arXiv:2305.03131v1 [math.DG] 4 May 2023

Courant-Nijenhuis 代数丛

Henrique Bursztyn、Thiago Drummond 和 Clarice Netto

Abstract. 我们引入了Courant 1-导子，用以描述Courant代数丛与线性(1,1)型张量场之间的相容性，并由此导出Courant-Nijenhuis代数丛的概念。我们给出了正合Courant代数丛上的Courant 1-导子的例子，并证明全纯Courant代数丛可以视为Courant-Nijenhuis代数丛的一种特殊类型。通过考虑Dirac 结构，我们重新获得了 [5]中的Dirac-Nijenhuis结构（在标准Courant代数丛这一特殊情形下），并通过Manin三元组得到了Lie-Nijenhuis双代数丛 [9] 的一种等价描述。

Contents

1. 引言 1 2. 向量丛上的1-导子 3 2.1. 与线性(1,1)张量场的等价性 3 2.2. Nijenhuis条件 4 2.3. 对偶性 5 2.4. 与（预）Lie代数丛的相容性 6 3. Courant代数丛上的1-导子 8 3.1. Courant 1-导子与Courant-Nijenhuis代数丛 8 3.2. 不变Dirac结构 10 4. $TM \oplus T^*M$ 11上的Courant 1-导子4.1. 由伪黎曼度量得到的Courant 1-导子 11 4.2. Nijenhuis 1-导子与K¨ahler条件 13 4.3. B场变换 15 5. 全纯 Courant 代数丛 16 6. 拉格朗日分裂与双体 19 6.1. Courant 代数丛的拉格朗日分裂 19 6.2. Courant 1-导子的拉格朗日分裂 20 参考文献 22

1. 引言

向量丛 $E \to M$ 上的 1-导子是一种联络型对象，它以与向量丛的通常导子对应于线性向量场相同的方式，表征了 E 全空间上的线性(1,1)型张量场。事实证明，Poisson 几何中涉及各种重要结构的许多相容性条件，都可以方便地用这类 1-导子来表达；在此背景下，“Nijenhuis 1-导子”发挥着特殊作用，即其对应的线性(1,1)型张量场的 Nijenhuis 挠率为零的 1-导子。

一个有启发性的例子是 Poisson-Nijenhuis 结构 [21], ，它最初是通过一种复杂的相容性概念来表述的，涉及泊松结构与 Nijenhuis 算子（其中包括所谓的 Magri-Morosi伴随量消失）。根据近期

的观点， [4, 9], 这可以理解如下：流形 M 上的 Nijenhuis 算子 r 自然会在 TM 上诱导一个 1-导子，并在 T^*M 上诱导一个对偶的 1-导子；而 r 与泊松双向量场 π 相容，只需满足 $\pi^\sharp$: $TM \to T^*M$ 交织这些 1-导子。这一视角为各种推广铺平了道路，例如

(a) Dirac-Nijenhuis 结构 [5],(b)
Lie-Nijenhuis 双拟胚代数 [9].

正如泊松结构既是 Dirac 结构也是李双代数丛的特例一样， [8, 19], Poisson-Nijenhuis 结构也是（a）和（b）中对象的特殊情形。本文进一步迈出一步，引入与之密切相关的 Courant-Nijenhuis 代数丛这一概念。

Dirac-Nijenhuis 结构和 Lie-Nijenhuis 双拟胚代数受到 Lie 群胚理论的启发，因为它们分别作为预辛-Nijenhuis 群胚和 Poisson-Nijenhuis 群胚的无穷小对应物出现，从而推广了 Poisson-Nijenhuis 结构与辛-Nijenhuis群胚之间的对应关系，参见 [27], see [5, 9]。全纯结构提供了一类重要的实例。任意全纯向量丛都可以视为配备了一种特殊类型的 Nijenhuis 1-导子的光滑实向量丛，我们称之为“Dolbeault 1-导子”。在这一特定背景下，(a) 和 (b) 分别恢复了全纯Dirac结构和全纯Lie双代数丛，而它们的积分化分别对应于全纯预辛群胚和全纯泊松群胚。

Courant代数丛是Dirac结构和李双代数丛理论中的核心要素。本文主要研究1-导子与Courant代数丛之间的一种相容性概念，它在定义 3.3中通过我们称为Courant 1-导子的对象加以描述。配备了同时满足Nijenhuis条件的Courant 1-导子的Courant代数丛称为 Courant-Nijenhuis 代数丛。其中的Dirac结构推广了 [5] 的Dirac-Nijenhuis 结构，并通过 Manin三元组为 [9] 的Lie-Nijenhuis双代数丛提供了一种替代方法。

本文结构如下。在 § 2 中，我们回顾向量丛上的1-导子、其主要例子和性质，包括对偶性概念、Nijenhuis条件，以及它们与（预）李代数丛结构的相容性。在 § 3中，我们引入 Courant 1-导子和Courant-Nijenhuis 代数丛，并讨论其Dirac结构。作为一个基本例子，我们证明流形 M 上的任意(1,1)型张量场都能在标准Courant代数丛 $\mathbb{T}M = TM \oplus T^*M$ 上自然地定义一个Courant 1-导子，而该代数丛是 [5]所研究的Dirac-Nijenhuis结构的基础。在 § 4 中，我们考察 $\mathbb{T}M$ 上更一般的Courant 1-导子，包括一类通过额外选取一个（伪）黎曼度量得到的例子；在此情形下，我们证明Nijenhuis条件与K¨ahler相容条件有关（命题4.5）。在 § 5 中，我们证明（定理5.3），由Dolbeault 1-导子定义的Courant-Nijenhuis代数丛与全纯 Courant代数丛一致。在 § 6 中，我们考察配备Courant 1-导子的Courant代数丛的拉格朗日分裂（定理 6.1）。我们特别证明，Lie-Nijenhuis 双拟胚代数的Drinfeld双是一个 Courant-Nijenhuis 代数丛，从而确立了Lie-Nijenhuis双代数丛与配备由Dirac-Nijenhuis结构给出的分裂的Courant-Nijenhuis代数丛之间的等价性。

注 1.1. 文献中的其他研究也涉及 Nijenhuis 结构和 Courant代数丛，但研究方向有所不同。多位作者研究了 Courant代数丛上的 Nijenhuis张量 [7, 10, 15], ，并将其应用于几何结构的变形、层级和兼容性，参见例如 [1, 2]。这些论文关注的基本对象是向量丛自同态 N : $E \to E$ 其 Nijenhuis挠率为零，其中 E是一个 Courant代数丛，Nijenhuis挠率是相对于 Courant括号定义的。相比之下，本文研究的是全空间 E 上的一个（通常的）线性 Nijenhuis算子 K: $TE \to TE$ 与 E上的 Courant结构之间的兼容性概念。

致谢。本项目部分由 CNPq（国家科学技术发展委员会）、FAPERJ（里约热内卢州研究基金会）以及 FAPESP（圣保罗州研究基金会）的资助项目 ♯ 2022/06205-2 资助。

2. 1-Derivations on vector bundles

本文的核心内容之一是向量丛上的 1-导子，因此我们先简要回顾其定义和基本性质。

设 $p: E \to M$ 是一个光滑实向量丛。$E \to M$ 上的一个 1-导子是一个三元组 $\mathcal{D} = (D, l, r)$，其中 $r: TM \to TM$ 和 $l: E \to E$ 是覆盖恒等映射的向量丛映射，而 $D: \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ 是一个 $\mathbb{R}$-线性映射，满足以下 Leibniz 型条件：

$$D_X(f\sigma) = f D_X(\sigma) + (\mathcal{L}_X f)\, l(\sigma) - (\mathcal{L}_{r(X)} f)\, \sigma, \tag{2.1}$$

其中 $X \in \mathfrak{X}(M)$、$\sigma \in \Gamma(E)$ 和 $f \in C^\infty(M)$，并且我们采用如下记号

$$D_X : \Gamma(E) \to \Gamma(E), \qquad D_X(\sigma) = i_X(D(\sigma)).$$

注意 t 1-导子的线性组合（按分量定义）是一个 1-导子。 n.

设 $F \subseteq E$ 是一个子丛（为简便起见，定义在同一底空间上）。

定义 2.1. 如果 F 是 $\mathcal{D}$ 不变的，则称 F 具有 $\mathcal{D}$-不变性。

- $l(F) \subseteq F$,
- $D_X(\Gamma(F)) \subseteq \Gamma(F), \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$

当 F 是 $\mathcal{D}$-不变的时，$\mathcal{D}$ 限制为 F 上的一个 1-导子，

$$(D|_{\Gamma(F)}, l|_F, r).$$

2.1. 与线性(1,1)型张量场的等价性。正如向量丛 $E \to M$ 上的通常导子与 E 上的线性向量场等价（参见例如 [20]），1-导子与线性 (1,1) 型张量场之间存在一一对应关系，参见 [4, § 6.1] 和 [5, § 2.1]。

令 $K \in \Omega^1(E, TE)$，即 K 是全空间 E 上的一个 (1,1)型张量场，我们将其视为一个向量丛态射 $K: TE \to TE$。若 K 是线性的，即 $K: TE \to TE$ 也是一个从切丛延拓丛 $TE \to TM$ 到其自身的向量丛态射（不一定覆盖 TM 上的恒等映射），则称 K 为线性的。线性 (1,1) 型张量场构成 $\Omega^1(E, TE)$ 的一个线性子空间。读者可以在 [4], 中找到关于线性张量的详细论述，本节所述结果也见于其中。

任意线性(1,1)型张量场 $K: TE \to TE$ 由此在 E 上产生一个1-导子 $\mathcal{D} = (D, l, r)$，如下所示：$r: TM \to TM$ 是将 $K|_M$ 限制在与零截面相切的向量上，$l: E \to E$ 是将 $K|_M$ 限制在与 p-纤维相切的向量上，而 $D: \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ 是由以下定义的 $\mathbb{R}$-线性映射

$$D_X(\sigma) = (\mathcal{L}_{\sigma^\uparrow} K)(X), \qquad \sigma \in \Gamma(E),\ X \in TM,$$

其中，$\sigma^\uparrow \in \mathfrak{X}(E)$ 是 $\sigma \in \Gamma(E)$ 的垂直提升，由 $\sigma^\uparrow(e) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} e + t\,\sigma(p(e))$ 给出。该对应关系在具有自然函子性质的线性 (1,1) 型张量场与E 上的 1-导子之间建立了一个线性双射，参见 [5, 定理 2.1]。一个直接推论是，子丛 $(F \to M) \subset (E \to M)$ 是 $\mathcal{D}$-不变的，当且仅当它在相应的线性 (1,1) 型张量场 K的作用下保持不变。

$$K(TF) \subseteq TF.$$

下面举几个例子。

例 2.2（联络）。∇ 上的联络 E 定义了一个 1-导子，其满足 $r = 0, l = \mathrm{id}_E$和 $D = \nabla$。相应的线性 (1,1)型张量场 $K: TE \to TE$ 是垂直丛 $\ker(Tp) \subseteq TE$ 沿着由 ∇定义的水平丛的投影算子。$\diamond$

例 2.3（切丛提升与余切丛提升）。给定 M上的一个(1,1)型张量 r: $TM \to TM$，其切丛提升 r^{tg}: $T(TM) \to T(TM)$ 和余切丛提升 r^{ctg}: $T(T^*M) \to T(T^*M)$ 分别是定义在 TM和 T^*M上的线性 (1,1) 型张量场，定义如下:

$$r^{tg} = \Theta \circ Tr \circ \Theta, \qquad (\omega_{can})^\flat \circ r^{ctg} = (\varphi_r^* \omega_{can})^\flat,$$

其中， Θ: $T(TM) \to T(TM)$ 是双切丛 $T(TM)$ 的典范对合，ω_{can}是 T^*M 上的典范辛形式，而 φ_r: $T^*M \to T^*M$只是将 r^*视为从 T^*M到自身的光滑映射。 r^{tg} 和 r^{ctg} 的线性性已在 $[9, 定理\ 3.4]$, 中得到证明，同时还证明了它们对应的 1-导子为

$$\mathcal{D}^r = (D^r, r, r), \qquad \text{and} \qquad \mathcal{D}^{r,*} = (D^{r,*}, r^*, r),$$

这里，对于 $X \in \mathfrak{X}(M)$, D^r_X: $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 以及 $D^{r,*}_X$: $\Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$ 定义为

$$D^r_X(Y) = (\mathcal{L}_Y r)(X) = [Y, r(X)] - r([Y, X]), \tag{2.2}$$

$$D^{r,*}_X(\alpha) = \mathcal{L}_X(r^*\alpha) - \mathcal{L}_{r(X)}\alpha. \tag{2.3}$$

◇

例 2.4（全纯结构与 Dolbeault 1-导子）。设 r: $TM \to TM$ 是 M上的一个复结构。全纯向量丛 $\mathcal{E} \to M$ 可以视为配备了纤维上的复结构 $l \in \mathrm{End}(E)$、 $l^2 = -\mathrm{Id}$ 以及一个平坦的 $T^{0,1}$-联络 $\overline{\partial}$的实向量丛 $E \to M$，其中 E和 l构成复向量丛，记作（E, l）[22]。等价地，可以将由 r、 l 和 $\overline{\partial}$ 确定的 E 上的全纯结构表示为一个 1-导子 $\mathcal{D}^{Dolb} = (D, l, r)$，其中

$$D_X(\sigma) = l(\overline{\partial}_{X + \mathbf{i}r(X)}\sigma). \tag{2.4}$$

由全纯结构产生的此类1-导子称为Dolbeault 1-导子，其特征在于，相应的线性(1,1)型张量场 K: $TE \to TE$是 E全空间上的复结构（见下文例2.5）。 E 中按照定义2.1的意义对 $\mathcal{D}^{Dolb}$ 不变的子丛称为全纯子丛。

作为特殊情形，由复结构r: $TM \to TM$在TM和T^*M上诱导的全纯结构，分别由前一例中的1-导子 $\mathcal{D}^r$和 $\mathcal{D}^{r,*}$给出，其对应的线性复结构为 r^{tg} 和 r^{ctg}，见 $[9, \S\ 5。1]$。◇

2.2. Nijenhuis条件。设 N流形上的一个(1,1)型张量场为 T: $TN \to TN$。 T的Nijenhuis挠率为 $\mathcal{N}_T \in \Omega^2(E, TE)$，其定义为

$$\mathcal{N}_T(X_1, X_2) = [T(X_1), T(X_2)] - T([X_1, X_2]_T), \quad X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(N),$$

其中 $[X_1, X_2]_T = [T(X_1)\ X_2] + [X_1, T(X_2)] - T([X_1, X_2]$是变形括号。如果 $\mathcal{N}_T = 0$,T 称为 Nijenhuis 算子。

根据 1-导子与线性 (1,1) 型张量场之间的等价关系，后者的性质可以用前者来表达。设 $\mathcal{D} = (D, l, r)$ 是一个 1-导子，其对应的线性 (1,1) 型张量场为 K，定义在 E 上。文献 $[4, \S\ 6]$ 证明了

$$\mathcal{N}_K = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathcal{N}_r = 0, \\ D_X(l(\sigma)) - l(D_X(\sigma)) = 0, \\ l(D_{[X,Y]}(\sigma)) - [D_X, D_Y](\sigma) - D_{[X,Y]_r}(\sigma) = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 $[D_X, D_Y]$ 是 $\Gamma(E)$ 上算子的交换子。我们将右侧的方程称为 1-导子 (D, l, r) 的 Nijenhuis 方程，满足这些方程的 1-导子称为 Nijenhuis 1-导子。

我们还将考虑代数条件 $K^2 = -\mathrm{id}_{TE}$，该条件表明 K 是 E 的全空间上的近复结构。在这种情况下，[4, Cor. 6.2] 中也证明了这一点，即

$$K^2 = -\mathrm{id}_{TE} \Longleftrightarrow \begin{cases} r^2 = -\mathrm{id}_{TM}, \\ l^2 = -\mathrm{id}_E, \\ D_{r(X)}(\sigma) + l(D_X(\sigma)) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

例 2.5（重新探讨 Dolbeault 1-导子）。按照例 2.4，$E \to M$ 上的 Dolbeault 1-导子是 E 上的一个 1-导子（D, l, r），它满足 Nijenhuis 方程（2.5）和近复方程（2.6）；注意，这些条件恰好说明（M, r）是一个复流形，并且

$$\overline{\partial}_{X+\mathbf{i}r(X)} := -l(D_X) \tag{2.7}$$

是复向量丛（E, l）上的平坦 $T^{0,1}$-联络。我们将把全纯向量丛 $\mathcal{E}$ 视为一对

$$\mathcal{E} = (E, \mathcal{D}^{Dolb})$$

g由一个实向量丛 $E \to M$ 配备一个 Dolbeault 1-导子 $\mathcal{D}^{Dolb}$所给出。 ◇

2.3. 对偶性。与通常的联络一样，向量丛 $E \to M$ 上的 1-导子具有一种对偶运算，它在 E 和 E^*上的 1-导子之间建立双射。给定 E上的一个 1-导子 $\mathcal{D} =$（D, l, r），其对偶1-导子为 $\mathcal{D}^* =$（D^*, l^*, r），其中 D^*： Γ（E^*）$\to\Gamma$（$T^*M \otimes E^*$）由下式刻画：

$$\langle D^*_X(\mu), \sigma\rangle = \mathcal{L}_X\langle \mu, l(\sigma)\rangle - \mathcal{L}_{r(X)}\langle \mu, \sigma\rangle - \langle \mu, D_X(\sigma)\rangle. \tag{2.8}$$

E^* 上相应的线性(1,1)张量记为

$$K^\top : T(E^*) \to T(E^*)$$

并具有以下刻画。若 $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$： $TE \times_{TM} T(E^*) \to TM \times \mathbb{R}$是由自然配对$\langle \cdot, \cdot \rangle$： $E \times_M E^* \to M \times \mathbb{R}$的微分得到的非退化、对称双线性配对，则

$$\langle\!\langle K(U), K^\top(V) \rangle\!\rangle = \langle\!\langle Tl(U), V \rangle\!\rangle, \qquad \forall\, (U, V) \in TE \times_{TM} T(E^*).$$

在例 2.2、2.3 和 2.4 中应用对偶性，可得到以下结果（详情见 [9, § 2.1.2] ）：

- 对于与联络 ∇相关的 1-导子，其对偶 1-导子对应于 E^*上的对偶联络 ∇^* 。
- 对于 r： $TM \to TM$，1-导子 $\mathcal{D}^r$和 $\mathcal{D}^{r,*}$（分别对应于 r^{tg}和 r^{ctg}）互为对偶。
- 1-导子 $\mathcal{D}$ 是 Nijenhuis 的，当且仅当 $\mathcal{D}^*$也是如此，见 [9]；在此情况下，$\mathcal{D}$ 满足几乎复条件，当且仅当 $\mathcal{D}^*$也满足。由此，$\mathcal{D}$ 是 Dolbeault 1-导子，当且仅当 $\mathcal{D}^*$也是如此。对于全纯向量丛 $\mathcal{E}$，其 Dolbeault 1-导子的对偶是与对偶 $\mathcal{E}^*$的全纯结构相对应的 Dolbeault 1-导子，见下方例 2.7。

It w对于每个 $X \in \mathfrak{X}(M)$，将算子 D^*_X 扩展到 $\Gamma(\wedge^m E^*)$ 如下，将会很有用 ：

$$D^*_X(f) = -\mathcal{L}_{r(X)}f, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} D^*_X(\mu)(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) =& \mathcal{L}_X\mu(l(\sigma_1), \ldots, \sigma_m) - \mathcal{L}_{r(X)}\mu(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \\ & - \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\mu(D_X(\sigma_k), \sigma_1, \ldots, \widehat{\sigma_k}, \ldots, \sigma_m), \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中 $f \in C^\infty(M)$，且 $m \geq 1$。注意，通常 $D_X^*(\mu)$ 并不定义 $\Gamma(\wedge^m E^*)$ 的一个元素，因为它不是 $C^\infty(M)$-多重线性的。一般而言， $D_X(\mu)(\sigma_1, \cdot)$ 作为从 $(m-1)$ 个 $\Gamma(E)$ 的副本到 $C^\infty(M)$ 的映射是斜对称的，并且满足

$$D_X^*(\mu)(f\sigma_1, \cdot) = f D_X^*(\mu)(\sigma_1, \cdot),$$
$$D_X^*(\mu)(\sigma_1, f\sigma_2, \cdot) = f D_X^*(\mu)(\sigma_1, \sigma_2, \cdot) + (\mathcal{L}_X f)(\mu(l(\sigma_1), \sigma_2, \cdot) - \mu(\sigma_1, l(\sigma_2), \cdot)).$$

考虑

$$\Gamma_l(\wedge^m E^*) = \{\mu \in \Gamma(\wedge^m E^*) \mid \mu(l(\sigma_1), \sigma_2, \cdot) = \mu(\sigma_1, l(\sigma_2), \cdot),\ \forall\, \sigma_1,\, \sigma_2 \in \Gamma(E)\}.$$

下一个结果可直接推出。

命题 2.6. 对于 $\mu \in \Gamma(\wedge^m E^*)$，$D_X^*(\mu) \in \Gamma(\wedge^m E^*)$ 当且仅当 $\mu \in \Gamma_l(\wedge^m E^*)$。此外，若 $[D_X, l] = D_X \circ l - l \circ D_X = 0$，则 $D_X^*(\Gamma_l(\wedge^\bullet E^*) \subset \Gamma_l(\wedge^\bullet E^*)$。

回顾 (2.5)，若 $\mathcal{D}$ 是 Nijenhuis，则条件 $[D_X, l] = 0$ 成立。

下文中，对于 $\mu \in \Gamma(\wedge^m E^*)$，我们将 $\Gamma(E^* \otimes \wedge^{m-1} E^*)$ 中由 $\mu_l = 0$ 给出的元素 μ_l 记作，若 $m = 0$，且

$$\mu_l(\sigma; \sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}) = \mu(l(\sigma), \sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}),$$

对于 $m \geq 1$，使得 $\mu \in \Gamma_l(\wedge^m E^*)$ 当且仅当 $\mu_l \in \Gamma(\wedge^m E^*)$。

例 2.7. 对于全纯向量丛 $\mathcal{E} = (E, \mathcal{D}^{Dolb})$，其 $\mathcal{D}^{Dolb} = (D, l, r)$，对偶1-导子 $\mathcal{D}^{Dolb,\,*} = (D^*, l^*, r)$ 是 E^* 上的 Dolbeault 1-导子，它对应于复向量丛 (E^*, l^*) 上的全纯结构，该全纯结构由与 $\overline{\partial}$ 对偶的 $\overline{\partial}^*$, 1- 联络给出，见 (2.7)。另请注意，(E^*, l^*) 与复线性泛函丛 $(E, l) \to \mathbb{C}$ 通过以下方式相识别

$$\mu \mapsto \mu - \mathbf{i}\,\mu_l. \tag{2.11}$$

我们将 (E^*, l^*) 的复外代数丛记为 $\wedge_{\mathbb{C}} E^*$，因此 $\Gamma(\wedge^m_{\mathbb{C}} E^*)$ 是 (E, l) 上的复多重线性交错 m-形式丛，它具有 $\overline{\partial}^*$ 的自然扩张。映射 (2.11) 可扩展为一个同构

$$\Phi : \Gamma_l(\wedge^m E^*) \to \Gamma(\wedge^m_{\mathbb{C}} E^*), \qquad \Phi(\mu) = \mu - \mathbf{i}\,\mu_l,$$

$C^\infty(M, \mathbb{C})$-模的（对 $\Gamma_l(\wedge^m E^*)$ 乘以 $\mathbf{i}$ 对应于运算 $\mu \mapsto \mu_l$）。该同构满足

$$\Phi(D_X^*(\mu)) = \mathbf{i}\,\overline{\partial}^*_{X + \mathbf{i}\,r(X)} \Phi(\mu)$$

这表明 D^* （如（2.9）和（2.10）中所示）的延拓与 $\overline{\partial}^*$ 的延拓相一致。特别地，$\mu \in \Gamma_l(\wedge^m E^*)$ 满足 $D^*(\mu) = 0$ 当且仅当 $\mu - \mathbf{i}\,\mu_l \in \Gamma(\wedge^m_{\mathbb{C}} E^*)$ 是一个全纯截面。因此，对于每个开子集 $U \subseteq M$，$\Gamma_l(\wedge^* E^*|_U)$ 中属于 D^* 核的元素，可以根据 $\Gamma(\wedge^m_{\mathbb{C}} E^*|_U)$ 的实部刻画其全纯截面。

◇

2.4. 与（预）Lie代数丛的兼容性。本小节中的讨论稍后将用于 Courant代数丛的 Dirac结构和拉格朗日分裂的语境中。

考虑一个向量丛 $A \to M$，它配有一个锚映射 $\rho\colon A \to TM$ （即一个覆盖 M 上恒等映射的向量丛映射），以及一个 $\mathbb{R}$-双线性反对称括号$[\cdot, \cdot]$，定义在 Γ（A）上，使得

$$[a, fb] = f[a, b] + (\mathcal{L}_{\rho(a)} f)b,$$

对于 a、$b \in \Gamma$（A）和 $f \in C^\infty$（M）。三元组（A，ρ，$[\cdot, \cdot]$）称为预李代数丛 [11]。李代数丛是满足 $[\cdot, \cdot]$ 满足雅可比恒等式的预李代数丛。

正如对李代数丛通常所做的那样（例如参见 [20]），在预李代数丛上，锚映射ρ 和括号 $[\cdot, \cdot]$ 可以编码为 $\Gamma(\wedge A^*)$的次数为1的导子 d_A，或者也可以编码为一个

全空间 $A^* \to M$上的线性双向量场 π_A。用 d_A 和 π_A表示时，李代数丛还需满足以下条件：$d_A^2 = 0$，或者 π_A 是一个泊松结构。

定义 2.8. 向量丛 $A \to M$ 上的 1-导子 $\mathcal{D} = (D, l, r)$ 与预李代数丛结构 $(\rho, [\cdot,\cdot])$ 相容，当且仅当下列方程成立：

$$\text{(IM1)} \qquad \rho \circ l = r \circ \rho$$

$$\text{(IM2)} \qquad \rho(D_X(a)) = D_X^r(\rho(a))$$

$$\text{(IM3)} \qquad l([a,b]) = [a, l(b)] - D_{\rho(b)}(a)$$

$$\text{(IM4)} \qquad D_X([a,b]) = [a, D_X(b)] + [D_X(a), b] + D_{[\rho(b),X]}(a) - D_{[\rho(a),X]}(b),$$

对所有 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $a, b \in \Gamma(A)$ 均成立。

这些相容方程具有如下几何解释。令 $K : TA \to TA$ 为对应于 $\mathcal{D}$ 的线性(1,1)型张量场。

- 定义 2.8 中的条件成立，当且仅当 A^* 上的双向量场 π_A 与 (1,1)型张量场 $K^\top : TA^* \to TA^*$ 按照 Magri-Morosi [21], 的意义相容，参见 [9,§ 4.3] 以及下文的例 3.10。特别地，当 A 是李代数丛且 $\mathcal{D}$ 是 Nijenhuis 1-导子时，这些条件成立，当且仅当 $(\pi_A, K^\top)$ 是 Poisson-Nijenhuis 结构。
- 当 A是一个李代数丛时，定义 2.8 中的相容性意味着 $K : TA \to TA$相对于切丛延拓李代数丛$TA \to TM$ [4, § 6]是一个李代数丛态射。因此，与李代数丛相容的 1-导子是 Lie 群胚上可乘(1,1)张量场的无穷小对应物；正因如此，上述 (IM1)–(IM4) 被称为 IM 方程（其中 IM 表示“无穷小可乘”），满足这些方程的 1-导子也称为李代数丛上的 IM (1,1) 型张量。

1-导子 $\mathcal{D}$ 与 A 上的预李代数丛结构的相容性，可以通过对偶1-导子 $\mathcal{D}^*$ 和 $\Gamma(\wedge A^*)$ 上的算子 d_A 编码如下。

命题 2.9. 向量丛 $A \to M$ 上的 1-导子 $\mathcal{D} = (D, l, r)$ 与预李代数丛结构 $(\rho, [\cdot,\cdot])$ 相容，当且仅当对于所有 $\mu \in \Gamma_l(\wedge^m A^*)$，以下条件成立：

$$D^*_{\rho(a)}(\mu) = i_a d_A(\mu_l) - i_{l(a)} d_A \mu, \tag{2.12}$$

$$i_a d_A D^*_X(\mu) = D^*_X(d_A\mu)(a;\cdot) + \mathcal{R}_X(\mu)(a;\cdot), \tag{2.13}$$

其中，$\mathcal{R}_X(\mu)(a;\cdot)$ 是从 m 个 $\Gamma(A)$ 到 $C^\infty(M)$ 的 $\mathbb{R}$-多重线性斜对称映射，定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_X(\mu)(a;\sigma_1,\dots,\sigma_m) =& \mathcal{L}_X(D^*_{\rho(a)}(\mu)(\sigma_1,\dots,\sigma_m)) + D^*_{[\rho(a),X]}(\mu)(\sigma_1,\dots,\sigma_m) \\ &- \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} D^*_{[\rho(\sigma_i),X]}(\mu)(a,\sigma_1,\dots,\widehat{\sigma_i},\dots,\sigma_m).\end{aligned}$$

证明。对于 $\mu = f \in C^\infty(M)$，利用 (2.3) 和 (2.9)，可以验证 (2.12) 和 (2.13) 等价于

$$\mathcal{L}_{l(\rho(a))-\rho(r(a))} f = 0 \quad \text{and} \quad D^*_X(d_A f) = \rho^* D^{r,*}_X(df),$$

分别地。利用 (2.8)，现在可以验证，(2.12) 和 (2.13) 在零次时等价于 (IM1) 和 (IM2)。类似地，对于 $\mu \in \Gamma(A)$，并假设 (IM1) 成立，可以验证 (2.12) 等价于 (IM3)。最后，在假设 (IM1)、(IM2) 和 (IM3) 均成立的情况下，可以验证 (2.13) 等价于 (IM4)。对于更高次数，(2.12) 和 (2.13) 可直接由 IM 方程推出。□

定义

$$\Gamma_{\mathcal{D}}(\wedge^m A^*) = \{\mu \in \Gamma_l(\wedge^m A^*) \mid D_X^*(\mu) = 0,\ \forall\, X \in \mathfrak{X}(M)\}.$$

命题 2.9 的一个直接推论是，当 $\mathcal{D}$ 与 A 上的预李代数丛结构相容时，

$$d_A(\Gamma_{\mathcal{D}}(\wedge^m A^*)) \subseteq \Gamma_{\mathcal{D}}(\wedge^m A^*),$$

因此，$(\Gamma_{\mathcal{D}}(\wedge^\bullet A^*)\ d_A)$ 是 $(\Gamma(\wedge^\bullet A^*)\ d_A)$ 的子复形。

例 2.10（全纯李锚丛）。考虑向量丛 $A \to M$ 上的 Dolbeault 1-导子 $\mathcal{D}^{Dolb}$，使得 $\mathcal{A} = (A, \mathcal{D}^{Dolb})$ 是一个全纯向量丛。[4, § 6.4] 中证明了，在 $A \to M$ 上与 $\mathcal{D}^{Dolb}$ 相容（即 Def. 2.8 意义下）的李代数丛结构，等价于 $\mathcal{A}$ 上的全纯李锚丛结构（即 [17, § 3.1] 意义下）。在这一对应下，依照例 2.7，我们看到，对于每个开子集 $U \subseteq M$，复形 $(\Gamma_{\mathcal{D}}(\wedge^\bullet A^*|_U)\ d_A)$ 可与 U 上 $\mathcal{A}$ 的全纯李锚丛复形（见 [17, § 4.4]）相识别。◇

3. 1-Derivations on Courant algebroids

本节将介绍1-导子与Courant代数丛之间的一种相容性概念，这是本文研究的主要对象。

3.1. Courant 1-导子与 Courant-Nijenhuis 代数丛。我们首先回顾 Courant 代数丛 [19, 23]。

定义 3.1. 流形 M 上的 Courant代数丛是一个向量丛 $E \to M$，它配备一个丛映射 $\mathfrak{a}\colon E \to TM$（称为锚映射）、一个伪欧几里得度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$（即逐纤维非退化对称双线性型），以及一个 $\mathbb{R}$-双线性括号 $[\![\cdot,\cdot]\!]\colon \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$，使得对于所有 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \Gamma(E)$ 和 $f \in C^\infty(M)$，以下条件均成立：

$$[\![\sigma_1, [\![\sigma_2, \sigma_3]\!]]\!] = [\![[\![\sigma_1, \sigma_2]\!], \sigma_3]\!] + [\![\sigma_2, [\![\sigma_1, \sigma_3]\!]]\!] \tag{C1}$$

$$\mathfrak{a}([\![\sigma_1, \sigma_2]\!]) = [\mathfrak{a}(\sigma_1), \mathfrak{a}(\sigma_2)] \tag{C2}$$

$$[\![\sigma_1, f\sigma_2]\!] = f\,[\![\sigma_1, \sigma_2]\!] + (\mathcal{L}_{\mathfrak{a}(\sigma_1)} f)\,\sigma_2 \tag{C3}$$

$$[\![\sigma_1, \sigma_2]\!] + [\![\sigma_2, \sigma_1]\!] = \mathfrak{a}^*(d\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle) \tag{C4}$$

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{a}(\sigma_1)}\langle\sigma_2, \sigma_3\rangle = \langle[\![\sigma_1, \sigma_2]\!], \sigma_3\rangle + \langle\sigma_2, [\![\sigma_1, \sigma_3]\!]\rangle \tag{C5}$$

其中 $\mathfrak{a}^*\colon T^*M \to E^* \simeq E$ 是锚映射 $\mathfrak{a}$的对偶映射，而同构 $E^* \simeq E$ 由 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 给出。我们将 $[\![\cdot,\cdot]\!]$ 称为Courant括号。

以下是一个重要的例子类别 [25, 26]。

例 3.2（正合Courant代数丛）。任意闭3-形式 $H \in \Omega^3(M)$都在 $E = \mathbb{T}M := TM \oplus T^*M$上定义一个Courant代数丛结构，其锚映射为 $\mathfrak{a} = \mathrm{pr}_{TM}$，对称配对为

$$\langle (X, \alpha), (Y, \beta)\rangle = \beta(X) + \alpha(Y),$$

以及 H-扭曲的Courant括号

$$[\![(X, \alpha), (Y, \beta)]\!] = ([X, Y], \mathcal{L}_X\beta - i_Y d\alpha + i_Y i_X H).$$

当 $H = 0$时，我们称此结构为 $\mathbb{T}M$上的标准Courant代数丛 . ◇

设 $(E, \mathfrak{a}, \langle\cdot,\cdot\rangle, [\![\cdot,\cdot]\!])$ 是一个 Courant代数丛。

定义 3.3. Courant 1-导子是向量丛$E \to M$ 上的一个 1-导子 $\mathcal{D} = (D, l, r)$，满足 $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$（在由配对给出的恒等$E \cong E^*$ 下），并且满足以下相容方程:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{CN1}) && \mathfrak{a} \circ l = r \circ \mathfrak{a},\\
&(\mathrm{CN2}) && \mathfrak{a}(D_X(\sigma)) = D^r_X(\mathfrak{a}(\sigma)),\\
&(\mathrm{CN3}) && l([\![\sigma_1, \sigma_2]\!]) = [\![\sigma_1, l(\sigma_2)]\!] - D_{\mathfrak{a}(\sigma_2)}(\sigma_1) - \mathfrak{a}^*(C(\sigma_1, \sigma_2)),\\
&(\mathrm{CN4}) && D_X([\![\sigma_1, \sigma_2]\!]) = [\![\sigma_1, D_X(\sigma_2)]\!] - [\![\sigma_2, D_X(\sigma_1)]\!] + D_{[\mathfrak{a}(\sigma_2), X]}(\sigma_1)\\
& && \qquad - D_{[\mathfrak{a}(\sigma_1), X]}(\sigma_2) - \mathfrak{a}^*(i_X\, dC(\sigma_1, \sigma_2)),
\end{aligned}$$

对于所有 σ_1、$\sigma_2 \in \Gamma(E)$ 和 $X \in \mathfrak{X}(M)$，其中 $C(\sigma_1, \sigma_2) := \langle D_{(\cdot)}(\sigma_1)\ \sigma_2\rangle \in \Omega^1(M)$。

方程 (CN1)-(CN4) 称为 $\mathcal{D}$ 的 Courant相容性方程。注意，它们对 1-导子施加了一个线性的条件，因此 Courant 1-导子的线性组合仍然是 Courant 1-导子。

定义 3.4. Courant-Nijenhuis 1-导子是同时也是 Nijenhuis 1-导子的 Courant 1-导子，即满足 Nijenhuis 方程 (2.5)。配备了 Courant-Nijenhuis 1- 导子的 Courant 代数丛称为 Courant-Nijenhuis 代数丛。

例 3.5. 考虑由联络 ∇ 在 $E \to M$ 上定义的 1-导子 $\mathcal{D}$，如例 2.2 所示。如果它是一个 Courant 1-导子，则锚映射 $\mathfrak{a}$ 必须是平凡的（根据 (CN1)），因此，作为一个 Courant代数丛， E 是一个二次李代数丛。在此情况下， ∇ 是 Courant 1-导子，当且仅当它是对称的（即，相对于伪欧几里得度量 $\nabla = \nabla^*$ ），并且与度量和纤维逐点李括号相容（根据 (CN4)）：

$$\mathcal{L}_X\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle = \langle\nabla_X\sigma_1, \sigma_2\rangle + \langle\sigma_1, \nabla_X\sigma_2\rangle, \qquad \nabla_X([\![\sigma_1, \sigma_2]\!]) = [\![\nabla_X\sigma_1, \sigma_2]\!] + [\![\sigma_1, \nabla_X\sigma_2]\!],$$

对于 $X \in \mathfrak{X}(M)$。

$\mathcal{D}$ 上的Nijenhuis条件等价于 ∇的平坦性。在此情况下，假设 $\widetilde{M}$是连通的，并将其万有覆盖 M 视为 $\pi_1(M)$-主丛上的 M，则 E 具有$\widetilde{\ }$形式（$\widetilde{M} \times \mathfrak{d}$）$/\pi_1(M)$，其中 $\mathfrak{d}$ 是一个二次李代数，并配备了一个保持括号和配对的$\pi_1(M)$表示。$\diamond$

来自 [5] 的下一个例子，是Courant相容性方程（CN1）–（CN4）的最初动机。

例3.6. 对于一个(1,1)型张量场 $r\colon\ TM \to TM$，考虑1-导子 $\mathcal{D}^r$和 $\mathcal{D}^{r,\ *}$，它们分别来自（2.2）和（2.3）。那么，令

$$\mathbb{D}^r := (D^r, D^{r,*}),$$

我们得到一个1-导子

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}^r = (\mathbb{D}^r, (r, r^*), r) \tag{3.1}$$

在 $\mathbb{T}M$ 上，它相对于标准Courant代数丛结构是一个Courant 1-导子（这在 [5, 引理6.1]的证明中得到了验证）。更一般地，可以验证，相对于一个 H-扭曲的Courant括号， $\boldsymbol{\mathcal{D}}^r$ 是一个 Courant 1-导子，只要闭3-形式 $H \in \Omega^3(M)$按照 [5, 定义5.1], 的意义与 r 相容，即

- 张量场 $H_r \in \Gamma(T^*M \otimes \wedge^2 T^*M)$， $H_r(X_1;\ X_2, X_3) := H(r(X_1)\ X_2, X_3)$ 是反对称的，即 $H_r \in \Omega^3(M)$;
- $dH_r = 0$。

此外， r 是一个 Nijenhuis 算子，当且仅当 $\boldsymbol{\mathcal{D}}^r$ 是一个 Nijenhuis 1-导子 [5, 引理 6.1],在这种情况下，它在 $\mathbb{T}M$上定义了一个 Courant-Nijenhuis 结构。还可以直接验证，$r^2 = -\mathrm{Id}_{TM}$ 当且仅当 $\boldsymbol{\mathcal{D}}^r$ 满足（2.6）中的近复方程。当 r 是一个

$M, \mathbb{D}^r$ 上的复结构是用于刻画 $\mathbb{T}M \to M$ 上全纯结构的 Dolbeault 1-导子（参见例 2.4），相应的线性复结构由……给出。

$$K_r := (r^{tg}, r^{ctg}) : T(\mathbb{T}M) \to T(\mathbb{T}M). \tag{3.2}$$

◇

我们将在 § 4 中介绍对最后一个例子的修改，从而得到 $\mathbb{T}M$上的更一般的 Courant 1-导子。

正如我们将在 § 5中看到的，对于Dolbeault 1-导子（见例2.4），与Courant结构的相容性会导出全纯Courant代数丛。

注记3.7（关于相容方程）。关于Courant 1-导数，一个自然的问题是，定义3.3中针对 $\mathcal{D}$ 的Courant相容性方程，是否能够通过相应的线性(1,1)型张量场 K 获得几何解释（参见定义2.8之后的讨论）。尽管目前似乎尚无令人满意的答案（与李代数丛不同，可以验证，一般而言， K 并不定义切Courant代数丛 [3]之间的Courant态射 [6] ），但下文的命题3.11将介绍 K 的一些关键性质。从另一个角度来看，探讨Courant代数丛 [23] 的超几何观点能否为Courant相容性方程提供启示，也将是一件有意义的事情。◇

3.2. 不变Dirac结构。Courant代数丛的重要性很大程度上源于其Dirac结构。现在我们来考察在Courant 1-导子作用下不变的 Dirac 结构。

设 $\mathcal{D} = (D, l, r)$ 是 Courant代数丛 $E \to M$ 上的 Courant 1-导子。我们将关注满足定义 2.1 中所述的 $\mathcal{D}$- 不变性条件的拉格朗日子丛 $(L \to M) \subseteq (E \to M)$ （即 $L = L^{\perp}$）：

- $l(L) \subset L$，并且

对于所有 $X \in \mathfrak{X}(M)$，均有 $D_X(\Gamma(L)) \subset \Gamma(L)$。

对于拉格朗日子丛，这些条件也可以等价地表述如下。考虑对称2-形式 $S \in \Gamma(S^2E^*)$,

$$S(\sigma_1, \sigma_2) = \langle l(\sigma_1), \sigma_2 \rangle.$$

（回顾一下， $l = l^*$，因为 $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$。）令 $C\colon \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Omega^1(M)$ 为在 Courant 1-导子的定义中出现的映射，

$$C(\sigma_1, \sigma_2) = \langle D_{(\cdot)}(\sigma_1), \sigma_2 \rangle.$$

对于拉格朗日子丛 $L \subset E$， S 在 L 上的限制定义了一个元素 $S_L \in \Gamma(S^2L^*)$，并具有如下性质： $l(L) \subseteq L$ 当且仅当 $S_L = 0$。假设这一条件成立，则 C 在 L 的截面上的限制是张量性的，即它定义了一个元素

$$C_L \in \Gamma(\wedge^2 L^* \otimes T^*M)$$

称为 L 和 $\mathcal{D}$的伴随子。下面的结果可直接验证。

引理3.8。对于 Courant 1-导子 $\mathcal{D}$，拉格朗日子丛 $L \subseteq E$ 是 $\mathcal{D}$-不变的，当且仅当

$$S_L = 0, \quad and \quad C_L = 0.$$

设 $\mathcal{D}$ 是 E上的 Courant-Nijenhuis 1-导子，则 $(E, \mathcal{D})$ 是 Courant-Nijenhuis algebroid。

定义 3.9. 满足 $S_L = 0$ 和 $C_L = 0$ 的 $\mathcal{D}$-不变 Dirac 结构 $L \subset E$ （等价地，满足 $S_L = 0$ 和 $C_L = 0$）称为 Dirac-Nijenhuis 结构。

例3.10（Poisson-Nijenhuis 结构）。给定一个 (1,1)型张量场 $r\colon TM \to TM$，考虑如例3.6中所述的、定义在 $\mathbb{T}M$ 上（配备标准 Courant 括号）的相应 Courant 1-导子 $\boldsymbol{\mathcal{D}}^r$。其不变拉格朗日子丛恰好是 [5, § 3.3]中所考虑的那些。特别地，由双向量场 $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ 的图给出的一个拉格朗日子丛，

$$L_\pi = \{(\pi^\sharp(\xi), \xi) \in \mathbb{T}M \mid \xi \in T^*M\},$$

其中 $\pi^\sharp\colon\ T^*M \to TM$是通过缩并得到的映射，当且仅当 $\boldsymbol{\mathcal{D}}^r$-不变时， π和 r 满足

$$r\circ\pi^\sharp = \pi^\sharp\circ r^*, \ \text{ and } \ \pi^\sharp\circ D^{r,*}_X(\alpha) - D^r_X\circ\pi^\sharp(\alpha) = \pi^\sharp(\mathcal{L}_X r^*\alpha - \mathcal{L}_{r(X)}\alpha) - (\mathcal{L}_{\pi^\sharp(\alpha)}r)(X) = 0 \tag{3.3}$$

对所有 $X \in \mathfrak{X}(M)$， $\alpha \in \Omega^1(M)$。第二个条件中的表达式称为 r 和 π [21]的 Magri-Morosi伴随量，参见 [5, § 3.1]。从引理3.8的角度出发，利用自然同构 $L_\pi \cong T^*M$，我们有

$$S_{L_\pi}(\alpha,\beta) = \pi(r^*\alpha,\beta) - \pi(\alpha, r^*\beta), \quad \text{ and } \quad C_{L_\pi}(\alpha,\beta) = \langle \beta, \pi^\sharp\circ D^{r,*}_{(\cdot)}(\alpha) - D^r_{(\cdot)}\circ\pi^\sharp(\alpha)\rangle.$$

（用 C_{L_π}表述 Magri-Morosi伴随量消失的另一种方式可追溯至 [16] ，如今在文献中更为常见。）

回顾一下， π 是 Poisson 的当且仅当 L_π 是 Dirac 结构，而 r 是 Nijenhuis 算子的当且仅当 $\boldsymbol{\mathcal{D}}^r$ 是 Courant-Nijenhuis 1-导子。因此， L_π 在（$\mathbb{T}M$， $\boldsymbol{\mathcal{D}}^r$）中是 Dirac-Nijenhuis 结构，当且仅当（π， r）是 Poisson-Nijenhuis 结构 [5, 例3.11]。$\diamond$

关于前一个例子中特定的 Courant-Nijenhuis 代数丛 $\mathbb{T}M$ 上的 Dirac-Nijenhuis 结构，更多内容请参见 [5] 。

众所周知，若 L 是 Courant 代数丛 E中的 Dirac 结构，则锚映射和 Courant 括号的限制使 L 成为一个李代数丛。若存在一个 Courant 1-导子 $\mathcal{D}$ ，且 L是 $\mathcal{D}$-不变的，则很容易验证，将 $\mathcal{D}$ 限制到 L 上所得到的 1-导子与其李代数丛结构相容，其含义见定义 2.8。按照 § 2.4 中的讨论，用线性(1,1)型张量场表示，我们有

命题3.11。设 E是 Courant 代数丛上的一个 Courant 1-导子 $\mathcal{D}$ ，并令 $K\colon TE \to TE$为相应的线性(1,1)型张量场。拉格朗日子丛 $L \subset E$ 是 $\mathcal{D}$-不变的，当且仅当 $K(TL) \subset TL$。此外，若 L 是一个 Dirac 结构，则 $K|_{TL}\colon TL \to TL$是李代数丛态射，其中 $TL \to TM$为切丛延拓李代数丛。

证明。正如在 § 2.1 中回顾的那样， L 是 $\mathcal{D}$-不变的这一事实等价于 $K(TL) \subset TL$，参见 [5, 定理 2.1]。当 L 是 Dirac 结构时，限制后的 1-导子满足定义 2.8 中的 IM 方程，它们等价于 $K|_{TL}\colon\ TL \to TL$是一个李代数丛态射 [4,§ 5.2]。□

4. Courant 1-derivations on $TM \oplus T^*M$

现在，我们给出关于扭曲 Courant 括号的 $\mathbb{T}M = TM \oplus T^*M$ 上 Courant 1-导子的其他例子，以扩展例3.6

4.1. 伪黎曼度量所定义的 Courant 1-导子。直接计算表明，在 $\mathbb{T}M$ 上满足 $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$ 以及方程 (CN1) 和 (CN2) 的 1-导子 $\mathcal{D} = (D, l, r)$ 必须具有如下形式

$$l = (r, r^* + g^\flat), \quad D = (D^r, D^{r,*} + \Sigma), \tag{4.1}$$

其中 $g^\flat\colon TM \to T^*M$, $g^\flat(X) = i_X g$ 是由对称双线性形式 g 缩并得到的映射，而 $\Sigma\colon \Gamma(TM) \to \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ 是满足以下条件的 $\mathbb{R}$-线性映射

$$\Sigma_X(fY) = f\,\Sigma_X(Y) + (\mathcal{L}_X f)\, g^\flat(Y), \tag{4.2}$$

$$\mathcal{L}_X g(Y,Z) = \langle \Sigma_X(Y), Z\rangle + \langle Y, \Sigma_X(Z)\rangle, \tag{4.3}$$

其中，$f \in C^\infty(M)$、X、Y、$Z \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $\Sigma_X\colon \Gamma(TM) \to \Gamma(T^*M)$ 由 $\Sigma_X(Y) = i_X(\Sigma(Y))$ 给出。特别地，$\mathbb{T}M$ 上的任意 Courant 1-导子 $\mathcal{D} = (D, l, r)$ 都可通过（4.1）由上述数据 r、g 和 Σ 确定。当 g 非退化时，即 g 是伪黎曼度量时，注意到 $\nabla_X = (g^\flat)^{-1} \circ \Sigma_X$ 在 M 上定义了一个度量联络（即 $\nabla g = 0$）。

在下文中，我们假设 g 是伪黎曼度量，且 ∇ 是其 Levi-Civita 联络。在这种情况下，g 和 ∇ 给出 $\mathbb{T}M$ 的一个 1- 导子 $\mathcal{D}^g = (\mathbb{D}^g, (0, g^\flat), 0)$，其中

$$\mathbb{D}^g_X((Y,\beta)) = (0, g^\flat(\nabla_X Y)),$$

b在 (4.1) 中令 $r = 0$。相应的 q 上的线性(1,1)型张量场为：$\mathbb{T}M \to M$ ，

$$K_g : T(\mathbb{T}M) \to T(\mathbb{T}M), \tag{4.4}$$

描述如下。联络 ∇ 定义了水平分布 Hor $\subset T(\mathbb{T}M)$，它与垂直分布 Ver $= \ker(Tq) = q^*\mathbb{T}M$ 互补。相对于 $T(\mathbb{T}M)$ 的这一分解，K_g 在 Hor 上为零，在 Ver 上则作用为 $(0, g^\flat)$。

引理 4.1. 对任意 H-扭曲的 Courant括号，1-导子 $\mathcal{D}^g$ 都是 $\mathbb{T}M$ 的 Courant 1-导子。

证明。由于 $\mathcal{D}^g$ 对称，只需证明 Courant 方程 (CN1)–(CN4) 成立。需要验证的非平凡方程只有 (CN3) 和 (CN4)。证明 (CN3) 等价于验证

$$g^\flat([X,Y]) = \mathcal{L}_X g^\flat(Y) - g^\flat(\nabla_Y X) - g(\nabla_{(\cdot)}X, Y), \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{4.5}$$

T这是因为 ∇ 是 Levi-Civita 联络：由于 ∇ 是度量联络且挠率为零，我们有

$$\begin{aligned} i_Z \mathcal{L}_X g^\flat(Y) &= \mathcal{L}_X g(Y,Z) - g(Y,[X,Z]) = g(\nabla_Y X + [X,Y], Z) + g(Y, \nabla_Z X) \\ &= i_Z\left(g^\flat(\nabla_Y X) + g^\flat([X,Y]) + g(Y, \nabla_{(\cdot)}X)\right). \end{aligned}$$

条件 (CN4) 则由第一 Bianchi 恒等式推出。事实上，我们必须证明

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z[X,Y], W) =& \langle \mathcal{L}_X g^\flat(\nabla_Z Y), W\rangle - \langle \mathcal{L}_Y g^\flat(\nabla_Z X), W\rangle + g(\nabla_{[Y,Z]}X, W) - g(\nabla_{[X,Z]}Y, W) \\ & - i_W i_Z dg(\nabla_{(\cdot)}X, Y) \end{aligned}$$

将最后一个方程的右端记为 Υ。利用

$$i_W i_Z dg(\nabla_{(\cdot)}X, Y) = \mathcal{L}_Z g(\nabla_W X, Y) - \mathcal{L}_W g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_{[Z,W]}X, Y)$$

并再次利用 ∇ 是度量相容且挠率为零这一事实，可得

$$\begin{aligned} \Upsilon &= g(R(X,Z)(Y), W) - g(R(Y,Z)(X), W) - g(R(Z,W)(X), Y) + g(\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_Z\nabla_Y X, W) \\ &= \underbrace{g(R(X,Z)(Y), W) + g(R(Z,Y)(X), W) + g(R(Y,X)(Z), W)}_{=0 \text{ (by the first Bianchi identity)}} + g(\nabla_Z[X,Y], W), \end{aligned}$$

其中 R 是曲率张量，最后一个等式用到了它的对称性。证明完毕。□

现在令

$$\mathbb{D}^{r,g} = (\mathbb{D}^{r,g}, (r, r^* + g^\flat), r)$$

是由 (4.1) 定义的 1-导子，其中 $\Sigma = g^\flat(\nabla)$，即 $\mathbb{D}^r$ （见例3.6）与 1-导子 $\mathbb{D}^g$ 之和。

命题4.2. 对于任意 H-扭曲的 Courant 括号，只要 H 与 r 相容，1-导子 $\mathbb{D}^{r,\,g}$ 就是 $\mathbb{T}M$ 上的 Courant 1-导子。

（ H 与 r 的相容性见例3.6。）

证明。结论由前述引理、Courant 1-导子的和仍是 Courant 1-导子这一性质，以及以下事实得出：对于任意 H-扭曲的 Courant 括号，只要 H 与 r 相容， $\mathbb{D}^r$ 就是 Courant 1-导子。□

注4.3. 更一般地，在 $\mathbb{D}^{r,\,g}$ 的定义中，可以用任意其他度量联络 ∇ 替代 Levi-Civita联络。在这种情况下，方程（CN3）和（CN4）等价于 ∇ 的挠率 T 是斜对称且闭的（即， $\varphi(X,Y,Z) := g(T(X,Y)\ Z)$ 定义了一个闭 3- 形式）。⋄

例4.4. 根据引理3.8，满足 $\mathbb{D}^g$不变性的拉格朗日子丛 $L \subset \mathbb{T}M$ 可由以下条件刻画： $S_L \in \Gamma(S^2L^*)$ 和 $C_L \in \Gamma(\wedge^2 L^* \otimes T^*M)$ 消失

$$S_L(\sigma_1,\sigma_2) = g(\mathrm{pr}_{TM}(\sigma_1), \mathrm{pr}_{TM}(\sigma_2)) \ \text{ and } \ C_L(\sigma_1,\sigma_2,Z) = g(\nabla_Z\, \mathrm{pr}_{TM}(\sigma_1), \sigma_2).$$

S_L 消失等价于 L 的预辛分布相对于 g为各向同性。特别地，其图为 $\mathbb{D}^g$不变的唯一 2-形式是零 2-形式。在 $S_L = 0$的假设下， C_L 消失的一个充分条件是 $\mathrm{pr}_{TM}(L)$ 关于 Levi-Civita联络不变（当 $\mathrm{pr}_{TM}(L)$ 极大各向同性时，这些条件等价）。⋄

4.2. Nijenhuis 1-导子与 K¨ahler 条件。设 $r : TM \to TM$ 是一个 (1,1)型张量场， g 是一个带有 Levi-Civita联络 ∇的伪黎曼度量。现在我们给出关于这一对 (r, g) 的条件，以确保 1-导子 $\mathbb{D}^{r,\,g}$ 满足 Nijenhuis 方程，从而定义一个 Courant-Nijenhuis 1-导子（由命题 4.2 得出）。我们将相应的 $\mathbb{T}M$ 上的线性(1,1)型张量场记为

$$K_{r,g} = K_r + K_g,$$

参见 (3.2) 和 (4.4)。

如例3.6中所回顾的，1-导子 $\mathcal{D}^r$ 满足 Nijenhuis 方程，当且仅当 r 是一个 Nijenhuis 算子（$\mathcal{N}_r = 0$）。另一方面，容易验证 $\mathbb{D}^g$ 始终是一个 Nijenhuis 1-导子。更一般地，我们有

命题 4.5. 对于一对 (r, g)，假设 that.

- r 是 Nijenhuis 算子,
- $g^\flat \circ r = -r^* \circ g^\flat$,
- $\nabla r = 0$。

那么，1-导子 $\mathbb{D}^{r,g}$ 满足 Nijenhuis 方程（等价地说，$K_{r,g}$ 的 Nijenhuis挠率为零）。

证明。由于根据假设有 $\mathcal{N}_r = 0$，只需检验式（2.5）中其余两个 Nijenhuis 方程。利用 $\mathcal{D}^r$ 已经是 $\mathbb{T}M$ 上的 Courant-Nijenhuis 1-导子这一事实（见例3.6），

只需证明

$$g^\flat(D^r_Z(X)) - D^{r,*}_Z(g^\flat(X)) = g^\flat(\nabla_Z r(X)) - r^*(g^\flat(\nabla_Z X), \tag{4.6}$$

$$D^{r,*}_Y(g^\flat(\nabla_X Z)) - D^{r,*}_X(g^\flat(\nabla_Y Z)) + r^* g^\flat(\nabla_{[X,Y]} Z) = g^\flat\Big(\nabla_X D^r_Y(Z) - \nabla_Y D^r_X(Z) - D^r_{[X,Y]}(Z) - \nabla_{[X,Y]_r} Z\Big). \tag{4.7}$$

利用（2.2）和（2.3），以及 $g^\flat \circ r = -r^* \circ g^\flat$ 和 ∇ 是莱维-奇维塔联络这一兼容性条件，我们可以证明（4.6）等价于

$$g^\flat((\nabla_X r)(Z)) + g((\nabla_{(\cdot)} r)(Z), X)) = 0,$$

这成立是因为 $\nabla r = 0$。

关于 (4.7)，我们可以利用 $\nabla r = 0$，并且利用 ∇ 是 Levi-Civita 联络，将其中一些项改写如下：

$$\begin{aligned}
\nabla_X D^r_Y(Z) &= \nabla_X r(\nabla_Y Z) - \nabla_X \nabla_{r(Y)} Z,\\
D^r_{[X,Y]}(Z) &= r(\nabla_{[X,Y]} Z) - \nabla_{r([X,Y])} Z,\\
D^{r,*}_X(g^\flat(\nabla_Y Z)) &= -g^\flat(\nabla_X\, r(\nabla_Y Z)) - g^\flat(\nabla_{r(X)} \nabla_Y Z).
\end{aligned}$$

对于 $\nabla_Y D^r_X(Z)$ 和 $D^{r,*}_Y(g^\flat(\nabla_X Z))$ 也有类似的公式。经过一些消去和重新分组后，可以得到 (4.7) 等价于

$$g(R(Z,\cdot)(r(X)) - r(R(Z,\cdot)(X)), Y) = 0,$$

其中我们利用了曲率张量 R 的对称性。因此 (4.7) 成立，因为$[R, r] = 0$。证毕。□

一对（r，g），其中 r是一个(1,1)型张量场，g是 M上的伪黎曼度量；若 r 和 g 满足命题4.5中的三个条件，并且额外要求 $r^2 = -\mathrm{Id}_{TM}$（从而 r 是一个复结构），则其定义了一个（伪）K¨ahler结构。伪K¨ahler结构可用1-导子刻画如下。

命题4.6。一对（r，g）定义一个伪K¨ahler结构，当且仅当1-导子$\mathbb{D}^{r,\,g}$ 满足(2.6)中的近复方程（等价地，$K^2_{r,\,g} = -\mathrm{Id}$）。

证明。回顾一下，近复方程为

$$r^2 = -\mathrm{id}_{TM}, \quad (r, r^* + g^\flat)^2 = -\mathrm{id}_{T(\mathbb{T}M)}, \quad \mathbb{D}^{r,g}_{r(X)}(\sigma) + (r, r^* + g^\flat)(\mathbb{D}^{r,g}_X(\sigma)) = 0$$

根据第一个方程，r 是一个近复结构。第二个方程等价于 $r^* \circ g^\flat = -g^\flat \circ r$（即（$g$，$r$）是近厄米的）。由于 $r^2 = -\mathrm{id}_{TM}$，1-导子（$\mathbb{D}^r$，（r，r^*）r）满足近复方程（见例3.6），利用这一事实可验证

$$\mathbb{D}^{r,g}_{r(X)}(Y,\beta) + (r, r^* + g^\flat)(\mathbb{D}^{r,g}_X(Y,\beta)) = (0, \langle \beta, \mathcal{N}_r(X,\cdot)\rangle + g^\flat((\nabla_Y r)(X))).$$

通过将上面的 $Y = 0$ 或 $\beta = 0$ 设为上述值，我们看到，第三个近复方程等价于 $\mathcal{N}_r = 0$ 和 $\nabla r = 0$。□

由命题 4.5 和 4.6 可知，对于一对 (r, g)，如果 $K_{r,\,g}$ 是一个近复结构，那么它必然是可积的。

推论 4.7. 复流形 (M, r) 上的伪 K¨ahler 度量 g 在 $\mathbb{T}M \to M$ 上定义了一个全纯向量丛结构，其 Dolbeault 1-导子为 $\mathbb{D}^{r,\,g}$ 并在全空间 $\mathbb{T}M$ 上定义了一个线性复结构，给定为 $K_{r,\,g}$。此外，对于任意全纯 3-形式 H, $\mathbb{D}^{r,\,g}$相对于 $\mathbb{T}M$上的 H-扭曲 Courant括号是一个 Courant 1-导子。

最后一个断言由命题 4.2 得出。

对于伪K¨ahler结构（r， g），我们将在下文看到，由 $\mathcal{D}^r$ 和 $\mathcal{D}^r$定义的^{g}上的全纯结构之间存在一个显式同构，该同构将它们联系起来。

4.3. B场变换。给定一个闭2-形式 $B \in \Omega^2(M)$，映射

$$\tau_B : \mathbb{T}M \to \mathbb{T}M, \qquad \tau_B(X, \alpha) = (X, \alpha + i_X B),$$

对于任意 H扭曲的Courant括号，它都是 $\mathbb{T}M$ 的Courant自同构（如果 B 不闭，则 τ_B 将由 H 和（$H - dB$）扭曲的Courant括号联系起来）。这样的 τ_B 称为规范变换 [26], 或 B场变换 [12]。

如果 $\mathbb{T}M$ 上的两个Courant 1-导子 $\mathcal{D}_1 = (D_1, l_1, r_1)$ 和 $\mathcal{D}_2 = (D_2, l_2, r_2)$ 满足 $r_1 = r_2$，且存在一个闭2-形式 B 使得，则称它们规范等价。

$$D_2 = \tau_B \circ D_1 \circ \tau_B^{-1} \text{ and } l_2 = \tau_B \circ l_1 \circ \tau_B^{-1}.$$

Nijenhuis方程和近复方程（分别为（2.5）和（2.6））在规范等价下保持不变。

考虑由 r、 g 和 Σ 通过 (4.1) 确定的 Courant 1-导子 $\mathcal{D}$；此处我们不再假设对称双线性形式 g 非退化。当且仅当存在闭 2-形式 B 使得 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{D}^r$ 规范等价时，

$$g^\flat = B^\flat \circ r - r^* \circ B^\flat, \qquad \Sigma_X = B^\flat \circ D^r_X - D^{r,*}_X \circ B^\flat. \tag{4.8}$$

特别地，当且仅当 B 和 r 按照 Magri-Morosi 的意义相容时，τ_B 保持 1-导子 $\mathcal{D}^r$ （即 $g = 0$ 和 $\Sigma = 0$），见 $[5, \S\, 5.2]$ （参见例 3.6）。

假设 r 是一个复结构。由于 $\mathcal{D}^r$ 满足近复方程 (2.6)，任何与之规范等价的 Courant 1-导子 $\mathcal{D}$ 也必须满足这些方程。在此情形下，若 $\mathcal{D}$ 由 r、 g 和 Σ 确定（如 (4.1) 中所示），则必有 $g^\flat \circ r = -r^* \circ g^\flat$ （见命题 4.6 的证明）。因此，(r, g) 产生一个 2-形式 $\omega \in \Omega^2(M)$，使得$\omega^\flat = g^\flat \circ r$。

我们现在将描述一类自然的 Courant 1-导子，它们在 $\mathbb{T}M$ 上与 $\mathcal{D}^r$ 规范等价。

命题4.8. 假设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{T}M$ 上由 r、 g 和 Σ（如 (4.1) 中所示）确定的 Courant-Nijenhuis 1-导子，且满足近复方程。如果由 $\omega^\flat = g^\flat \circ r$ 定义的 2-形式 ω 是闭的，那么 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{D}^r$ 规范等价。

证明。令 $B = \frac{1}{2}\omega$，并令 $\mathcal{D}^B$ 为通过 B-场变换 τ_B 对 $\mathcal{D}$ 共轭所得的 Courant-Nijenhuis 1-导子。用 r、 g^B 和 Σ^B 表示确定 $\mathcal{D}^B$ 的数据。于是可直接验证，

$$g_B = 0 \quad \text{and} \quad \Sigma^B = \Sigma + (B^\flat(D^r) - D^{r,*}(B^\flat)).$$

使用 对于 $\mathcal{D}^B$，由 (4.2) 和 (4.3) 可知， Σ^B定义了一个元素 $H \in \Gamma(\wedge^2 T^*M \otimes T^*M)$ b y

$$H(X, Y; Z) = \langle \Sigma^B_X(Y), Z \rangle.$$

由 (CN3) 可知， H 完全反对称，即 $H \in \Omega^3(M)$[1]。由近复方程和 Nijenhuis 方程可直接推出，H 必须满足

$$H(r(X), Y, Z) = -H(X, r(Y), Z) \quad \text{and} \quad H(r(X), Y, Z) = H(X, r(Y), Z).$$

H因此 $H = 0$，这意味着 $\Sigma^B = 0$。所以 $\mathcal{D}^B = \mathcal{D}^r$，这正是我们要证明的 . □

推论 4.9. 对于伪 K ¨ahler 结构 (r, g)，Courant 1-导子 $\mathcal{D}^r$ 和 $\mathcal{D}^r$，$_g$规范等价。

[1]虽然证明中并不需要，但可以验证 (CN4) 等价于 $dH = 0$。事实上，由 r、 g 和 Σ 在满足 $g = 0$ 的 $\mathbb{T}M$ 上的 Courant 1-导子 $\mathcal{D}$ 与闭 3-形式一一对应。

由此可知， $\mathbb{T}M \to M$ 上的通常全纯结构（由 $\mathcal{D}^r$定义，见例3.6）与由度量 g 修正的全纯结构（由 $\mathcal{D}^{r,\,g}$定义，见推论 4.7）通过规范变换 τ_B同构。由于 τ_B 在$\mathcal{D}^r$-不变和 $\mathcal{D}^{r,\,g}$-不变拉格朗日子丛的集合之间建立了一一对应关系，因此显然，拉格朗日子丛$L \subset \mathbb{T}M$ 关于由 g 修正的全纯结构是全纯的，当且仅当 $\tau_B(L)$在通常意义下是全纯的。（特别地，这表明 $\mathcal{D}^{r,\,g}$-不变 Dirac 结构的限制远少于针对 $\mathcal{D}^g$的情形，参见例4.4。）

5. Holomorphic Courant algebroids

本节将说明，全纯Courant代数丛可视为Courant-Nijenhuis结构的特殊情形。

对于复流形（M, r）和全纯向量丛 $\mathcal{E} \to M$，我们用 $\mathcal{O}$ 表示 M 上的全纯函数层，用 $\Gamma_{\mathcal{E}}$ 表示 E的全纯截面层。

定义 5.1. 全纯Courant代数丛是一个全纯向量丛 $\mathcal{E} \to M$，其上赋有一个全纯、非退化、对称的 $\mathcal{O}$-双线性配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \Gamma_{\mathcal{E}} \times \Gamma_{\mathcal{E}} \to \mathcal{O}$，一个全纯向量丛映射 $\mathfrak{p}\colon E \to T^{1,\,0}M$，以及一个 $\mathbb{C}$-双线性括号 $[\![\cdot,\cdot]\!]\colon \Gamma_{\mathcal{E}} \times \Gamma_{\mathcal{E}} \to \Gamma_{\mathcal{E}}$，并满足定义 3.1 中的公理 (C1), . . . , (C5)，其中以 $\mathfrak{p}$ 代替 $\mathfrak{a}$，f为局部全纯函数，且 σ_1, σ_2 和 σ_3 为局部全纯截面。

为完整起见，我们首先回顾一下，全纯Courant代数丛自然地带有一个实光滑Courant代数丛结构（例如参见 [13]）。对于全纯向量丛 $\mathcal{E}$，我们用 E 表示其底层的实光滑向量丛。

命题 5.2. 设 $(\mathcal{E}, \mathfrak{p}, [\![\cdot,\cdot]\!], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个全纯Courant代数丛。则 E 上存在唯一的实光滑Courant代数丛结构 $(\mathfrak{a}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{C^\infty}, [\![\cdot,\cdot]\!]_{C^\infty})$，使得

(1) $\mathfrak{p}(\sigma) = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}(\sigma) - \mathrm{i}\, r(\mathfrak{a}(\sigma)))$

(2) $[\![\sigma_1,\sigma_2]\!]_{C^\infty} = [\![\sigma_1,\sigma_2]\!]$(3) $\langle\sigma_1,$

$\sigma_2\rangle_{C^\infty} = \mathrm{Re}(\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle)$

对所有局部全纯截面 $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_{\mathcal{E}}(U)$ 均成立。

证明。我们将证明分为两部分：唯一性与存在性。

唯一性。我们将证明，将实光滑Courant代数丛结构（满足 (1)、(2) 和 (3)）限制在全纯截面上，便足以完全确定该结构。设$U \subset M$是一个开子集，其上存在全纯截架 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \subset\Gamma_{\mathcal{E}}(U)$。$U$上的任意光滑截面 σ都可唯一表示为

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f_k \sigma_k + g_k\, l(\sigma_k), \tag{5.1}$$

其中 $f_k, g_k \in C^\infty(U)$，且 $l\colon E \to E$是 E上的纤维复结构。由 $\mathfrak{a}$的 $C^\infty(U)$-线性可知， $\mathfrak{a}$ 完全由 $\mathfrak{p}(\sigma_k)$确定（注意， $\mathfrak{p}$的 $\mathbb{C}$-线性意味着 $\mathfrak{a}\circ l = r\circ\mathfrak{a}$）。此外， $\langle\cdot,\cdot\rangle_{C^\infty}$ 的 $C^\infty(U)$-双线性意味着它由 $\langle\sigma_j, \sigma_k\rangle$确定；注意到

$$\langle\sigma_j, l(\sigma_k)\rangle_{C^\infty} = -\mathrm{Im}(\langle\sigma_j,\sigma_k\rangle). \tag{5.2}$$

最后，莱布尼茨方程（C3）表明， $[\![\cdot,\cdot]\!]_{C^\infty}$ 完全由 $[\![\sigma_j,\sigma_k]\!]$确定（注意， $[\![\sigma_j, l(\sigma_k)]\!]_{C^\infty} = l([\![\sigma_j,\sigma_k]\!])$）。

存在性。根据唯一性，只需局部描述实光滑Courant代数丛结构。我们将使用 $C^\infty(U)$-模的同构。

$$C^\infty(U,\mathbb{C})\otimes_{\mathcal{O}(U)}\Gamma_{\mathcal{E}}(U)\ni(f+\mathbf{i}\,g)\otimes\sigma\ \mapsto\ f\sigma+g\,l(\sigma)\in\Gamma(U,E)$$

以在局部构造 Courant代数丛结构。锚映射和括号定义如下：

$$\mathfrak{a}(\psi\otimes\sigma)=\mathrm{Re}(\psi)\mathfrak{a}(\sigma)+\mathrm{Im}(\psi)r(\mathfrak{a}(\sigma)),\quad \langle\psi_1\otimes\sigma_1,\psi_2\otimes\sigma_2\rangle_{C^\infty}=\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle).$$

注意， $\langle\cdot,\cdot\rangle_{C^\infty}$ 是非退化的，并且对于 $h\in\mathcal{O}(U)$,

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{a}(\psi\otimes\sigma)}h=\psi\,\mathcal{L}_{\mathfrak{p}(\sigma)}h. \tag{5.3}$$

现在我们可以自然地定义 $\mathfrak{a}^*\colon\ \Omega^1(U)\to C^\infty(U,\mathbb{C})\otimes_{\mathcal{O}(U)}\mathcal{E}(U)$，如下：

$$\langle\mathfrak{a}^*(\alpha),\psi\otimes\sigma\rangle_{C^\infty}=i_{\mathfrak{a}(\psi\otimes\sigma)}\,\alpha.$$

$C^\infty(U,\mathbb{C})\otimes_{\mathcal{O}(U)}\mathcal{E}(U)$ 上的 Courant括号定义如下：

$$\begin{aligned}\llbracket\psi_1\otimes\sigma_1,\psi_2\otimes\sigma_2\rrbracket_{C^\infty}=&\psi_1\psi_2\otimes\llbracket\sigma_1,\sigma_2\rrbracket+\mathcal{L}_{\mathfrak{a}(\psi_1\otimes\sigma_1)}(\psi_2)\otimes\sigma_2-\mathcal{L}_{\mathfrak{a}(\psi_2\otimes\sigma_2)}(\psi_1)\otimes\sigma_1\\&+\mathrm{Re}(\psi_2\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle)\mathfrak{a}^*d\mathrm{Re}(\psi_1)-\mathrm{Im}(\psi_2\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle)\mathfrak{a}^*d\mathrm{Im}(\psi_1).\end{aligned} \tag{5.4}$$

可以验证， $\mathfrak{a}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{C^\infty}$ 和 $\llbracket\cdot,\cdot\rrbracket_{C^\infty}$ 是良定义的，即它们的定义在 $(h\psi)\otimes\sigma$ 和 $\psi\otimes(h\sigma)$ 上一致，其中 $h\in\mathcal{O}(U)$。公理 (C1)–(C5) 可直接验证。□

根据例2.4和2.5，我们将全纯向量丛 $\mathcal{E}$ 视为一对 $(E,\mathcal{D}^{\mathrm{Dolb}})$，其中 $E\to M$ 是一个实光滑向量丛，并配备了一个定义其全纯结构的 Dolbeault 1-导子 $\mathcal{D}^{\mathrm{Dolb}}$。本节的主要结果是： $\mathcal{E}$ 上的全纯Courant代数丛结构与 E 上的实Courant代数丛结构等价，后者满足 $\mathcal{D}^{\mathrm{Dolb}}$ 是一个 Courant 1-导子。

定理5.3。设全纯向量丛 $\mathcal{E}=(E,\mathcal{D}^{\mathrm{Dolb}})$。

(a) 若 $(\mathfrak{p},\langle\cdot,\cdot\rangle,\llbracket\cdot,\cdot\rrbracket)$ 是 $\mathcal{E}$上的全纯Courant代数丛结构，则 $\mathcal{D}^{\mathrm{Dolb}}$ 是底层 E 上的实Courant代数丛结构的 Courant 1-导子（因此 $\mathcal{D}^{\mathrm{Dolb}}$使 E 成为 Courant-Nijenhuis 代数丛）。(b) 若 $(\mathfrak{a},\langle\cdot,\cdot\rangle,\llbracket\cdot,\cdot\rrbracket)$ 是 E 上的Courant代数丛结构，且 $\mathcal{D}^{\mathrm{Dolb}}$ 是一个 Courant 1-导子，则 $\llbracket\cdot,\cdot\rrbracket$ 限制为 $\Gamma_{\mathcal{E}}$ 上的一个 $\mathbb{C}$-双线性括号，使其定义 $\mathcal{E}$ 上的全纯Courant代数丛结构，并且

$$\mathfrak{p}(\sigma)=\frac{1}{2}(\mathfrak{a}(\sigma)-\mathbf{i}\,r(\mathfrak{a}(\sigma))),\quad \langle\sigma_1,\sigma_2\rangle_{\mathrm{hol}}=\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle-\mathbf{i}\,\langle\sigma_1,l(\sigma_2)\rangle.$$

（a）和（b）中的构造互为逆构造。

证明。为证明（a），我们必须证明 $\mathcal{D}^{\mathrm{Dolb}}=(D,l,r)$ 是一个 Courant 1-导子，即证明它相对于实Courant代数丛 E 满足定义3.3中的 (CN1)–(CN4)。 $\mathfrak{p}$ 的 $\mathbb{C}$-线性意味着 $\mathfrak{a}\circ l=r\circ\mathfrak{a}$，因此 (CN1) 成立。为验证条件 (CN2)、(CN3) 和 (CN4)，对于每个开子集 $U\subset M$，我们必须检查以下表达式的消失：

$$\begin{aligned}&W_2(X,\sigma_1)=\mathfrak{a}(D_X(\sigma_1))-D^r_X(\mathfrak{a}(\sigma_1)),\\&W_3(\sigma_1,\sigma_2)=l(\llbracket\sigma_1,\sigma_2\rrbracket_{C^\infty})-\big(\llbracket\sigma_1,l(\sigma_2)\rrbracket_{C^\infty}-D_{\mathfrak{a}(\sigma_2)}(\sigma_1)-\mathfrak{a}^*(C(\sigma_1,\sigma_2))\big),\\&W_4(X,\sigma_1,\sigma_2)=D_X(\llbracket\sigma_1,\sigma_2\rrbracket_{C^\infty})-\big(\llbracket\sigma_1,D_X(\sigma_2)\rrbracket_{C^\infty}-\llbracket\sigma_2,D_X(\sigma_1)\rrbracket_{C^\infty}+D_{[\mathfrak{a}(\sigma_2),X]}(\sigma_1)\\&\qquad\qquad-D_{[\mathfrak{a}(\sigma_1),X]}(\sigma_2)-\mathfrak{a}^*(i_X\,dC(\sigma_1,\sigma_2))\big),\end{aligned}$$

对于 $X\in\mathfrak{X}(U)$，以及 U 上 E 的光滑截面 σ_1、σ_2。

W_2 的消失可由以下事实推出：由于 $\mathfrak{a}$ 是全纯的，它必定与$\mathcal{D}^{\mathrm{Dolb}}$ 和 $\mathcal{D}^r$ 相交织（回忆一下， $\mathcal{D}^r$ 是编码 TM上全纯结构的 Dolbeault 1-导子，见例 2.4），因此 (CN2) 成立。

利用 $\mathfrak{a}\circ l = r\circ\mathfrak{a}$ 和 $l = l^*$（由 (5.2) 可知），可以证明 W_3 在每个变量上都是 $C^\infty(U)$-线性的，而 W_4 在第一个变量上是 $C^\infty(U)$-线性的，并且满足

$$\begin{aligned} W_4(X,\sigma_1,f\sigma_2) - fW_4(X,\sigma_1,\sigma_2) &= (\mathcal{L}_X f)\, W_3(\sigma_1,\sigma_2) - (\mathcal{L}_{W_2(X,\sigma_1)} f)\,\sigma_2 \\ &= (\mathcal{L}_X f)\, W_3(\sigma_1,\sigma_2), \\ W_4(X,f\sigma_1,\sigma_2) - fW_4(X,\sigma_1,\sigma_2) &= -(\mathcal{L}_X f) W_3(\sigma_2,\sigma_1) - W_1(X,\sigma_1,\sigma_2)\mathfrak{a}^* df \end{aligned}$$

其中

$$W_1(X,\sigma_1,\sigma_2) = \langle D_X(\sigma_1),\sigma_2\rangle_{C^\infty} + \langle \sigma_1, D_X(\sigma_2)\rangle_{C^\infty} - \mathcal{L}_X\langle\sigma_1, l(\sigma_2)\rangle_{C^\infty} + \mathcal{L}_{r(X)}\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle_{C^\infty}$$

注意，由于 (2.1)， W_1 关于每个输入都是 $C^\infty(U)$-线性的。

我们断言， W_1、 W_3 和 W_4 在全纯截面上均为零。事实上，对于 W_3 和 W_4，这是因为 D_X 在全纯截面上为零（由 (2.4) 得出），且 $[\![\cdot,\cdot]\!]_{C^\infty}$在全纯截面上的限制是 $\mathbb{C}$-双线性的全纯Courant括号。对于 W_1，我们还用到以下事实：

$$\mathcal{L}_X\langle\sigma_1, l(\sigma_2)\rangle_{C^\infty} - \mathcal{L}_{r(X)}\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle_{C^\infty} = -\mathrm{Im}(\mathcal{L}_{X+\mathbf{i}\,r(X)}\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle) = 0,$$

对于全纯的 σ_1， $\sigma_2\in\Gamma_{\mathcal{E}}(U)$，因为 $\langle\sigma_1,\ \sigma_2\rangle\in\mathcal{O}(U)$。

由于光滑截面可以像 (5.1) 中那样在局部用全纯截架表示， W_1 和 W_3 的 $C^\infty(U)$-多重线性性意味着它们为零。这又意味着 W_4 对 $C^\infty(U)$也是多重线性的，因此也为零。至此，(a) 的证明完成。

下面证明 (b)。由于 D 在全纯截面上为零，(CN4) 意味着$[\![\Gamma_{\mathcal{E}}(U)\ \Gamma_{\mathcal{E}}(U)]\!]\subset\Gamma_{\mathcal{E}}(U)$，由 (CN3) 可知，全纯截面上的限制括号是 $\mathbb{C}$-双线性的。关于锚映射，(CN1) 意味着 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathbb{C}$-线性的，而 (CN2) 表明它是全纯的。还需验证 $\langle\Gamma_{\mathcal{E}}(U)\ \Gamma_{\mathcal{E}}(U)\rangle\subset\mathcal{O}(U)$。这是以下事实的推论：对于局部全纯截面 σ_1、 σ_2，对偶性方程 (2.8) 意味着

$$\mathcal{L}_{X+\mathbf{i}\,r(X)}\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle_{\mathrm{hol}} = \langle\overline{\partial}_{X+\mathbf{i}\,r(X)}\,\sigma_1,\sigma_2\rangle_{\mathrm{hol}} + \langle\sigma_1,\overline{\partial}_{X+\mathbf{i}\,r(X)}\,\sigma_2\rangle_{\mathrm{hol}} = 0,$$

其中 $\overline{\partial}$是平坦的 $T^{0,1}$-联络 (2.4)。因此 $\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle_{\mathrm{hol}}$是全纯的，从而完成证明。□

例5.4. 设 (M,r) 是一个复流形，且 H 是一个闭全纯3-形式。那么$\mathbb{T}M$作为全纯向量丛，具有一个由 H扭曲的全纯Courant代数丛结构（类似于例3.2）。从定理5.3的角度来看，这对应于这样一个事实： $\mathbb{D}^r$ 是$\mathbb{T}M$上由 H扭曲的Courant括号的Courant 1-导子，其中$\mathbb{T}M$视为一个实向量丛（参见例3.6）。◇

注记5.5. 任何底层实Courant代数丛为$\mathbb{T}M$、具有由闭3-形式 H扭曲的 H-扭曲Courant括号的全纯Courant代数丛，都完全由$(\mathbb{T}M, H)$上的Courant-Nijenhuis 1-导子 $\mathcal{D}$ 刻画，该导子由数据 r、 g 和 Σ （如(4.1)所示）确定，其中 r 是 M上的复结构。于是， g 和 Σ 必须满足相应的方程，以确保 $\mathcal{D}$ 是Courant-Nijenhuis且几乎复的。如果2-形式 $\omega^\flat = g^\flat\circ r$ 是闭的，则由命题4.8可知，由 $\mathcal{D}$ 确定的全纯Courant代数丛与由 $\mathbb{D}^r$确定的全纯Courant代数丛同构。一般而言，情况并非如此，但我们总可以利用 ω 通过规范变换消去 g ，从而将更一般的全纯Courant代数丛的构造转化为适当选择 Σ 的问题；这为 [13, Prop.1.3]中的全纯Courant代数丛的分类提供了另一种方法。◇

6. Lagrangian splittings and doubles

6.1. Courant代数丛的拉格朗日分裂。设 $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathfrak{a}, [\![\cdot,\cdot]\!])$ 是一个 Courant代数丛。我们将 E 的拉格朗日分裂定义为一种分解 $E = A \oplus B$，其中 A 和 B 是拉格朗日子丛。在这种情况下，通过配对存在一个同构 $B \cong A^*$，从而得到伪欧几里得向量丛之间的一个恒等关系 $E = A \oplus A^*$，其中 $A \oplus A^*$ 配备其典范配对。

$$\langle (a,\alpha), (b,\beta)\rangle := \beta(a) + \alpha(b).$$

设 $p_A\colon E \to A$ 和 $p_{A^*}\colon E \to A^*$ 分别为到 A 和 A^*的自然投影。E 上的锚映射和括号在 A 和 A^* 上诱导出以下结构：一个锚映射 $\rho := \mathfrak{a}|_A : A \to TM$，以及一个 $\mathbb{R}$-双线性括号 $[\cdot,\cdot]$，定义在 $\Gamma(A)$ 上；还有一个元素 $\varphi \in \Gamma(\wedge^3 A^*)$，其定义为

$$[a,b] := p_A([\![(a,0),(b,0)]\!]), \qquad i_b i_a \varphi := p_{A^*}([\![(a,0),(b,0)]\!]),$$

类似地，还有一个锚映射 $\rho_*\colon A^* \to TM$、定义在 $\Gamma(A^*)$ 上的括号 $[\cdot,\cdot]_*$，以及一个元素 $\chi \in \Gamma(\wedge^3 A)$。注意，赋予 A 和 A^*各自的锚映射和括号后，它们成为预李代数丛（见 § 2.4）。我们用以下符号表示相应的算子：

$$d_A : \Gamma(\wedge^\bullet A^*) \to \Gamma(\wedge^{\bullet+1} A^*), \qquad d_{A^*} : \Gamma(\wedge^\bullet A) \to \Gamma(\wedge^{\bullet+1} A).$$

相对于这些结构，$E = A \oplus A^*$ 上的Courant括号为

$$[\![(a,\alpha),(b,\beta)]\!] = ([a,b] + \mathcal{L}_\alpha b - i_\beta\, d_{A^*} a + i_\beta i_\alpha \chi,\ [\alpha,\beta]_* + \mathcal{L}_a \beta - i_b\, d_A \alpha + i_b i_a \varphi), \tag{6.1}$$

其中 $\mathcal{L}_\alpha = i_\alpha d_{A^*} + d_{A^*} i_\alpha$，$\mathcal{L}_a$同理。

设 $(A, \rho, [\cdot,\cdot])$ 和 $(A^*, \rho_*, [\cdot,\cdot]_*)$ 是处于对偶性中的预李代数丛，并进一步配备截面 $\varphi \in \Gamma(\wedge^3 A^*)$ 和 $\chi \in \Gamma(\wedge^3 A)$。当锚映射、括号和 3-截面满足相容性条件（详见 [24], , 另见[14]）时，二元组 (A, A^*) 称为原双代数丛；这些条件表明，$\Gamma(A \oplus A^*)$ 上的括号 (6.1) 使 $A \oplus A^*$ 成为一个以 $\mathfrak{a} = \rho + \rho_*$ 为锚映射并带有典型配对的 Courant代数丛，该 Courant代数丛称为 (A, A^*) 的双。

因此我们得到以下等价关系：任意配备拉格朗日分裂的 Courant代数丛都会产生一个原双代数丛，而任意原双代数丛都可通过其双构造出一个带有拉格朗日分裂的 Courant代数丛。

以下是这一对应关系中值得关注的特殊情形。

- 当 $\varphi = 0$ 和 $\chi = 0$时，原双代数丛 (A, A^*) 是一个 Lie 双拟胚代数，即 (A, A^*) 是一对互为对偶的李代数丛 $(A, \rho, [\cdot,\cdot])$ 和 $(A^*, \rho_*, [\cdot,\cdot]_*)$，使得李代数丛微分 d_{A^*} 与 $\Gamma(\wedge A)$ 上的肖滕括号 $[\cdot,\cdot]$ 满足

$$d_{A^*}[a,b] = [d_{A^*} a, b] + [a, d_{A^*} b], \qquad \forall\, a, b \in \Gamma(A). \tag{6.2}$$

  Lie 双拟胚代数与配备由 Dirac结构给出的拉格朗日分裂的 Courant代数丛相对应，这些结构被称为 Manin三元组。
- 当 $\chi = 0$ 时，原双代数丛 (A, A^*) 是一个李拟双代数丛 [24], , 此时 A 是一个李代数丛，d_{A^*} 满足 (6.2)，$d_{A^*}^2 = [\chi, \cdot]$，且 $d_{A^*}\chi = 0$。李拟双代数丛对应于带有由 Dirac 结构及一个拉格朗日补空间所给定分裂的 Courant代数丛，这种结构称为 Manin拟三元组。

对于 Courant代数丛 $E \to M$，拉格朗日分裂 $E = A \oplus A^*$ 通过以下方式在 M 上诱导出双向量场π

$$\pi^\sharp = \rho_* \circ \rho^* : T^*M \to TM \tag{6.3}$$

满足

$$\frac{1}{2}[\pi,\pi] = \rho(\chi) + \rho_*(\varphi),$$

参见 [18, § 3.2 和 3.4]。特别地，当 (A, A^*) 是 Lie 双拟胚代数时，π 是一个泊松结构。

6.2. Courant 1-导子的拉格朗日分裂。考虑一个配备拉格朗日分裂的 Courant代数丛 E，记作 $E = A \oplus A^*$。

假设。在本小节中，我们始终假设

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = (\mathbb{D}, \ell, r)$$

是向量丛 E 上的一个1-导子，它保持分裂不变，即子丛A和 A^* 是 $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-不变的（如定义2.1所述）。我们还将假设 $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ 是对称的（$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\mathcal{D}}^*$），此时 A 和 A^* 上的限制1-导子互为对偶。

我们将 A 上的 1-导子记为 $\mathcal{D} = (D, l, r)$，因此 A^* 上的 1-导子为 $\mathcal{D}^* = (D^*, l^*, r)$，并且

$$\mathbb{D} = (D, D^*), \qquad \ell = (l, l^*).$$

我们沿用 § 6.1 中关于预李代数丛 $(A, \rho, [\cdot,\cdot])$ 和 $(A, \rho_*, [\cdot,\cdot]_*)$ 的记号，其中 3-截面分别为 $\chi \in \Gamma(\wedge^3 A)$ 和 $\varphi \in \Gamma(\wedge^3 A^*)$。

定理 6.1. 1-导子 $\boldsymbol{\mathcal{D}} = (\mathbb{D}, \ell, r)$ 是 $E = A \oplus A^*$ 的 Courant 1-导子，当且仅当满足以下条件：

- $\mathcal{D}$ 与预李代数丛（$A, \rho, [\cdot,\cdot]$）相容，并且
$$\varphi \in \Gamma_l(\wedge^3 A^*), \qquad D^*(\varphi) = 0;$$
- $\mathcal{D}^*$ 与预李代数丛（$A^*, \rho_*, [\cdot,\cdot]_*$）相容，并且
$$\chi \in \Gamma_{l^*}(\wedge^3 A), \qquad D(\chi) = 0.$$

此外， $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ 是 Nijenhuis（分别为 Dolbeault）当且仅当 $\mathcal{D}$ 也是如此。

证明。我们必须证明 $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ 的条件 (CN1)–(CN4)（见定义 3.3）与 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^*$ 的条件 (IM1)–(IM4)（见定义 2.8），以及陈述中关于 φ 和 χ 的条件之间的等价性。

由 $\mathfrak{a} = \rho + \rho_*$ 和 $\ell = (l, l^*)$ 可直接得出，对于 $\boldsymbol{\mathcal{D}}$，(CN1) 等价于对于 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^*$ 的 (IM1)。类似地，由 $\mathbb{D} = (D, D^*)$ 可知，对于 $\boldsymbol{\mathcal{D}}$，(CN2) 等价于对于 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^*$ 的 (IM2)。

断言 1. 假设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^*$满足 (IM1)。那么， $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ 的条件 (CN3) 等价于 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^*$满足 (IM3)，以及 $\varphi \in \Gamma_l(\wedge^3 A^*)$ 和 $\chi \in \Gamma_{l^*}(\wedge^3 A)$。

下面验证该断言。对于类型为 $\sigma_1 = (a, 0)$、 $\sigma_2 = (b, 0)$ 的截面，(CN3) 化为 s

$$\ell([a,b] + i_b i_a \varphi) = [a, l(b)] + i_{l(b)} i_a \varphi - D_{\rho(b)}(a),$$

这可以拆分为

$$l([a,b]) = [a, l(b)] - D_{\rho(b)}(a) \quad \text{and} \quad l^*(i_b i_a \varphi) = i_{l(b)} i_a \varphi.$$

对于所有 a、$b \in \Gamma(A)$，这些条件成立当且仅当 $\mathcal{D}$ 和 $\varphi \in \Gamma_l(\wedge^3 A^*)$ 满足 (IM3)。类似地，对于类型为 $\sigma_1 = (0, \alpha)$、 $\sigma_2 = (0, \beta)$ 的截面，(CN3) 等价于 $\mathcal{D}^*$ 和$\chi \in \Gamma_{l^*}(\wedge^3 A)$ 满足 (IM3)。对于类型为 $\sigma_1 = (0, \alpha)$、 $\sigma_2 = (b, 0)$ 的截面，(CN3) 化为两个方程：

$$l^*(i_b d_A \alpha) = i_{l(b)} d_A \alpha + D^*_{\rho(b)}(\alpha) + \langle D^*_{\rho(\cdot)}(\alpha), b\rangle, \tag{6.4}$$

$$l(\mathcal{L}_\alpha b) = \mathcal{L}_\alpha l(b) - \langle D^*_{\rho_*(\cdot)}(\alpha), b\rangle. \tag{6.5}$$

我们将看到，在假设 (IM1) 成立的条件下，(6.4)（分别为 (6.5)）直接由 $\mathcal{D}$ （分别为 $\mathcal{D}^*$）与 $m = 1$ 的 (2.12) 推出，而这等价于 (IM3)。事实上，注意到 $m = 1$ 的 (2.12) 还有以下等价表述。

$$\langle D^*_{\rho(\cdot)}(\alpha), b\rangle = l^*(i_b d_A \alpha) - i_b d_A(l^*(\alpha)) \ (\text{similarly, } \langle \alpha, D_{\rho_*(\cdot)}(b)\rangle = l(i_\alpha d_{A^*} b) - i_\alpha d_A(l(b)).) \tag{6.6}$$

因此，(6.4) 是将 (2.12) 和 (6.6) 相加得到的。第二个方程 (6.5) 则由 Cartan 公式 $\mathcal{L}_\alpha = i_\alpha d_{A^*} + d_{A^*} i_\alpha$，结合 (2.8) 和 (6.6) 得出。对于类型为 $\sigma_1 = (a, 0)$、$\sigma_2 = (0, \beta)$ 的截面，相应于 (CN3) 的方程与 (6.4) 和 (6.5) 完全类似，理由也相同。由此得证。

断言 2。假设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^*$满足 (IM1)、(IM2) 和 (IM3)。那么，$\mathbb{D}$ 的条件 (CN4) 等价于 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^*$ 满足 (IM4)，以及 $D^*(\varphi) = 0$ 和 $D(\chi) = 0$。

为验证该断言，注意对于形如 $\sigma_1 = (a, 0)$、$\sigma_2 = (b, 0)$ 的截面，(CN4) 具有以下形式

$$\begin{aligned} D_X([a,b]) + D_X^*(i_b i_a \varphi) =& [a, D_X(b)] + i_{D_X(b)} i_a \varphi - [b, D_X(a)] - i_{D_X(a)} i_b \varphi \\ &+ D_{[\rho(b),X]}(a) - D_{[\rho(a),X]}(b). \end{aligned}$$

因此，在此情形下，(CN4) 等价于 $\mathcal{D}$ 满足 (IM4)，以及 φ 满足以下条件（使用 (2.8)）：

$$\mathcal{L}_X \varphi(a, b, l(c)) - \mathcal{L}_{r(X)} \varphi(a, b, c) - \varphi(D_X a, b, c) - \varphi(a, D_X b, c) - \varphi(a, b, D_X c) = 0,$$

对所有 a、b、$c \in \Gamma(A)$ 均成立。该最后条件等同于当 $\varphi \in \Gamma_l(\wedge^3 A^*)$ 时的 $D^*(\varphi) = 0$（见 (2.10)）。类似地，对于形如 $\sigma_1 = (0, \alpha)$、$\sigma_2 = (0, \beta)$ 的截面，(CN4) 成立，当且仅当 $\mathcal{D}^*$满足 (IM4) 且 $D(\chi) = 0$。

对于类型为 $\sigma_1 = (0, \alpha)$、$\sigma_2 = (b, 0)$ 的截面，(CN4) 等价于

$$D_X(\mathcal{L}_\alpha b) = \mathcal{L}_\alpha(D_X b) + i_{D_X^*(\alpha)} d_{A^*} b - D_{[\rho_*(\alpha),X]} b - (\rho_*)^* i_X d\langle D^*_{(\cdot)}\alpha, b\rangle, \tag{6.7}$$

$$D_X^*(i_b d_A \alpha) = i_{D_X(b)} d_A \alpha + \mathcal{L}_b D_X^*(\alpha) - D^*_{[\rho(b),X]}\alpha + \rho^* i_X d\,\langle D^*_{(\cdot)}\alpha, b\rangle. \tag{6.8}$$

这些方程可直接由 D、D^* 和 $m = 1$ 的 (2.13) 得出；在 (IM1)、(IM2) 和 (IM3) 成立的假设下，它等价于 (IM4)。事实上，首先注意到，利用 (2.8) 和 $\rho_*^* D^r,\ {}_X{}^*(d\langle\alpha, b\rangle) = D_X(d_{A^*}\langle\alpha, b\rangle)$ 以及 Cartan 公式 $\mathcal{L}_\alpha = i_\alpha d_{A^*} + d_{A^*} i_\alpha$，可以看出，在变换 $\alpha \leftrightarrow b$ 下，这两个方程完全相同。现在，利用

$$\begin{aligned} \langle D_X^*(i_b d_A \alpha) - i_{D_X(b)} d_A \alpha, a\rangle &= -D_X^*(d_A\alpha)(a, b) \\ \langle \mathcal{L}_b D_X^*(\alpha) + \rho^* i_X d\,\langle D^*_{(\cdot)}\alpha, b\rangle, a\rangle &= -d_A D_X^*(\alpha)(a, b) + \mathcal{L}_X \langle D^*_{\rho(a)}(\alpha), b\rangle + \langle D^*_{[\rho(a),X]}(\alpha), b\rangle, \end{aligned}$$

可以验证，(6.8) 正是次数为 1 时的 (2.13)。

对于类型为 $\sigma_1 = (a, 0)$、$\sigma_2 = (0, \beta)$ 的截面，情况完全类似。这就证明了断言 2，并完成了定理第一部分的证明。

关于 Nijenhuis条件 的断言可由分解 $\mathbb{D} = (D, D^*)$ 和 $\ell = (l, l^*)$，以及 D 是 Nijenhuis（分别地，Dolbeault）的充要条件是 D^* 也是如此这一事实推出，见[9,定理 2.11]。□

当 $\mathbb{D} = (\mathbb{D}, \ell, r)$ 是 Courant 1-导子时，它也与由拉格朗日分裂 $E = A \oplus A^*$ 定义的 (6.3) 中的双向量场 $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ 相容，见 [9, 命题 4.6 (i)]。

推论 6.2. 有序对 (π, r) 在 (3.3) 的意义下是相容的。特别地，如果拉格朗日分裂由 Dirac 结构给出，且 $\mathbb{D}$ 是 Nijenhuis，则 (π, r) 定义了一个 Poisson-Nijenhuis 结构。

证明。利用 $\pi^\sharp = \rho_* \circ \rho^*$、$\mathbb{D} =$（$D$、$D^*$）和 $\ell =$（l、l^*），(3.3) 中的第一个条件可由 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^*$ 的条件 (IM1) 得出，而 (3.3) 中的第二个条件可由 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^*$ 的条件 (IM2) 得出。□

回顾 [9]，Lie-Nijenhuis 双拟胚代数是一个三元组 $(A, A^*, \mathcal{D})$，其中 (A, A^*) 是 Lie 双拟胚代数，且 $\mathcal{D}$ 是作用于 A 上的 Nijenhuis 1-导子，使得 $\mathcal{D}$ 与 A上的 Lie 拟胚代数结构相容，并且 $\mathcal{D}^*$ 与 A^* 上的 Lie 拟胚代数结构相容（

按定义 2.8 的意义）。这些是 Poisson-Nijenhuis 群胚对应的无穷小对象，参见 [9, § 4.3]。

由定理 6.1 可得 Lie双代数丛与Manin三元组之间已知对应关系的如下推广。

推论 6.3. Lie-Nijenhuis 双拟胚代数等价于配备了 Dirac-Nijenhuis 结构分解的 Courant-Nijenhuis代数丛。

当 $\mathcal{D}$ 是 Dolbeault 1-导子时，定理 6.1 给出了全纯范畴中 Lie（拟）双代数丛与Manin（拟）三元组之间已知的对应关系。

References

[1] P. Antunes。C. Laurent-Gengoux。J. Nunes da Costa。《Courant 代数丛上的层级与相容性》。 *Pac. J. Math.* **261** (2013) 1-32。[2] P. Antunes。J. Nunes da Costa。《李代数丛与 Courant 代数丛上的 Nijenhuis 张量与相容张量》。 *J. Geom. Phys.* **65** 2013 66 79 ( ) - 。

[3] M. Boumaiza，N. Zaalani。《Courant 代数丛的提升》。 *C. R. Math. Acad. Sci.* 巴黎，347 (2009)，第 3-4 期，177–182。[4] H. Bursztyn 和 T. Drummond。《乘法张量的李理论》。 *Math. Ann.* **375** (2019)，1489–1554。[5] H. Bursztyn，T. Drummond 和 C. Netto。《Dirac 结构与 Nijenhuis 算子》。 *Math. Z.* **302** (2022)，875—915。[6] H. Bursztyn，D. Iglesias-Ponte，P. Severa。《Courant 态射与动量映射》。 *Math. Res. Lett.*。16 (2009)，第 2 期，215–232。[7] J. F. Carinena，J. Grabowski，G. Marmo。《Courant 代数丛与 Lie 双代数丛的压缩》。 *J. Phys.* **37** (2004)，5189—5202。[8] T. Courant。《Dirac 流形》。 *Trans. Amer. Math. Soc.* **319** (1990)，631–661。[9] T. Drummond。《Lie-Nijenhuis 双代数丛》。 *Q. J. Math.* **73** (2022)，849—883。[10] J. Grabowski，《Courant-Nijenhuis 张量与广义几何》。载于《群、几何与物理》，Real Acad. Ci. Exact. Fıs. Quım. Nat. Zaragoza。29 (2006)，101–112。[11] J. Grabowski，P. Urbanski。《李锚丛与 Poisson-Nijenhuis 结构》。 *Rep. Math. Phys.* **40** (1997)，195–208。[12] M. Gualtieri。《广义复几何》。 *Ann. of Math.* **174** (2011)，75–123。[13] M. Gualtieri。《广义 Kähler 几何》。 *Commun. Math. Phys.* **331** (2014)，297—331。[14] Y. Kosmann-Schwarzbach。《拟、扭曲及其他..... Poisson 几何与李锚丛理论》。载于《辛几何与 Poisson 几何的广度》。 *Progr. Math*，232 (2005)，363–389。[15] Y. Kosmann-Schwarzbach。《Courant 代数丛上的 Nijenhuis 结构》， *Bull. Brazilian Math. Soc.* **42** (4) (2011)，625–649。[16] Y. Kosmann-Schwarzbach 和 F. Magri。《Poisson-Nijenhuis 结构》。 *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **53** 1990 35 81 ( )，–。

[17] C. Laurent-Gengoux，M. Stienon，P. Xu。《全纯 Poisson 流形与全纯李锚丛》，*Int. Math. Res. Not.* (2008)，文章编号 rnn 088，共 46 页。[18] D. Li-Bland，E. Meinrenken。《Courant 锚丛与 Poisson 几何》。 *Int. Math. Res. Not.* **11** (2009)，2106—2145。

[19] *J. Differential Geom.* **45** 1997 547 574

[20] *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*

Z. Liu，A. Weinstein，P. Xu。《李双锚丛的 Manin 三元组》。( )，– K. Mackenzie，。伦敦数学会讲义系列，213。剑桥大学出版社，剑桥，(2005)。[21] F. Magri，C. Morosi。《通过 Poisson-Nijenhuis 流形理论对可积哈密顿系统进行几何刻画》。 *Quaderno*， *University of Milan*，19 (1984)。[22] J. Rawnsley。《向量丛中的平坦偏联络与全纯结构》，( )，–。[23] D. Roytenberg。《分次辛超流形与 Courant 代数丛的结构》。 *Quantiza-tion, Poisson brackets and beyond (Manchester, 2001)*，169–185， *Contemp. Math.*，315， *Amer. Math. Soc. Providence RI* 2002 ，，。

[24] D. Roytenberg。《拟李双锚丛与扭曲 Poisson 流形》。 *Lett. Math. Phys.*。61 (2022)，123–137。[25] P. Severa。《致 Alan Weinstein 关于 Courant 锚丛的信》。 *arXiv:1707.00265* 。[26] P. Severa，A. Weinstein。《具有 3-形式背景的 Poisson 几何》。载于《非交换几何与弦理论》（横滨，2001） *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*。144 (2001)，145—154。

[27] M. Sti´enon，P. Xu。《泊松拟 Nijenhuis 流形》。 *Commun. Math. Phys.* **270** (2007)，709—725。

IMPA, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, 22460-320, Brazil .
Email address: henrique@impa.br

Departamento de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Caixa Postal 68530, Rio de Janeiro, RJ, 21941-909, Brasil.*Email address*: drummond@im.ufrj.br

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Rua do Matão 1010, CidadeUniversitária, 05508-090 São Paulo, Brasil.*Email address*: cnetto@ime.usp.br