f)$。因此，$|E_{f^*}|=C^{c}(\mathbb{X}_{[L]},1)\|f^*\|_1$，这意味着 $C^{c}(\mathbb{X}_{[L]},1)\in\mathbb{Q}$。利用命题 2.1 以及 $C^{c}(\mathbb{X}_{\mathbb{Z}},1)=\frac{11+\sqrt{61}}{12}\notin\mathbb{Q}$（参见[17] 和 [13,定理 1]）这一事实，我们得出 $C^{c}(\mathbb{X}_{[L]},1)<C^{c}(\mathbb{X}_{\mathbb{Z}},1)$。□

引理 3.5 （情形 （A），$p=1$，非中心算子）。假设 （A）取自事实 *1.8*成立。那么我们有 $\mathcal{C}^{u}(\mathbb{X},1)<\mathcal{C}^{u}(\mathbb{X}_1,1)$。

证明。只需证明，对于每个固定的 $L\in\mathbb{N}$，我们有 $\mathcal{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X}_{[L]},\ 1) < \mathcal{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X}_1,\ 1)$，其中$\mathbb{X}_{[L]}$与引理 3.2中所述相同。我们还回顾一个众所周知的事实：$\mathcal{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X}_1,\ 1) = 2$。

取 $f\colon[L]\to[0,\infty)$ 和 $\lambda\in(0,\infty)$，使得 $E^{\mathrm{u}}_\lambda(f)$ 非空。同样，我们将 f 视为其 L-周期延拓。于是 $E^{\mathrm{u}}_\lambda(f) = E_{\mathrm{left}}\cup E_{\mathrm{right}}$，其中

$$E_{\mathrm{left}} \coloneqq \{l\in[L] : f(l-\underline{r})+\cdots+f(l)\geq(n+1)\lambda \text{ for some } \underline{r}\in\mathbb{N}\cup\{0\}\},$$
$$E_{\mathrm{right}} \coloneqq \{l\in[L] : f(l)+\cdots+f(l+\overline{r})\geq(n+1)\lambda \text{ for some } \overline{r}\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}.$$

应用单侧极大算子的结果可知

$$|E_{\mathrm{left}}|\leq\|f\|_1/\lambda \quad\text{and}\quad |E_{\mathrm{right}}|\leq\|f\|_1/\lambda.$$

由于 $E_{\mathrm{left}}\cap E_{\mathrm{right}}\neq\varnothing$，我们推得，在上述条件下，必须满足以下涉及向上取整函数的估计

$$\lambda|E^{\mathrm{u}}_\lambda(f)|\leq \max_{E,E'\subseteq[L]:E\cap E'\neq\varnothing}\frac{|E\cup E'|}{\max\{|E|,|E'|\}}\|f\|_1 = \frac{2\lceil\frac{L}{2}\rceil-1}{\lceil\frac{L}{2}\rceil}\|f\|_1.$$

因此，$\mathsf{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X}_{[L]},\mathbf{1})\leq\frac{2\lceil\frac{L}{2}\rceil-1}{\lceil\frac{L}{2}\rceil}<2$，得证。事实上，$\mathsf{C}^{\mathrm{u}}(\mathbb{X}_{[L]},\mathbf{1}) = \frac{2\lceil\frac{L}{2}\rceil-1}{\lceil\frac{L}{2}\rceil}$，这可通过取 $\tilde{f}\coloneqq\mathbb{1}_{\lceil\frac{L}{2}\rceil}$ 和 $\tilde{\lambda}\coloneqq\lceil\frac{L}{2}\rceil^{-1}$，并注意到 $E^{\mathrm{u}}_{\tilde{\lambda}}(\tilde{f}) = [2\lceil\frac{L}{2}\rceil-1]$ 来证明。□

References

[1] V. Bergelson, A. Leibman. 幂零 Roth 定理。《数学发明》147 (2002)，第 427–470 页。[2] G. Birkhoff. 遍历定理的证明。《美国国家科学院院刊》17 (1931)，第 656–660 页。[3] J. Bourgain. 关于整数某些子集上的极大遍历定理。《以色列数学杂志》61 (1988)，第 39–72 页。[4] J. Bourgain. 关于 L^p 上算术集合的逐点遍历定理。《以色列数学杂志》61 (1988)，第 73–84 页。[5] J. Bourgain. 算术集合的逐点遍历定理。附作者、H. Furstenberg、Y. Katznelson 和 D.S. Ornstein 撰写的附录。高等科学研究所数学出版物 69 (1989)，第 5–45 页。[6] Z. Buczolich, R. Mauldin. 发散平方平均。《数学年刊》171 (2010)，第 1479–1530 页。[7] A. Calderón. 遍历理论与平移不变算子。《美国国家科学院院刊》59 (1968)，第 349–353 页。[8] J.-P. Conze. 子列上的遍历平均收敛。M´法国数学会回忆录 35 (1973)，第 7–15 页。[9] L. Grafakos, S. Montgomery-Smith. 非中心极大函数的最佳常数。伦敦数学会会报 29 (1997)，第 60–64 页。[10] P.R. Halmos. 遍历理论讲义。日本数学会，1956。[11] R.L. Jones, A. Seeger, J. Wright.调和分析中的强变差不等式与跳跃不等式。美国数学会汇刊 360 (2008)，第 6711–6742 页。[12] A. Ionescu, Á. Magyar, M. Mirek, T.Z. Szarek. 幂零群上的多项式平均与逐点遍历定理。《数学发明》231 (2023)，第 1023–1140 页。[13] D. Kosz, M. Mirek, P. Plewa, B. Wróbel. 关于离散 Hardy–Littlewood 极大函数无维数估计的若干评注。《以色列数学杂志》254 (2023)，第 1–38 页。[14] B. Krause, M. Mirek, T. Tao. 非常规双线性多项式平均的逐点遍历定理。《数学年刊》195 (2022)，第 997–1109 页。[15] D. Lépingle. 半鞅的 p 阶变差。《概率论与相关领域》36 (1976)，第 295–316 页。[16] J. von Neumann. 准遍历假设的证明。《美国国家科学院院刊》18 (1932)，第 70–82 页。[17] A.D. Melas. 中心 Hardy–Littlewood 极大不等式的最佳常数。《数学年刊》157 (2003)，第 647–688 页。[18] M. Mirek, W. Słomian, T.Z. Szarek. 关于振荡不等式的若干评注。《遍历理论与动力系统》（已接受）。[19] G. Pisier, Q.H. Xu. 鞅与正交级数的强 p-变差。《概率论与相关领域》77 (1988)，第 497–514 页。[20] W. Słomian. 用于控制离散 Radon 算子的自助法。《泛函分析杂志》283 (2022)，109650。[21] E.M. Stein. 关于算子序列的极限。《数学年刊》74 (1961)，第 140–170 页。

Dariusz Kosz (dkosz@bcamath.org)Basque Center for Applied Mathematics,
48009 Bilbao, SpainWrocław University of Science and Technology,
50-370 Wrocław, Poland