arXiv:2305.03121v1 [math.FA] 4 May 2023

单调算子和次线性算子的延拓性质

SORIN G. GAL

Abstract. 本文得到了单调算子和次线性算子的若干延拓性质。所得结果推广了关于正算子和线性算子的已知结论。

1. Introduction

近年来，Gal-Niculescu 的论文 [2]–[6] 将函数空间中关于正线性算子的经典Korovkin逼近理论推广到了次线性算子和单调算子的框架。

这自然使我们想到，关于正线性算子的其他结果也可以推广到更一般的单调次线性算子类。

本文旨在拓展关于单调次线性算子 r
延拓性质的研究。尽管证明大多遵循 w
线性情形中的标准证明，但对其进行了调整以适用于次线性情形；在我 y
看来，所得结果是新的，且值得了解。

在第2节中，我们介绍关于单调次线性算子的一些预备知识。第3节讨论单调次线性算子的若干延拓结果，包括Kantorovich型和Hahn-Banach型结果。

2. Preliminaries on sublinear monotone operators

设 E 和 F 为两个有序向量空间。以下概念众所周知。

定义 2.1。（i）若算子 T: $E \to F$ 满足：对于所有 x、$y \in E$ 以及 α、$\beta \in \mathbb{R}$， $T(\alpha x+\beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$，则称其为线性的。此外，若 $x \geq 0$ 蕴含 $T(x) \geq 0$，则称其为正的。

（ii）若对于所有 x、$y \in E$ 以及 $\lambda \geq 0$， T 满足 $T(x+y) \leq T(x) + T(y)$（次可加），且 $T(\lambda x) = \lambda T(x)$（正齐次），则称其为次线性的。此外，若 $x \geq y$ 蕴含 $T(x) \geq T(y)$，则称其为单调的。

显然，对于 T 的单调性和次线性的定义，只需假设 E 和 F 是有序向量空间中的正锥即可。

注 2.1. 任意正线性算子都是单调次线性的，但反之不成立。例如， [2]–[6]中给出了许多非正线性单调次线性算子的具体例子。此外，如果 T 仅正齐次，则 $T(0) = 0$ ；对于线性算子，正性与单调性等价。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 47B65, 47H05, 47H07.*Key words and phrases.* 单调算子、次线性算子、延拓定理、Kantorovich型定理、Hahn-Banach型定理、Choquet积分。

3. Extension properties

首先，为了达到我们的目的，我们回顾一下：Riesz空间（或向量格）是具有如下额外性质的有序向量空间 E：对于每一对向量 x、$y \in E$，集合 $\{x, y\}$ 在 E中都有上确界和下确界。在 Riesz空间中，若 $|x| \wedge |y| = 0$ 成立，则称两个元素 x 和 y 不相交（记作 $x \perp y$）。如果每个非空且有上界的子集都有上确界（或者等价地，每个非空且有下界的子集都有下确界），则称该 Riesz空间为戴德金完备。此外，如果每个有上界的可数子集都有上确界，则称该 Riesz空间为戴德金 σ-完备。

有关线性有序空间的详细内容，请参见 Aliprantis-Burkinshaw [1] 一书第 1 章第 1.1 节。

我们首先介绍 L. V. Kantorovich 基本扩张定理的以下推广，该定理在 [7] 中给出（另见 Aliprantis-Burkinshaw [1]，定理 1.10，第 9 页），原定理是在正线性算子的情形下证明的。

定理 3.1. 假设 E 和 F 是两个里斯空间。还假设 $T: E^+ \to F^+$ 是一个单调次线性映射。那么，$S(x) = T(x^+)$ $x \in E$ 是 T 在 E 上的单调次线性延拓。

证明。由于 $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$，根据 T 的单调性可得 $T((x+y)^+) \leq T(x^+) + T(y^+)$，这立即导致

$$S(x+y) \leq S(x) + S(y),$$

即 S 在 E 上是次可加的。此外，对于 $\alpha \geq 0$，根据 T 的正齐次性，很容易推出 S 也具有正齐次性。

我们现在证明 S 在 E 上是单调的。因此，设 x、$y \in E$ 满足 $y \leq x$。由此可得 $y^+ = y \vee 0 \leq x \vee 0 = x^+$，这意味着 $S(y) = T(y^+) \leq T(x^+) = S(x)$】【。

显然，对于所有 $x \in E^+$，$S(x) = T(x)$，并且对于所有 $x \in E$，$S(x) \geq 0$。 □

注 3.1. 请注意，在 Aliprantis- Burkinshaw [1], 定理 1.10，第 9 页中关于正线性算子的情形下，证明完全不同，其中扩张由 $S(x) = S(x^+) - S(x^-)$ 给出。

作为定理 3.1 的一个应用，下一个结果展示了单调算子和次线性算子的一个有趣的局部逼近性质。

定理 3.2. 设 $T: E \to F$ 是两个带有 F 戴德金 σ-完备性的里斯空间之间的单调次线性算子。那么，对每个 $x \in E^+$，都存在一个单调次线性算子 $S: E \to F$，它取决于 x，使得

$$0 \leq S(y) \leq T(y^+) \text{ for all } y \in E; \qquad S(x) = T(x); \qquad S(y) = 0 \text{ for all } y \perp x.$$

证明。设 $x \in E^+$ 固定。与 Aliprantis-Burkinshaw [1], 第 19–20 页定理 1.22 的证明中一样，我们定义 S：对于固定的 $x \in E^+$，由 $S(y) = \sup\{T(y \wedge nx): n \in \mathbb{N}\}$ 定义的 $E^+ \to F^+$。

（上确界存在，因为 F 是戴德金 σ-完备的，且序列 $T(y \wedge nx)$ 在 F 中被 $T(y)$ 从上方有界。）

我们声称 S 是次可加的。为此，设 y、$z \in E^+$。由 $(y+z) \wedge nx \leq y \wedge nx + z \wedge nx$，我们得到

$$T((y+z) \wedge nx) \leq T(y \wedge nx) + T(z \wedge nx),$$

这通过在 $n \in \mathbb{N}$ 后取上确界，立即推出 $S(y+z) \leq S(y) + S(z)$。

于是，对于 $\lambda \geq 0$，我们得到

$$S(\lambda y) = \sup\{T(\lambda y \wedge nx); n \in \mathbb{N}\} = \lambda \sup\{T(y + \frac{n}{\lambda}x); n \in \mathbb{N}\}.$$

但对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $m \in \mathbb{N}$，使得$\frac{n}{\lambda} \leq m$，这意味着 $y+\frac{n}{\lambda}x \leq y+mx$，$T(y + \frac{n}{\lambda}x) \leq T(y + mx)$，$\sup\{T(y + \frac{n}{\lambda}x);\ n \in \mathbb{N}\} = \sup\{T(y + mx);\ m \in \mathbb{N}\}$，因此我们立即得到 $S(\lambda y) = \lambda S(y)$。

现在，若 $y_1 \leq y_2$，由 T 的单调性，很容易推出 $S(y_1) \leq S(y_2)$，也就是说，S 也是单调的。

由定理 3.1，映射 S 可扩张到 E 上，成为一个单调次线性算子。

最后，还需证明陈述末尾关于 S 的性质。事实上，根据 S的定义公式，由于 $y \wedge nx \leq y$，很容易得出，对所有 $y \in E^+$，都有$0 \leq S \leq T$。此外，由于对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $x \wedge nx = x$，立即可得 $S(x) = T(x)$。此外，若 $y \perp x$，则可得 $y \wedge nx = 0$，因此 $S(y) = 0$。□

注 3.2. 定理 3.2 是 [1] 中定理 1.22 的推广，适用于正线性算子。

下面我们将为次线性算子证明经典线性算子 Hahn-Banach 定理的一个变体。

定理 3.3. 设 X 为实向量空间，$Y \subset X$ 为 X 的向量子空间，F 为戴德金完备 Riesz 空间，$S: Y \to F$ 为 Y 上的次线性算子，且 $p: X \to F$ 为 X 上的次线性算子，使得对于所有 $u \in Y$，$S(u) \leq p(u)$。则存在 $T: X \to F$，使得对于所有 $y \in Y$，$T(y) = S(y)$，T 在 X 上是次线性的，并且对于所有 $x \in X$，$T(x) \leq p(x)$。

证明。该证明与线性情形中的证明略有不同。因此，对于固定的$x \in X \setminus Y$，定义 Z 为 Y和 $\mathbb{R}_- x$的直和，即 $Z = \{z = y + \lambda x;\ y \in Y,\ \lambda \leq 0\}$。显然，$Z$ 是 X中的一个锥。

首先我们证明存在 $T: Z \to F$，使得 T在 Z 上是次线性的，并且对所有 $z \in Z$，$T(z) \leq p(z)$。为此，对于任意 $u \in Y$，根据假设可得 $S(u) \leq p(u) \leq p(u - x) + p(x)$，这意味着 $S(u) - p(u - x) \leq p(x)\ u \in Y$。

因此，对左边关于 u 取上确界，记为 m，可得 $m \leq p(x)$。对于固定的 $c \in [m, p(x)]$，定义 $T(z) = T(y + \lambda x) = S(y) + \lambda c,\lambda \leq 0$。

显然，$Y \subset Z$，且对所有 $y \in Y$，$T(y) = S(y)$。于是，

$$T(z_1 + z_2) = T(y_1 + y_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)x) = S(y_1 + y_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)c$$

$$\leq S(y_1) + S(y_2) + \lambda_1 c + \lambda_2 c = T(z_1) + T(z_2),$$

这表明 T 在 Z上是次可加的。

此外，对于任意满足 $\lambda \leq 0$ 的 $\alpha \in \mathbb{R}_+$ 和 $z = y + \lambda x$，可得

$$T(\alpha z) = T(\alpha y + \alpha\lambda x) = S(\alpha y) + \alpha\lambda c = \alpha(S(y) + \lambda c) = \alpha T(z),$$

这表明 T 在 Z 上是正齐次的。

接下来我们证明，对于所有满足 $\lambda < 0$ 的 $z = u + \lambda x \in Z$，$T(z) \leq p(z)$。

根据 c 的定义，我们得到，对于所有 $u \in Y$，$S(u) - p(u - x) \leq c \leq p(x)$。对于 $\lambda < 0$，在左侧将 u 替换为 $-\lambda^{-1}u$，得到

$$c \geq S(-\lambda^{-1}u) - p(-\lambda^{-1}(u + \lambda x)) = -\lambda^{-1}(S(u) - p(u + \lambda x)),$$

这立即意味着 $T(z) \leq p(z)$。

最后，按照经典线性情形中的标准做法应用佐恩引理，可保证存在一个具有所需性质的 S 到 X 的扩张。

事实上，将所有 T 的集合记为 $\mathcal{F}$： $Z \to F$； Y 是 Z 的子空间， T 在 Z 上是次线性的， $T(z) = S(z)$ $z \in Y$， $T(z) \leq p(z)$ $z \in Z$。

如果我们在 $\mathcal{F}$ 上定义序关系 $T_1, T_2 \in \mathcal{F}$, $T_1 \leq T_2$ 当且仅当 T_2 是 T_1 的扩张，那么 $(\mathcal{F}, \leq)$ 是偏序集。根据佐恩引理，它有一个极大元，记作 T^*: $Y^* \to F$。这里有 $Y^* = X$，因为如果假设存在 $x \in X \setminus Y^*$，根据前面的推理，存在 T^{**}: $Z^* \to F$，满足 $Z^* = Y^* + \mathbb{R}_- x$，使得对所有 $z \in Z^*$， $T^{**}(z) = T^*(z)$。但是由于 $T^{**} \in \mathcal{F}$，可得 $T^* \leq T^{**}$；由 T^* 的极大性可知，事实上 $T^* = T^{**}$，因此 $Y^* = Z^*$，即 $x \in Y^*$，这就产生了矛盾。□

注 3.3. 若 S 是线性的，则该结果由 [1]中的定理 1.25 得到。

作为定理 3.3 的推论，我们得到以下关于单调/正次线性算子的哈恩-巴拿赫型定理。

定理 3.4. 设 T: $E \to F$ 是两个 Riesz空间之间的正次线性算子，其中 F 戴德金完备。再假设 G 是 E 的 Riesz子空间，且 S: $G \to F$ 是满足对所有 x 属于 G^+，有 $0 \leq S(x) \leq T(x)$ 的单调次线性算子。那么， S 可以扩张为正次线性算子 Q: $E \to F$，使得对所有 $x \in E^+$，都有 $0 \leq Q(x) \leq T(x)$。

证明. 与线性情形一样，定义 p: $E \to F$，使其满足 $p(x) = T(x^+)$，并首先注意到 p 是次线性的。事实上，这由对所有 x、 $y \in E$ 和 $\lambda \geq 0$, $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$ 以及 $(\lambda x)^+ = \lambda x^+$立即可得。此外，由于 $x \leq x^+$，对所有 $x \in G$，我们有

$$S(x) = S(x^+ - x^-) \leq S(x^+) \leq T(x^+) = p(x).$$

因此，根据定理 3.3，存在一个将 S 延拓到整个 E 上的次线性延拓（记为 Q），满足 $Q(x) \leq p(x)$，对所有 $x \in E$ 均成立。

由 $0 = Q(x - x) \leq Q(x) + Q(-x)$，可得 $-Q(x) \leq Q(-x)$，并且对于$x \in E^+$，我们得到

$$-Q(x) \leq Q(-x) \leq p(-x) = T((-x)^+) = T(0) = 0$$

因此，对所有 $x \in E^+$， $0 \leq Q(x) \leq p(x) = T(x)$ 均成立，正如所需。 □

注 3.4。定理 3.4 是 [1], 第 24 页中定理 1.26 的推广。

现在回顾一下，如果存在 m、 $M \in E$，使得对所有 $x \in A$，都有 $m \leq x \leq M$，则称里斯空间 E 的子集 A 是序有界的。此外，如果算子T： $E \to F$ 将 E 的序有界子集映射为 F的序有界子集，则称两个里斯空间之间的该算子是序有界的。

定理 3.5. 设 E 和 F 是里斯空间，其中 F 戴德金完备， G 是 E 的 Riesz子空间，且 T: $G \to F$ 是单调次线性算子。则对于以下命题

(1) T 可扩张为一个从 E 到 F的单调次线性算子。(2) T 可扩张为一个从 E 到 F的序有界次线性单调算子 S。(3) 存在一个单调次线性映射 p: $E \to F$，满足对于所有 $x \in G$., 均有 $T(x) \leq p(x)$。(4) T 可扩张为一个从 E 到 F的正次线性算子。以下蕴含关系成立：(1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4)。证明。(1) $\Longrightarrow$(2)。这是显而易见的。

(2) $\Longrightarrow$(3)。设 S 是一个序有界的次线性单调算子，满足 $S(x) = T(x)$，对所有 $x \in G$ 均成立。则映射 p: $E \to F$ 定义为 $p(x) = |S(x^+)|$

是单调的、次线性的，并且满足

$$T(x) \le T(x^+) = S(x^+) \le |S(x^+)| = p(x),$$

对所有 $x \in G$。

(3) $\Longrightarrow$ (4)。令 $p: E \to F$ 为满足以下条件的单调次线性映射：对所有 $x \in G$, $T(x) \le p(x)$。则公式 $q(x) = p(x^+)$ 定义了一个从 E 到 F 的次线性映射，并且有

$$T(x) \le T(x^+) \le p(x^+) = q(x),$$

对所有 $x \in G$。因此，根据 Hahn-Banach延拓定理3.3，存在 T 在 E上的一个次线性延拓 R，满足对所有 $x \in E$, $R(x) \le q(x)$。特别地，若 $x \in E^+$，则由关系式 $0 = R(x-x) \le R(x) + R(-x)$，可得

$$-R(x) \le R(-x) \le q(-x) = (p(-x)^+) = p(0) = 0,$$

这意味着 $R(x) \ge 0$。也就是说， R 是 T 在 E上的一个正次线性延拓，证明完毕。□

注3.5。若上述定理中的 T 是正线性算子，则我们重新得到 Aliprantis-Burkinshaw 中的定理1.27 [1]。

Riesz空间的子集 A 称为实的，只要 $|x| \le |y|$ 和 $y \in A$ 蕴含 $x \in A$。Riesz空间的实向量子空间称为理想。由格恒等式 $x \vee y = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$，立即可得每个理想都是 Riesz子空间。

下面的结果讨论单调次线性算子在理想上的限制。

定理 3.6. 若 $T: E \to F$ 是两个 Riesz空间之间的单调次线性算子，且 F 戴德金完备，那么对 E 的每个理想 A，公式

$$T_A(x) = \sup\{T(y) : y \in A \text{ and } 0 \le y \le x\}, x \in E^+,$$

定义了一个从 E 到 F 的单调次线性算子（其在 E 上的延拓也记作 T_A，并由定理 3.1 保证存在）。此外，我们有：

(a) 对所有 $y \in E$, $0 \le T_A(y) \le T(y^+)$。 (b) $T_A = T$ 在 A 上且 $T_A = 0$ 在 A^d 上：$= \{x \in E; x \perp y$ 对所有 $y \in A\}$。 (c) 若 B 是另一个理想，且 $A \subset B$，则 $T_A \le T_B$ 成立。

证明。根据定理 3.1，我们需要证明 T_A 在 E^+ 上是单调且次线性的。单调性直接由 T_A 的定义得出。

还需证明 E^+ 上的次线性性。为此，首先容易看出，

$$T_A(x) = \sup\{T(x \wedge y); y \in A^+\}$$

对所有 $x \in E^+$ 均成立。

设 x、$y \in E^+$。若 $z \in A^+$，则不等式

$$(x+y) \wedge z \le x \wedge z + y \wedge z$$

意味着

$$T((x+y) \wedge z) \le T(x \wedge z) + T(y \wedge z) \le T_A(x) + T_A(y),$$

因此，得出。

$$T_A(x+y) \le T_A(x) + T_A(y),$$

这就是次可加性。

现在，由于对于 $\lambda > 0$ 和 $y \in A^+$，我们有 $\frac{y}{\lambda} \in A^+$，因此立即得到

$$T_A(\lambda x) = \sup\{T(\lambda x \wedge y); y \in A^+\} = \lambda \sup\{T(x \wedge \frac{y}{\lambda}); y \in A^+\}$$

$$= \lambda \sup\{T(x \wedge y); y \in A^+\} = \lambda T_A(x),$$

这表明 T_A 也是正齐次的。

现在，性质 (*a*) –(*b*) 是定理 3.2 的直接推论，而性质 (c) 则是由定义 T_A 的公式直接得到的。□

注 3.6。定理 3.6 推广了 [1] 第 25–26 页的定理 1.28。

下文称有序向量空间E 中的向量子空间 G 为主导的 E，如果对于每个 $x \in E$，都存在某个 $y \in G$ 满足 $x \leq y$ （或者等价地，对于每个 $x \in E$，都存在某个 $y \in G$ 满足 $y \leq x$）。

定理 3.7。设 E 和 F 是两个有序向量空间，其中 F 是一个 Dedekind 完备 Riesz 空间。若 G 是 E 的一个主导向量子空间，且 $T\colon G \to F$ 是一个单调次线性算子，则 T 存在一个定义于整个E上的正次线性延拓。

证明。固定 $x \in E$，并令 $y \in G$ 满足 $x \leq y$。由于 G 是主导的，因此存在一个向量 $u \in G$，使得 $u \leq x$。因此，$u \leq y$，且 T 的单调性意味着，对于所有满足 $x \leq y$ 的 $y \in G$，均有 $T(u) \leq T(y)$。特别地，由此可知，对于每个 $x \in E$，$\inf\{T(y)\colon y \in G$ 和 $x \leq y\}$ 存在于 F 中，因此我们可以通过以下公式定义映射 $p\colon E \to F$。

$$p(x) = \inf\{T(y) : y \in G \text{ and } x \leq y\}, x \in E.$$

对于每个 $x \in G$，我们有 $p(x) = T(x)$。然后，对于 $\lambda > 0$，我们得到

$$p(\lambda x) = \inf\{T(y); y \in G \text{ and } \lambda x \leq y\} = \inf\{T(\lambda \cdot y/\lambda); y \in G \text{ and } x \leq y/\lambda\}$$

$$= \lambda \inf\{T(y/\lambda); y \in G \text{ and } x \leq y/\lambda\} = \lambda p(x).$$

此外，令 x_1 和 x_2 为 E 中任意元素。那么对于任意满足 $x_1 \leq y_1$ 和 $x_2 \leq y_2$ 的 y_1、$y_2 \in G$，我们有 $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$，因此

$$p(x_1 + x_2) \leq T(y_1 + y_2) \leq T(y_1) + T(y_2).$$

依次对 y_1 和 y_2 取下确界，可得 $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$，即 p 是次线性的。

现在，由定理 3.3，算子 T 有一个定义在 E上的次线性延拓 S，满足 $S(z) \leq p(z)$ 对所有 $z \in E$ 均成立。若 $z \in E^+$，则 $-z \leq 0$，因此由 $0 = S(z - z) \leq S(z) + S(-z)$ 可得

$$-S(z) \leq S(-z) \leq p(-z) \leq T(0) = 0,$$

并且我们看到 $S(z) \geq 0$。这表明 S 是 T在 E上的正次线性延拓。□

注 3.7。定理 3.7 推广了 [1] 中的定理 1.32（另见 Kantorovich[8]）。

现在，对于单调次线性算子 $T\colon G \to F$，其中 G 是有序向量空间 E 的向量子空间，且 F 是 Dedekind 完备 Riesz 空间，我们用 $\mathcal{E}_{sub}(T)$ 表示 T 在E上的所有单调次线性延拓所构成的集合。即，

$$\mathcal{E}_{sub}(T) := \{S \text{ monotone, sublinear and } S = T \text{ on } G\}.$$

显然，集合 $\mathcal{E}_{sub}(T)$ 是一个凸子集，也就是说，对于所有 S、$R \in \mathcal{E}_{sub}(T)$ 以及所有 $\lambda \in [0,1]$，$\lambda S + (1-\lambda)R \in \mathcal{E}_{sub}(T)$。

下文将证明，任何定义域为理想且可延拓的单调次线性算子都有一个最小延拓。

定理 3.8. 设 E 和 F 是两个 Riesz空间，其中 F 戴德金完备；设 A 是 E 的一个理想，且 $T:\ A \to F$ 是一个单调次线性算子。若 $\mathcal{E}_{sub}(T) \neq \emptyset$，则 T 有一个最小延拓。此外，在此情形下，若 $S = \min \mathcal{E}_{sub}(T)$，则

$$S(x) = \sup\{T(y) : y \in A \text{ and } 0 \leq y \leq x\}, \text{ for all } x \in E^+.$$

证明。由于 $\mathcal{E}_{sub}(T) \neq \emptyset$, T 至少有一个单调且次线性的扩展，公式

$$T_A(x) = \sup\{T(y) : y \in A \text{ and } 0 \leq y \leq x\},$$

$x \in E^+$ 根据定理 3.6 可扩张为一个从 E 到 F的单调次线性算子（此处仍记为 T_A），满足 $T_A = T$ 在 A上成立，因此 $T_A \in \mathcal{E}_{sub}(T)$。现在，若 $S \in \mathcal{E}_{sub}(T)$，则 $S = T$ 在 A 上成立，从而 $T_A = S_A \leq S$。因此，所需的 $T_A = \min \mathcal{E}_{sub}(T)$ 成立。□

注 3.8。定理 3.8 推广了 [1] 第 27 页的定理 1.30。

在下文中，请回顾：凸集 C 的向量 e 称为 C 的极点，若 $e = \lambda x + (1-\lambda)y$，其中 x、$y \in C$ 且 $0 < \lambda < 1$，则有 $x = y = e$。

定理 3.9. 设 E 和 F 为两个 Riesz空间，其中 F 戴德金完备， G 是 E 的向量子空间，且 $T:\ G \to F$ 是一个单调次线性算子。

若 $S \in \mathcal{E}_{sub}(T)$ 满足以下条件：对所有 $x \in E$，都有 $\inf\{S(|x-y|);\ y \in G\} = 0$，则 S 是 $\mathcal{E}_{sub}(T)$ 的极点。

证明。设 $S \in \mathcal{E}_{sub}(T)$ 满足假设，并假设 $S = \lambda Q + (1-\lambda)R$，其中 Q、$R \in \mathcal{E}_{sub}(T)$ 且 $0 < \lambda < 1$。那么，对每个 x，都有 $y \in E$

$$|Q(x) - Q(y)| \leq Q(|x-y|) = (\frac{1}{\lambda}S - \frac{1-\lambda}{\lambda}R)(|x-y|) \leq \frac{1}{\lambda}S(|x-y|).$$

这里，不等式 $|Q(x) - Q(y)| \leq Q(|x-y|)$ 是将 Q 的单调性应用于不等式 $x - y \leq |x-y|$ 和 $y - x \leq |x-y|$ 后立即得到的。

特别地，如果 $x \in E$ 和 $y \in G$，那么由 $S(y) = Q(y) = T(y)$ 可得

$$|S(x) - Q(x)| \leq |S(x) - S(y)| + |Q(y) - Q(x)| \leq (1 + 1/\lambda)S(|x-y|).$$

考虑到我们的假设，最后一个不等式得出，对于每个$x \in E$， $S(x) = Q(x)$，这表明 S 是 $\mathcal{E}_{sub}(T)$的一个极点。□

注 3.9. 对于正线性算子，逆命题也成立，参见 Lipecki-Plachky-Thomsen [9] （另见 [1] 第 27 页的定理 1.31 ）。

致谢。作者感谢 Constantin P. Niculescu 就定理 3.7 的证明进行了有益的讨论。

References

[1] Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O.：《正算子》。Springer，多德雷赫特（2006）。[2] Gal, S. G., Niculescu, C.P.：科罗夫金定理的非线性扩展。地中海数学杂志 17，文章编号 145（2020），14 页。[3] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：与向量容量相关的肖凯算子。数学分析与应用杂志 500，文章编号 125153 （ 2021 ），24 页。[4] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：关于肖凯型算子的一则注记。数学等式 95，433 447 2021–（）。[5] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：科罗夫金抽象定理的非线性版本。西班牙皇家精确、物理与自然科学学会杂志 A辑数学 116，文章编号 68（2022）[6] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：弱非线性单调算子的科罗夫金型定理。地中海数学杂志 20，文章编号 56（2023），20 页。[7] Kantorovich, L.V.：半序空间中的线性算子，数学文集，209–284（1940）

[8] Kantorovich, L.V.: 《有限区间上的矩问题》，苏联科学院学报，14，531–537（1937）[9] Lipecki, Z.、Plachky, D.、Thomsen, W：《正算子的扩张与极点 I》，《数学讨论》42，279–284（1979）。Department of Mathematics and Computer Science, University of Oradea, Univer-sity Street No. 1, Oradea, 410087, Romania*Email address*: galso@uoradea.ro, galsorin23@gmail.com