arXiv:2305.03118v2 [math.DS] 9 Jul 2023

用于识别随机动力系统中现象学分岔的拓扑框架

SuniaTanweer Firas A. Khasawneh Elizabeth Munch Joshua R. Tempelman

密歇根州立大学机械工程系

摘要

动力系统的参数变化可能导致系统状态在不同的定性状态之间转变。这些转变称为分岔，研究它们至关重要，因为它们可能预示系统即将发生有害的行为变化。在随机动力系统中，人们尤其关注 P 型（现象学）分岔，其中包括从单稳态转变为多稳态、随机极限环的出现，以及系统状态概率密度函数（PDF）的其他特征。当前方法仅适用于状态空间较小的系统，无法检测 PDF 的所有可能行为，并且必须由人工通过目视来识别 PDF 的变化。与此不同，本研究提出了一种基于拓扑数据分析（TDA）的新方法，利用超水平集持久性，通过“同调分岔图”对随机系统中的 P 型分岔进行数学量化；该图展示了 $0th$ 和 $1st$同调群秩的变化。借助这些图，我们展示了如何根据随机 Duffing 振子、Raleigh-Vander Pol 振子和五次振子的解析概率密度函数，成功检测 P-分岔；并进一步说明，如何利用一种用于寻找概率密度函数与核密度估计之间拓扑一致性的工具，根据这些系统的核密度估计（KDE）生成估算的同调分岔图。

1 引言

准确了解、预测和控制随机动力系统的行为，需要充分确定系统的状态以及分岔的起始点。在这类系统中，系统属性（如阻尼或刚度）[4, 5, 6]，或激励特性（如外部噪声的强度、颜色和带宽）[7, 8, 9, 8]发生变化，都可能诱发分岔。此外，研究还表明，噪声突发等现象也会诱发系统分岔 [10]。随机动力学已广泛应用于化学反应 [10, 11], 、流体动力学 [12], 、振动控制 [13], 、能量采集[14, 15], 、遗传学 [16], 和金融市场 [17], 等领域，因此，来自不同学术领域的研究者已开展大量工作，从定性和定量角度分析随机分岔 [9, 18, 13, 4, 19]。

在随机激励系统中，分岔可分为两种不同类型：P 型（现象学）和 D 型（动力学）。D 型分岔可以通过最大李雅普诺夫指数符号的突变进行定量测量，而 P 型分岔则是系统响应的联合概率密度函数（以下简称 PDF）拓扑的定性变化。基于此，P-分岔例如可以是单稳态 PDF 与双稳态 PDF 之间的转变 [20, 21, 11, 10, 22, 7], ，而 D 型分岔则表现为状态空间区域之间的分离，使得这些区域之间无法发生跃迁 [9, 7, 19, 22, 23]。值得注意的是，P 型和 D 型是相互无关的现象 [24] ，并且可能不会出现在相同的状态区域中 [25]。

鉴于 P-分岔归因于概率密度函数（PDF）的定性变化，其分析传统上局限于定性方法 [26]。在 [10], 中，针对一维随机双稳系统计算了概率密度函数（PDF）中的不动点。这些最大值和最小值分别对应有利点和不利点

，用于显示相图中动力学趋向的位置。在 [9], 中，系统 PDF 的不动点结合随机相图中极限环的信息，用于指示 PDF 中的脊线。在 [27], 中，随机双稳系统的分岔被捕捉在经验分岔图中，该图类似于 [28] 中所展示的图。所得的二维经验分岔图使用密度估计器捕捉不同参数值下的轨迹分布，然后将这些分布绘制在参数空间上变化的垂直轴上。由此可以定性区分单稳态行为与双稳态行为。Xu 等人 [29] 还利用随机 Duffing–Van der Pol 方程精确平稳解中的概率密度函数（PDF）极值，展示双稳态与单稳态行为。然而，与 [27, 28], 不同，对 [29] 的解析评估能够精确确定平稳分布中众数的数量。因此，[29] 通过改变参数并跟踪精确分布中的众数数量，构建了一个二维分岔图；所得分岔图在水平轴和垂直轴上显示系统参数，并根据每对参数值下发现的众数数量对区域进行着色。该过程用于构建 [30, 31] 中的分岔图。

尽管 [10, 9, 29, 27, 28] 提供的方法为表征随机分岔提供了不错的定性途径，但当前最先进的方法仍存在局限。例如，这些指标仅适用于一维系统。若假设存在联合分布，那么在高维情形下，要像 [27, 28] 那样呈现变化中的动力学将困难得多。此外，仅通过统计概率密度函数中的峰值数量，无法捕捉更丰富的动力学行为，例如极限环 [4]。研究多维系统分岔的工作通常会展示参数范围内的多个联合分布，并据此得出定性结论，判断 P-分岔发生在哪个参数区间 [4, 32, 13]。最后，这些定性方法面临的一大挑战是过度依赖对概率密度函数的目视检查，因此难以估计系统的稳定性界限 [25, 33]。近期有研究尝试利用香农熵符号的变化来量化 P 型分岔的起始或发生，但所提出的技术并不适用于所有一般的非线性动力系统，而且在状态空间为多维的系统中，分岔检测可能很困难 [34, 33]。

鉴于目前缺乏用于识别概率密度函数拓扑及其拓扑特征变化的定量技术，本文主要致力于提出一种量化和刻画 P-分岔的方法。我们提供了一种定量工具，用于分析定性的 P-分岔；该工具既适用于由少数可求解随机微分方程生成的解析概率分布，也可扩展到没有已知精确解的系统。具体而言，我们将持久同调这一拓扑数据分析中的常用工具 [35], 应用于系统响应的概率密度函数或核密度估计（KDE）。这使我们能够量化概率分布的形状，从而构建定量分岔图；分布拓扑中各类同调类的秩发生变化，可据此识别引起系统动力学转变的参数值。

考虑 用于描述 n 维随机动力系统的一般形式：

$$d\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}, t)dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)d\mathbf{W}(t) \tag{1}$$

其中，dW(t) 是一个 n 维维纳过程， $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 分别是漂移函数向量和扩散函数向量，使得 $\boldsymbol{\sigma}$ 产生参数随机激励。在本研究中，所用系统的解析概率密度函数并非直接推导得到的。这里假设解析概率密度函数已知、易于推导，或者在无法推导的情况下，可以利用系统响应通过数值计算得到核密度估计。不过，有兴趣的读者可以参考等效非线性系统方法 [36, 37, 38],、随机平均 [39, 40, 29], 、摄动法，以确定随机矩 [41, 42, 43]；也可以参考微分变换法 [44] 获取更多信息。此类采用伊藤形式的随机微分方程还可以转化为福克-普朗克方程（FP），它是一种.....的近似。

克拉默斯-莫亚尔展开，并将随机微分方程化为以下形式 [45]

$$\partial_t p(\mathbf{X},t) = -\sum_i \partial_i[\mu_i(\mathbf{X},t)p(\mathbf{X},t)] + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\partial_i\partial_j[\{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X},t)\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}}(\mathbf{X},t)\}_{ij}p(\mathbf{X},t)] \tag{2}$$

其中， $p(\mathbf{X}\ t)$ 是状态变量的联合概率分布。对于 [4, 46, 47, 48], ，约化福克-普朗克-科尔莫戈罗夫（rFPK）方程可得到精确平稳解（与 FP 相同，但状态变量具有平稳的联合分布）。利用上述工具，先前的研究已对少数随机微分方程的分岔行为进行了定性追踪。不过，必须指出，概率分布的来源与本文提出的方法无关。

2 数学预备知识

本研究依托多个领域的一系列数学工具，包括拓扑数据分析（TDA） [35]。本文使用的核心数学技术是持久同调，分别基于单纯复形和立方复形进行计算。此外，我们还需要使用核密度估计（KDE），并采用一种工具来确定其在拓扑意义上一致的持久同调。本节将简要介绍这些技术。

2.1 拓扑空间

我们将使用的第一个拓扑空间是立方复形，它适用于离散化函数（矩阵）数据。立方复形由基本区间构成，基本区间定义为单位区间 $[u,u+1]$ 或退化区间 $[u,u]=[u]$，其中 $u\in\mathbb{Z}$。对于一个 n 维K空间，立方体定义为乘积 $I=\prod[u_i,u_i']$，其中 $u_i'\in\{u_i,u_{i+1}\}$。所得立方体的维数是该乘积中非退化区间的数量。例如，0 维立方体是顶点，1 维立方体是边，2 维立方体是正方形，3 维立方体是体素，以此类推。如果一个立方体 σ 是另一个立方体 τ 的子集，我们就称 σ 是 τ 的面，并记作 $\sigma\leq\tau$。例如，边 $\sigma_1=[0]\times[0,1]$ 和 $\sigma_2=[0,1]\times[0]$ 都是正方形 $\tau=[0,1]\times[0,1]$ 的面。因此，立方复形是由立方体组成的集合；若将一个 d 维立方体纳入复形，则必须同时纳入它的所有面。

我们在本文中使用的另一种复形形式是单纯复形。给定一个顶点集合 V， d-单形是一个由 $d+1$ 顶点组成的集合， $\sigma=[v_0,\cdots,v_d]$。在这种情况下，0-单形仍然是一个点，1-单形仍然是一条边，然而，2-单形是一个三角形，3-单形是一个四面体，依此类推。同样地，如果 $\sigma\subseteq\tau$，我们称 σ是 τ的一个面，并记作 $\sigma\leq\tau$。单纯复形 K是单形的集合，满足如果 $\sigma\in K$ 和 $\tau\leq\sigma$，那么 $\sigma\in K$。

在接下来的章节中，我们将简要介绍同调、上水平集和次水平集持久同调，并引导感兴趣的读者参阅 [35, 49] 以获取完整细节。

2.2 同调

对于一个固定的拓扑空间 X，在本文中，它将是一个有限组合结构，例如单纯复形或立方复形，我们可以按如下方式定义同调。第 p 阶链群 $C_p(X)$ 是一个向量空间，由 p 维单纯形（或立方体）的有限形式和构成，$\sum\alpha_i\sigma_i$，其中加法由系数相加给出。对于本研究，我们假设系数α_i 取自 $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$。边界映射将一个单形映射为其所有维数恰好低一维的面的和： $\partial_p:C_p(x)\to C_{p-1}(x)$ 随后，同调定义为 $H_p(X)=\text{Ker}\,(\partial_p)/\text{Im}\,(\partial_{p+1})$。特别地，一个 p 维同调元素由一组 p 维单形表示，这些单形经过边界映射作用后结果为 0；如果另一个代表元与其之差是某个更高维单形集合的边界，那么二者就等价。更直观地说，所测量的结构类型取决于所使用的同调维数——连通分支

由零维同调刻画，环由一维同调刻画，空腔由二维同调刻画。

2.3 持久同调

持久同调是拓扑数据分析中广泛使用的一种技术，它通过追踪参数变化时参数化空间的同调如何变化，来捕捉该空间形状的信息 [35]。

假设给定一个拓扑空间及函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$。对于一组实数 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$，我们有如下的 子水平集过滤:

$$X_{a_1} \subseteq X_{a_2} \subseteq \cdots \subseteq X_{a_n}$$

其中 $X_a = f^{-1}(-\infty, a]$。类似地，还有一个 超水平集过滤

$$X^{a_n} \subseteq X^{a_{n-1}} \subseteq \cdots \subseteq X^{a_1}$$

其中 $X^a = f^{-1}[a, \infty)$。代数拓扑中的一个基本定理指出，同调具有函子性；也就是说，若存在从一个空间到另一个空间的映射（在本例中为包含映射 $X \subset Y$），则相关的同调群之间存在一个诱导映射（在本例中为向量空间之间的线性映射）$H_p(X) \to H_p(Y)$。我们利用这一点构造一个次水平集同调过滤

$$H_p(X_{a_1}) \to H_p(X_{a_2}) \to \cdots \to H_p(X_{a_n})$$

以及一个上水平集同调滤过

$$H_p(X^{a_n}) \to H_p(X^{a_{n-1}}) \to \cdots \to H_p(X^{a_1}).$$

持久同调的另一个基本定理指出，任何这种形式的过滤都可以唯一地分解为一组配对 $(b,\ d)$。在这种情况下，$b = a_i$ 表示一个新的同调类出现；也就是说，$H_p(X_{a_i})$（分别为 $H_p(X^{a_i})$）中的一个元素不属于 $H_p(X_{a_{i-1}})$（分别为 $H_p(X^{a_{i+1}})$）的像。同样，$d = a_j$ 表示该同调类与一个较早进入 $H_p(X_{a_j})$（分别为 $H_p(X^{a_j})$）的类的像合并。

这些信息通常绘制在持久图中，其中所有配对都表示为平面上的点。请注意，对于次水平集持久性，$b < d$；对于超水平集持久性，$b > d$。因此，次水平集点始终位于对角线 $\Delta = \{(x,\ x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 上方，而对于超水平集持久性，点始终位于下方。本文将特别关注以下两种情况下的持久性。

2.3.1 立方复形的超水平集持久性

给定一幅灰度图像，或更一般地，一个 $m \times n$ 矩阵 M，将其定义域设为立方集合 $K = \mathcal{K}([0, m] \times [0, n])$。我们可以将图像表示为定义在该立方集合上的函数 $f\colon K \to \mathbb{R}$；对于给定的立方体 $s_{i,j} = [i, i+1] \times [j, j+1] \in K$，有 $f(s_{i,j}) = M_{i,j}$，即函数值等于对应的矩阵项。对于所有低维立方体 P，我们令 $f(P) = \max_{s_{i,j} > P} M(s_{i,j})$。这样一来，对于任意函数值，$f$的超水平集（在此情形下记为 K^a: $= f^{-1}(-\infty, a]$）也是一个立方复形。于是，我们可以计算该函数的超水平集持久性。示例见图 1。随着 a 变化，我们得到不同的立方复形 K^a。(a–d) 中的连通分支和环的数量分别为 (1, 1)、(2, 1)、(1, 1) 和 (1, 0)。

2.3.2 点云单纯复形的子水平集持久性

我们将特别关注以点云 $\chi = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ 作为输入时的次水平集持久性。对于该点云以及固定的 $r \ge 0$, Rips复形表示为

$$R(\chi, r) = \{\sigma = \{x_0, \cdots, x_d\} \mid \|x_i - x_j\| \le r \text{ for all } i, j\}.$$

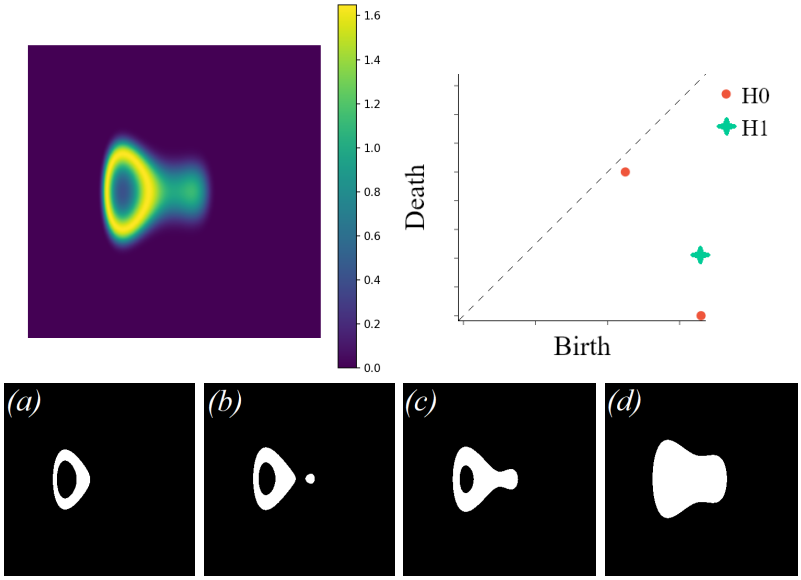

图 1：图像数据的超水平集立方持久性。各图分别对应 (a) $K^{1.4}$、(b) $K^{1.05}$、(c) $K^{0.8}$ 和 (d) $K^{0.2}$。

也就是说，我们将点的集合抽象地视为顶点集，并为每个两两之间距离均在 r 以内的点子集包含一个单形。注意，如果我们改为构造一个函数 $f : K \to \mathbb{R}$，其中 K 是定义在 n 个顶点上的完全单纯复形（即包含顶点所有可能子集的复形），由 $f(\sigma) = \max_{x_i, x_j \in \sigma} \|x_i - x_j\|$给出。在这种情况下，Rips复形与次水平集 $R(\chi, r) = f^{-1}(\infty, r]$相同。因此，我们相应地构造次水平集过滤及由此得到的持久图。参见图2中的示例。随着半径 r 变化，我们得到不同的Rips复形，即 $R(\chi, r)$。请注意，持久图中的两个点代表数据中的两个环。

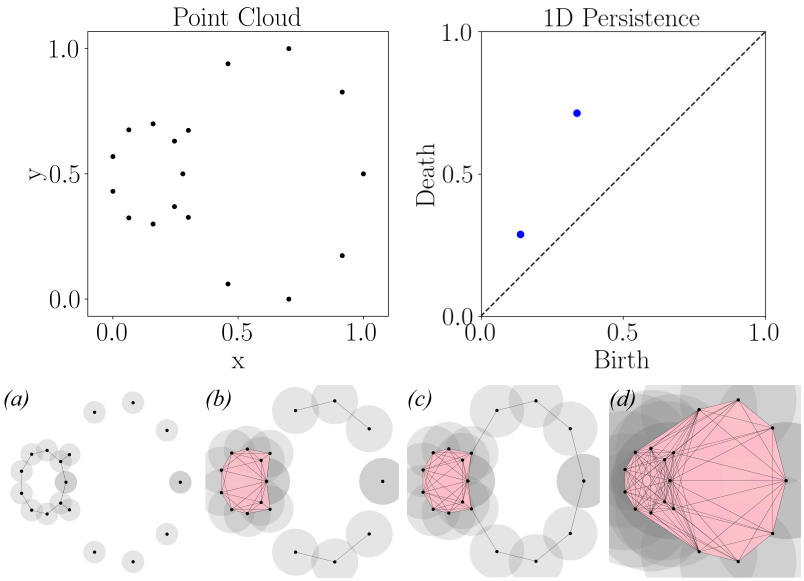

图 2：点云的次水平集持久性。各图对应的半径分别为 (a) 0.14（较小环的出生）、(b) 0.31（较小环的消亡）、(c) 0.34（较大环的出生）和 (d) 0.73（较大环的消亡）。

2.4 贝蒂数与贝蒂向量

很多时候，我们实际上并不关心完整的同调向量空间，而只关心其维数。同调的维数称为贝蒂数，通常记作 $\beta_p(X) = \dim(H_p(X))$。

对于任意滤过超水平复形 $K^n \subseteq K^1 \subseteq \cdots K^0$，贝蒂曲线是定义如下的函数：$L \mapsto (\beta_p(K^{\lfloor L \rfloor}))$ 也就是说，贝蒂曲线是一个函数，它将空间在其滤过值 L处映射到第 p个贝蒂数。在离散化数据的情况下，我们通常将这些数据表示为一个向量

$$[\beta_p(L^0), \beta_p(L^1), \cdots, \beta_p(L^N)]$$

在这种情况下，我们称其为贝蒂向量。对于立方复形，滤过参数L 对应于函数值（即概率密度函数中的高度）。

2.5 与估计密度的拓扑一致性

在本文中，我们将处理系统响应的核密度估计（KDE），因此需要从核密度估计中恢复解析概率密度函数的同调。为此，我们遵循 Bobrowski 等人的工作， [50] 运用持久性的思想，借助从核密度估计中采样得到的点云，在立方复形情形下确定单个超水平集的同调。

假设给定一个概率密度函数 $p: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，并令 $D^L = p^{-1}([L, \infty))$ 为 p 的一个超水平集。我们的目标是利用样本 $\{X_1, \cdots, X_n\} \sim^{iid} p(x)$ 恢复同调 $H_p(D^L)$。令 $\hat{}p: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$为基于这些样本构建的核密度估计（有关多变量密度估计，请参见 [51] ）。接着，我们利用样本中的点，通过球并集 $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|x - y\| < r\}$ 来估计集合 D^L；这些球以原始集合中估计值高于 L 的点为中心。具体而言，令$\chi^L := \{X_i : \hat{}p(X_i) \geq L\}$，则 D^L 的这一近似为

$$\widehat{D}_r^L := \bigcup_{X \in \chi^L} B_r(X).$$

按照 [50], ，我们选择半径 r，使其与计算核估计量时使用的带宽相同。

给定 $\varepsilon > 0$，包含映射 $i : \hat{}D_r^{L+\varepsilon} \hookrightarrow \hat{}D_r^{L-\varepsilon}$在同调上诱导出一个映射。

$$i_* : H_p(\hat{D}_{L+\varepsilon}(r)) \to H_p(\hat{D}_{L-\varepsilon}(r)).$$

通过设置，可以利用该映射定义 L 处超水平集同调的估计量。

$$\widehat{H_*}(L, r) := \mathrm{Im}\ (i_*).$$

在 Bobrowski 等人 [50], 中证明，对于足够大的样本量，并且对 ε 和 r作出恰当选择时，$\widehat{H_p}(L, r) \cong H_p(D^L)$ 以高概率成立。算法的详细信息可见其论文 [50]。尽管目前没有确定的方法来估计最小样本量，也没有针对 ε和 r的明确恰当选择方案，但应牢记 [50]中概述的以下准则：

1. 尽管算法没有为参数 ε 指定下界，但必须对其进行选择，使得范围 $[L - 2\varepsilon, L + 2\varepsilon]$ 内不存在临界值。当然，这在实践中并不完全可行，我们的方法也会无意中违反这一点。因此，我们预计在同调发生变化的临界点附近会出现误差。无论如何，正如稍后将看到的，这些误差不会损害该方法检测系统概率密度函数变化和分岔开始的能力。

2. 对于参数 r，用户必须谨慎对待其下界，即 $nr^d >> log(n)$（更严格地说）。然而，高于此下界的值并非都能正确估计同调，因此应用该算法时需要谨慎。

对于我们的示例，我们将 ε 保持为 10^{-5}的顺序，并将 r 保持在 0.1 和 0.8 之间（因情况而异），针对一个 $n = 500$ （从更大的集合中使用贪心置换 [52]提取的 500 个稀疏值）。

3 方法

在第 2 节中，我们讨论了如何将来自单个立方复形的单个持久图提炼为其贝蒂向量。对于随分岔参数等外部变量变化的一族立方复形，可以得到一系列持久图。通过绘制随分岔参数变化的贝蒂向量，可以在分岔区间内可视化这些持久图的演变。我们将这些图称为“同调分岔图”——它们类似于 Topaz 等人提出的 CROCKER 图 [53]，后者用于可视化 Rips复形的次水平滤子的演变——并探讨它们如何帮助我们检测 P-分岔。

为了说明并阐释该方法，我们以随机杜芬振荡器为例。Mamis 和 Athanassoulis 通过对福克-普朗克方程进行分解，推导出了该振荡器平稳联合概率密度函数的解析表达式 [4]。

受加性白高斯噪声驱动的随机 Duffing 振子由随机微分方程表示。

$$\ddot{X} + \dot{X} + hX + X^3 = q_1 dW_1.$$

该振荡器的平稳联合概率密度函数为：

$$p_{x_1x_2}(\mathbf{x}) = C \exp\left[-\frac{1}{2q_1^2 D_{11}}\left(x_2^2 + hx_1^2 + \frac{1}{2}x_1^4\right)\right]$$

其中 C 是归一化常数，使得 $\int_{-\infty}^{\infty} p dx_1 dx_2 = 1$； D_{11} 来自高斯白噪声的强度矩阵 D_{ij}，并与其功率谱密度成正比。由于此处不研究改变噪声的影响，我们将噪声振幅和强度保持不变：$q_1 = D_{11} = 1$。为便于计算，我们使用了 $C = p/\max(p)$——它只是一个标量乘数，不会影响概率密度函数的拓扑。

<escape>对于该振荡器，随着分岔参数 h 从负值变为正值，我们注意到概率密度函数（PDF）的形状从双稳态转变为单稳态。图3 展示了对应于分岔参数不同取值的解析生成的概率密度函数（PDF）的演变， h。由于在 -1 和 1 之间进行分岔检测仍能达到相同的目的，因此接下来的章节仅讨论 $h \in [-1, 1]$。</escape>

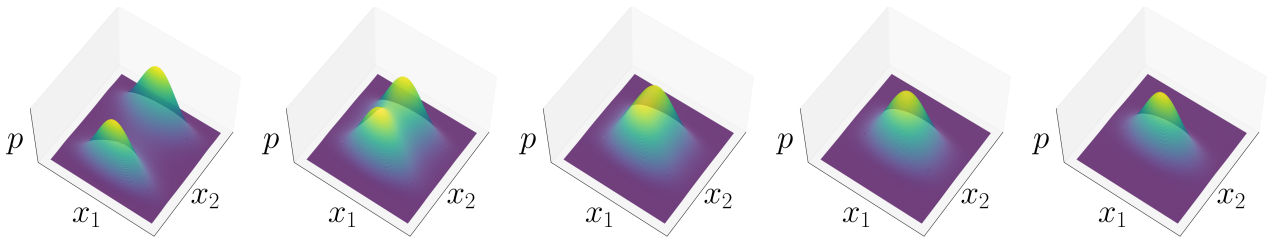

图 3：随机杜芬振子的概率密度函数随 h 值变化的演化。从左到右， $h = -3$， -1， 0， 1， 3。

3.1 基于解析概率密度函数的检测

<escape>给定杜芬振子的解析概率密度函数，我们计算对应于 $h \in \{-1, 0, 1\}$ 的立方复形的超水平持久性图。注意，在图 4 中， H_0 的秩在 $h = 0$ 处（即发生分岔时）从 2 变为 1，并在此后保持为 1。每个 H_0 分支对应于概率密度函数中的一个峰（“连通分支”）。</escape>

因此，分岔可以与相关复形的同调秩变化联系起来。图5展示了区间 $h \in [-1, 1]$内杜芬振子的解析概率密度函数所生成的同调分岔图。图中的 x 轴对应分岔参数 h， y 轴对应水平 L，点的颜色表示该水平处的贝蒂数。请注意

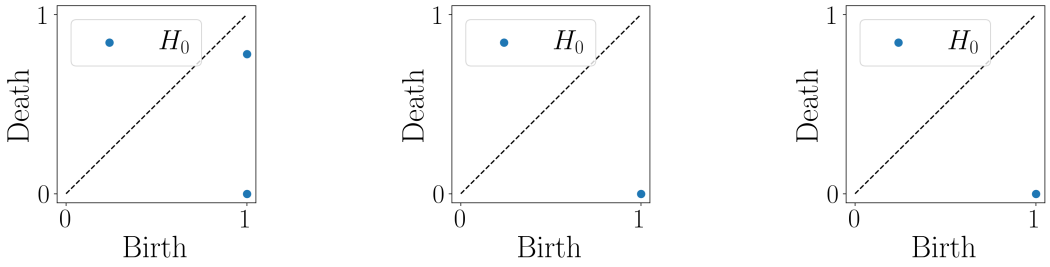

图 4：分岔对 H_0 杜芬振子同调秩的影响。从左到右， $h = -1$，0，1。

当参数变为非负时，秩的变化从最大层级开始。与此例不同，在 PDF 分岔为极限环的情况下，变化会发生在 H_1 组的秩上（稍后将会展示）。

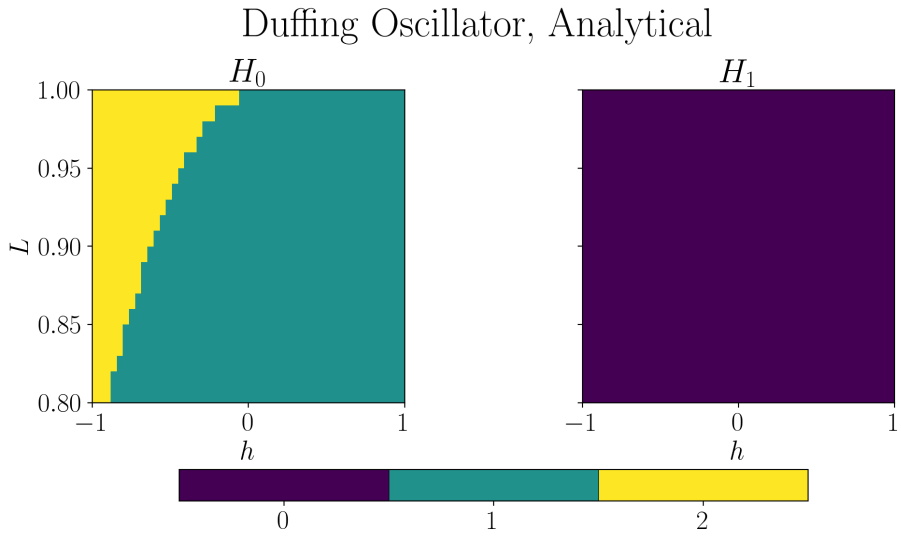

图 5：杜芬振子的解析同调分岔图。

3.2 使用估计密度进行检测

与上一节不同，在现实场景中，系统响应的解析概率密度函数很少能够获得。然而，可以对动力系统状态向量的实现 $X = [x_1, \cdots, x_N]$，其中 $x_i \in \mathbb{R}^p$ （p 为状态空间中的分量）进行采样。借助此类输入，可以将系统响应转换为核密度估计 [51]。然而，无论是获取的系统数据还是核密度估计，都难免存在噪声；鉴于同调的离散特性，单个位置不准确的噪声伪影就可能改变同调秩，如此处所示 [50]。这正是第 2.5 节的讨论发挥作用之处，用于计算核密度估计特定水平下贝蒂数的估计值。

一旦我们获得了针对某个分岔参数取值的核密度估计，就可以计算一系列层级上的同调秩， L，并将其绘制出来，以直观呈现秩的变化。图6 展示了 Duffing 系统在一系列分岔参数取值下贝蒂数的估计同调分岔图，适用于 H_0 和 H_1 。估计图与解析结果相符，并表明在 $h = 0$ 处的 H_0附近发生了分岔。正如预期，对于 H_1，图中没有变化。

3.2.1 解析同调分岔图与估计同调分岔图之间的误差 ots

图7 展示了 Duffing 的解析同调分岔图与估计同调分岔图之间的误差。由于同调是离散的，因此误差计算为 $\beta_{\text{true}} - \beta_{\text{estimate}}$。请注意，解析值与

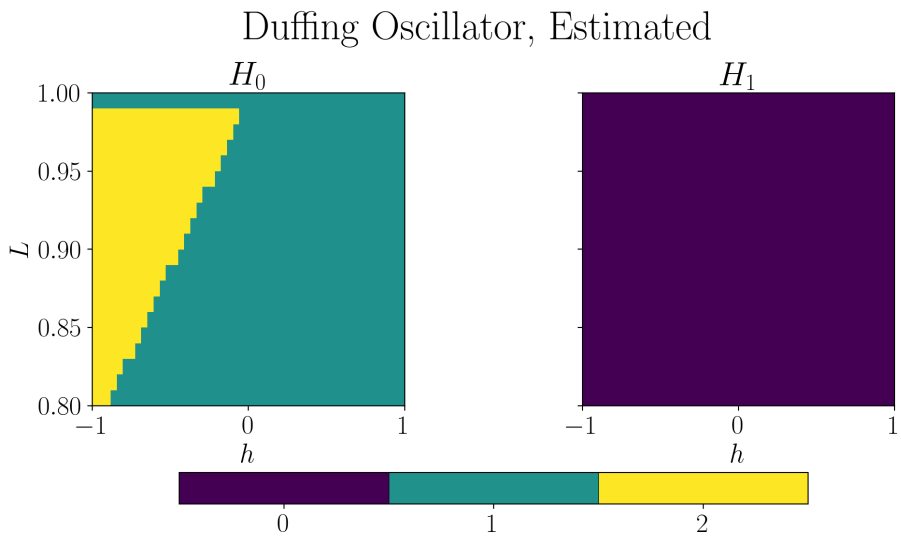

图 6：杜芬振子的估计同调分岔图。

估计值在图中的“拓扑边界”附近并不一致。所有误差（位于 $L \approx 1$ 和三角区域）都是由概率密度函数中对应于临界点（拓扑边界）的那些水平引起的。

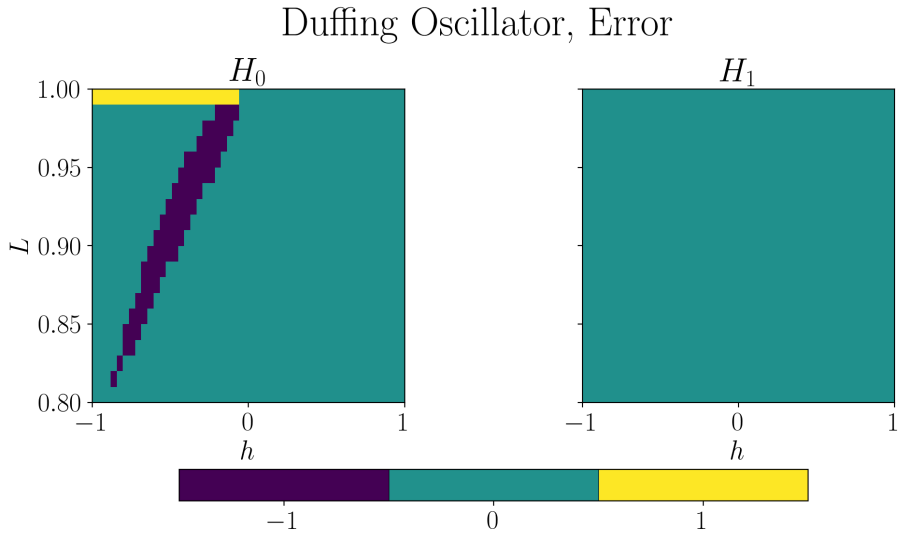

图 7：杜芬的解析同调分岔图与估计同调分岔图之间的误差。

4 结果与讨论

本节展示该方法在另外两种随机振子上的成功应用，并讨论结果。

4.1 Raleigh-VanderPol（RVP）振子

受加性白高斯噪声驱动的瑞利-范德波尔（RVP）振子可由以下随机微分方程表示：

$$\ddot{X} + (h + X^2 + \dot{X}^2)\dot{X} + X = q_1 dW_1$$

其中 C 且 D_{11} 与前文定义相同。平稳联合概率密度函数 [4] 如下所示。 :

$$p_{x_1x_2}(\mathbf{x}) = C\exp\left[-\frac{1}{2q_1^2D_{11}}\left\{\frac{1}{2}(x_2^2+x_1^2)^2+h(x_2^2+x_1^2)\right\}\right]$$

该振荡器在 $h=0$ 处发生分岔，此时系统从单稳态转变为极限环振荡（LCO），条件为 $h<0$。图 8 展示了与 $h=1$ 和 $h=-1$ 分别对应的解析生成概率密度函数，以及它们的超水平集立方持久图。对应的持久图显示了一个 H_0 连通分量对应一个峰，另一个 H_1 连通分量对应概率密度函数中的陨坑或“孔洞”。

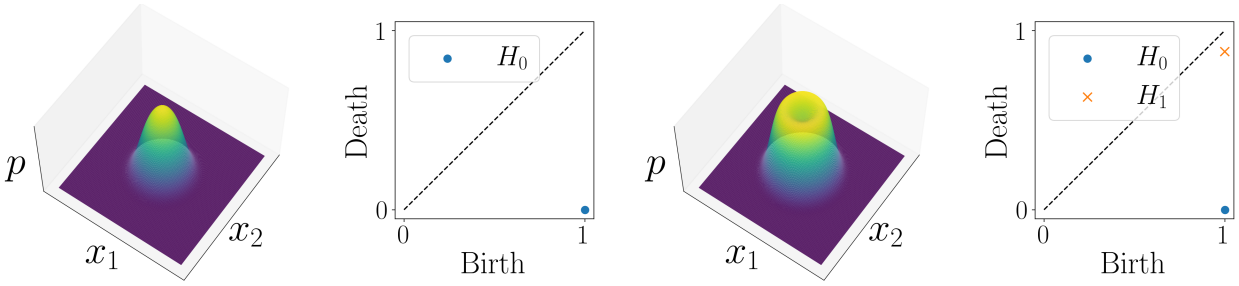

图 8：RVP 振荡器在单稳态（$h=1$，左）和极限环（$h=-1$，右）下对应的概率密度函数及其超水平集立方持久图。

图 9 展示了 RVP 振荡器在区间 $h\in[-1,1]$上的解析生成和估计同调分岔图，以及二者之间的误差。注意，当参数变为非负时，同调发生了变化。在每个垂直贝蒂向量中，同调发生变化的 L 对应于概率密度函数中陨坑的深度。对于 H_1，估计图呈现出与解析图相似的特征，并表明发生了分岔。最后请注意，解析同调分岔图与估计同调分岔图之间的误差出现在概率密度函数中预期存在“拓扑”边界的水平处。与 Duffing 类似，在 $L\approx 1$时，由于集合 $D_{L+\varepsilon}$ 为空或近乎为空，因此会引入一些误差。

4.2 五次振子

最后，我们将注意力转向一种稍微复杂一些的随机振荡器，称为五次振子。该振荡器同时受到加性和乘性高斯白噪声的作用，其模型如下：

$$\ddot{X}+2[D_{11}(2U(X)+h)-\frac{1}{2}D_{22}]\dot{X}+2[D_{22}(2U(X)+h)$$
$$+D_{11}]\dot{X}^3+2D_{22}\dot{X}^3+h_0(X)=dW_1+\dot{X}dW_2$$

w其中 $h_0(X)=x_1^3+ax_1^2-x_1$。系统的平稳联合概率密度函数 [4] 为

$$p_{x_1x_2}(\mathbf{x})=C\exp[-\frac{1}{2}x_2^4-(h+2U(x_1))(x_2^2+U(x_1))-hU(x_1)]$$

其中 C 与前文相同，D_{11} 和 D_{22} 来自高斯白噪声的强度矩阵 D_{ij}，而 $U(x_1)=\frac{1}{4}x_1^4+\frac{a}{3}x_1^3-\frac{1}{2}x_1^2$表示势能。

该系统具有两个分岔参数（h 和 a），其概率密度函数的形式可能很复杂，表现出（对称和非对称的）双稳态以及极限环行为。势能的对称性会使概率密度函数呈现对称形状，而阻尼参数中的负值则会导致显著的极限环行为。

图 10 展示了针对 $h\in\{1,-1\}$ 和 $a\in\{1,0,-1\}$组合解析生成的概率密度函数，以及相应的超水平集立方持久图。尽管 $a\in[-1,1]$ keep-ing $h=-1$ 的转变并未显示出分岔，但从对称到非对称的转变很有意思

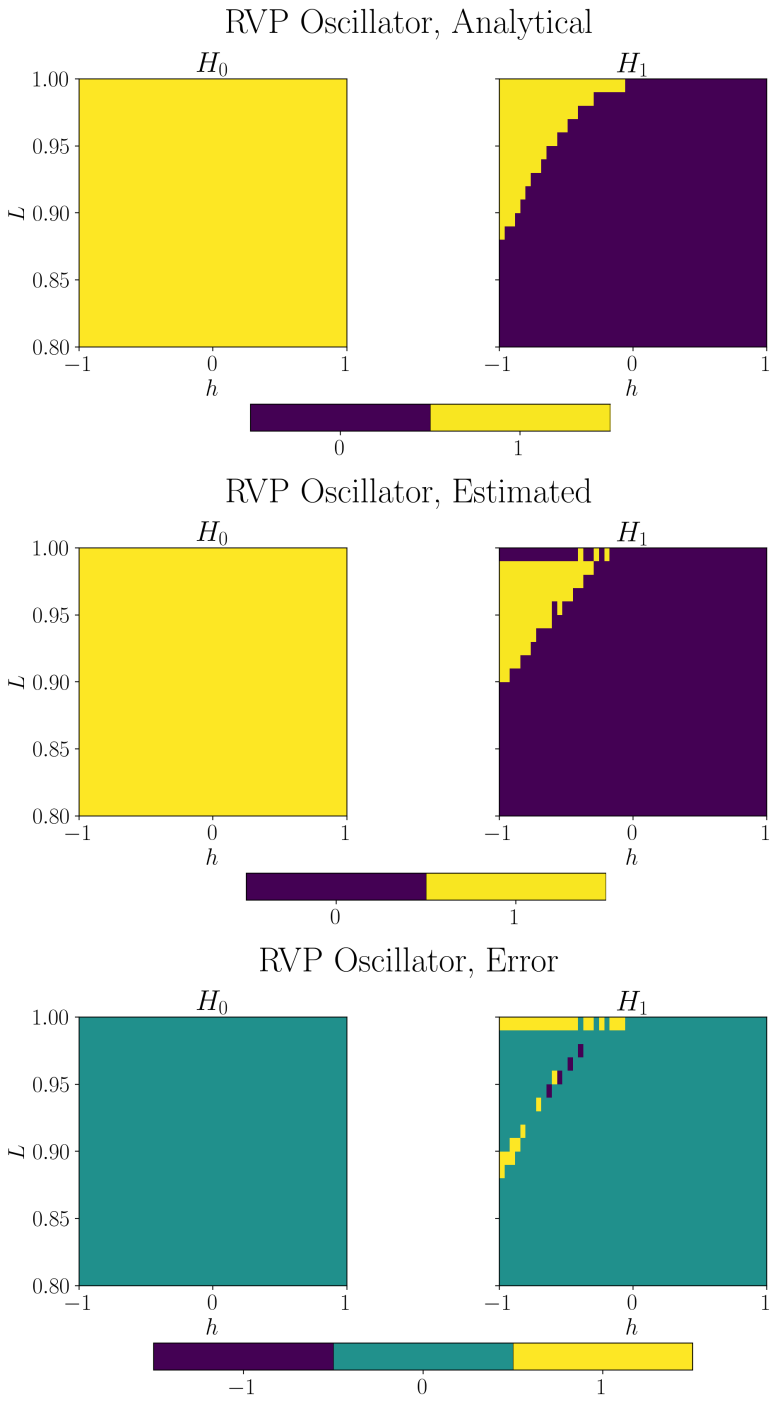

图 9：RVP 振荡器的解析与估计同调分岔图，以及误差。

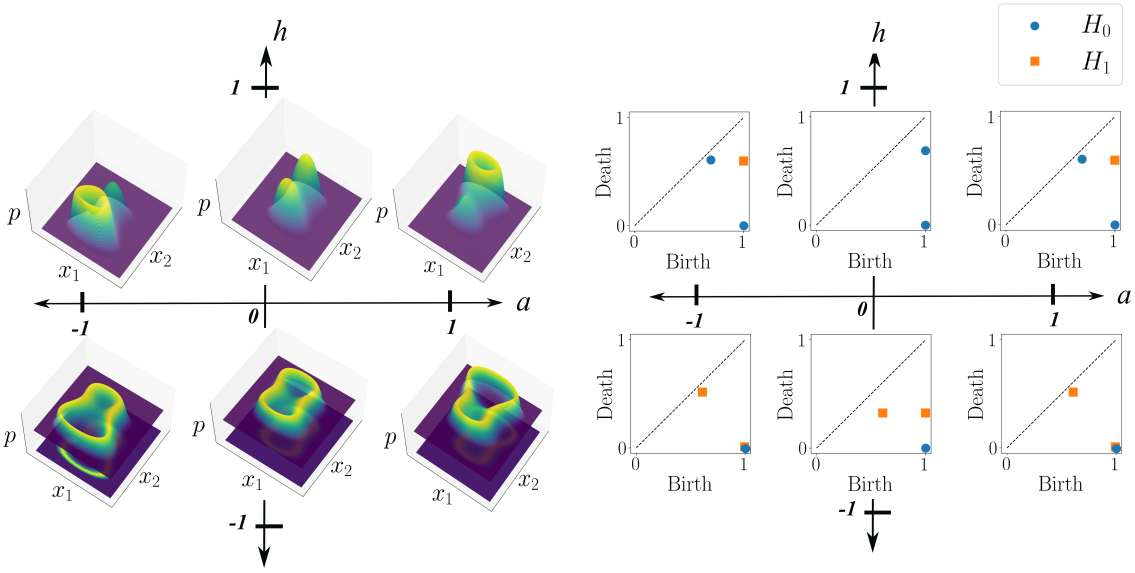

图 10：五次振子各案例的概率密度函数和立方持久图。

需要观测的现象，并展示系统在状态方面的“偏好”。请注意，对于 $a = 1$ 和 $a = -1$，概率密度函数在拓扑上是等价的，讨论二者并不会为关于检测分岔的讨论增添任何内容。因此，对于估计密度情形，将省略 $a = 1$ 的结果。为简洁起见，我们仅讨论在 $a = 0$ 固定时改变 h，以及在 $h = 1$ 固定时改变 a 的结果。

4.2.1 在 $a = 0$ 的情况下改变 $h \in [-1, 1]$：

图 11 展示了五次振子在区间 $h \in [-1, 1]$ 内、保持 $a = 0$不变时的解析同调分岔图和估计同调分岔图，以及误差。对于 $h > 0$，图中显示 H_0 秩从 1 变为 2，表明出现了第二个峰。对于 h 小于 ~ 0.5的情况，观察 H_1 秩的变化，这表明反向双稳态（“孔洞”）的出现，其表现为秩从 0 变为 2。随后秩又从 2 变为 1，表明两个空洞合并为一个，因为水平 L 不断升高。总体而言，估计图与解析情形具有相似的整体特征，大多数误差出现在拓扑边界附近，这与预期一致。

4.2.2 令 $a \in [-1, 0]$ 在 $h = 1$ 范围内变化：

最后，我们讨论区间 $a \in [0, 1]$ 内的情况，同时保持参数 $h = 1$不变。根据图 10，我们预计概率密度函数将从带有 LCO 的单稳态（$\text{rank}(H_0 = 2), \text{rank}(H_1 = 1)$) 分岔为双稳态（$\text{rank}(H_0 = 2), \text{rank}(H_1 = 0)$）。

图 12 展示了五次振子在 h 固定为 1。0 时的解析同调分岔图和估计同调分岔图，以及两者之间的误差。当 a 小于 ~ 0.55时，H_1 图显示秩从 0 变为 1，表明 LCO 的出现。H_0 图显示秩 $= 2$ 区域的厚度随 a 变化而呈现有趣的变化。然而，这种厚度变化仅表明概率密度函数中两个峰（或一个峰和一个极限环）的高度不对称。当 $a = 0$时，概率密度函数的两个峰具有相同的最大高度，因此在整个水平 L上秩均为 2。但随着 a 变化，峰的高度变得不对称，不再具有相同的最大值，导致同调秩在小于 1 的水平处从 2 变为 1。估计的同调图捕捉到了与解析图相同的特征，误差出现在临界点附近。

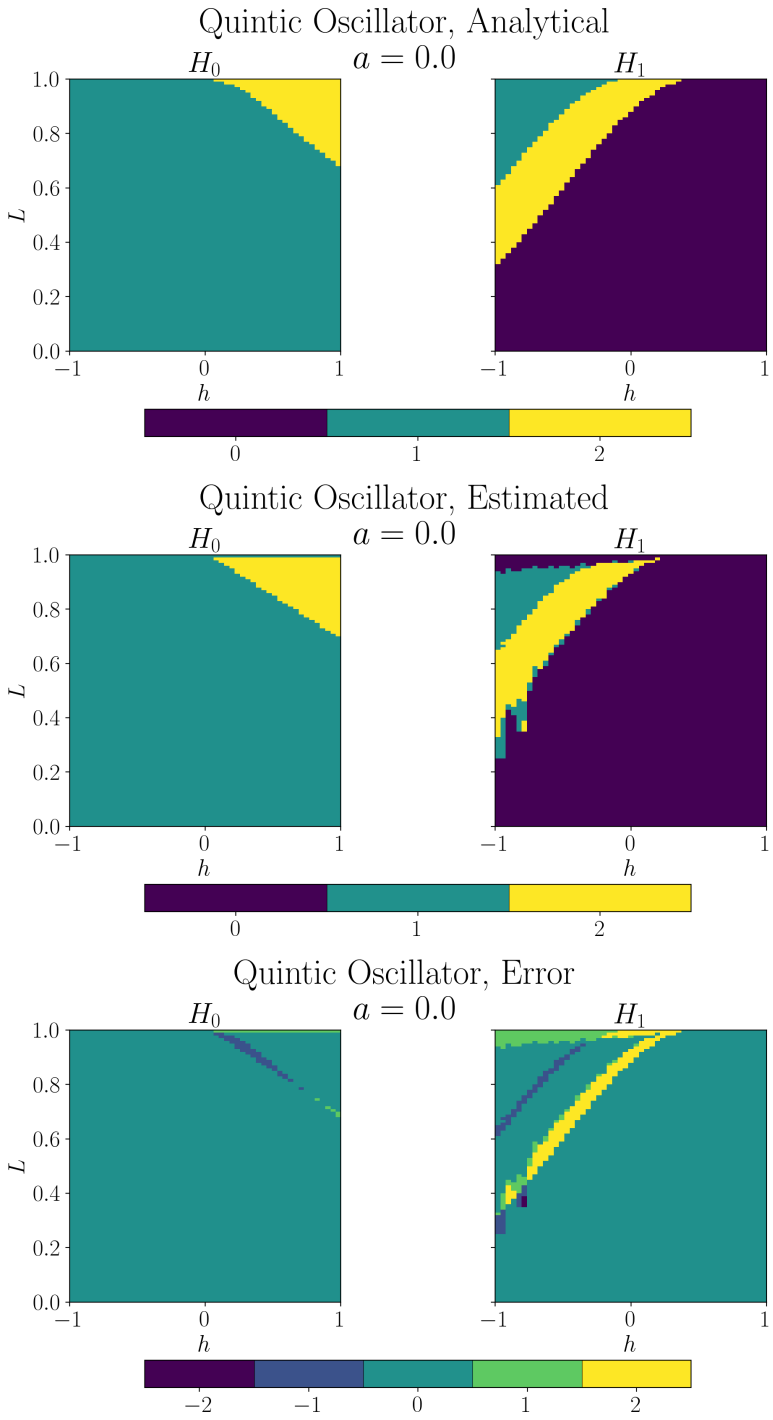

图11：固定 $a = 0$时五次振荡器的解析同调分岔图与估计同调分岔图，以及误差。

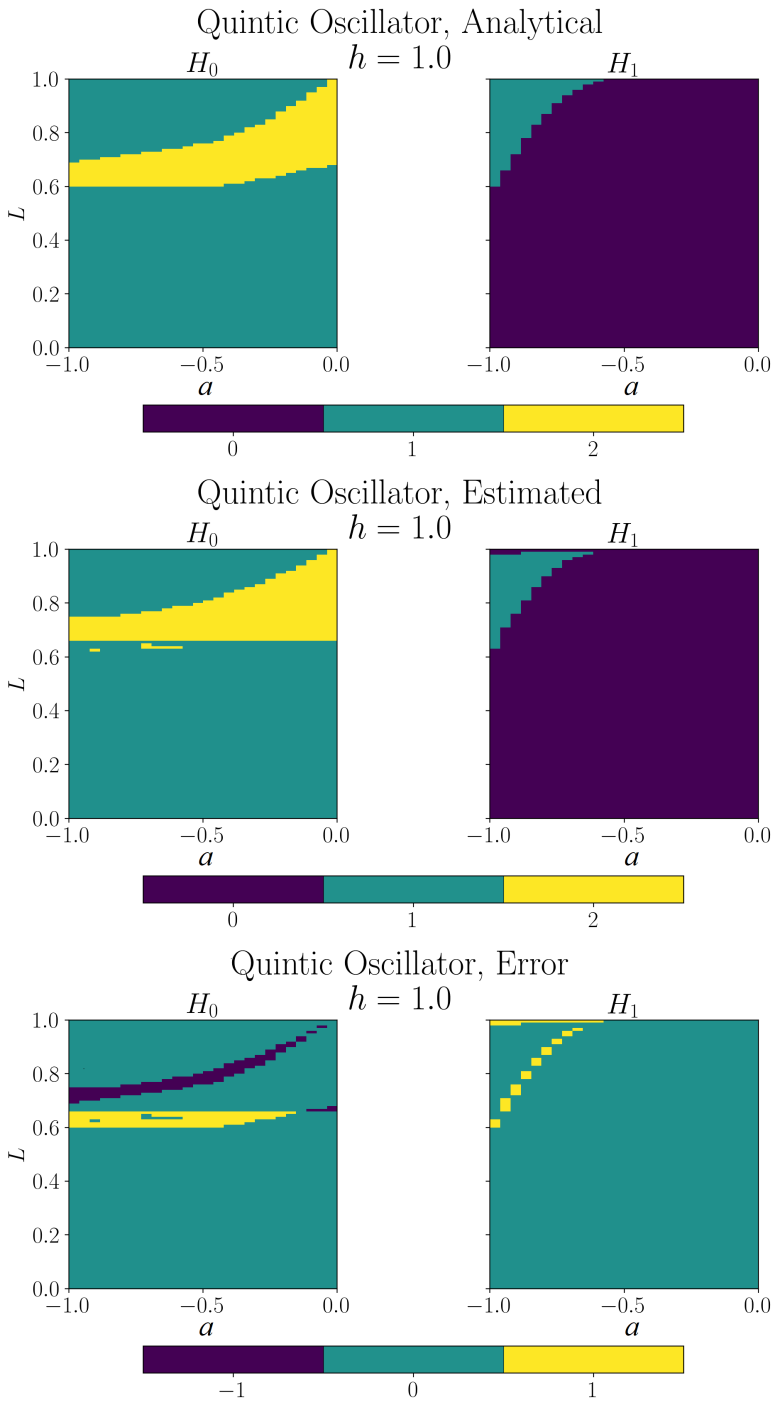

图12： $h = 1$处五次振子的解析同调分岔图和估计同调分岔图，以及误差。

5 结论

随机动力系统在各个不同领域中有着广泛的应用。准确理解、预测和控制这些系统的行为具有极其重要的意义，而分岔（即系统行为发生定性变化）是此类系统的一个关键方面。随机系统中的 P-分岔是指系统响应的联合概率密度函数的拓扑结构发生定性变化，因此，对其进行的分析往往局限于定性方法。

尽管近期已有一些检测 P-分岔的尝试，例如量化概率密度函数中的临界点、统计峰的数量，或计算一系列分岔参数下的香农熵，但所提出的方法和度量缺乏稳健性和广泛适用性。这些方法中，有些仅适用于一维系统；有些则不具备普适性，只适用于特定系统。其余方法无法捕捉更丰富的动力学行为，或依赖于对概率密度函数的目视检查，因此难以估计系统的稳定性界限，也难以将流程自动化。

为解决这些局限，我们提出了一种新工具，利用拓扑数据分析（TDA）中的持久同调来检测定性的 P-分岔并理解系统状态。我们展示了概率密度函数拓扑的变化（即分岔的发生）会导致不同同调类的秩发生突变，因此可以量化分岔的起始，并可通过解析同调分岔图进行细致的可视化。由于随机微分方程很少有解析概率密度函数，我们将这一概念扩展至密度估计，并引入了一种确保解析密度与估计密度之间拓扑一致性的算法。尽管拓扑一致性算法引入了诸如 r 和 ε 之类需要谨慎选择的参数，我们仍证明该方法能够借助估计同调分岔图检测分岔。我们将此方法应用于三种著名的振子：随机杜芬振子、Raleigh Vander-Pol（RVP）和五次振子；它们在各自的分岔区间内均呈现丰富的概率密度函数。我们证明，该方法不仅捕捉到了杜芬振子从单稳态概率密度函数转变为双稳态概率密度函数的过程，以及 RVP 振子中随机极限环的出现，还检测到了五次振子所呈现的复杂倒置双稳态概率密度函数。最后，我们证明，在每种情形下，尽管解析图与估计图之间存在差异，但误差相当可预测，且通常仅出现在拓扑边界上，符合预期。

由于本研究能够获得解析概率密度函数，因此我们事先掌握了每个振荡器案例的真实值，选择 r 和 ε 的最优值相对容易。然而，在实际应用中，这一过程会更难实现，因此未来的工作应着眼于寻找自动估计 r 和 ε最佳取值的方法。还可以探索其他方法，以降低持久图中的噪声，并确保解析密度与估计密度之间的拓扑一致性。最后，本研究始终默认实验数据充足，从而能够生成有意义的密度估计。然而，有时系统可用的样本可能非常有限（例如“大数据”），无法得出统计上可靠的密度估计。因此，未来的工作应致力于为这类难以捉摸的系统开发定量分岔检测技术。

6 致谢

本材料基于空军科学研究办公室资助的研究成果，资助编号为 FA9550-22-1-0007。

参考文献

[1] M. Annunziato 和 A. Borz`ı，《随机过程概率密度函数的最优控制》，《数学建模与分析》，第 15 卷，第 4 期，第 393–407 页，2010 年。

[2] M. Annunziato 和 A. Borzì，《多维随机过程的福克–普朗克控制框架》，计算与应用数学杂志，第 237 卷，第 1 期，第 487–507 页，2013 年。[3] M. Ren、Q. Zhang 和 J. Zhang，《概率密度函数控制入门综述》，系统科学与控制工程，第 7 卷，第 1 期，第 158–170 页，2019年。[4] K. Mamis 和 G. Athanassoulis，《利用一种新的分裂技术和一类新的随机等价系统求解振子的福克–普朗克–科尔莫戈罗夫方程精确平稳解》，概率工程力学，第 45 卷，第 22–30 页，2016年7月。[5] X. Zhao、W. Xu、Y. Yang 和 X. Wang，《加性和乘性随机激励下黏弹性冲击系统的随机响应》，非线性科学与数值模拟通讯，第 35 卷，第 166–176 页，2016年。[6] L. Liu、W. Xu、X. Yue 和 W. Jia，《白噪声激励下具有库仑摩擦的强非线性弹性冲击系统的随机分析》，概率工程力学，第 61 卷，文章编号 103085，2020 年。[7] L. Arnold、C. K. R. T. Jones、K. Mischaikow 和 G. Raugel，动力系统。施普林格柏林海德堡，1995 年。[8] A. Zakharova、T. Vadivasova、V. Anishchenko、A. Koseska 和 J. Kurths，《自持双稳态噪声振荡器中的随机分岔与类相干共振》，《物理评论*E*》，第 81 卷，2010年1月。[9] M. Mendler、J. Falk 和 B. Drossel，《利用相图分析随机分岔》，《公共科学图书馆·综合》，第 13 卷，第 4 期，2018年。[10] J. Falk、M. Mendler 和 B. Drossel，《突发噪声诱导双稳态的最简模型》，《公共科学图书馆·综合》，第 12 卷，文章编号 e0176410，2017年4月。[11]F. Schlogl，《非平衡相变的化学反应模型》，《物理学杂志》，第 253 卷，第 147–161 页，1972年4月。[12] D. Venturi、X. Wan 和 G. E. Karniadakis，《瑞利–贝纳德对流的随机分岔分析》，《流体力学杂志》，第 650 卷，第 391–413 页，2010年4月。[13] L. Liu、W. Xu、X. Yue 和 D. Huang，《实噪声下具有库仑摩擦的强非线性振动冲击系统的随机分岔》，《对称性》，第 11 卷，文章编号 4，2018年12月。[14] C. McInnes、D. Gorman 和 M. Cartmell，《利用非线性随机共振增强振动能量收集》，《声学与振动杂志》，第 318 卷，第 655–662 页，2008年12月。[15] W.-C. Tai，《新型调谐惯容器扭转质量阻尼器在随机运动激励结构无源振动控制中的优化设计》，《振动与声学杂志》，第 142 卷，第 1 期，2020 年。[16] J. Lee 和 J. Lee，《基因调控网络瞬态动力学的定量分析》，《物理评论*E*》，第 98 卷，2018年12月。[17] C. Chiarella、X.-Z. He、D. Wang 和 M. Zheng，《投机性金融市场的随机分岔行为》，《物理学*A*：统计力学及其应用》，第 387 卷，第 3837–3846 页，2008年6月。[18] V. I. Arnold、V. Afrajmovich、Y. S. Il’yashenko 和 L. Shil’nikov，动力系统 *V*：分岔理论与突变理论，第 5 卷。施普林格科学与商业媒体，2013 年。

[19] K. R. Schenk-Hoppe，《受噪声激励的 Duffing–van der Pol 振子的分岔情景》，非线性动力学，第 11 卷，第 255–274 页，1996年11月。[20] J. Yang、M. A. Sanju´an、H. Liu、G. Litak 和 X. Li，《受噪声激励的双稳态分数阶系统中的随机 p-分岔与随机共振》，非线性科学与数值模拟通讯，第 41 卷，第 104–117 页，2016年12月。[21] Y. Yang、W. Xu、Y. Sun 和 Y. Xiao，《随机激励下具有分数阶导数的非线性振动冲击系统中的随机分岔》，非线性科学与数值模拟通讯，第 42 卷，第 62–72 页，2017年1月。[22]L. Arnold、N. S. Namachchivaya 和 K. R. Schenk-Hopp´e，《迈向对随机 Hopf 分岔的理解》，国际分岔与混沌杂志，第 06 卷，第 1947–1975 页，1996年11月。[23] C. Li 和 J. Zhang，《白噪声作用下布鲁塞尔振子系统的随机分岔分析》，差分方程进展，第 2019 卷，第 1 期，第 1–16 页，2019年。[24] Y. Xu、R. Gu、H. Zhang、W. Xu 和 J. Duan，《有色噪声作用下双稳态 Duffing–van der Pol 振子中的随机分岔》，《物理评论*E*》，第 83 卷，第 5 期，2011年。[25] P. Kumar、S. Narayanan 和 S. Gupta，《振动冲击 Duffing–van der Pol 振子中的随机分岔》，非线性动力学，第 85 卷，第 1 期，第 439–452 页，2016年。[26] P. Kumar、S. Narayanan 和 S. Gupta，《采用柔顺接触力模型的随机振动冲击振子的动力学》，《国际非线性力学杂志》，第 144 卷，第 104086 页，2022年。[27] C. Song、H. Phenix、V. Abedi、M. Scott、B. P. Ingalls、M. Kærn 和 T. J. Perkins，《细胞网络随机分岔结构的估计》，《公共科学图书馆计算生物学》，第 6 卷，第 e1000699 页，2010年3月。[28] E. M. Ozbudak、M. Thattai、H. N. Lim、B. I. Shraiman 和 A. van Oudenaarden，《大肠杆菌乳糖利用网络中的多稳态》，《自然》，第 427 卷，第 737–740 页，2004年2月。[29] Y. Xu、R. Gu、H. Zhang、W. Xu 和 J. Duan，《有色噪声作用下双稳态 Duffing–van der Pol 振子中的随机分岔》，《物理评论*E*》，第 83 卷，2011年5月。[30] W. Li、M.-T. Zhang 和 J.-F. Zhao，《有色噪声作用下具有分数阶导数的广义 Duffing–van der Pol 系统的随机分岔》，《中国物理*B*》，第 26 卷，第 090501 页，2017年8月。[31] X. Li、D. Zhao 和 B. Shi，《简化驻波热声系统的相干共振与随机分岔行为》，《美国声学学会杂志》，第 145 卷，第 2 期，第 692–702 页，2019年。[32] S. R. D. Djeundam、R. Yamapi、T. C. Kofane 和 M. A. Aziz-Alaoui，《Hindmarsh-Rose 神经元模型中的确定性与随机分岔》，《混沌：非线性科学跨学科期刊》，第 23 卷，第 033125 页，2013年9月。[33] P. Kumar、S. Narayanan 和 S. Gupta，《受噪声激励的 Duffing–van der Pol 振子的分岔研究》，《概率工程力学》，第 45 卷，第 70–86 页，2016年。[34] J. Venkatramani、S. Sarkar 和 S. Gupta，《通过随机分岔解释俯仰—沉浮气动弹性系统中的间歇性》，非线性动力学，第 92 卷，第 3 期，第 1225–1241 页，2018年。

[35] T. K. Dey 和 Y. Wang，《用于数据分析的计算拓扑》。英国剑桥：剑桥大学出版社，2022年3月。[36] X. Wei、Y. Gui-Dong 和 Y. Xiao-Le，《随机参数激励下 Duffing-Rayleigh 振动冲击系统的 P-分岔》，《物理学报》，第 65 卷，第 21 期，第 210501 页，2016年。[37] G. Cai 和 Y. Lin，《随机激励非线性振子的近似求解新技术》，《国际非线性力学杂志》，第 23 卷，第 5 期，第 409–420 页，1988年。[38] T. Caughey，《非线性振子对随机激励的响应》，《概率工程力学》，第 1 卷，第 1 期，第 2–4 页，1986年。[39] J. Roberts 和 P. Spanos，《随机平均：求解随机振动问题的一种近似方法》，《国际非线性力学杂志》，第 21 卷，第 111–134 页，1986年1月。[40] W. Q. Zhu，《随机振动中随机平均方法的最新进展与应用》，《应用力学评论》，第 49 卷，第 S72–S80 页，1996年10月。[41] M. Kami´nski，《工程计算中的广义随机摄动技术》，数学与计算机建模，第 51 卷，第 3 期，第 272–285 页，2010年。2005年科学与工程计算方法国际会议论文集。[42] F. Bonizzoni 和 F. Nobile，《对数正态渗透率 Darcy 问题的摄动分析》，《*SIAM/ASA*不确定性量化杂志》，第 2 卷，第 1 期，第 223–244 页，2014年。[43] M. M. Williams 和 E. W. Larsen，《空间随机介质中的中子输运：特征值问题》，《核科学与工程》，第 139 卷，第 1 期，第 66–77 页，2001年。[44] S. Hesam、A. Nazemi 和 A. Haghbin，《用微分变换法求解福克-普朗克方程的解析解》，《伊朗科学》，第 19 卷，第 1140–1145 页，2012年8月。[45] C. W. Gardiner，《随机方法手册：物理学、化学与自然科学》，《随机方法手册：物理学、化学与自然科学》，第“伊藤微积分与随机微分方程”章。施普林格，2002年。[46] T. Caughey 和 F. Ma，《一类非线性随机系统的精确稳态解》，《国际非线性力学杂志》，第 17 卷，第 137–142 页，1982年1月。[47] A. Bezen 和 F. Klebaner，《二阶随机微分方程的定常解与稳定性》，《物理学*A*：统计力学及其应用》，第 233 卷，第 809–823 页，1996年12月。[48] Y. Yong 和 Y. K. Lin，《参数及外部白噪声激励下二阶非线性系统的精确稳态响应解》，《应用力学杂志》，第 54 卷，第 414–418 页，1987年6月。[49] S. Y. Oudot，《持久性理论：从箭图表示到数据分析》。数学调查与专著，美国数学会，2015年12月。[50] O. Bobrowski、S. Mukherjee 和 J. E. Taylor，《通过核估计实现拓扑一致性》，《伯努利》，第 23 卷，2017年2月。[51] D. W. Scott，《多变量密度估计》。威利概率与统计丛书，田纳西州纳什维尔：约翰·威立父子公司，1992年8月。[52] N. J. Cavanna、M. Jahanseir 和 D. R. Sheehy，《稀疏滤过的几何视角》，2015年。[53] C. M. Topaz、L. Ziegelmeier 和 T. Halverson，《生物聚集模型的拓扑数据分析》，《公共科学图书馆·综合》，第 10 卷，第 1–26 页，2015年05月。